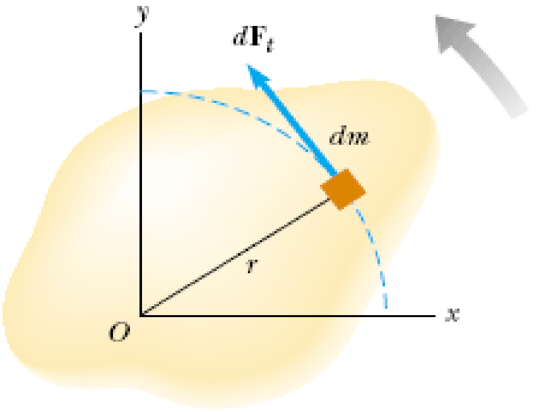
Física Experimental

- Rotação -

Energia de Rotação

2ª Lei de Newton para a Rotação

2ª Lei de Newton para a rotação



→ corpo rígido com movimento de rotação em torno de um eixo, sob a acção de uma força **F** de componentes $\mathbf{F}_t$ e $\mathbf{F}_r$.

→ para o elemento infinitesimal de massa ***dm***:

$$dF_t = (dm)\,a_t$$
$$d\tau = r\,dF_t = a_t r\,dm = \alpha r^2\,dm$$

→ para todo o corpo rígido, é necessário calcular o integral:

$$\sum \tau = \int \alpha r^2\,dm = \alpha \int r^2\,dm$$

$\int r^2\,dm$ → momento de inércia ***I*** do corpo

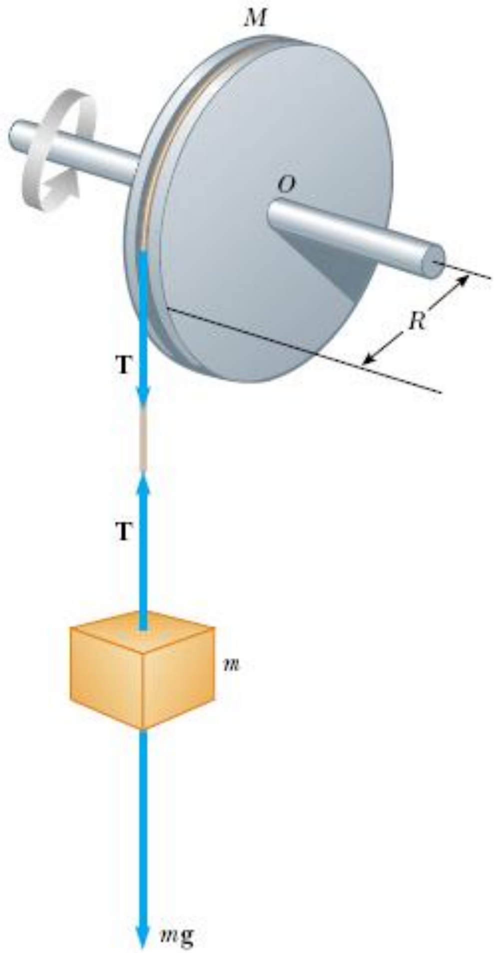
→ O momento resultante sobre um corpo é igual ao produto do momento de inércia do corpo pela sua aceleração angular:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Aplicação – 2ª Lei de Newton para a rotação (1)

Uma roldana de raio *R*, massa *M* e momento de inércia *I*, pode rodar sem atrito em torno de um eixo horizontal. Um fio inextensível e de massa desprezável, enrolado à roldana, suspende um corpo de massa *m*.

Qual a aceleração angular da roldana? E a aceleração linear do corpo suspenso? Qual a tensão no fio?



