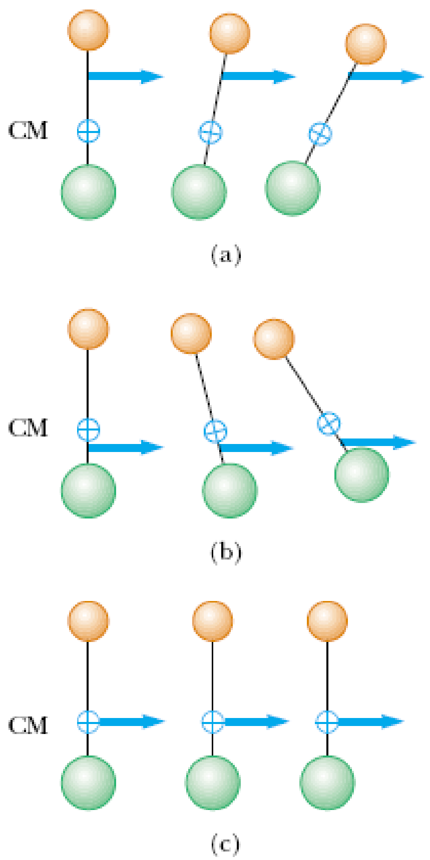
Física Experimental

Sistemas de Partículas e Conservação do Momento Linear

ISEP 2016/17 - 1ºsemestre

Centro de massa - Sistema de Partículas (1)



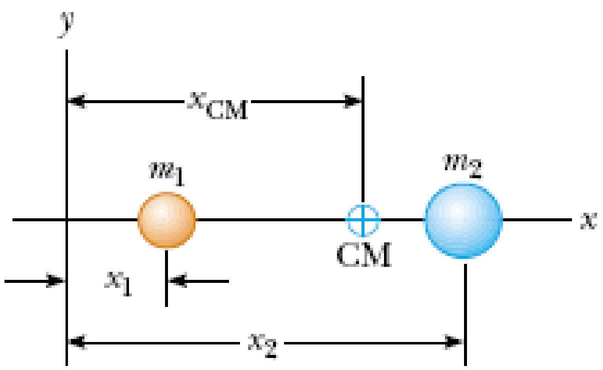
<u>Sistema</u>: duas partículas de massas diferentes unidas por uma barra de massa desprezável

Se aplicarmos uma força perpendicular à barra num determinado ponto desta, o conjunto move-se como um todo na direcção e sentido da força aplicada – (c). A mesma força, aplicada em qualquer outro ponto, provoca também uma rotação – (a) e (b).

O sistema move-se, em (c), sob a ação da força aplicada, como se toda a sua massa estivesse concentrada no ponto de aplicação da força – Centro de Massa (CM) do sistema.

Centro de massa – Sistema de Partículas (2)

Centro de massa de um sistema de duas partículas (1D)



Sistema: duas partículas de massas diferentes unidas por uma barra de massa desprezável.

Localização do CM: sobre a linha que une as duas partículas, mais próximo da partícula de maior massa:

$$\boxed{x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$$

Centro de massa – Sistema de Partículas (3)

Generalização: *n* partículas, 3D

Coordenada *x* do CM: $$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M}$$

Coordenadas *y* e *z* do CM: $$y_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_iy_i}{M} \qquad z_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_iz_i}{M}$$

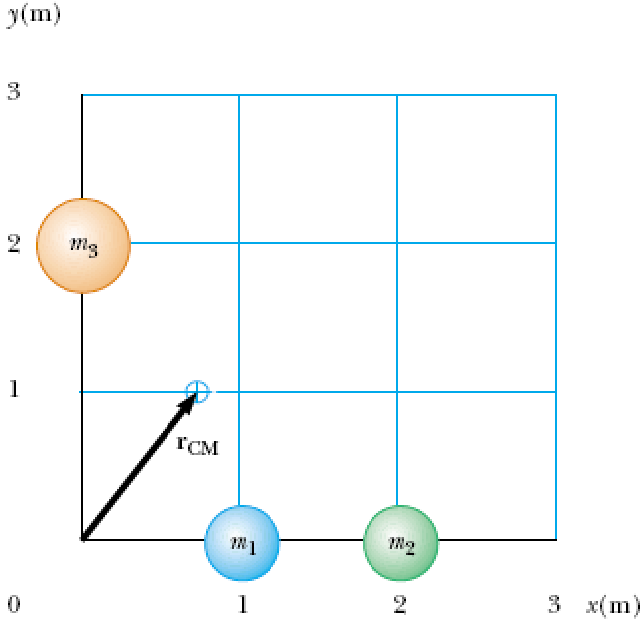
Vector posição do CM: $$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\sum_i m_ix_i\hat{\mathbf{i}} + \sum_i m_iy_i\hat{\mathbf{j}} + \sum_i m_iz_i\hat{\mathbf{k}}}{M}}$$

ou seja, $$\boxed{\mathbf{r}_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M}}$$ com $$\mathbf{r}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

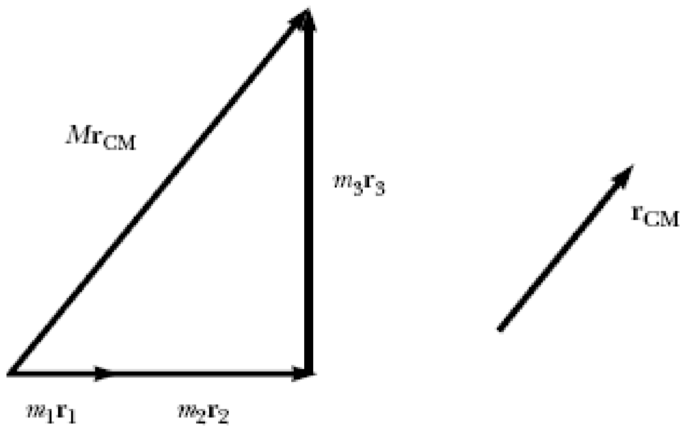
Nota: $M \equiv \sum_i m_i$ é a massa total do sistema.

