Física Experimental

- Trabalho, Energia e Conservação de Energia -

ISEP 2016/17 1ºsemestre

Energia

Qualquer processo físico envolve energia – cinética, potencial, térmica -, transferência de energia, transformação de uma forma de energia em outra forma de enegia...

Conceitos como deslocamento, velocidade, aceleração, força são mais facilmente definidos e apreendidos e permitiram, até agora fazer uma descrição de corpos tratados como partículas materiais. Mas...

... E se a força resultante sobre um corpo/sistema não for constante?

(Ex.: força gravítica, força elástica, força de Coulomb)

É vantajoso poder descrever a evolução do sistema em termos de balanços energéticos: conservação ou dissipação de energia.

Energia

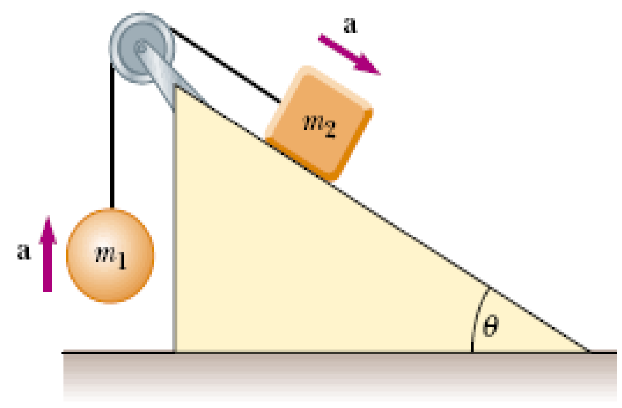
Sistema: partícula, corpo, conjunto de corpos, separados do resto do Universo – vizinhança - por uma fronteira, através da qual se efectuam as eventuais trocas de energia.

Exemplo:

sistema = esfera+bloco+fio

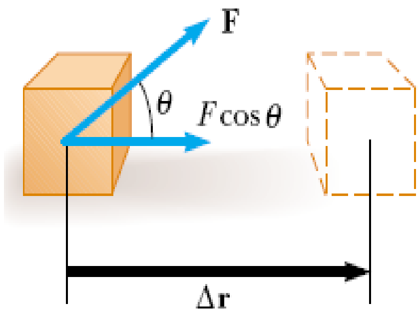
Influência da vizinhança: peso dos corpos, força de atrito e reacção normal no bloco, força da roldana no fio.

Forças internas: tensão no fio, forças dos corpos no fio e do fio nos corpos.



Trabalho e Energia cinética (1)

Trabalho (work): forma mais comum de transferência de energia



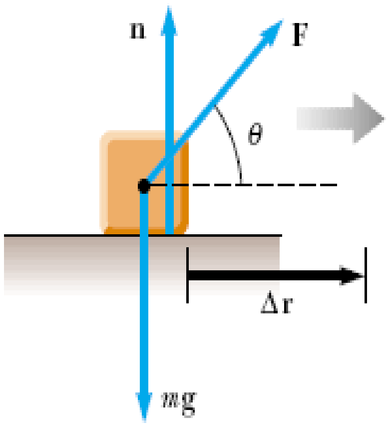
Trabalho de uma <u>força constante</u> num movimento rectilíneo (1D):

$$W_{\vec{F}}(\Delta\vec{r}_{AB}) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}_{AB} = F\cdot\Delta s_{AB}\cdot\cos\theta$$

(produto escalar ou interno de vectores)

Trabalho e Energia cinética (2)

Força "útil" na realização de trabalho



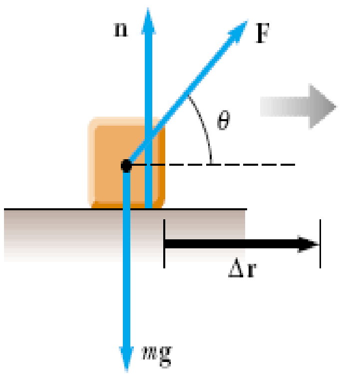
$$W_{\vec{F}}(\Delta\vec{r}_{AB}) = F \cdot \cos\theta \cdot \Delta s_{AB} = F_t \cdot \Delta s_{AB}$$

Unidade SI: joule (1J=1Nm=1kgm^{2}s^{-2})

Nota: $\Delta\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow W_{\vec{F}} = 0$

$0 \leq \theta < 90^o$	$\Rightarrow$	$W_{\vec{F}} > 0$	trabalho potente (ex. peso numa descida)
$\theta = 90^o$	$\Rightarrow$	$W_{\vec{F}} = 0$	trabalho nulo (ex. reacção normal)
$90 < \theta \leq 180^o$	$\Rightarrow$	$W_{\vec{F}} < 0$	trabalho resistente (ex. força de atrito cinético, peso numa subida)

Trabalho e Energia cinética (3)



E quando <u>várias forças constantes</u> actuam no mesmo corpo/sistema, em simultâneo? Qual o trabalho total realizado sobre o sistema?

$$
\begin{aligned}
W_{\vec{F}_1}(\Delta\vec{r}_{AB}) + W_{\vec{F}_2}(\Delta\vec{r}_{AB}) + \ldots + W_{\vec{F}_n}(\Delta\vec{r}_{AB}) &= \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_{AB} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_{AB} + \ldots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}_{AB} \\
&= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) \cdot \Delta\vec{r}_{AB} \\
&= \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r}_{AB} \\
&= W_{\vec{F}_R}(\Delta\vec{r}_{AB})
\end{aligned}
$$

O trabalho total realizado sobre o sistema é igual ao trabalho realizado pela força resultante!