$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

$$\alpha = \frac{TR}{I}$$

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

$$a = \frac{mg - T}{m}$$

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

$$T = \boxed{\frac{mg}{1 + (mR^2/I)}}$$

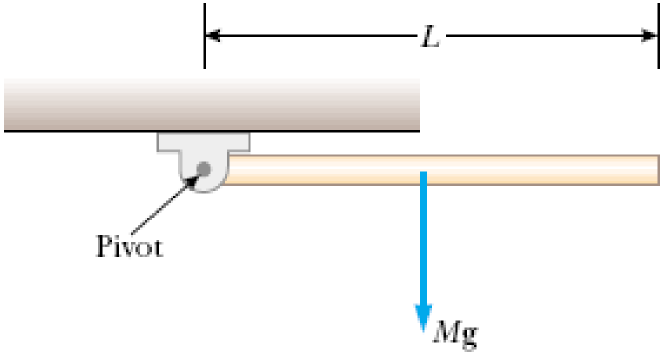
$$a = \boxed{\frac{g}{1 + (I/mR^2)}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \boxed{\frac{g}{R + (I/mR)}}$$

Aplicação – 2ª Lei de Newton para a rotação (2)

Uma barra uniforme de comprimento *L*, massa *M* e momento de inércia *I*, pode rodar sem atrito no plano vertical, em torno de um eixo horizontal fixo a uma das suas extremidades. A barra é largada em repouso na posição horizontal.

Qual a aceleração angular inicial da barra? E a aceleração linear da extremidade direita da barra?



$$\Sigma\tau = I\alpha$$

$$\tau = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$I = \tfrac{1}{3}ML^2$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \boxed{\frac{3g}{2L}}$$

$$a_t = r\alpha = L\alpha = \boxed{\tfrac{3}{2}g}$$

Energia cinética de rotação

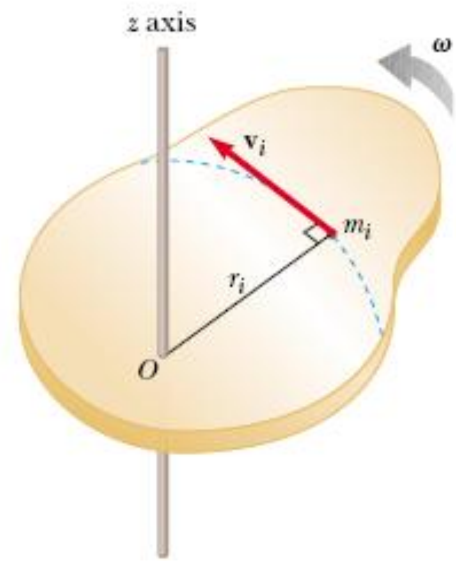
→ Qual a energia cinética de um corpo rígido com movimento de rotação em torno de um eixo fixo?

$$E_C^{sist} = \sum_{i=1}^{n} E_C^i = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$v = \omega r \Rightarrow E_C^{sist} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$\boxed{E_C^{sist} = \tfrac{1}{2} I \omega^2}$$



→ Quando o movimento do corpo rígido é um movimento de rotação em torno de um eixo, a E_C pode ser calculada conhecidos o momento de inércia relativamente a esse eixo e a velocidade angular.

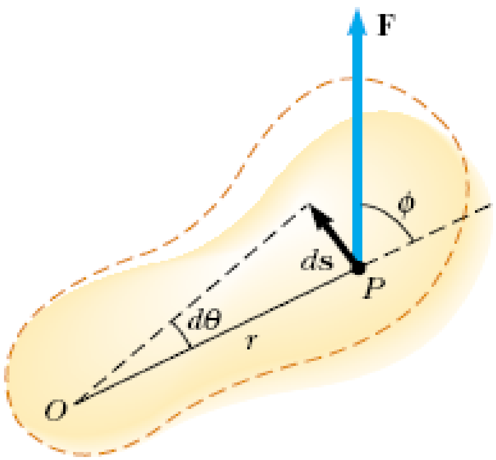
→ Semelhança entre as expressões da E_C para a rotação e translacção ($m, v \rightarrow I, \omega$), mas ao contrário da massa, o momento de inércia não é uma característica do corpo...

