$$\sigma\nabla^2 G = \frac{\partial G}{\partial \sigma}$$

Následující sekce je rozbor problému pro studijní účely. Důkaz vztahu se nalézá na konci dokumentu.

Rozbor

Co je G:

G je konvoluční operátor používaný k „zjemňování“ obrázků. Je daný

$$G(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

x a y zkrátka označují „squared“ vzdálenosti daného pixelu od začátku obrázku. σ nám zde označuje hodnotu standardní deviace Gaussovské (normální) distribuce.

Samotný Gaussovský filtr nám dá „impulse response“:

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-af^2}$$

Což nám ovšem dá časové vyjádření, je proto potřeba response pomocí Fourierovy transformace převést na frekvenční response:

$$e^{-\pi^2 \frac{x^2 \sim f^2}{a}}$$

f jsme zahrnuli pouze aby bylo zjevné že lze provést i pro vícedimenzionální funkce*

To je ale stále spojitá hodnota, neboť pixely jsou diskrétní hodnoty, je vhodnější uvážit standardní deviaci naší frekvence pomocí parametru σ:

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}}$$

Přičemž a jsme zde nahradili funkcí standardní deviace a standardní deviace frekvenční domény:

$$\sigma\sigma = \frac{1}{2\pi}$$

Co je ∇^2:

∇^2 je Laplacovský operátor. Pro danou funkci:

$$\nabla^2 f = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

A tedy v našem případě:

$$\frac{\partial^2}{x^2} + \frac{\partial^2}{y^2}$$

A tedy:

$$\nabla^2 G = \frac{\partial^2}{x^2} + \frac{\partial^2}{y^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^6} * (x^2 + y^2 - 2\sigma^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{x^2}{2\pi\sigma^6} + \frac{y^2}{2\pi\sigma^6} - \frac{2\sigma^2}{2\pi\sigma^6}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$
$$= \frac{1}{\pi\sigma^4}\left(\frac{x^2 + y^2}{2\pi\sigma^6}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Důkaz tvrzení:

Víme, že

$$\sigma^2\nabla^2 G = \frac{\partial^2}{x^2} + \frac{\partial^2}{y^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^6} * (x^2 + y^2 - 2\sigma^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\pi\sigma^4}\left(\frac{x^2 + y^2}{2\pi\sigma^6} - 1\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Vynásobíme-li σ, získáme

$$\frac{1}{2\pi\sigma^5} * (x^2 + y^2 - 2\sigma^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\pi\sigma^3}\left(\frac{x^2 + y^2}{2\pi\sigma^5} - 1\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Stačí nám tedy provést $\frac{\partial G}{\partial \sigma}$ a uvidíme, zdali se dopracujeme ke stejnému výsledku:

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} * \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma}\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{2\pi} * \left(-2\sigma^{-3}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\right) + \frac{\partial G}{\partial \sigma}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$
$$= \frac{1}{2\pi} * \left(-2\sigma^{-3}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\right) + e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\frac{\partial G}{\partial \sigma} - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi} * \left(-2\sigma^{-3}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\right) + e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} * \frac{x^2 + y^2}{\sigma^3} * \frac{1}{z^2}$$
$$= -\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}}{\pi\sigma^3} + \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(x^2 + y^2)}{2\pi\sigma^5} = \left(\frac{(x^2 + y^2)}{2\pi\sigma^5} - \frac{1}{\pi\sigma^3}\right) * e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$
$$= \frac{1}{\pi\sigma^3}\left(\frac{(x^2 + y^2)}{2\pi\sigma^5} - 1\right) * e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

A vztah tedy drží.