Trabalho e Energia cinética (4)

A realização de trabalho está associada a uma transferência de energia entre o resto do universo e o sistema (por intermédio da vizinhança deste), através da fronteira que o delimita.

$$W \leftrightarrow \Delta E \quad \therefore \quad \begin{array}{l} W_{\vec{F}} > 0 \rightarrow \\ W_{\vec{F}} = 0 \rightarrow \\ W_{\vec{F}} < 0 \rightarrow \end{array}$$

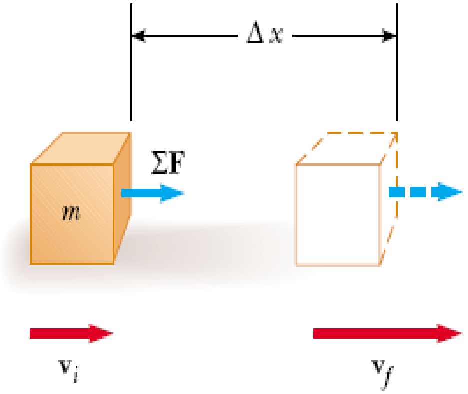
$W_{\vec{F}} > 0 \rightarrow$ trabalho realizado sobre o sistema (pela vizinhança)

$W_{\vec{F}} = 0 \rightarrow$ trabalho nulo

$W_{\vec{F}} < 0 \rightarrow$ trabalho realizado pelo sistema sobre a vizinhança

Trabalho e Energia cinética (5)

Energia cinética: forma de energia associada ao movimento



Uma consequência possivel da realização de trabalho sobre um corpo é a alteração da sua velocidade...

$$W_{total}(\Delta\vec{r}_{AB}) = W_{\vec{F}_R}(\Delta\vec{r}_{AB}) = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r}_{AB} = F_{Rx} \cdot \Delta s_{AB}$$

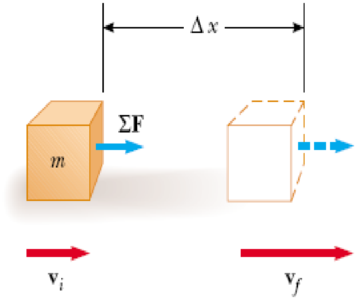
$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \Rightarrow F_{Rt} = m \cdot a_t$$ (2ª Lei de Newton)

$$v_B^2 = v_A^2 + 2 \cdot a_t \cdot \Delta s_{AB}$$ (movimento uniformemente variado a 1D)

$$W_{total}(\Delta\vec{r}_{AB}) = m \cdot a_t \cdot \Delta s_{AB} = m \cdot \tfrac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2$$

Trabalho e Energia cinética (6)

Energia cinética: forma de energia associada ao movimento



O trabalho total realizado sobre um corpo de massa *m* no seu deslocamento de *A* para *B* é igual à variação correspondente da quantidade

$$\tfrac{1}{2}mv^2$$

associada ao movimento do corpo – Energia cinética (E_C) de um corpo de massa *m* com velocidade *v*.

$$E_C = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Unidade SI de Energia : joule ($1J=1kgm^2s^{-2}$)

Trabalho e Energia cinética (7)

Teorema do Trabalho-Energia cinética:

O trabalho total realizado sobre um sistema de massa *m* no seu deslocamento de *A* para *B* é igual à variação da sua energia cinética entre essas posições.

$$\begin{aligned} W_{total}(\Delta\vec{r}_{AB}) &= \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \\ &= E_C(B) - E_C(A) \\ &= \Delta E_C(A \rightarrow B) \end{aligned}$$

<u>Nota</u>: o resultado foi deduzido para forças constantes e deslocamentos rectilíneos, mas mantém a sua validade para <u>forças variáveis</u> e <u>deslocamentos no espaço 3D</u>.

Trabalho e Energia cinética (8)

Table 7.1

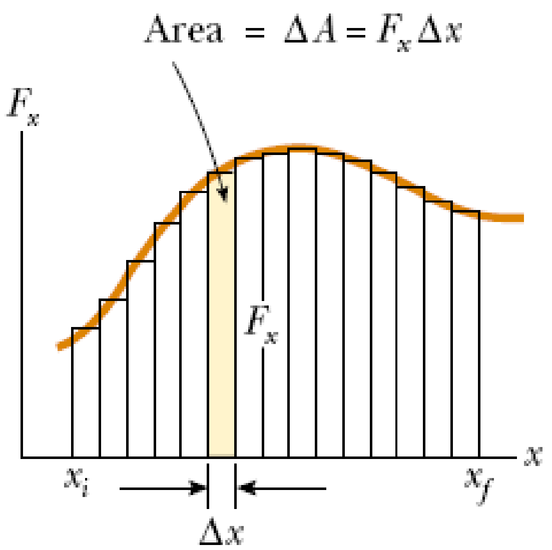
Kinetic Energies for Various Objects

Object	Mass (kg)	Speed (m/s)	Kinetic Energy (J)
Earth orbiting the Sun	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.66×10^{33}
Moon orbiting the Earth	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Rocket moving at escape speed[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automobile at 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Running athlete	70	10	3 500
Stone dropped from 10 m	1.0	14	98
Golf ball at terminal speed	0.046	44	45
Raindrop at terminal speed	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Oxygen molecule in air	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

[a] Escape speed is the minimum speed an object must reach near the Earth's surface in order to move infinitely far away from the Earth.

