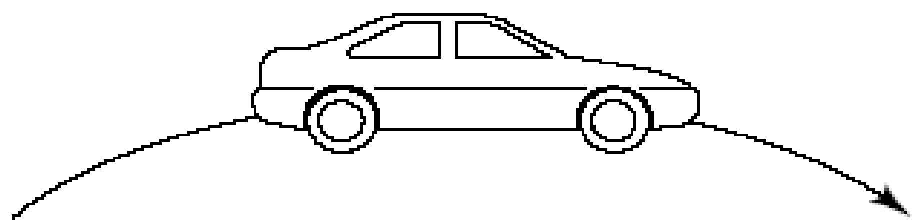
Movimento Curvilíneo e Circular

FISMEC 2016 -17

Curva Perigosa…



Um carro faz uma curva mantendo a velocidade constante. Qual é a força que está a actuar sobre o carro?

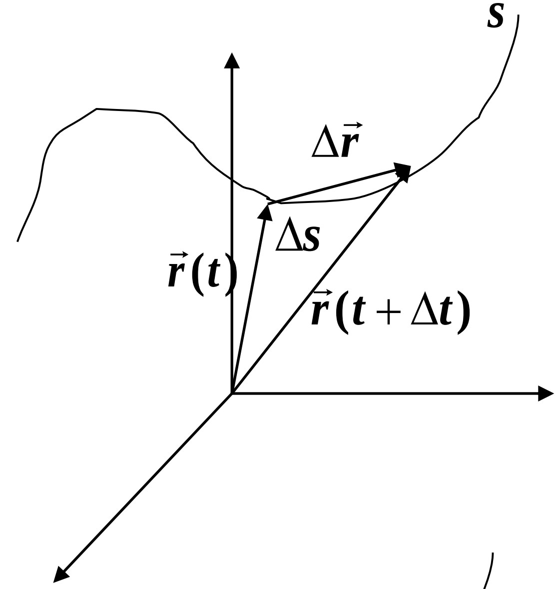
A. Não há, pois a velocidade é constante?

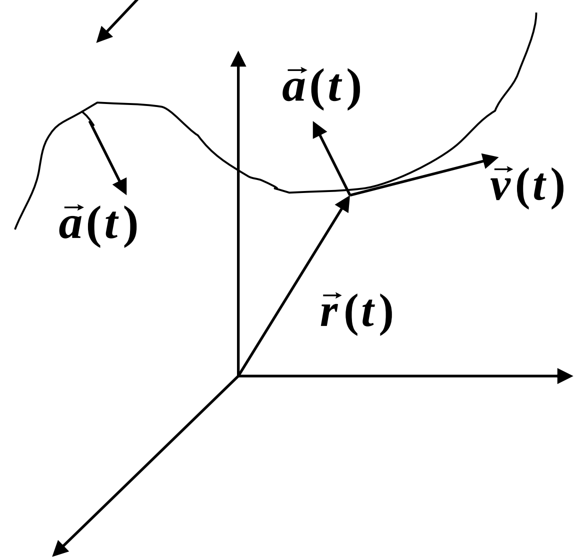
ou

B. Existe, uma vez que a trajectória não é rectilínea?

Características do Movimento Curvilíneo

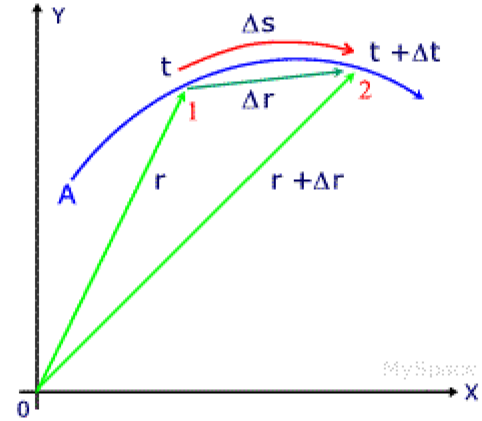
- Quando $\Delta t \to 0, \Delta \vec{r}$ aproxima-se da tangente à curva no ponto considerado, assim a velocidade é sempre tangente à trajetória.
- O vetor aceleração aponta sempre para dentro da curvatura





Pode ser descrito em vários sistemas de coordenadas.