Potência

→ Quando se provoca rotação num corpo por acção de uma força **F**, o trabalho que esta realiza sobre o corpo num deslocamento infinitesimal *d***s**, é:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F \sin \phi) r \, d\theta$$

$$dW = \tau \, d\theta$$



→ A taxa temporal de realização de trabalho, ou de transferência de energia para o corpo, é:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

→ Assim, a potência resultante da aplicação da força **F** é dada por:

$$P = \tau\omega$$

Nota: o teorema do trabalho-E_C estudado para a translacção é válido também para o movimento de rotação.

Rotação vs. translacção

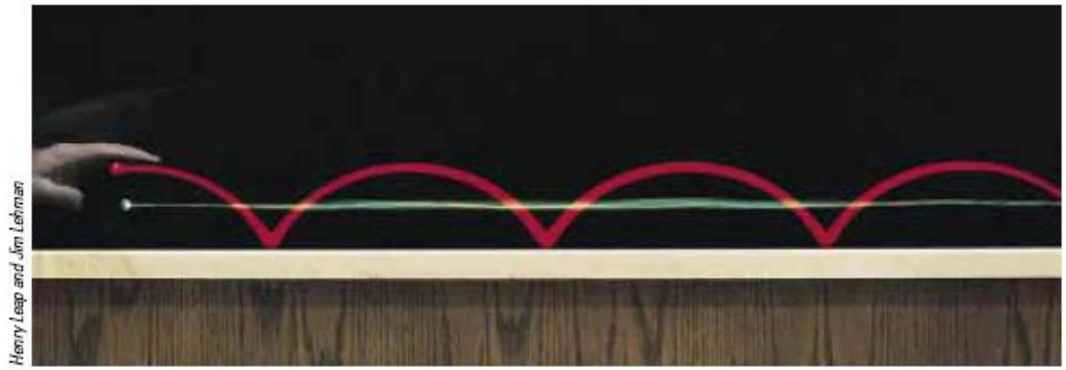
Movimento Linear		Movimento Rotação	
Força	$\vec{F}$	Momento	$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}_t$
Massa	m	Momento de inércia	$I = \int r^2 dm$
Trabalho	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Trabalho	$dW = M \cdot d\theta$
Energia cinética (translação)	$Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	Energia cinética (rotação)	$Ec = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$
Potência	$P = F \cdot v$	Potência	$P = M \cdot \omega$

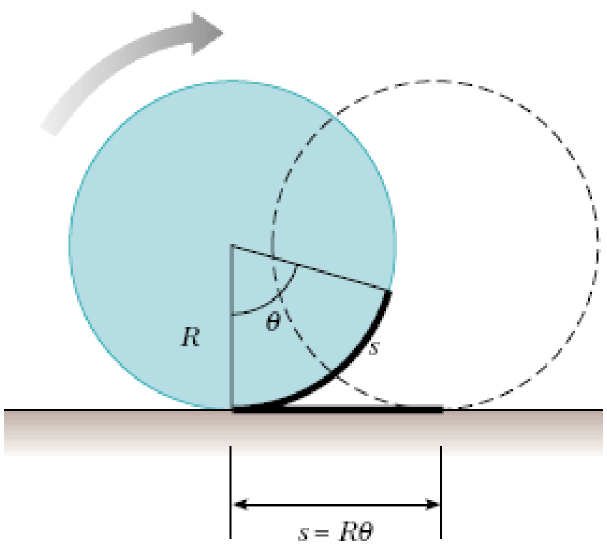
Rotação vs. translacção

Rotational Motion About a Fixed Axis	Linear Motion
Angular speed $\omega = d\theta/dt$	Linear speed $v = dx/dt$
Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$	Linear acceleration $a = dv/dt$
Net torque $\Sigma\tau = I\alpha$	Net force $\Sigma F = ma$
If α = constant $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha_t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	If a = constant $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Work $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta$	Work $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$
Rotational kinetic energy $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy $K = \frac{1}{2}mv^2$
Power $\mathcal{P} = \tau\omega$	Power $\mathcal{P} = Fv$

Objectos rolantes – sem deslizamento (1)