Trabalho e Energia Cinética (9)

Trabalho de uma força variável



$W \approx F_x \Delta x$ ~ trabalho realizado por F num pequeno deslocamento Δx, em que F ~ constante

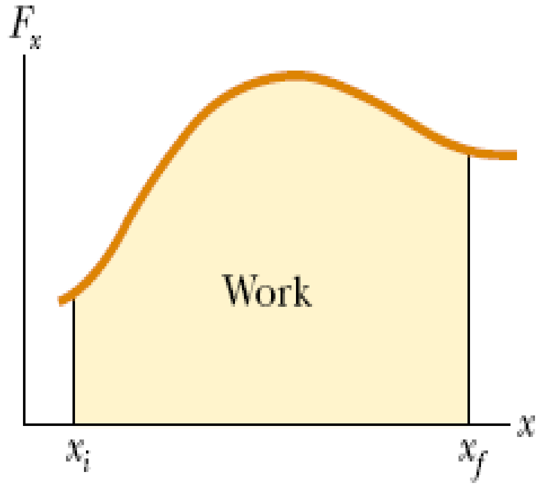
$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$ ~ trabalho realizado por F no deslocamento $x_i \rightarrow x_f$

No limite em que $\Delta x \rightarrow 0$, o trabalho realizado por F no deslocamento $x_i \rightarrow x_f$ é determinado de forma exacta pelo integral a uma dimensão:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

Trabalho e Energia Cinética (10)

Trabalho → área debaixo da curva $F = F(x)$



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

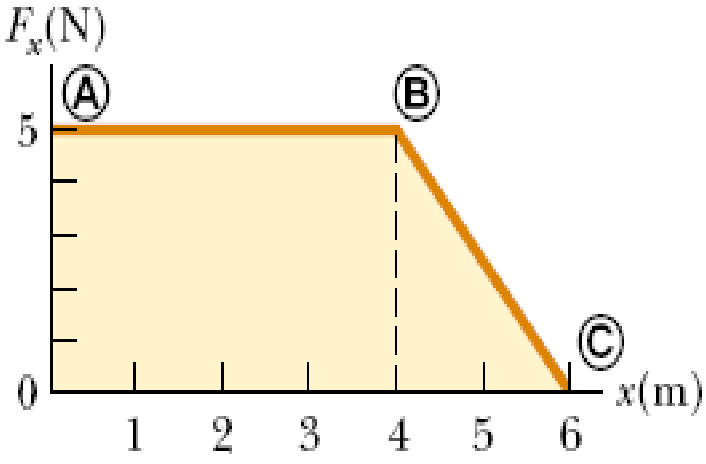
Quando várias forças actuam simultaneamente no sistema, o cálculo pode ser feito através do trabalho da força resultante:

$$\sum W = W_{\text{net}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x \right) dx$$

Aplicação

Uma força F, com uma componente horizontal de intensidade variável, representada no gráfico como função da posição x, actua num corpo enquanto este se desloca 6m.

Qual o trabalho total realizado por F sobre o corpo?



trabalho realizado por F no deslocamento $0 \rightarrow 4$ m (área do rectângulo) $(5.0\ \text{N})(4.0\ \text{m}) = 20\ \text{J}$

trabalho realizado por F no deslocamento $4 \rightarrow 6$ m (área do triângulo) $\frac{1}{2}(5.0\ \text{N})(2.0\ \text{m}) = 5.0\ \text{J}$

25 J.

Trabalho e Energia Cinética (11)

Trabalho da força elástica

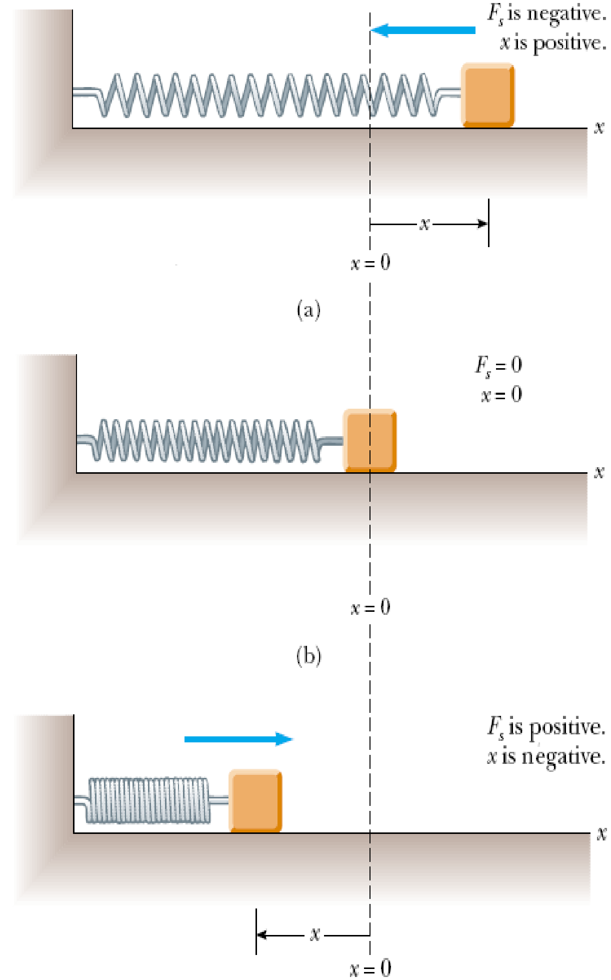
Força elástica numa mola → exemplo típico de uma força variável (Lei de Hooke):

$$F_s = -kx$$

O trabalho realizado pela força que a mola faz no bloco, num deslocamento $x_i \rightarrow x_f$ é calculado através do integral