Coordenadas Cartesianas



Vector posição:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Vector velocidade:

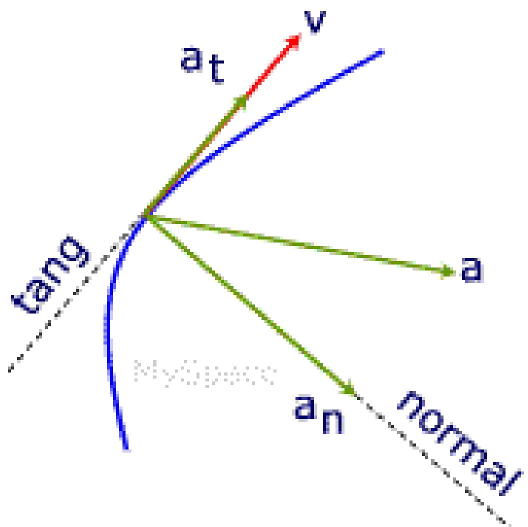
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

Aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

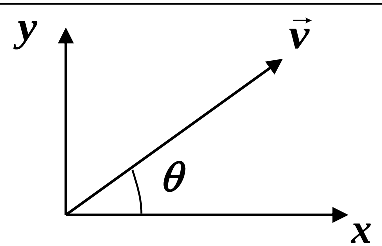
Coordenadas Tangentes e Normais

Úteis na maioria dos casos, devido à simplicidade de escrita do vector velocidade.



$$\begin{cases} t\text{- eixo tangente (sentido positivo: s crescente)} \\ n\text{- eixo normal (sentido positivo:centro de curvatura)} \\ (z\text{- eixo perpendicular aos anteriores}^{*}) \end{cases}$$

* *este último eixo poderá ser necessário*



$$\vec{v} = v\cos\theta\,\vec{i} + v sen\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \cos\theta\,\vec{i} + sen\theta\,\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_t = \cos\theta\,\vec{i} + sen\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_n = \cos(\theta + \pi/2)\vec{i} + sen(\theta + \pi/2)\,\vec{j} = -sen\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ (\vec{u}_z = \vec{k}) \end{cases}$$

Coordenadas Tangentes e Normais

Vector Velocidade $\vec{v} = v\vec{u}_t$

Vector Aceleração $\vec{a} = \dot{v}\,\vec{u}_t + v\,\dot{\vec{u}}_t$

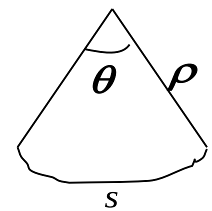
Neste caso temos de calcular a derivada do versor, uma vez que este varia no tempo:

$$\dot{\vec{u}}_t = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\,\vec{i} + sen\theta\,\vec{j}\right) = -\dot{\theta}\,sen\theta\,\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j} =$$

$$= \dot{\theta}\left(-sen\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right) = \dot{\theta}\,\vec{u}_n$$

?

Coordenadas Tangentes e Normais



$$s = \rho\theta$$

para a determinar:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

substituindo no vector aceleração:

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_t + v\dot{\vec{u}}_t$$

Ou seja,

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

Aceleração Tangencial e Normal

As componentes do vector aceleração chamadas de aceleração tangencial e normal:

$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n \text{ com } \begin{cases} \boxed{a_t = \dfrac{dv}{dt}} \\ \boxed{a_n = \dfrac{v^2}{\rho}} \end{cases}$$

