**Algorytmy i Struktury Danych – Laboratoria**

Dr. Hab. Inż. Małgorzata Sterna

Informatyka, semestr 2, grupa i2, wtorki godz. 13.30

25.04.2017r.

**Ćwiczenie nr.4 – Algorytm z powracaniem**

Krzysztof Pasiewicz, 132302

Mikołaj Frankowski, 132220

**Zadanie 2**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |V| | E | H1 | HA |
| 5 | 0,022106 | 0,00158 | 0,001579 |
| 6 | 0,003553 | 0,005132 | 0,008685 |
| 7 | 0,002369 | 0,003158 | 0,004737 |
| 8 | 0,002763 | 0,001973 | 0,028422 |
| 9 | 0,002369 | 0,005132 | 0,040265 |
| 10 | 0,003552 | 0,026054 | 0,327253 |
| 11 | 0,003948 | 0,004737 | 2,79527 |
| 12 | 0,005132 | 0,005921 | 13,5899 |
| 13 | 0,013027 | 0,004737 | 207,932 |
| 14 | 0,005527 | 0,003553 | 3060,89 |
| 15 | 0,013027 | 0,008684 | 13436,3 |
| 25 | 0,036318 | 0,013817 |  |
| 35 | 0,069477 | 0,019738 |  |
| 45 | 0,311322 | 0,063555 |  |
| 55 | 0,757537 | 0,189483 |  |
| 65 | 1,20993 | 0,365545 |  |
| 75 | 1,63863 | 2,11668 |  |
| 85 | 2,33419 | 0,43818 |  |
| 95 | 3,15608 | 2,53828 |  |
| 105 | 4,09441 | 0,772538 |  |
| 115 | 5,1946 | 0,786355 |  |

Tab. 1 – Czas wyszukiwania E, H1, HA

Problem znajdowania cyklu Eulera w grafie nieskierownym należy do klasy P-problemów. Oznacza to, że może on zostać rozwiązany przez Deterministyczną Maszynę Turinga (DTM) w czasie co najwyżej wielomianowym. Istnieje więc algorytm rozwiązujący ten problem w czasie wielominowym. Algorytm znajdowania cyklu Eulera cechuje się złożonością O(*m*), gdzie *m* to ilość krawędzi w danym grafie. Jest więc algorytmem wielomianowym. Algorytm wyszukiwania cyklu Hamiltona należy do klasy problemów NP-zupełnych, więc jest problemem klasy NP (rozwiązywanym w czasie wielominowym przez Niedeterministyczną Maszynę Turinga – NDTM), do którego transformują się inne problemy tej klasy. Oznacza to, że nie istnieje algorytm wielomianowy, mogący rozwiązać ten problem (w czasie wykładniczym można jedynie sprawdzić poprawność danego rozwiązania). Obecnie takie problemy są możliwe do rozwiązania jedynie przy użyciu algorytmów o złożoności wykładniczej. Zarówno algorytm wyszukiwania jednego jak i wszystkich cykli Hamiltona cechuje się złożonością rzędu O(n!). Jednakże w przypadku poszukiwania tylko jednego cyklu czas ten moze się bardzo mocno wachać, zależnie od danego grafu (jak szybko program trafił na pierwszy cykl Hamiltona). Algorytm ten jest więc algorytmem wykładniczym.

**Zadanie 3**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |V| | d=0,2 | d=0,6 |
| 5 | 0,008684 | 0,022106 |
| 6 | 0,001184 | 0,003553 |
| 7 | 0,001184 | 0,002369 |
| 8 | 0,001579 | 0,002763 |
| 9 | 0,00158 | 0,002369 |
| 10 | 0,002764 | 0,003552 |
| 11 | 0,002369 | 0,003948 |
| 12 | 0,003158 | 0,005132 |
| 13 | 0,002764 | 0,013027 |
| 14 | 0,003947 | 0,005527 |
| 15 | 0,003158 | 0,013027 |
| 25 | 0,022501 | 0,036318 |
| 35 | 0,030791 | 0,069477 |
| 45 | 0,06474 | 0,111322 |
| 55 | 0,102242 | 0,757537 |
| 65 | 0,149217 | 1,20993 |
| 75 | 0,173693 | 1,63863 |
| 85 | 0,237248 | 2,33419 |
| 95 | 0,350149 | 3,15608 |
| 105 | 0,989259 | 4,09441 |
| 115 | 2,21971 | 5,1946 |