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

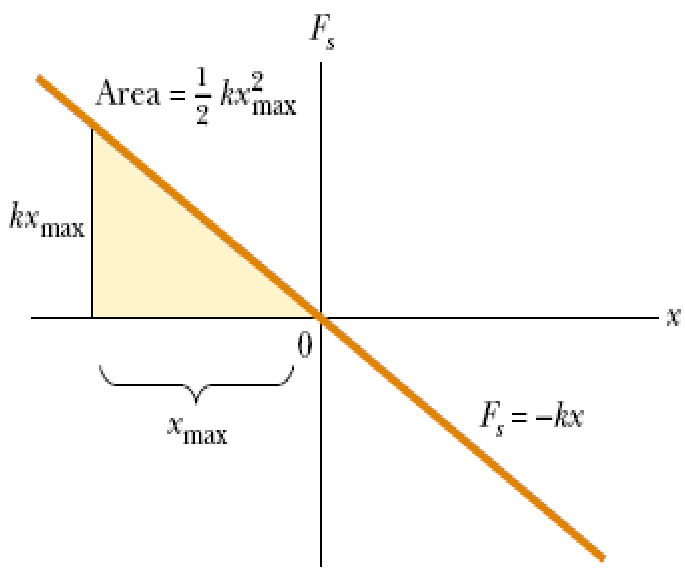
$$\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$$



Trabalho e Energia Cinética (12)

Trabalho da força elástica

– cálculo gráfico



trabalho realizado por F no deslocamento $-x_{max} \rightarrow 0$ (área do triângulo):

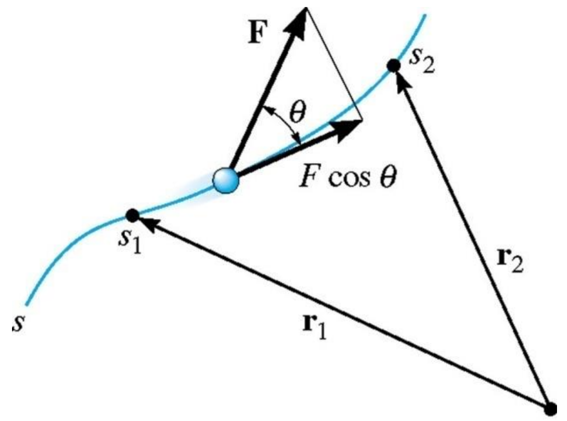
$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)\, dx = \frac{1}{2} kx_{max}^2$$

trabalho realizado por F no deslocamento $0 \rightarrow x_{max}$ (área de um triângulo semelhante, abaixo do eixo xx):

$$W_s = -\frac{1}{2} kx_{max}^2$$

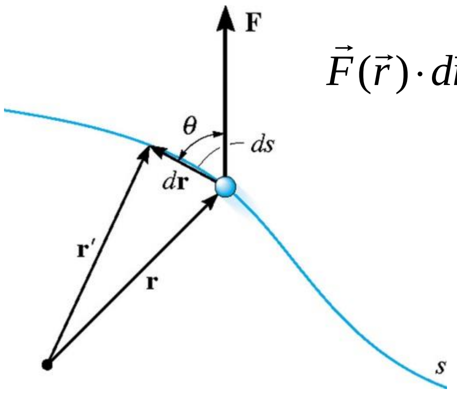
O trabalho realizado por F no deslocamento total $-x_{max} \rightarrow x_{max}$ é nulo!

Trabalho e Energia a 3 dimensões (1)



Definição geral de trabalho

Partícula de massa *m*, em movimento ao longo de uma trajectória curva *s* no espaço 3D, sujeita à acção de uma força variável **F**:



$$\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = F\cos\theta\, dr \equiv F_s\, dr \approx F_s\, ds$$

$$W_{\vec{F}}(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\therefore W_{\vec{F}}(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s)\, ds$$

Nota: $W_{\vec{F}}(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\, dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\, dz$

Trabalho e Energia a 3 dimensões (2)

Teorema do trabalho-energia cinética - **F**(s), 3D

trabalho realizado por **F**(s) na trajectória $s_1 \rightarrow s_2$:

$$W_{\vec{F}}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s)\, ds$$

mudança de variável de integração por aplicação da 2ª Lei de Newton (*v* é a velocidade escalar):

$$F_s(s) = m\, a_s = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v$$

$$\therefore F_s(s) = m\frac{dv}{ds}v \Leftrightarrow F_s(s)\, ds = mv\, dv$$

$$W_{\vec{F}}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s)\, ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\, dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$$\boxed{W_{\vec{F}}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = E_C(2) - E_C(1) = \Delta E_C(1 \rightarrow 2)}$$

Potência (1)

Potência – taxa temporal de realização de trabalho (ou transferência de energia)

$$Potência = \frac{Energia}{tempo}$$

Unidade SI de Potência: watt ($1W = 1Js^{-1}$)

Potência (2)

<u>Potência média</u> no intervalo Δt:

$$\boxed{\overline{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}}$$

(taxa à qual a energia atravessa a fronteira do sistema)

E instantaneamente?

