Física Mecânica

2016/17

Natércia Lima

Análise Dimensional

- Para que serve?
  - Determinação da Dimensão de uma Grandeza
  - Verificação da homogeneidade das equações
  - Previsão de Equações
  - Mudança de Sistemas de Unidades

Princípio da homogeneidade dimensional:

Qualquer expressão que represente um fenómeno físico terá que ser dimensionalmente homogénea

qq. expressão dimensionalmente homogénea pode ser adimensionalizada (compactada) sem perda de informação

Dimensão de uma Grandeza Mecânica

$$[v] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$$

- L para comprimento
- M para massa
- T para tempo

As dimensões de uma grandeza derivada determinam-se mediante substituições na equação de definição respectiva.

<u>Exemplo</u>: velocidade

Equação de definição $v = l/t$

Dimensão $L/T = L\,T^{-1}$

Dimensão de uma Grandeza

- Qualquer grandeza G pode ser expressa em função de outras grandezas base que com ela se relacionem:

$$\dim G = [G] = A^x B^y C^z$$

  - A,B,C dimensões das grandezas base
  - x, y, z expoentes adimensionais

- Grandeza Adimensional (x=y=z=0)
- Grandezas com a mesma dimensão podem ter significados físicos distintos (trabalho, energia)

Determinação da Dimensão de uma Grandeza

- Utilizando a equação de definição, podemos determinar a dimensão de qualquer grandeza

  - Dimensão da Massa Volúmica?

$$\rho = \frac{m}{V}, então [\rho] = \frac{[m]}{[V]} \Leftrightarrow [\rho] = \frac{M}{L^3} = L^{-3}M$$

  - Dimensão da Força?

$$F = ma, então [F] = [m][a] \Leftrightarrow [F] = MLT^{-2}$$

Verificação da homogeneidade das equações

- Equação correta deve ser dimensionalmente homogénea (*dim 1º membro = dim 2º membro)*

  - Útil quando existem dúvidas sobre a forma de uma expressão

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ou} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

  - Uma equação homogénea não é necessariamente fisicamente correta

Previsão de Equações (1)

- A grandeza G está relacionada com as grandezas A, B e C, a menos de uma constante adimensional K:

$$G = KA^{x}B^{y}C^{z}$$

- Dedução da expressão da velocidade de uma partícula à custa da aceleração e espaço percorrido (a menos de K)

$$v = f(a,s) \Rightarrow v = Ka^{x}s^{y}$$

dimensões das grandezas:

$$[v] = LT^{-1}; [a] = LT^{-2}; [s] = L$$

Previsão de Equações (2)

Precisámos de determinar x e y. Como a fórmula é homogénea, a dimensão do primeiro membro é igual à do segundo. Vem:

$$LT^{-1} = (LT^{-2})^{x}(L)^{y} \Leftrightarrow LT^{-1} = L^{x+y}T^{-2x}$$

Como os expoentes de L e T devem ser os mesmos nos dois membros:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{v = K\sqrt{as}}$$

Mudança de Sistemas de Unidades (1)

- As equações de definição das grandezas só podem usar-se, com todas as grandezas expressas no mesmo sistema de unidades.
- Exemplo: determinar a relação entre erg e Joule

Trabalho:

$$[W] = L^2 M T^{-2}$$

No SI: $1J = 1m^2 \times 1Kg \times 1s^{-2}$

No CGS: $1erg = 1cm^2 \times 1g \times 1s^{-2}$

Mudança de Sistemas de Unidades (2)

Logo:

$$\frac{1J}{1erg} = \left(\frac{1m}{1cm}\right)^2 \left(\frac{1Kg}{1g}\right)\left(\frac{1s}{1s}\right)^{-2} \Leftrightarrow \frac{1J}{1erg} = \left(\frac{10^2\,cm}{1cm}\right)^2 \left(\frac{10^3\,g}{1g}\right)\left(\frac{1s}{1s}\right)^{-2}$$