Tab. 2 – Poszukiwanie cyklu Eulera

Algorytm wyszukiwania cyklu Eulera opiera się o algorytm przeszukiwania grafu „w głąb” – DFS, w którym zamiast wierzchołków przeglądamy krawędzie. Warunkiem koniecznym istnienia cyklu Eulera jest spójność grafu, natomiast warunek dostateczny wymaga, aby każdy wierzchołek był stopnia parzystego (dla grafów nieskierowanych), lub stopień wejściowy każdego wierzchołka równał się jego stopniowi wyjścowemu.Grafy do testów generowane były w sposób zapewniający spełnienie zarówno warunku dostatecznego jak i koniecznego istnienia cyklu Eulera. Graf był generowany losowo, następnie sprawdzano parzystość każdego wierzchołka. Jeśli stopień był nieparzysty łączono go krawędzią z dowolnym wierzchołkiem o wyższym indeksie lub jeśli krawędź ta istniała to ją usuwano. Na końcu sprawdzano za pamocą algorytmu DFS czy graf jest spójny. Generowano go do momentu gdy spełniał wszystkie powyższe warunki.

Algorytm wyszukiwania cyklu Eulera cechuje się złożonością O(m), ponieważ przy przeszukiwaniu grafu należy przejść przez wszystkie jego krawędzie dokładnie raz, usuwając(w ilości m), aby znaleźć właściwą scieżkę. W implementacji wykorzystano macierz sąsiedztwa, ze względu na łatwość w usuwaniu odwiedzonej już krawędzi. Wyszukiwanie następników byłoby lepsze w reprezentcji grafu przez listę łuków, jednak, jako iż graf był nieskierwoany każda krawędź musiałaby być zapamiętywania podwójnie, a usuwanie już istniejących krawędzi byłoby znacznie bardziej problematyczne.

Złożoność wyszukiwania cyklu Eulera wynosi O(m) przy założeniu, że wyszukiwanie i usiwanie krawędzi odbywa się w czasie stałym. Wraz ze wzrostem gęstości grafu, a więc zwiększaniem się liczby krawędzi rośnie czas działania algorytmu. W wypadku wykorzystanej przy implementacji macierzy sąsiedztwa wyszukanie wszystkich następników analizowanego wierzchołka będzie wymagało wykonania n operacji i zostanie wykonane co najmniej raz dla każdego wierzchołka, stąd ostateczna złożoność osiągnie O(n2+m).

**Zadanie 4**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |V| | d=0,2 | d=0,6 |
| 5 | 0,00079 | 0,00158 |
| 6 | 0,001184 | 0,005132 |
| 7 | 0,000789 | 0,003158 |
| 8 | 0,002368 | 0,001973 |
| 9 | 0,003158 | 0,005132 |
| 10 | 0,001974 | 0,026054 |
| 11 | 0,00829 | 0,004737 |
| 12 | 0,041844 | 0,005921 |
| 13 | 0,011843 | 0,004737 |
| 14 | 0,018554 | 0,003553 |
| 15 | 0,710562 | 0,008684 |
| 25 | 0,036713 | 0,013817 |
| 35 | 0,666744 | 0,019738 |
| 45 | 2,10997 | 0,033555 |
| 55 | 0,149218 | 0,189483 |
| 65 | 279,459 | 0,365545 |
| 75 | 8,19988 | 2,11668 |
| 85 | 38,9443 | 0,43818 |
| 95 | 0,167377 | 2,53828 |
| 105 | 0,734246 | 0,772538 |
| 115 | 155,742 | 0,786355 |

Tab. 3 – Czas wyszukiwania jednego cyklu Hamiltona

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |V| | d=0,2 | d=0,6 |
| 5 | 0,000789 | 0,001579 |
| 6 | 0,000789 | 0,008685 |
| 7 | 0,001184 | 0,004737 |
| 8 | 0,002368 | 0,028422 |
| 9 | 0,003553 | 0,040265 |
| 10 | 0,01579 | 0,327253 |
| 11 | 0,009474 | 2,79527 |
| 12 | 0,060792 | 13,5899 |
| 13 | 0,011843 | 207,932 |
| 14 | 0,38844 | 3060,89 |
| 15 | 2,48302 | 13436,3 |