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overline{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_s\, v$$

<u>Potência instantânea</u>:

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_s\, v = \frac{dE}{dt}}$$

($1W = 1Js^{-1} = 1kgm^2s^{-3} = 1Nms^{-1}$)

Trabalho e Energia Potencial (1)

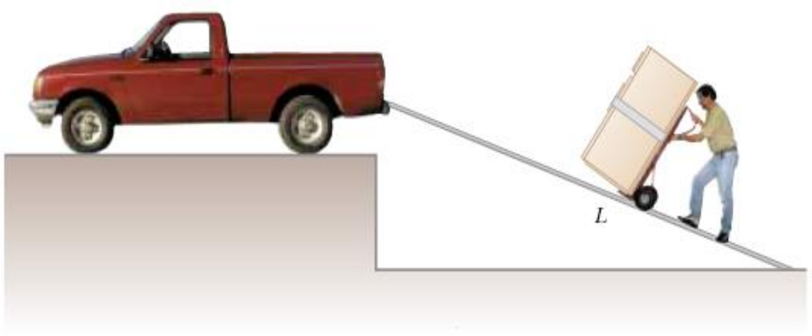
Forças conservativas e não-conservativas

O trabalho realizado pelo peso do frigorífico no deslocamento do chão até à traseira da *pickup* é independente do comprimento e inclinação da rampa.

$$W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot L \cdot \cos(\vec{P} \wedge \Delta\vec{r})$$

$$= -mg \cdot L \cdot \frac{\Delta h}{L} = -mg\Delta h$$

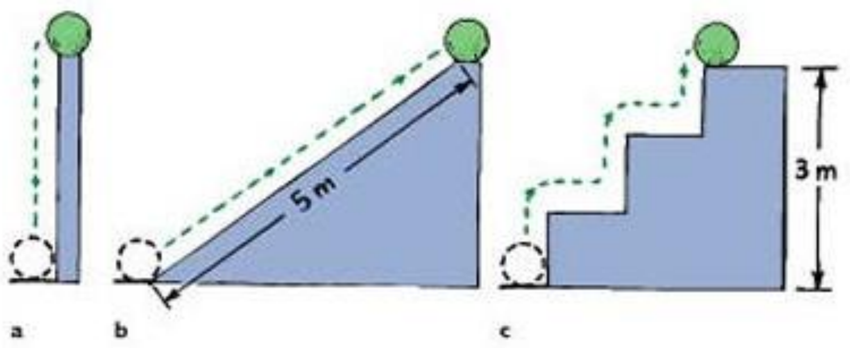
$$= mgh_i - mgh_f$$



Trabalho e Energia Potencial (2)

Forças conservativas e não-conservativas

O trabalho realizado pelo peso desta bola (P=10N) nas três trajectórias descendentes a, b e c, tem sempre o valor W=30J...



... e se houver atrito? O trabalho da força de atrito depende da trajectória (existência ou não de rampa, inclinação, comprimento...)

Trabalho e Energia Potencial (3)

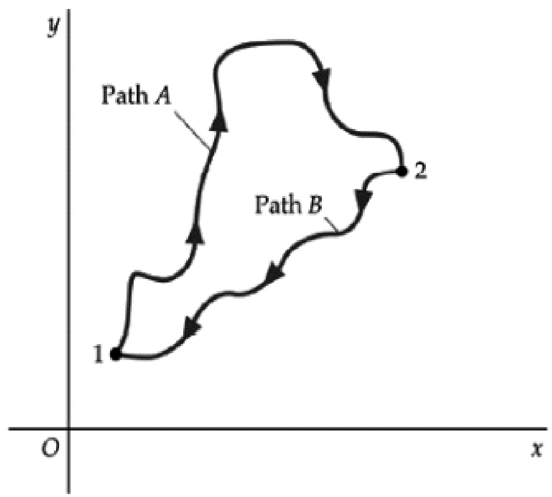
Forças conservativas e não-conservativas

A força gravítica é uma força conservativa e a força de atrito é uma força não-conservativa.

Forças conservativas:

1. O trabalho não depende da trajectória, mas apenas das posições inicial e final (ex: $W_P = mg(h_f - h_i)$).

2. O trabalho é nulo numa trajectória fechada ($h_f = h_i$, logo $W_P = 0$)



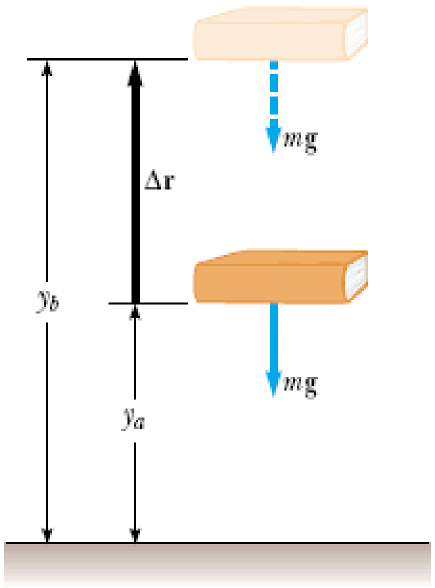
Trabalho e Energia Potencial (4)

Sistema = livro + Terra (interacção através da força gravítica)

Ao elevarmos o livro de uma altura inicial y_a até uma altura final y_b, a uma velocidade constante, estamos a realizar trabalho sobre o sistema...

Se não houver variação da E_C, qual o tipo de energia que estamos a transferir para o sistema?

Nota: se deixarmos cair o livro a partir de y_b, o sistema vai adquirir Ec...



Trabalho e Energia Potencial (5)

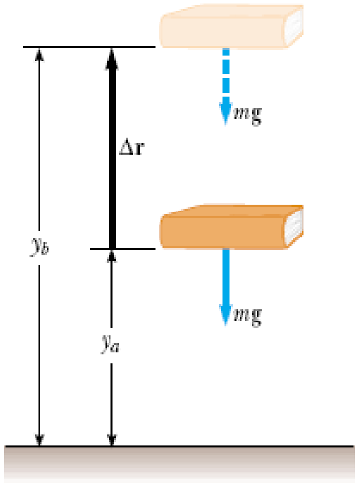
A energia armazenada no sistema tinha o *potencial* de se transformar em trabalho ou E_C, o que aconteceu quando largámos o livro... chama-se por isso Energia potencial:

- depende da configuração do sistema;
- existe apenas associada a forças conservativas.