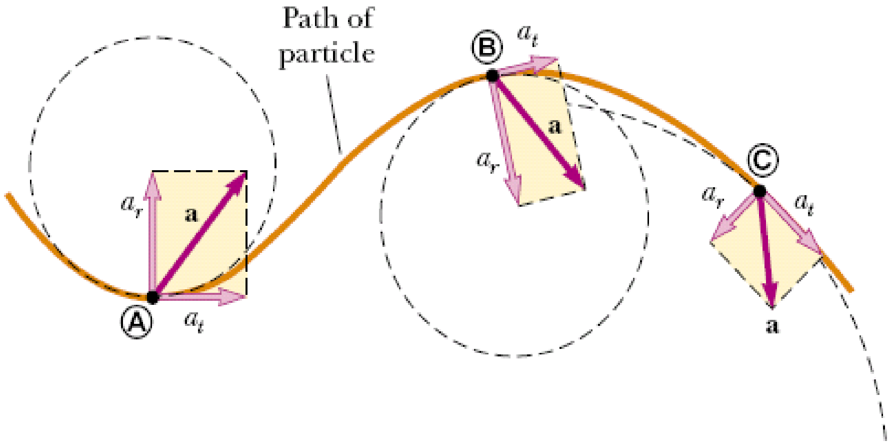
sendo $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Por outro lado, por definição de projecção de vectores:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_t} = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_t \\ \boldsymbol{a_n} = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{a}}_t = (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_t)\vec{\boldsymbol{u}}_t \\ \vec{\boldsymbol{a}}_n = (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_n)\vec{\boldsymbol{u}}_n \end{cases}$$

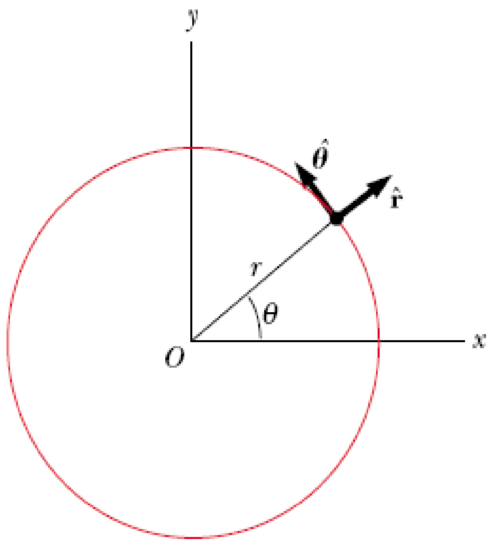
<u>Nota</u>: Se a trajectória for rectilínea $\rho \to \infty \Rightarrow a_n = 0$ e se o movimento for uniforme $v = cte \Rightarrow a_t = 0$

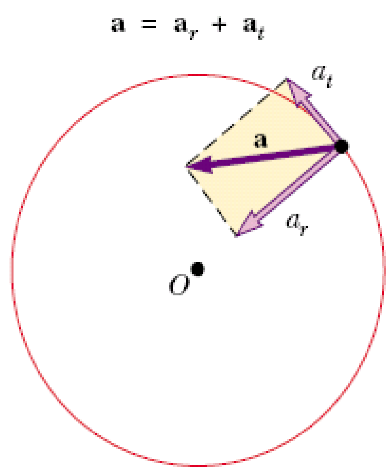
Aceleração Tangencial e Normal



- Movimento de uma partícula ao longo de uma trajectória curva
- Variação da velocidade em módulo - $a_t = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$
- Variação da velocidade em direcção - $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

Aceleração Tangencial e Normal





$$\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Movimento Circular

- O que é que se move mais rápido num carrossel?

O cavalo que está perto do exterior ou que está perto do centro?

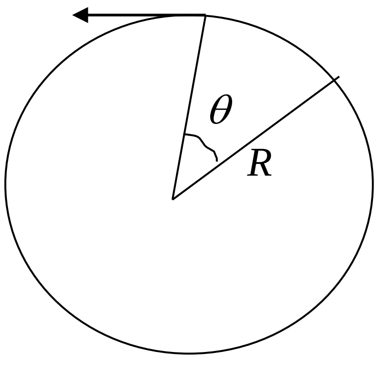
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}; v = \omega R$$

- Velocidade Linear - velocidade (v) - distância percorrida por unidade de tempo; maior no exterior de um objeto em rotação e menor no interior, perto do eixo de rotação.
- Velocidade Angular (ω) – refere-se ao número de rotações por unidade de tempo. Constante para qualquer ponto do objeto em rotação.