→ Cilindro a rolar sem deslizar – rolamento puro (ponto de luz vermelho num extremo e ponto de luz verde no centro)





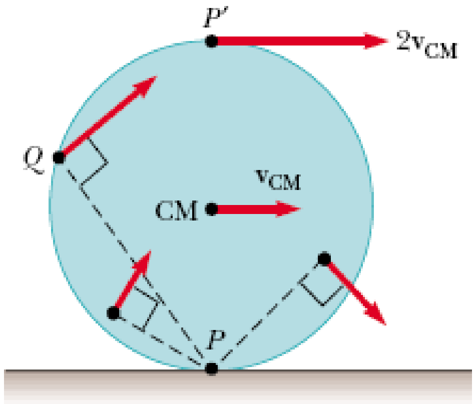
→ Quando o cilindro roda um ângulo θ, o seu centro (CM se for uniforme) desloca-se de uma distância $s=R\theta$. Então, a velocidade e aceleração do CM do cilindro são:

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

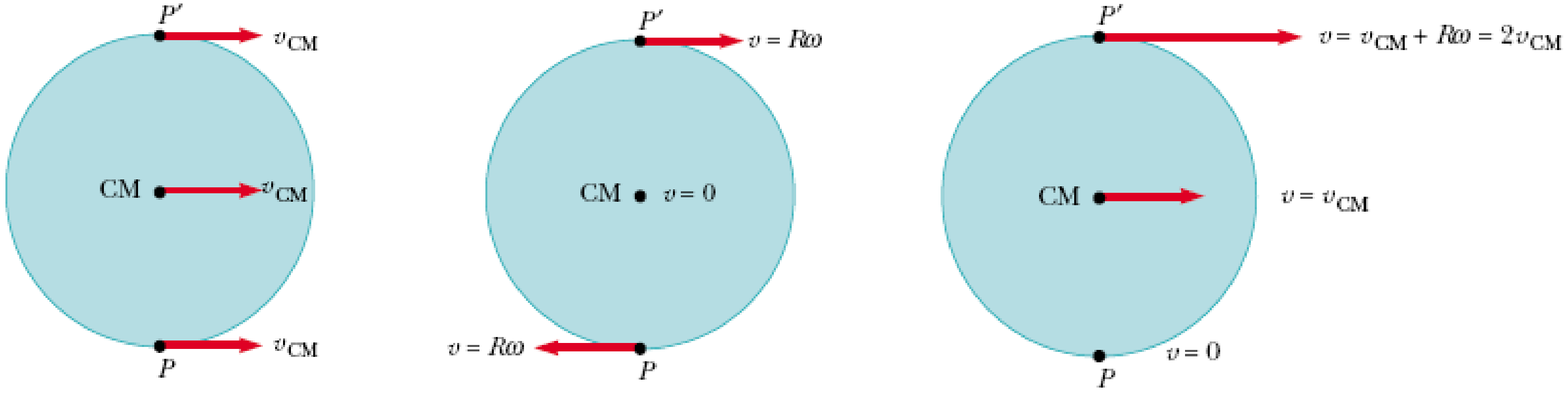
$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Objectos rolantes – sem deslizamento (2)

→ Cilindro a rolar sem deslizar – todos os pontos têm uma velocidade instantânea perpendicular à linha que os une ao ponto de contacto com a superfície, *P*.

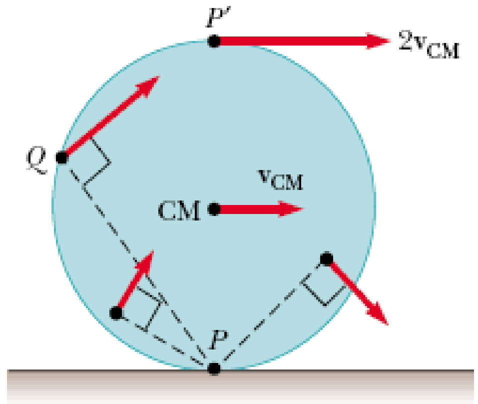


→ O movimento de rolamento puro pode ser entendido como a composição de uma translação com $v=v_{CM}=R\omega$ e uma rotação em torno do CM com velocidade angular ω.