O trabalho da força aplicada $\mathbf{F}_{\mathbf{ap}}$ para elevar o livro, é:

$$W = (\mathbf{F}_{\text{app}}) \cdot \Delta\mathbf{r} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_b - y_a)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_b - mgy_a$$

Também aqui, o trabalho realizado é igual à variação de uma quantidade entre os estados inicial e final...



Trabalho e Energia Potencial (6)

Energia potencial gravítica

À quantidade cuja variação está assocido o trabalho da força simétrica do peso do livro, no exemplo anterior, dá-se o nome de Energia potencial gravítica:

$$\boxed{E_{Pg} = mgh}$$

- é uma grandeza escalar;

- exprime-se em joules (J) no sistema internacional;

- depende apenas da altura *h* do corpo (para um sistema Terra+corpo, próximo da superfície da Terra);

- a sua variação está relacionada com o trabalho da força gravítica:

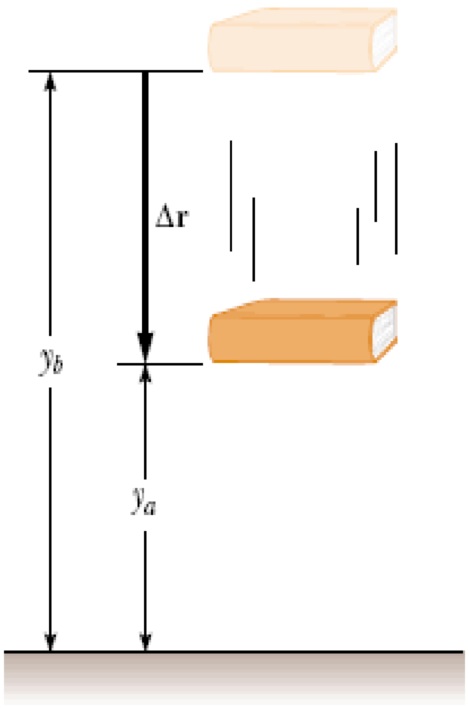
$$\boxed{\Delta E_{Pg}(A \to B) = mg\Delta h_{AB} = -W_{\vec{P}}(A \to B)}$$

Conservação da Energia Mecânica (1)

<u>Sistema</u> = livro + Terra (interacção gravítica)

Sendo a força gravítica conservativa, o trabalho do peso do livro está associado à variação da E_{Pg}:

$$\begin{aligned} W_{\vec{P}}(B \to A) &= \vec{P} \cdot \Delta\vec{r}_{BA} \\ &= -mg\ \hat{j} \cdot (y_A - y_B)\ \hat{j} \\ &= -(mg\ y_A - mg\ y_B) \\ &= -\Delta E_{Pg}(B \to A) \end{aligned}$$



Segundo o teorema do Trabalho - Energia Cinética,

$$\vec{F}_a = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_R = \vec{P}$$

$$\Rightarrow W_{\vec{P}}(B \to A) = W_{total}(B \to A) = \Delta E_C(B \to A)$$

Conservação da Energia Mecânica (2)

Energia mecânica E_m

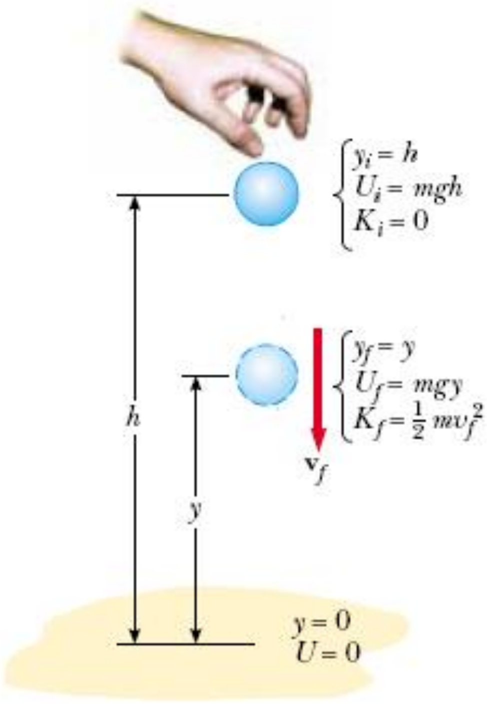
$$\therefore -\Delta E_{Pg}(B \to A) = \Delta E_C(B \to A)$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{Pg}(B \to A) + \Delta E_C(B \to A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta[E_{Pg} + E_C]_{(B\to A)} = 0$$

Não há variação da quantidade (E_{Pg}+E_C) do sistema. Ou seja, essa quantidade permanece constante:

$$\Leftrightarrow (E_{Pg} + E_C)_B = (E_{Pg} + E_C)_A$$



À quantidade (E_P+E_C) dá-se o nome de Energia Mecânica (E_m) do sistema (no termo E_P estão incluídos todos os tipos de energia potencial existentes no sistema – gravítica, elástica, electrostática...)