Movimento Circular

Sendo *s* a trajectória descrita:

$$s = R\theta \Rightarrow ds = Rd\theta$$



Velocidade angular: $w = \dfrac{d\theta}{dt}$

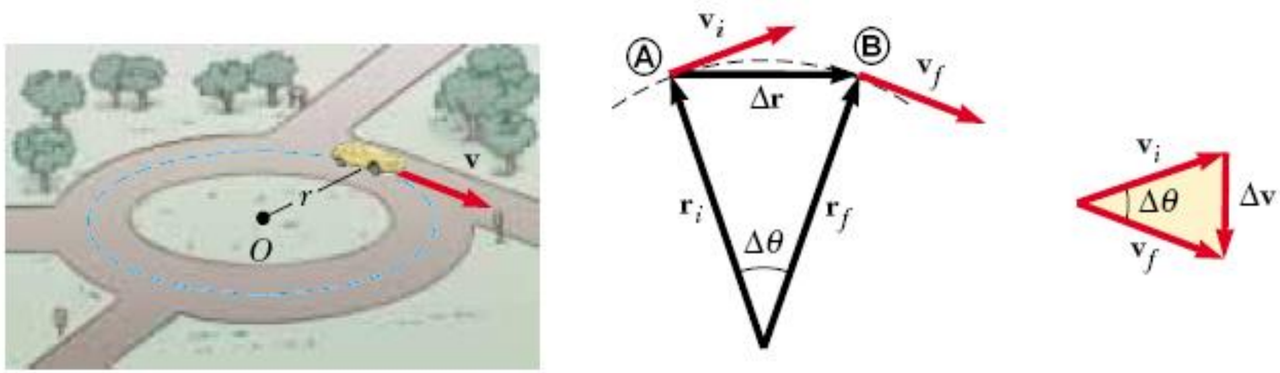
Aceleração angular: $\alpha = \dfrac{dw}{dt}$

Velocidade linear: $v = \dfrac{ds}{dt} = R\dfrac{d\theta}{dt} = Rw$

Aceleração tangencial linear: $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(Rw)}{dt} = R\alpha$

Aceleração normal linear: $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{R^2w^2}{r} = Rw^2$

Movimento Circular Uniforme



(a) (b) (c)

- Velocidade linear (escalar) constante
- Vector velocidade sempre tangente à trajectória
- Aceleração só tem componente normal (centrípeta): perpendicular à trajectória e dirigida para o centro

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

Movimento Circular Uniforme

Um automóvel percorre uma estrada circular com movimento uniforme. Pode-se concluir que:

A. A sua velocidade vectorial é constante?

B. A sua aceleração tangencial é nula?

C. A sua aceleração normal tem módulo constante?

D. A sua aceleração vectorial resultante é nula?

Movimento Circular uniformemente variado

- À semelhança do movimento retilíneo, temos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

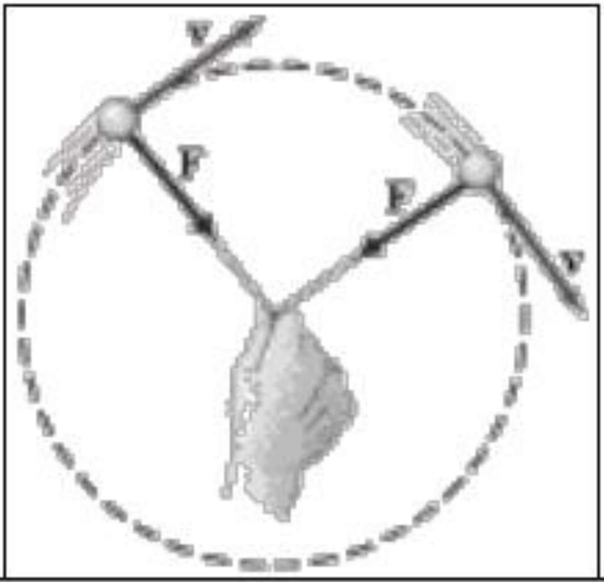
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Força normal e aceleração normal

Aplicando a 2ª lei de Newton nessa direção...