Aplicação – sistema de partículas (1)

Supondo que m_1=m_2=1kg e que m_3=2kg, quais as coordenadas cartesianas da localização do centro de massa do sistema constituído pelas três partículas?



Geometricamente:



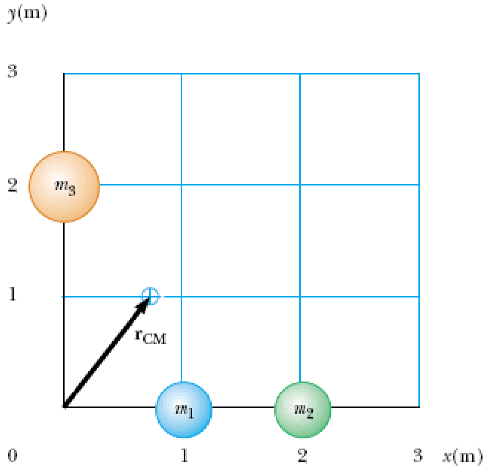
Aplicação – sistema de partículas (2)

Analiticamente:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(1.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (2.0\text{ kg})(0)}{1.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg} + 2.0\text{ kg}}$$

$$= \frac{3.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 0.75\text{ m}$$

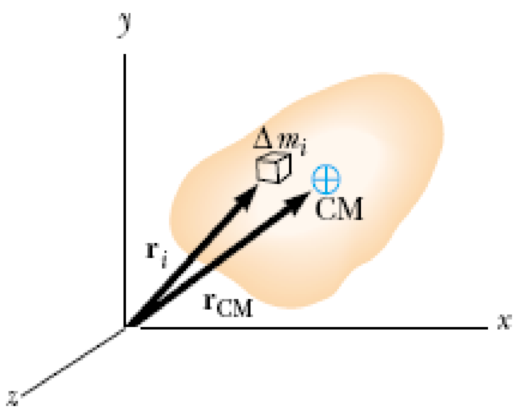


$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1.0\text{ kg})(0) + (1.0\text{ kg})(0) + (2.0\text{ kg})(2.0\text{ m})}{4.0\text{ kg}} = \frac{4.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 1.0\text{ m}$$

$$z_{CM} = 0$$

$$\mathbf{r}_{CM} \equiv x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} = \boxed{(0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\text{ m}}$$

Centro de massa – Objecto contínuo



Objecto Contínuo (aproximação) – sistema constituído por um número muito elevado de partículas de massa Δm_i, com espaçamentos muito pequenos entre si:

$$x_{CM} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

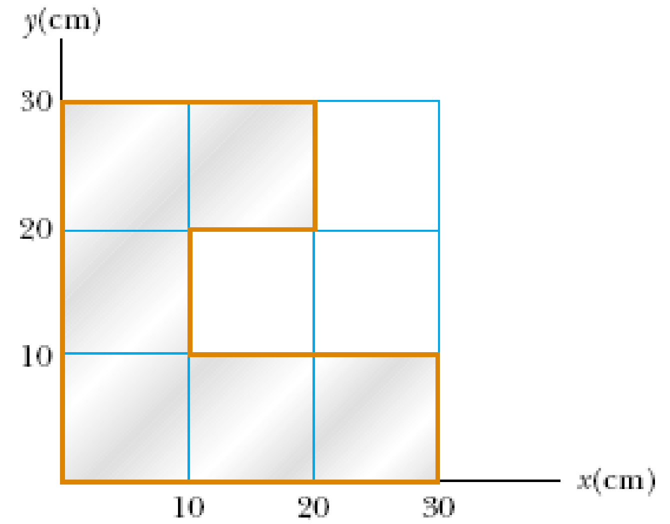
Para elementos de massa infinitesimais, as coordenadas do CM podem ser obtidas de forma exacta através do cálculo dos integrais:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

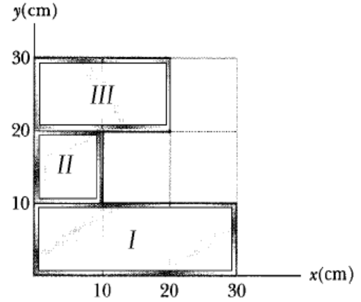
$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm$$

Aplicação – objecto uniforme irregular (1)

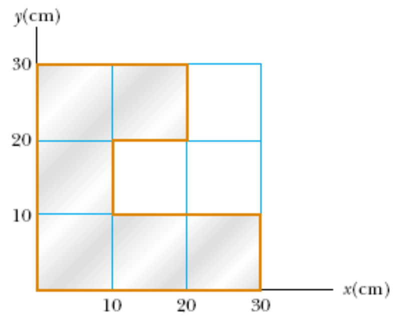
Uma folha de aço com distribuição de massa uniforme tem a forma e dimensões indicadas na figura. Determine as coordenada cartesianas do seu centro de massa.

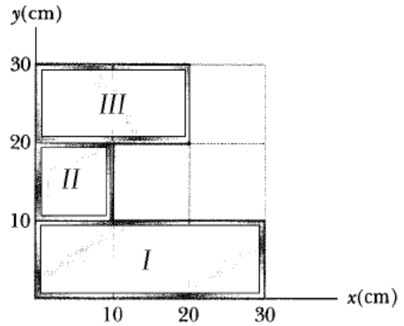


Sugestão: considere a folha como o conjunto de 3 barras horizontais com 10cm de altura. (Porquê?)