Objectos rolantes – sem deslizamento (3)

→ Cilindro a rolar sem deslizar – todos os pontos têm uma velocidade instantânea perpendicular à linha que os une ao ponto de contacto com a superfície, *P*.



→ Instantaneamente, todos os pontos do cilindro descrevem um movimento de rotação em torno de um eixo que passa por *P*...

$$
\begin{aligned}
E_C^{sist} &= \tfrac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad \hookleftarrow (I_P = I_{CM} + MR^2) \\
&= \tfrac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2\omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2
\end{aligned}
$$

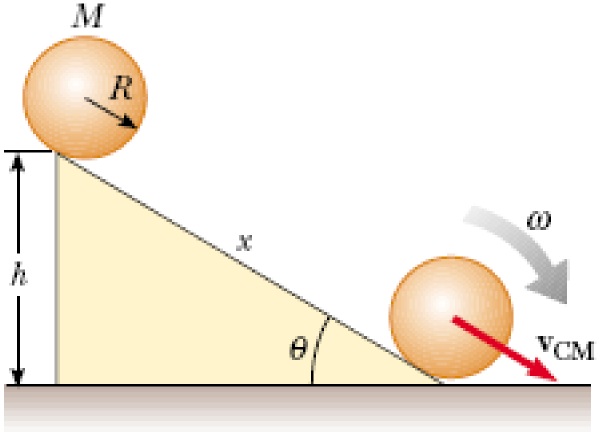
$$
\boxed{
\begin{aligned}
E_C^{sist} &= \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_C^{sist,CM} \\
&= E_{C_T}^{sist} + E_{C_R}^{sist}
\end{aligned}
}
$$

→ A E_C total é a soma da E_C de translacção do CM com a E_C de rotação em torno do CM

Aplicação – conservação da E_m no rolamento puro

Uma esfera uniforme de raio *R*, massa *M* e momento de inércia *I*, depois de abandonada em repouso no topo de um plano inclinado, rola sem deslizar até à base do plano.

Qual a velocidade do CM da esfera quando atinge a base do plano?



$$v_{CM} = R\omega$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}{}^2$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) v_{CM}{}^2$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) v_{CM}{}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (I_{CM}/MR^2)}\right)^{1/2}$$

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (\frac{2}{5}MR^2/MR^2)}\right)^{1/2}$$