Conservação da Energia Mecânica (3)

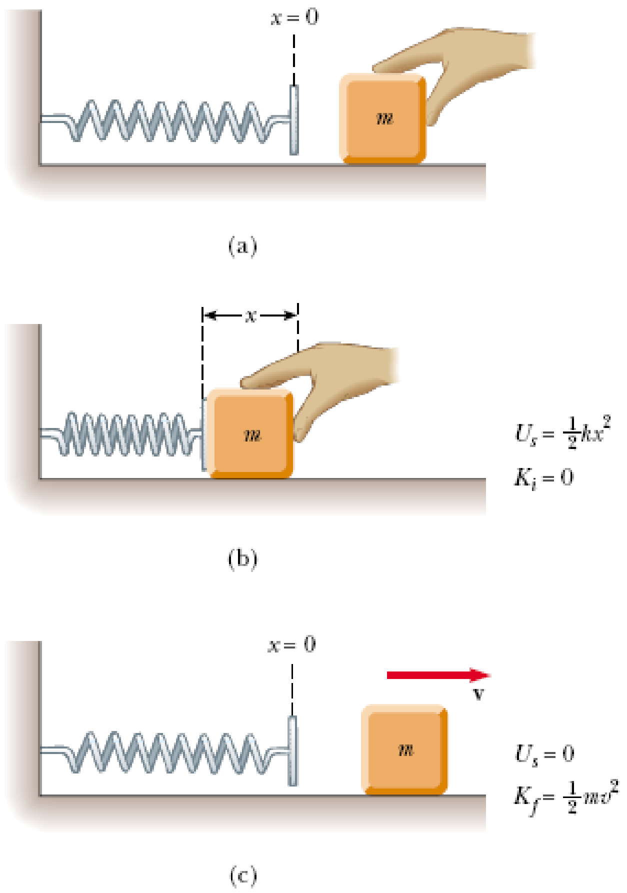
<u>Conservação da energia mecânica</u>

Quando apenas forças conservativas internas realizam trabalho sobre o sistema, a energia mecânica permanece constante (é 'conservada'... daí o termo 'conservativa' aplicado a certas forças):

$$\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_{mi} = E_{mf}$$

$$\Leftrightarrow E_{Pi} + E_{Ci} = E_{Pf} + E_{Cf}$$

<u>Exemplo</u>: interacção entre uma mola e um bloco que pode deslizar numa superfície horizontal sem atrito:



Conservação da Energia

Transferências de Energia

Mecanismos de transferência (exs.)

ondas mecânicas, electromagnéticas, transferência de massa, energia eléctrica, calor, trabalho mecânico...

Digital Vision/Getty Images

George Semple

George Semple

George Semple

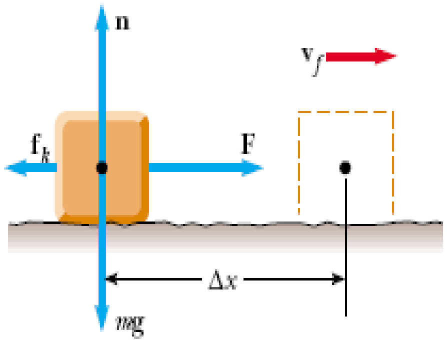
George Semple

George Semple

Conservação da Energia

Trabalho de forças não conservativas

Quando uma força não-conservativa realiza trabalho, a energia mecânica do sistema não é conservada.



Pelo terorema do Trabalho – En. Cinética: $\Delta E_C = W_{total} = W_{\vec{F}_R} = W_{\vec{F}_{Cons}} + W_{\vec{F}_{NCons}}$

Pela definição de forças conservativas: $\Delta E_P = -W_{\vec{F}_{Cons}}$

Assim, pela definição de Energia Mecânica: $\Delta E_C + \Delta E_P = W_{\vec{F}_{Cons}} + W_{\vec{F}_{NCons}} - W_{\vec{F}_{Cons}}$

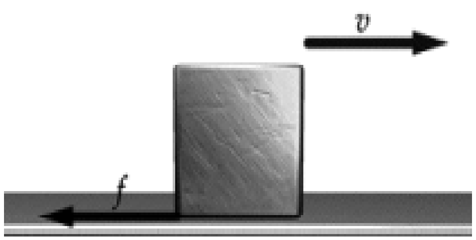
$$\Leftrightarrow \Delta E_m = W_{\vec{F}_{NCons}}$$

Nota: na figura, **F** aumenta a energia mecânica do bloco enquanto $\mathbf{f}_k$ diminúi a energia mecânica. **n**, apesar de ser também uma força não-conservativa, não altera a E_m do bloco.

Conservação da Energia

Trabalho da força de atrito cinético

Quando a única força não conservativa a realizar trabalho sobre o sistema é a força de atrito cinético, o sistema perde energia mecânica, habitualmente sob a forma de calor:



$$\Delta E_m = W_{\vec{F}_{ac}}$$

Se a força de atrito for uma força interna do sistema (ex: sistema=bloco+superfície+ar circundante) a energia mecânica perdida é transformada em energia térmica do mesmo sistema (aumento de temperatura):

$$\Delta E_m = W_{\vec{F}_{ac}} = -\Delta E_{term} \Rightarrow \Delta E_m + \Delta E_{term} = \Delta E_{sist} = 0$$

E se o sistema for apenas o bloco?

$$\Delta E_{sist} = W_{\vec{F}_{ac}} \Rightarrow \Delta E_m = \Delta E_C = W_{\vec{F}_{ac}}$$

Notas: (1) a designação correcta do termo W_{Fac} é a de "pseudo-trabalho de F_{ac}"; (2) apenas as formas mecânica e térmica de energia estão a ser consideradas.