Aplicação – objecto irregular uniforme (2)





$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

$$A_1 = 300\text{ cm}^2,\ A_2 = 100\text{ cm}^2,\ A_3 = 200\text{ cm}^2,\ A = 600\text{ cm}^2$$

$$\frac{M_1}{A_1} = \frac{M}{A}$$

$$M_1 = M\left(\frac{A_1}{A}\right) = \frac{300\text{ cm}^2}{600\text{ cm}^2}M = \frac{M}{2}$$

$$M_2 = M\left(\frac{A_2}{A}\right) = \frac{100\text{ cm}^2}{600\text{ cm}^2}M = \frac{M}{6}$$

$$M_3 = M\left(\frac{A_3}{A}\right) = \frac{200\text{ cm}^2}{600\text{ cm}^2}M = \frac{M}{3}$$

$$x_{CM} = \frac{x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3}{M} = \frac{15.0\text{ cm}\left(\frac{1}{2}M\right) + 5.00\text{ cm}\left(\frac{1}{6}M\right) + 10.0\text{ cm}\left(\frac{1}{3}M\right)}{M}$$

$$x_{CM} = \boxed{11.7\text{ cm}}$$

$$y_{CM} = \frac{\frac{1}{2}M(5.00\text{ cm}) + \frac{1}{6}M(15.0\text{ cm}) + \left(\frac{1}{3}M\right)(25.0\text{ cm})}{M}$$

$$y_{CM} = \boxed{13.3\text{ cm}}$$

Energia potencial gravítica de um sistema (1)

A E_{Pg} de um sistema de partículas num campo gravítico uniforme é igual à de um ponto material com a massa do sistema, localizado no CM do mesmo:

$$E_{Pg}^{sist} = \sum_i E_{Pg}^i = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i = Mgh_{CM}$$

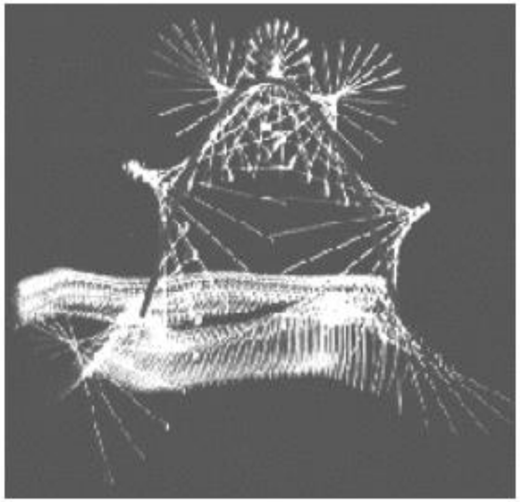
Nota: o resultado anterior é válido também para distribuições contínuas de massa.

⟶ Num objecto contínuo de massa M, cada elemento infinitesimal de massa é actuado pela força gravítica. O efeito resultante dessas forças gravíticas é uma força Mg aplicada num ponto específico do objecto – o centro de gravidade.

⟶ Se g for o mesmo para todos os pontos do sistema, o centro de massa CM coincide com o centro de gravidade... e um objecto suspenso pelo seu centro de massa fica em equilíbrio em qualquer orientação.

Movimento do Centro de Massa (1)

O movimento do CM do sistema é mais fácil de descrever do que o movimento de todo o sistema...



Apesar da vareta apresentar um movimento complexo, o seu CM descreve a trajectória parabólica que estudámos para um ponto material:

O CM da chave inglesa descreve uma trajectória rectilínea sobre uma superfície horizontal, apesar do movimento complexo do objecto:

Movimento do Centro de Massa (2)

Velocidade e aceleração do CM

As duas grandezas cinemáticas obtêm-se por derivações sucessivas em ordem ao tempo do vector posição do CM, ou seja:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

→ média pesada dos vectores posição dos elementos de massa m_{i}

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M}$$

→ média pesada dos vectores velocidade dos elementos de massa m_{i}

$$\mathbf{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

→ média pesada dos vectores aceleração dos elementos de massa m_{i}

Movimento do Centro de Massa (3)

<u>2ª Lei de Newton para um sistema de partículas</u>

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

$$\updownarrow$$

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$\updownarrow$$

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM}$$

$$\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i = \vec{F}_{i,\mathrm{int}} + \vec{F}_{i,\mathrm{ext}}$$

→ força resultante sobre um elemento de massa m_i

$$M\vec{a}_{\mathrm{cm}} = \sum_i \vec{F}_{i,\mathrm{int}} + \sum_i \vec{F}_{i,\mathrm{ext}}$$

→ 1º termo da soma nulo, pela 3ª Lei de Newton

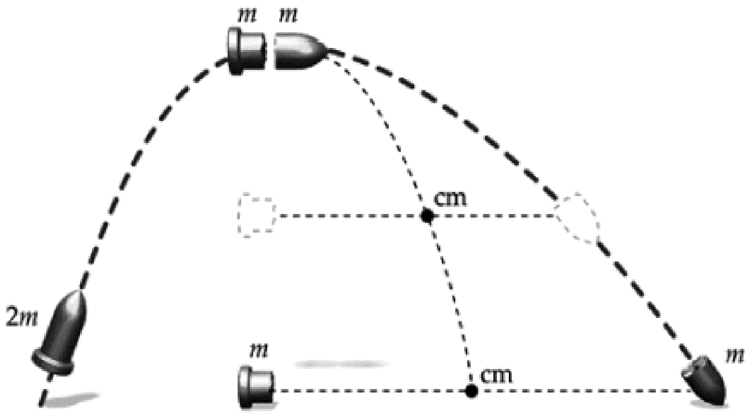
A força resultante (externa) que actua num sistema é igual ao produto da massa *M* do sistema pela aceleração do seu centro de massa.

$$\vec{F}_{\mathrm{net,ext}} = \sum_i \vec{F}_{i,\mathrm{ext}} = M\vec{a}_{\mathrm{cm}}$$

O CM de um sistema move-se como um ponto material com a massa do sistema, sob a acção da força resultante (externa) que actua sobre o sistema.