$$= \boxed{\left(\frac{10}{7} gh\right)^{1/2}}$$

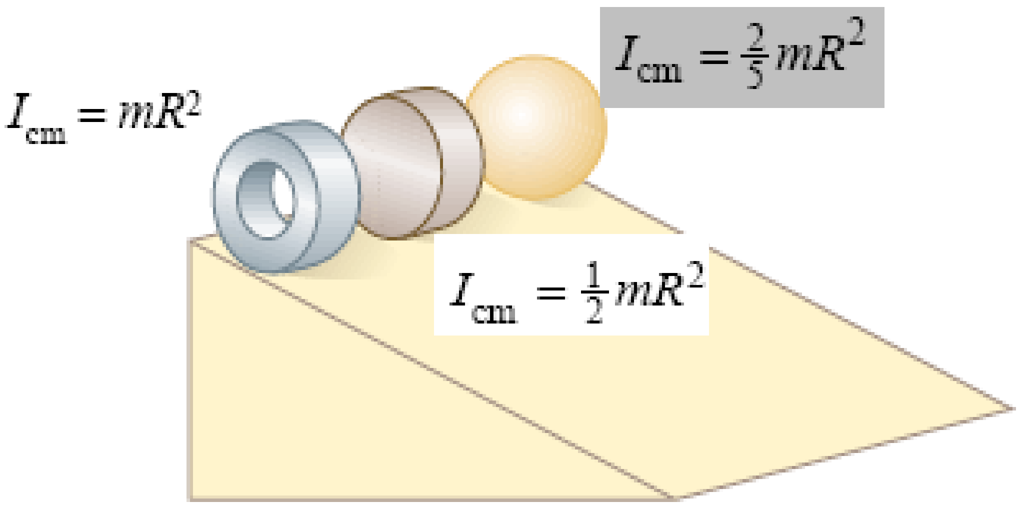
$$h \doteq x \sin\theta$$

$$v_{CM}{}^2 = \frac{10}{7} gx \sin\theta$$

Aplicação – corrida de sólidos

Uma esfera, um cilindro maciço e um cilindro oco, todos uniformes de raio R e massa m são abandonados em repouso no topo de um plano inclinado e rolam sem deslizar até à base do plano.

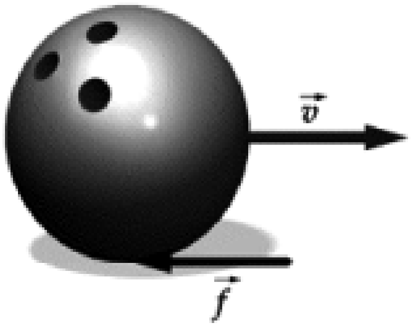
Qual a ordem de chegada dos sólidos à base do plano?



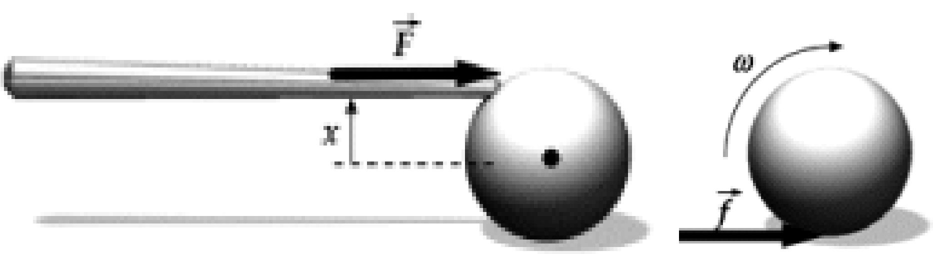
Objectos rolantes – com deslizamento

Em determinadas condições, um objecto pode deslizar enquanto rola, e nesses casos não se verifica a condição $v_{CM}=\omega R$ – de rolamento puro... Nem conservação da Em, uma vez que o trabalho da força de atrito não é nulo.

Se o objecto for lançado e tocar a superfície sem rotação inicial, a força de atrito cinético, vai diminuír v_{CM} e aumentar ω até que se estabeleça a condição de rolamento puro – ex.: lançamento de uma bola de bowling.



Se uma bola de bilhar for posta a rolar para a frente com uma tacada superior, a força de atrito cinético vai aumentar v_{CM} e diminuir ω até que $v_{CM}=\omega R$.



Aplicação - Objectos rolantes com deslizamento

Uma bola de bowling de massa M e raio R é lançada de tal forma que no momento em que toca na pista não está a rolar, mas tem uma velocidade horizontal de 5m/s. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a superfície da pista tem o valor 0.08.

Durante quanto tempo é que a bola rola com deslizamento?

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$f_k = -\mu_k Mg = Ma_{cm}$$

$$a_{cm} = -\mu_k g$$

$$v_{cm} = v_0 + a_{cm}t = v_0 - \mu_k gt$$

$$\tau = \mu_k MgR = I_{cm}\alpha$$

$$\alpha = \frac{\mu_k MgR}{I_{cm}} = \frac{\mu_k MgR}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{5}{2}\left(\frac{\mu_k g}{R}\right)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \frac{5}{2}\left(\frac{\mu_k g}{R}\right)t$$

$$v_{cm} = v_0 - \mu_k g t_1 = R\omega = \frac{5}{2}\mu_k g t_1$$

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_k g} = \frac{2(5\text{ m/s})}{7(0.08)(9.81\text{ m/s}^2)} = 1.82\text{ s}$$