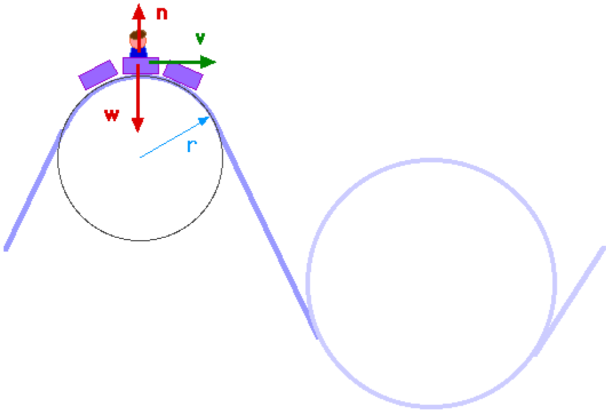


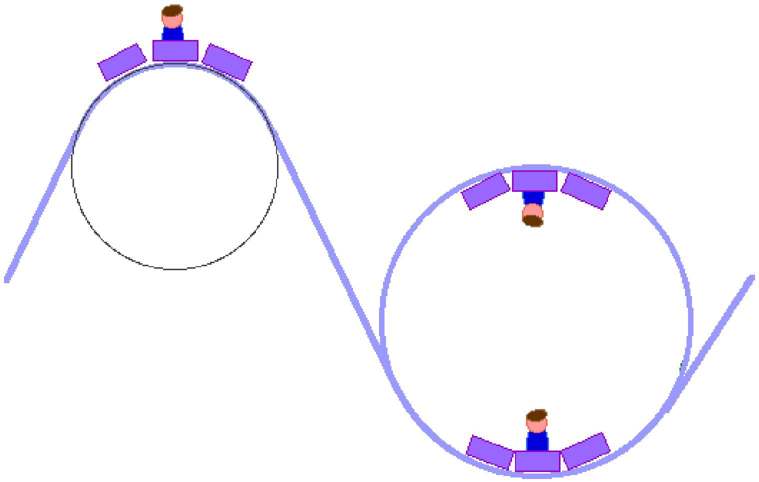
$$\sum F_n = m \cdot a_n \Leftrightarrow \sum F_n = m\frac{v^2}{r}$$

Montanha Russa

Quais são as forças envolvidas?

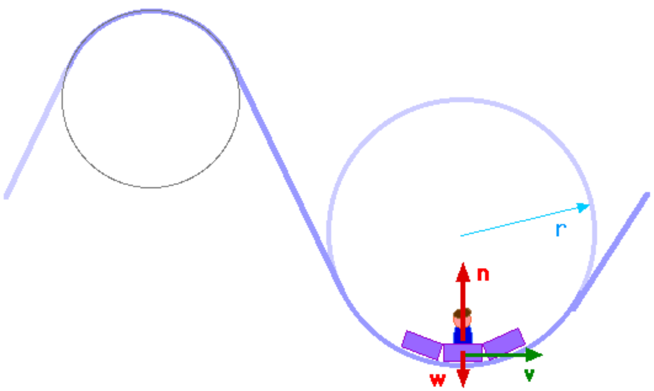
Quando a acção sobre pista é maior?



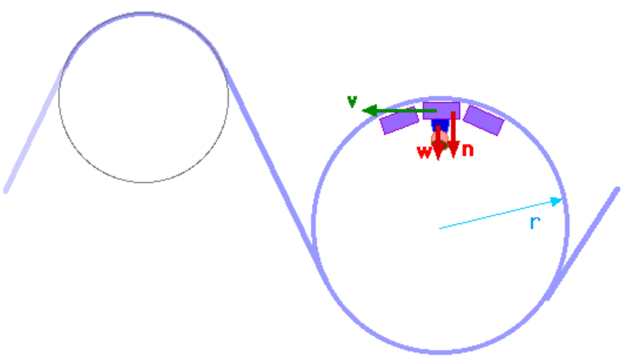


$$\sum F_n = ma_n \Leftrightarrow P - R_N = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow R_N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$$

Montanha Russa



$$\sum F_n = ma_n \Leftrightarrow -P + R_N = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow R_N = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right)$$



$$\sum F_n = ma_n \Leftrightarrow P + R_N = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow R_N = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right)$$