Aplicação

Um projéctil é disparado com uma velocidade inicial de 24.5m/s fazendo um ângulo de 36.9º com a horizontal. No ponto mais alto da trajectória explode, dividindo-se em dois fragmentos de igual massa. Sabendo que um dos fragmentos cai verticalmente, qual a posição do segundo fragmento ao atingir o chão?



$$x_{cm} = R$$

$$x_1 = 0.5R$$

$$mx_1 + mx_2 = (2m)x_{cm}$$

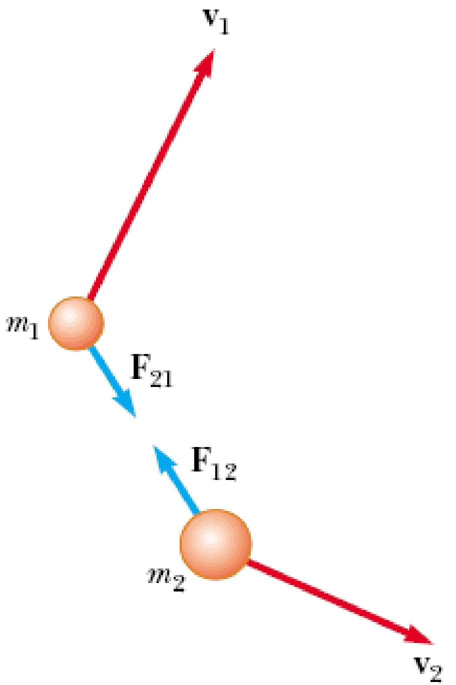
$$x_2 = 2x_{cm} - x_1 = 2R - 0.5R = 1.5R$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta = \frac{(24.5\text{ m/s})^2}{9.81\text{ m/s}^2}\sin(73.8°)=58.8\text{ m}$$

$$x_2 = 1.5R = 88.2\text{ m}$$

Conservação do Momento Linear (1)

Dois corpos de massas m_1 e m_2 formam um sistema isolado – as únicas forças que actuam nos dois corpos são as forças (internas) que cada um deles exerce no outro (ex.: força gravítica).



$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$ ← 3ª Lei de Newton

$$\Leftrightarrow \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$ → 2ª Lei de Newton

$$\Leftrightarrow m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$$ → definição de vector aceleração

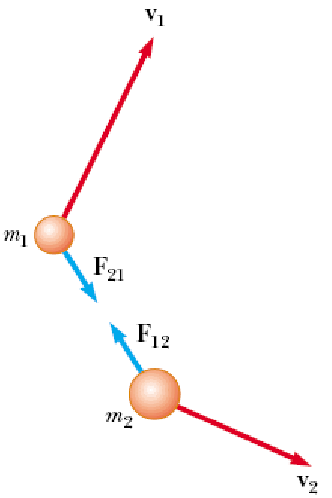
$$\Leftrightarrow m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$ → se as massas não variarem

$$\Leftrightarrow \frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0$$ → a quantidade ($m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2$) mantém-se constante.

Conservação do Momento Linear (2)

<u>Momento Linear</u> (ou quantidade de movimento linear) de uma partícula é o produto da massa *m* pela velocidade vectorial **v** da partícula:



$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$$

→ [**p**]=LMT^{-1}; unidade SI: kgm/s

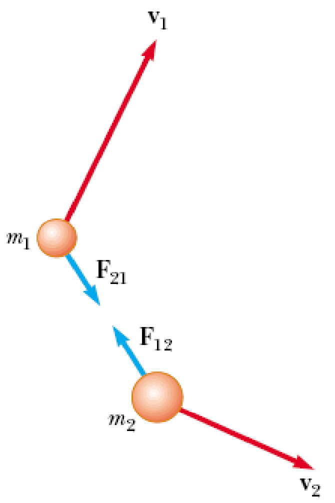
→ distingue partículas/objectos de massas diferentes com a mesma velocidade

→ distingue partículas/objectos de massas iguais com diferentes velocidades

→ grandeza vectorial com a direcção e sentido da velocidade

→ $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} p_x = mv_x \\ p_y = mv_y \\ p_z = mv_z \end{cases}$

Conservação do Momento Linear (3)



2ª Lei de Newton e momento linear

→ para uma partícula: a taxa de variação temporal do momento linear é igual à força resultante.(*)

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

→ para um sistema de partículas: a taxa de variação temporal do momento linear do sistema é igual à resultante das forças externas.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}$$

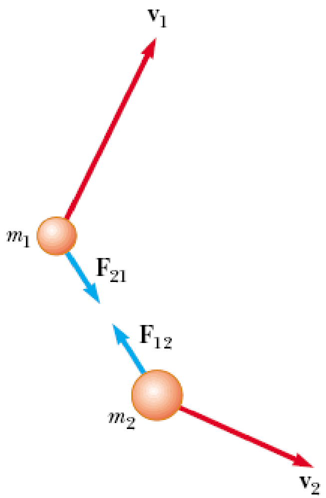
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{CM})}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext}$$

(*) enunciado original da 2ª Lei de Newton (engloba sistemas de massa variável)

Conservação do Momento Linear (4)

Conservação do momento linear de um sistema

O momento linear de um sistema permanece constante se e só se a força resultante que actua sobre ele é nula:



$$\vec{P}(t) = cte \Leftrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{res} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}$$

→ O momento linear de um sistema isolado permanece constante

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{res} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}(t) = cte$$

→ Este princípio exprime uma <u>lei de conservação vectorial</u> e tem um carácter mais geral do que o da Conservação da Energia Mecânica, uma vez que nada é dito acerca da natureza das forças internas (conservativas ou não-conservativas)

<u>Nota</u>: o facto de o momento linear do sistema permanecer constante, não significa que cada uma das suas partículas constituíntes mantenha, individualmente, o vector $\mathbf{p}_i$.

Energia cinética de um sist. de partículas (1)

$$E_C^{sist} = \sum_{i=1}^{n} E_C^i = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

Uma vez que é mais fácil descrever o movimento do CM do que o do sistema, é conveniente exprimirmos a velocidade de cada partícula à custa de $\mathbf{v}_{CM}$:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM}$$

$$\Rightarrow E_C^{sist} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i \left[(\vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM}) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i \left[\vec{v}_{i,CM} \cdot \vec{v}_{i,CM} + 2\vec{v}_{i,CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i,CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i v_{CM}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 + M\vec{v}_{CM,CM} . \vec{v}_{CM} + \tfrac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Energia cinética de um sist. de partículas (2)

Energia cinética de um sistema é a soma das energias cinéticas das suas partículas constituíntes e pode ser expressa como a soma de dois termos: (1) a E_C associada ao movimento do CM, $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$, e (2) a E_C associada ao movimento das partículas do sistema relativamente ao CM, $\Sigma\frac{1}{2}m_i v_{i,CM}^2$

$$E_C^{sist} = \sum_{i=1}^{n} E_C^i = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2$$

$$\boxed{E_C^{sist} = \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_C^{sist,CM}}$$

No exemplo da figura teríamos as E_C correspondentes à translacção do CM e à rotação da chave inglesa em torno do CM.