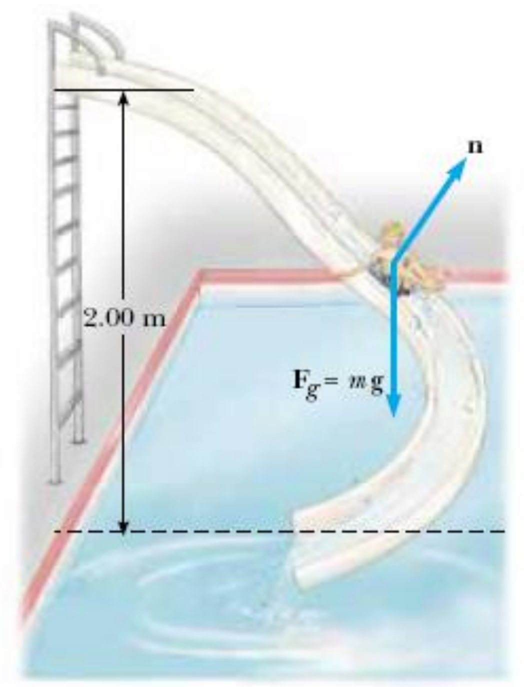
Aplicação

Uma criança de massa *m*=20kg desliza por um escorrega de 2m de altura e trajecto (curvatura e inclinação) irregular, partindo do topo em repouso.

Se não existir atrito entre a superfície do escorrega e a criança, qual a velocidade desta ao atingir a base?

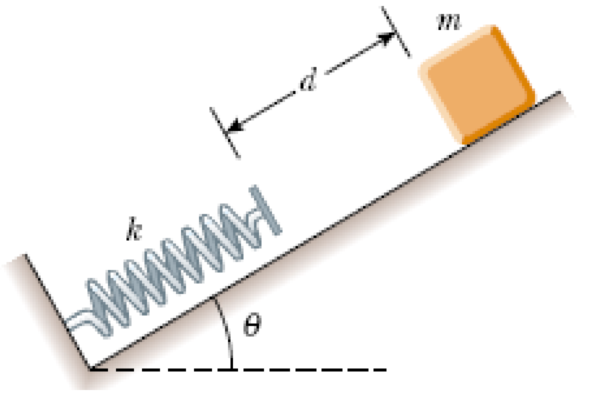
Supondo que, devido à existência de atrito, a criança atinge a base do escorrega com uma velocidade de 3m/s, qual a perda percentual de energia mecânica do sistema?

Será possivel, com estes dados, determinar o valor do coeficiente de atrito cinético entre a criança e o escorrega?



Aplicação

Um bloco de massa *m* é abandonado em repouso sobre uma superfície plana com uma inclinação θ, onde desliza sem atrito. Depois de percorrer uma distância *d*, entra em contacto com uma mola de constante elástica *k* e massa desprezável, inicialmente não deformada. Em contacto com a mola, o bloco percorre ainda uma distância adicional *x* até atingir um estado de repouso momentâneo, após o qual inverte o sentido do seu movimento.



Qual a distância inicial *d* percorrida pelo bloco?

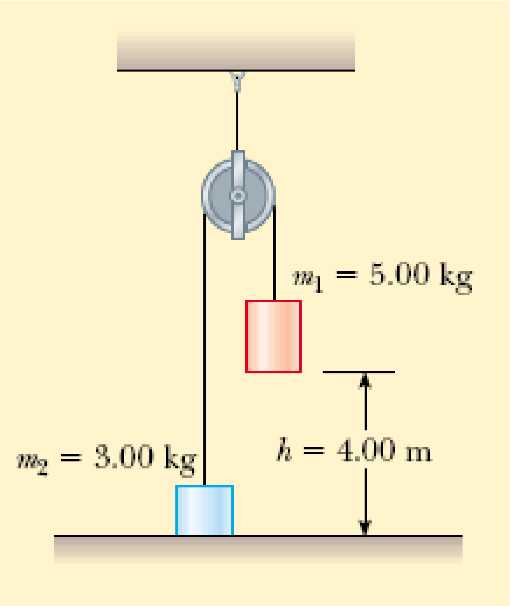
R: $d = \boxed{\dfrac{kx^2}{2mg\sin\theta} - x}$

Aplicação

Os dois blocos representados na figura estão ligados por um fio inextensível e de massa desprezável, que passa por uma roldana sem atrito. Os blocos são abandonados em repouso na configuração representada.

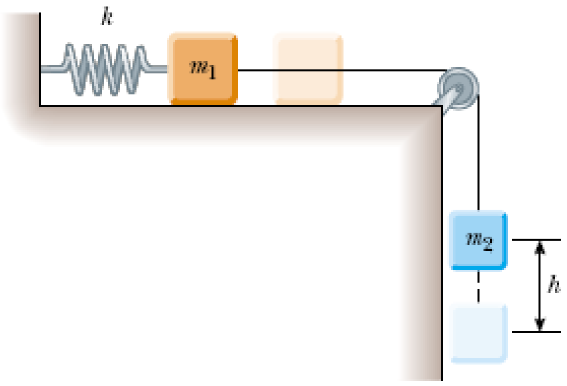
Porque é que para o sistema constituído pelos 2 blocos e a Terra, podemos considerar que há conservação da energia mecânica?

Qual a velocidade do bloco 2 quando o bloco 1 chega ao chão?



R: v_2=4.43m/s;

Aplicação



Os dois blocos representados na figura estão ligados por um fio inextensível e de massa desprezável, que passa por uma roldana sem atrito. O bloco 1 está pousado numa superfície horizontal onde pode deslizar com atrito. Os blocos são abandonados em repouso na configuração representada, com a mola não deformada.

Se o bloco 2 desce uma altura h até ficar novamente em repouso, qual o coeficiente de atrito cinético entre o bloco 1 e a superfície?

R: $$\mu_k = \frac{m_2 g - \frac{1}{2} k h}{m_1 g}$$

Aplicação

Os dois blocos representados na figura estão ligados por um fio inextensível e de massa desprezável, que passa por uma roldana sem atrito.

Determine a variação de energia cinética do sistema quando o bloco de 50kg se desloca entre os pontos A e B, distantes entre si 20m, sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre este e a superfície do plano inclinado tem o valor 0.250.