Tab. 4 – czas wyszukiwania wszystkich cykli Hamiltona

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |V| | d=0,2 | d=0,6 |
| 5 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 2 |
| 7 | 1 | 2 |
| 8 | 0 | 48 |
| 9 | 0 | 20 |
| 10 | 3 | 431 |
| 11 | 0 | 2350 |
| 12 | 8 | 13917 |
| 13 | 0 | 370341 |
| 14 | 55 | 5165950 |
| 15 | 33 | 12653965 |

Tab.5 – Ilość cykli Hamiltona

Wyszukiwanie cykli Hamiltona w grafie opiera się na zastosowaniu algorytmu z powracaniem. Taki algorytm aby odnaleźć rozwiązanie musi wygenerować wszystkie możliwe przypadki sprawdzając ich poprawność i odrzucając niespełniające określonych założeń. Algorytm z powracaniem można zastosować do wielu problemów, jednak z powodu jego złożoności jest to opłacalne tylko w wypadku problemów NP-zupełnych.

Pomimo wyraźnie szybszego działania algorytm wyszukiwania jednego cyklu Hamiltona nie różni się złożonością od algorytmu wyszukiwania wszystkich cykli, która to złożoność wynosi O(n!). Dzieje się tak, ponieważ w najgorszym przypadku aby znaleźć jeden cykl należy przejrzeć permutacje wszystkich wierzchołków grafu tak jak w wypadku poszukiwania wszystkich cykli. Najlepszą reprezentacją, pod względem wpływu na złożoność, byłaby lista następników, jednak z powodu trudności płynącej z konieczności przeszukiwania całej listy chcąc usunąć drugie zapamiętanie tej samej krawędzi, które pojawia się w wypadku grafu nieskierowanego, wykorzystana została macierz sąsiedztwa.

Zasada działania algorytmu poszukującego jednego cyklu Hamiltona jest identyczna jak ta używana do odnalezienia wszystkich cykli jednak ta pierwsza przerywa działanie po natrafieniu na pierwszy cykl. Z tego powodu czas działania pierwszego algorytmu jest zazwyczaj krótszy. Wyszukiwanie jednego cyklu Hamiltona nie działa jednak w czasie „stabilnym”. Czas ten jest bardzo mocno zależny od tego jak szybko natrafimy w konkretnym grafie na cykl. Więc to budowa grafu w dużym stopniu determinuje czas działania tego algorytmu. Natomiast wyszukiwanie wszystkich cykli Hamiltona odbywa się w czasie znacznie stabilniejszym, nadal jednak zależnym od budowy grafu.

Wpływ na czas działania obu wersji algorytmu poszukiwania cyklu Hamiltona ma liczba wierzchołków grafu. To ona określa bowiem maksymalną ilość przypadków, które algorytm musi przeanalizować. Duże znaczenie dla czasu działania ma też liczba krawędzi. Im więcej krawędzi, tym szybciej algorytm wyszukiwania jednego cyklu Hamiltona odnajdzie jeden z przypadków i zakończy swoje działanie. Zatem im większa gęstość grafu tym szybsze działanie tego algorytmu. Natomiast algorytm wyszukiwania wszystkich cykli Hamiltona osiągnie krótszy czas przy małej gęstości grafu dzięki zwiększonemu prawdopodobieństwu odrzucenia danego przypadku już po przeanalizowaniu kilku wierzchołków. Większa gęstość grafu oznacza również zwiększenie maksymalnej liczby cykli Hamiltona. Jednak faktyczna ich ilość jest w dużym stopniu zależna od budowy grafu.

\*\* Fluktuacje czasowe na niektórych wykresach w początkowych punktach pomiarowych (np. Wyszukiwanie cyklu Eulera) wynikają z stałego odstępu między punktami pomiarowymi na wykresie i zmieniającym się krokiem pomiędzy nimi