Impulso e momento linear (1)

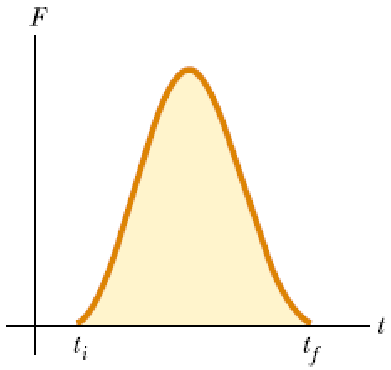
Impulso de uma força

Se uma força actuar numa partícula, o seu momento linear varia:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt \;\Rightarrow \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

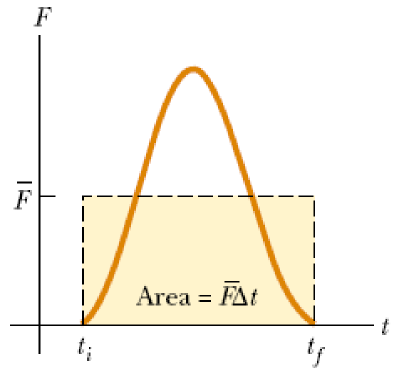
$$\Leftrightarrow \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

$$\Leftrightarrow \vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$



→ ***I*** é o impulso da força ***F*** no intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \vec{F}_m \cdot \Delta t$$



No caso geral, **F**=**F**(t); $\mathbf{F}_m$ é a força média (média temporal) que actua na partícula no intervalo de tempo considerado; unidade SI de **I**: Ns.

Impulso e momento linear (2)

<u>Teorema do impulso-momento linear</u>

A variação do momento linear de uma partícula é igual ao impulso da força resultante sobre a partícula:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{I}_{res} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{res} dt$$

→ A mesma variação de quantidade de movimento pode ser conseguida à custa de uma força elevada e um intervalo de tempo reduzido, ou vice-versa:

Impulso e momento linear (3)

→ Exemplos práticos do teorema do impulso-momento linear:

© Harold and Esther Edgerton Foundation 2002, courtesy of Palm Press, Inc.

Courtesy of Saab

Aplicação

Uma bola de golfe (*m*=50g) é batida por um taco, com uma força que varia desde zero (imediatamente antes de o taco entrar em contacto com a bola) até um valor máximo, decrescendo depois novamente até zero (quando a bola abandona o taco, após um tempo de contacto de 0.01s). Sabendo que a bola descreve um movimento de um projétil lançado a 45º e volta ao solo, ao mesmo nível da partida, a uma distância de 200m, qual a intensidade do impulso da tacada? Qual o valor da força média exercida pelo taco na bola de golfe?

$$R = x_{\mathrm{C}} = \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{g} \sin 2\theta_{\mathrm{B}}$$

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{Rg} \approx \sqrt{(200\ \mathrm{m})(9.80\ \mathrm{m/s^2})}$$

$$= 44\ \mathrm{m/s}$$

$$I = \Delta p = mv_{\mathrm{B}} - mv_{\mathrm{A}} = (50 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg})(44\ \mathrm{m/s}) - 0$$

$$= \boxed{2.2\ \mathrm{kg \cdot m/s}}$$

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2.2\ \mathrm{kg \cdot m/s}}{0.01\ \mathrm{s}} = 2 \times 10^2\ \mathrm{N}$$

Colisões (1)

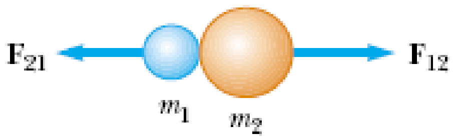
<u>Colisões</u>:

→ duas partículas aproximam-se e interagem;

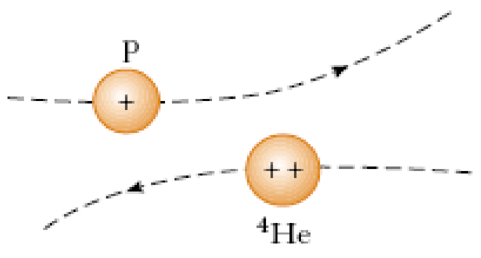
→ as forças de interacção ($\mathbf{F}_{12}$ e $\mathbf{F}_{21}$) são muito mais fortes do que qualquer força externa;

→ o intervalo de tempo que medeia a alteração das velocidades das partículas é muito curto;

→ não existe necessariamente "contacto físico" entre as duas partículas – em (b) temos a "colisão" de um protão com uma partícula α;



(a)



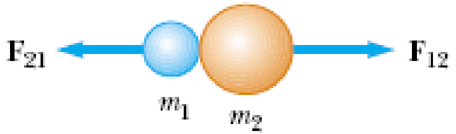
(b)

Colisões (2)

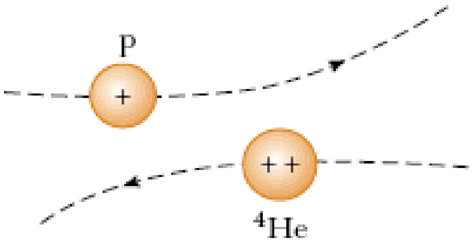
Colisões:

→ sendo as forças de interacção internas, o momento linear do sistema é conservado em qualquer colisão;

→ a energia cinética (E_C) do sistema não é geralmente conservada numa colisão - quando há conservação da E_C do sistema a colisão designa-se por elástica, sendo inelásticas as colisões em que apenas **P** se conserva e não a E_C do sistema.



(a)



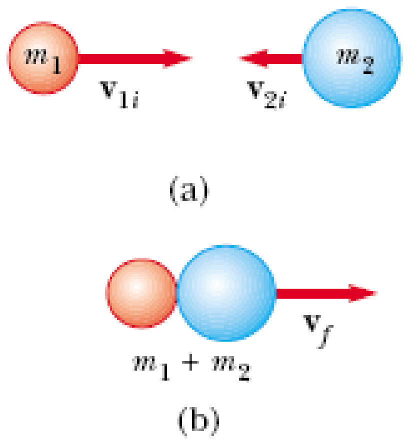
(b)

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Leftrightarrow \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\Leftrightarrow m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

→ Numa situação típica, temos habitualmente 2 incógnitas – $\boldsymbol{v}_{1f}$ e $\boldsymbol{v}_{2f}$ – pelo que é necessário existir uma segunda condição para a resolução do problema.