$$\frac{1J}{1erg} = 10^4 \times 10^3 \times 1 = 10^7$$

$$\boxed{1J = 10^7\,erg}$$

Constantes à parte…

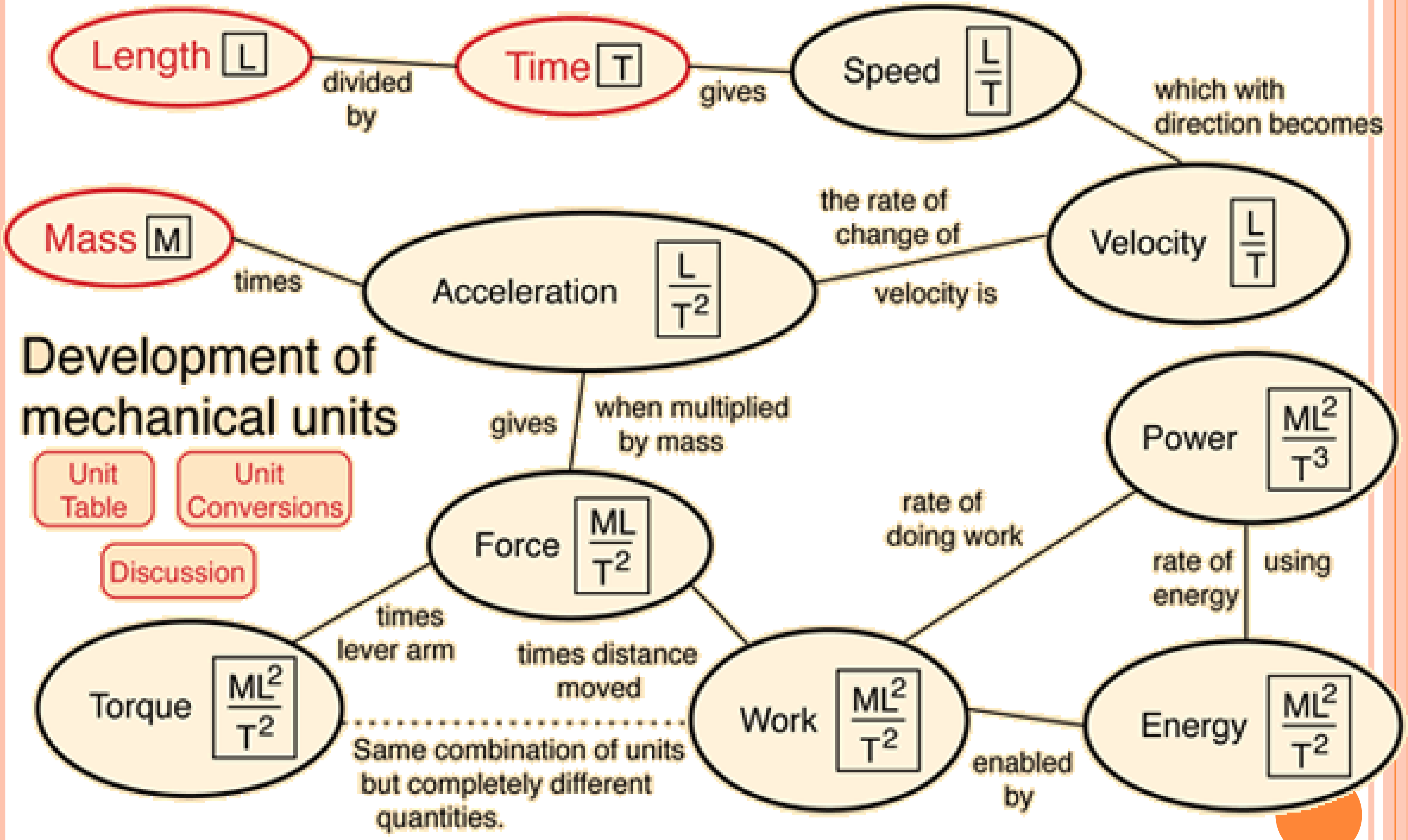
Quais das seguintes quantidades são adimensionais?

- 60^o?
- e^{68}?
- log(0,02)?
- π?
- y^x?

Quando é que a constante “k” tem dimensão?

- sen(k)?
- tg(kx)?
- 10^{kt}?
- $g\text{-}ke^w$?
- Sendo h a constante de Plank (Js), f a frequência e T a temperatura absoluta

$$e^{\frac{hf}{kT}} - 1$$


Length L
divided by
Time T
gives
Speed L/T
which with direction becomes
Velocity L/T
the rate of change of velocity is
Mass M
times
Acceleration L/T²
Development of mechanical units
Unit Table
Unit Conversions
Discussion
gives
when multiplied by mass
Force ML/T²
Power ML²/T³
rate of doing work
rate of energy
using
times lever arm
times distance moved
Torque ML²/T²
Work ML²/T²
Energy ML²/T²
Same combination of units but completely different quantities.
enabled by

Aplicações

- Que dimensões teriam de ter ***a*** e ***b*** na seguinte equação física?

$$F = a + bt$$

Aplicações

Na expressão $x = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$, x é um comprimento e t é um tempo. Quais as dimensões das outras grandezas (A, α, ω e ϕ)?

$[x] = \mathrm{L} \Rightarrow [A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)] = \mathrm{L}$

$[e^{-\alpha t}] = 1$ e $[\cos(\omega t + \phi)] = 1 \Rightarrow [A] = \mathrm{L}$

$[t] = \mathrm{T}$ e $[-\alpha t] = 1$ (argumento de uma exponencial) $\Rightarrow [\alpha] = \mathrm{T}^{-1}$

$[(\omega t + \phi)] = 1$ (argumento de um cos) $\Rightarrow [\omega t] = 1$ e $[\phi] = 1$

$[t] = \mathrm{T}$ e $[\omega t] = 1 \Rightarrow [\omega] = \mathrm{T}^{-1}$