Colisões 1D (1)



Colisão perfeitamente inelástica:

após a colisão, as duas partículas seguem juntas

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Leftrightarrow \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\Leftrightarrow m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} = \vec{v}_{CM}$$

→ E o que acontece à E_C? Exemplo: colisão perfeitamente inelástica com $\boldsymbol{v}_{2i}=0$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow E_{Ci} = E_{C1i} = \frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{P_i^2}{2m_1}$$

$$\Rightarrow E_{Cf} = E_{C1f} + E_{C2f} = \frac{P_f^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{P_i^2}{2(m_1 + m_2)} < \frac{P_i^2}{2m_1} = E_{Ci}$$

→ A E_C do sistema diminui, transformando-se, principalmente, em energia térmica.

Colisões 1D (2)

<u>Colisão elástica</u>:

a E_C do sistema não se altera com a colisão

$$E_{C1i} + E_{C2i} = E_{C1f} + E_{C2f}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

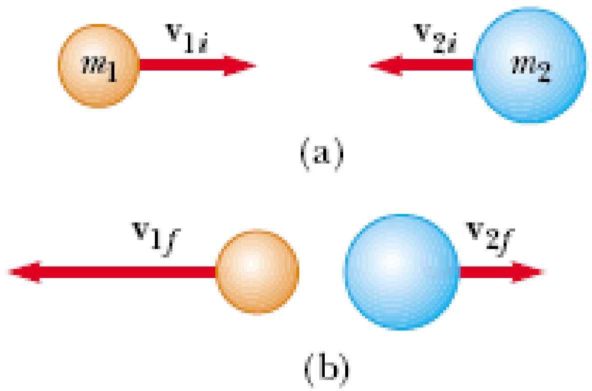
$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$



$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

<u>Nota</u>: v_{1i}, v_{1f}, v_{2i} e v_{2f} são os valores algébricos das velocidades (ex:+⟶ e -⟵)

Coeficiente de restituição (1D)

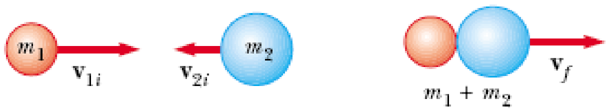
$\rightarrow$ medida da elasticidade de uma colisão:

quociente entre as velocidades de afastamento e aproximação das duas partículas.

$$e = \frac{\left|\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{1f}\right|}{\left|\vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i}\right|} = \frac{\left|v_{2f} - v_{1f}\right|}{\left|v_{2i} - v_{1i}\right|} = \frac{\left|v_{af}\right|}{\left|v_{apr}\right|}$$

$\rightarrow$ <u>perfeitamente inelástica</u>:

$$v_{2f} = v_{1f} \Leftrightarrow v_{af} = 0 \Rightarrow e = 0$$



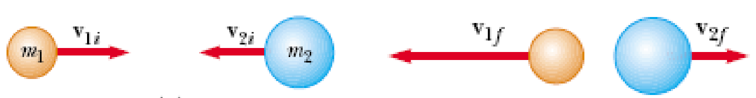
$\rightarrow$ <u>inelástica</u>:

- situação intermédia (mais comum) $0 < e < 1$

e – 2ª condição para a determinação de v_{1f} e v_{2f}

$\rightarrow$ <u>elástica</u>:

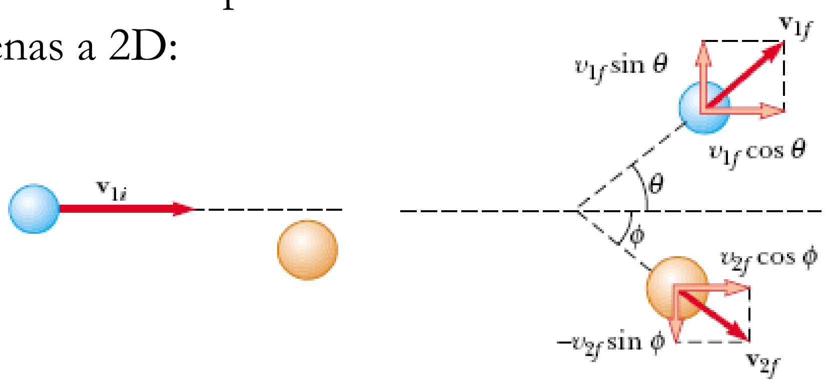
$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \Leftrightarrow \left|v_{af}\right| = \left|v_{apr}\right| \Rightarrow e = 1$$



<u>Nota</u>: v_{1i}, v_{1f}, v_{2i} e v_{2f} são os valores algébricos das velocidades (ex:+⟶ e -⟵)

Colisões 3D

Uma colisão de dois objectos no espaço acontece sempre num plano, pelo que pode ser descrita apenas a 2D:



→ Conservação do momento linear:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi$$

→ Conservação da E_C (se a colisão for elástica):

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

3 equações e
4 incógnitas
(v_{1f}, v_{2f}, θ, ϕ)...

→ nas colisões 3D, mais informação é necessária para resolver o problema.

Referencial do CM

→ referencial cuja origem coincide com o CM do sistema;

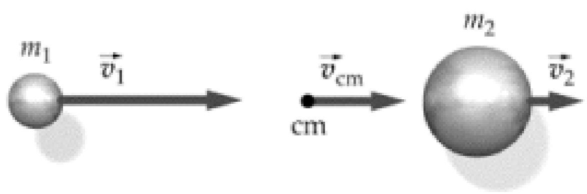
→ quando $\mathbf{F}_{ext}=\mathbf{0}$, a sua origem move-se com velocidade constante relativamente a um referencial inercial exterior;

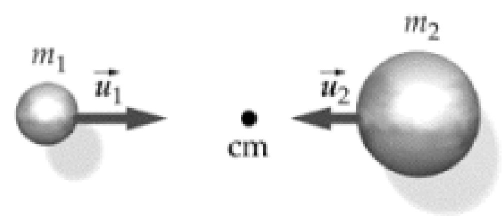
→ quando $\mathbf{F}_{ext}=\mathbf{0}$, o momento linear do sistema é nulo no referencial CM (referencial de momento zero);

→ o tratamento de colisões é muito mais simples no referencial CM;

→ numa colisão perfeitamente inelástica, a velocidade final dos corpos é nula ($\mathbf{v}_f=\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{v}_{CM,CM}=\mathbf{0}$);

→ numa colisão perfeitamente elástica, temos apenas a inversão das velocidades dos corpos ($\mathbf{P}_{i,CM}=\mathbf{P}_{f,CM}=\mathbf{0}$)

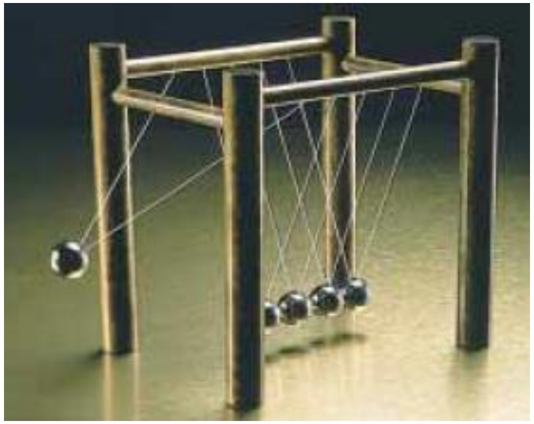




$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM} \equiv \vec{u}_i + \vec{v}_{CM}$$

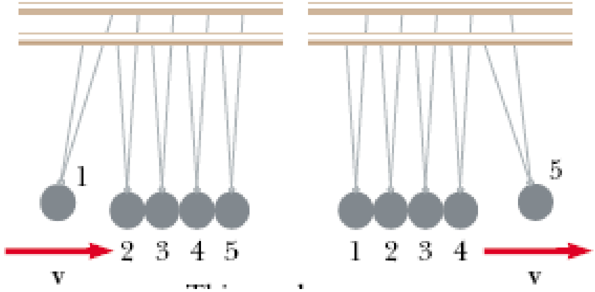
$$\Rightarrow \vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$$

Aplicação – colisão elástica

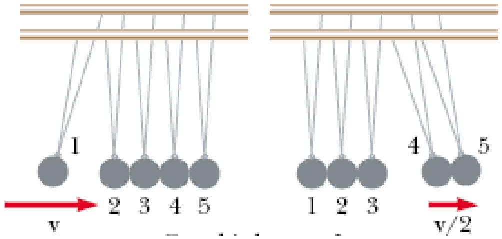


O dispositivo anti-stress representado na figura é constituído por 5 esferas iguais, rígidas, suspensas por fios de igual comprimento e massa desprezável. Supondo que a colisão entre esferas é elástica, o que acontece quando a 1ª esfera for afastada do conjunto e largada (ver figura)?

→ A esfera 1 fica em repouso depois da colisão com a esfera 2 e a última esfera do conjunto afasta-se das restantes com a mesma velocidade com que a esfera 1 se movia antes da colisão.



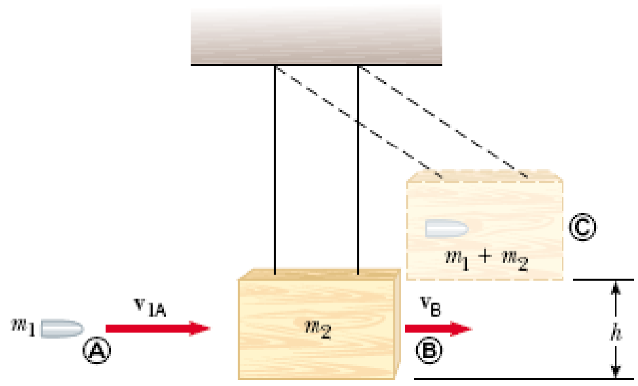
→ O que é que torna esta situação impossivel?



Aplicação – colisão perfeitamente inelástica

O pêndulo balístico é um mecanismo típico de medição de velocidade de projécteis muito rápidos, dos quais as balas são um exemplo clássico. Uma bala de massa m_1=12g é disparada contra um bloco de madeira (m_2=2kg) em repouso, nele ficando encrustada. Depois da colisão, o bloco descreve um arco de circunferência no plano vertical, atingindo uma altura máxima h=10.4cm (ver figura).

Qual a velocidade de impacto da bala?



$$v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

$$K_B = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_B^2$$

$$= \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

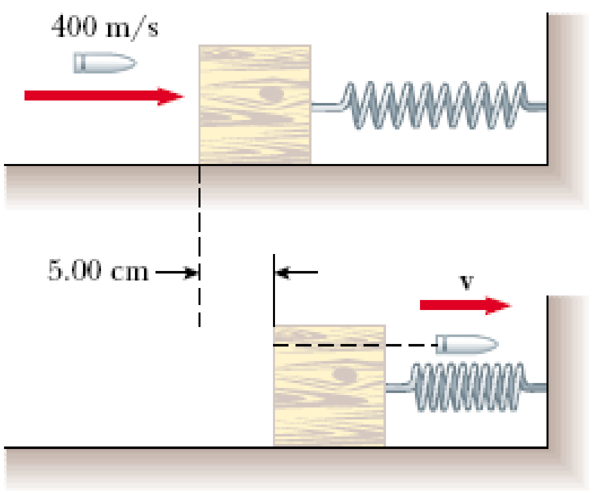
$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

$$\frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2) g h$$

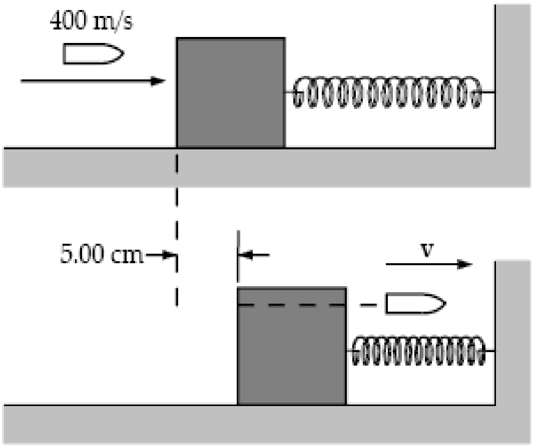
$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh} = 240 \text{ m/s}$$

Aplicação – colisão inelástica

- Uma bala de aço (m1=5.00g) atinge com uma velocidade de 400m/s um bloco de madeira (m2=1.0kg) inicialmente em repouso, preso a uma mola não deformada (k=900N/m). A bala atravessa o bloco (quase instantaneamente) e este desloca-se sem atrito sobre a superfície horizontal em que está pousado, causando à mola uma deformação de 5.00cm.
- Qual a velocidade com que a bala sai do bloco?
- Qual a variação de energia mecânica do sistema?
- Mostre que o coeficiente de restituição da colisão é e=0.246



Aplicação – colisão inelástica (2)



$$mv_i = MV_i + mv$$

$$\frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$V_i = \sqrt{\frac{(900\ \text{N/m})\left(5.00\times10^{-2}\ \text{m}\right)^2}{1.00\ \text{kg}}} = 1.50\ \text{m/s}$$

$$v = \frac{mv_i - MV_i}{m} = \frac{\left(5.00\times10^{-3}\ \text{kg}\right)(400\ \text{m/s}) - (1.00\ \text{kg})(1.50\ \text{m/s})}{5.00\times10^{-3}\ \text{kg}}$$

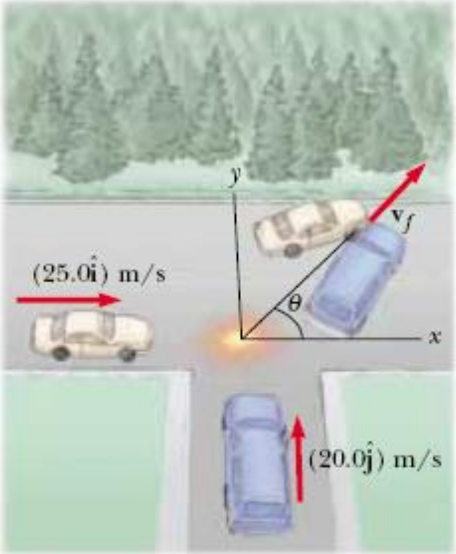
$$v = \boxed{100\ \text{m/s}}$$

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}\left(5.00\times10^{-3}\ \text{kg}\right)(100\ \text{m/s})^2 - \frac{1}{2}\left(5.00\times10^{-3}\ \text{kg}\right)(400\ \text{m/s})^2$$
$$+\frac{1}{2}(900\ \text{N/m})\left(5.00\times10^{-2}\ \text{m}\right)^2$$

$\Delta E = -374$ J, or there is an energy loss of $\boxed{374\ \text{J}}$.

Aplicação – acidente num entroncamento

Um automóvel (m_1=1500kg) que viaja em direção a Este a 25m/s colide, num entroncamento, com uma carrinha (m_2=2500kg) que viaja em direção a Norte a 20m/s. Considerando que a colisão foi perfeitamente inelástica, determine a direção e o módulo da velocidade dos dois veículos após a colisão.



$$\sum p_{xi} = (1\,500\text{ kg})(25.0\text{ m/s})$$

$$\sum p_{xf} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta$$

$$3.75 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f\cos\theta$$

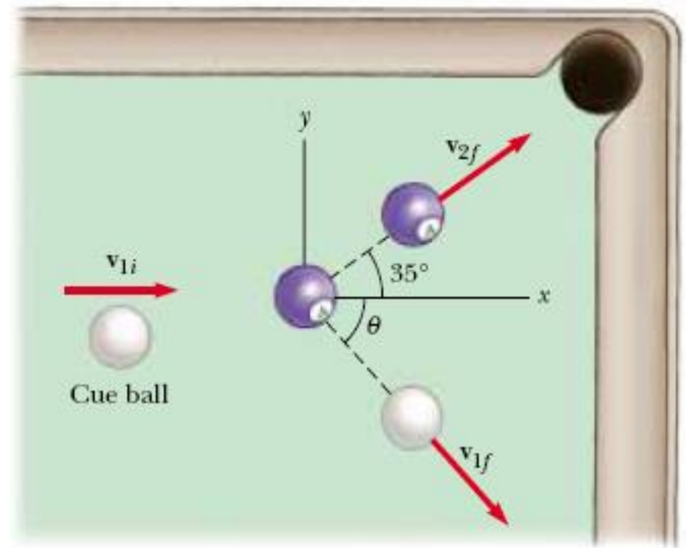
$$\sum p_{yi} = \sum p_{yf} \qquad \rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{5.00\times 10^4}{3.75\times 10^4} = 1.33 \quad \rightarrow \quad \theta = \boxed{53.1°}$$

$$5.00 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f\sin\theta$$

$$\rightarrow \quad v_f = \frac{5.00\times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{(4\,000\text{ kg})\sin 53.1°} = \boxed{15.6\text{ m/s}}$$

Aplicação – jogo de snooker

Numa jogada bem sucedida, um jogador de snooker consegue livrar-se da sua bola 4 (ver figura). Assumindo que as duas bolas têm a mesma massa e que a colisão é elástica, qual o ângulo de deflexão θ da bola branca depois de colidir com a bola 4?



$$m_1 = m_2 = m$$

$$m_1\mathbf{v}_{1i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

$$v_{1i}^{\ 2} = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

$$\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} = v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35^\circ)$$

$$v_{1i}^{\ 2} = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35^\circ)$$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^{\ 2} = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^{\ 2} + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^{\ 2}$$

$$v_{1i}^{\ 2} = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2}$$

$$0 = 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35^\circ)$$

$$0 = \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$\boxed{\theta = 55^\circ}$$