Задачи к 1 и 2 лекции

Нечитаев Дмитрий

23 сентября 2019 г.

Задача 1

Необходимо проверить дифференцируемость комплекснозначных функций, найти полюса и их порядок.

$$z, z^2, \frac{1}{z}, |z|^2, Re(z), Im(z), \frac{1}{z^2+1}, e^z, cos(z), (z^*)^2, tan(z), th(z)$$

Проверяем условия Коши-Римана для каждой функции.

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ диф-ма} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$\mathbf{f(z) = z}$

$$z : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \text{ дифференцируема на } \mathbb{C}; \text{нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = z^2}$

$$z^2 : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \text{ дифференцируема на } \mathbb{C}; \text{нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = \frac{1}{z}}$

$$\frac{1}{z} : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \text{ дифференцируема на } \mathbb{C}\backslash\{0\};\ 0 \text{ - полюс первого порядка}$$

$\mathbf{f(z) = |z|^2}$

$$|z|^2 : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ дифференцируема в нуле; нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = Re(z)}$

$$Re(z) : \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \text{ не дифференцируема; нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = Im(z)}$

$$Im(z) : \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \neq 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow \text{ не дифференцируема; нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = \frac{1}{z^2+1}}$

Заметим, что $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{i}{2(z+i)} - \dfrac{i}{2(z-i)} \Rightarrow$ достаточно проверить одну дробь

$$\frac{1}{z+i} : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(y+1)^2 - x^2}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2x(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \text{ диф-ма на } \mathbb{C}\backslash\{-i\};\ -i \text{ - полюс первого порядка}$$

Вторая дробь рассчитывается аналогично. В таком случае $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ диф-ма на $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ и имеет полюса $\pm i$ первого порядка.

$\mathbf{f(z) = e^z}$

Преобразуем выражение $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(cos(y) + isin(y))$

$$e^z : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \text{ дифференцируема на } \mathbb{C}; \text{нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = cos(z)}$

$$cos(x+iy) = cos(x)cos(iy) - sin(x)sin(iy) = cos(x)ch(y) - isin(x)sh(y)$$

$$cos(z) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -sin(x)ch(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = cos(x)sh(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \text{ дифференцируема на } \mathbb{C}; \text{нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = (z^*)^2}$

$$f(z) = (z^*)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow$$

$$(z^*)^2 : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = -2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, -\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \text{ дифференцируема в нуле; нет полюсов}$$

$\mathbf{f(z) = tan(z)}$

$$f(z) = \frac{sin(x+iy)}{cos(x+iy)} = \frac{sin(x)ch(y) + icos(x)sh(y)}{cos(x)ch(y) - isin(x)sh(y)} = \frac{sin(2x)}{2(sh^2(y) + cos^2(x))} + \frac{ish(2y)}{2(sh^2(y) + cos^2(x))}$$

Вычисляем каждую частную производную

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2cos(2x)(sh^2(y) + cos^2(x)) + sin^2(2x)}{2(sh^2(y) + cos^2(x))^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2ch(2y)(sh^2(y) + cos^2(x)) - sh^2(2y)}{2(sh^2(y) + cos^2(x))^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{sin(2x)sh(2y)}{2(sh^2(y) + cos^2(x))^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Пусть теперь $2(sh^2(y) + cos^2(x))^2(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) = A$, тогда упрощение дает:

$$A = 2(cos(2x) - ch(2y))(sh^2y + cos^2x) + sin^2x + sh^2(2y) = 4(cos^2x - ch^2y)(sh^2y + cos^2x) + sin^2x + sh^2(2y) =$$

$$= 4cos^2xsh^2y + 4cos^4x - 4ch^2ysh^2y - 4ch^2ycos^2x + sin^2(2x) + sh^2(2y) = -4cos^2x(1 - cos^2x) + sin^2(2x) = 0$$

Получаем, что функция диф-ма на $\mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\}$, а точки из множества $P = \{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ являются полюсами первого порядка (это следует из того, что $cos(z + \frac{\pi}{2}) = -sin(z) \sim -z$ и $cos(z + \frac{3\pi}{2}) = sin(z) \sim z$ при малых z)

$\mathbf{f(z) = th(z)}$

Воспользуемся тождеством $tan(iz) = ith(z)$. Пусть $tan(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда

$$tan(i(x+iy)) = u(ix, iy) + iv(ix, iy) = ith(x+iy)$$

$$ith(x+iy) = \frac{sin(2ix)}{2(sh^2(iy) + cos^2(ix))} + \frac{ish(2iy)}{2(sh^2(iy) + cos^2(ix))}$$

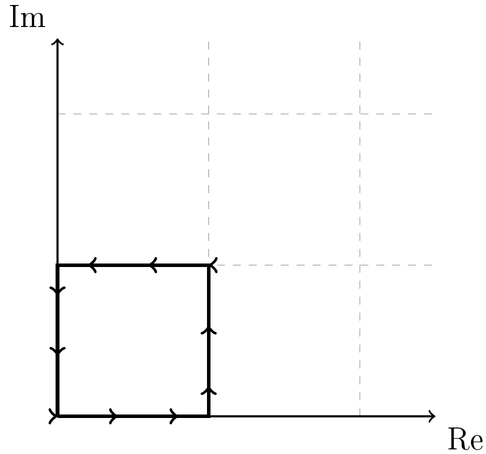
$$th(x+iy) = \frac{sh(2x)}{2(ch^2(x) - sin^2(y))} + \frac{isin(2y)}{2(ch^2(x) - sin^2(y))} = A(x,y) + iB(x,y)$$

$$A(x,y) = -iu(ix,iy), B(x,y) = -iv(ix,iy)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial u}{\partial x}(ix,iy)i = \frac{\partial u}{\partial x}(ix,iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(ix,iy) = -i\frac{\partial v}{\partial y}(ix,iy)i = \frac{\partial B}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(ix,iy)i = \frac{\partial u}{\partial y}(ix,iy) = -\frac{\partial v}{\partial x}(ix,iy) = i\frac{\partial v}{\partial x}(ix,iy)i = -\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Получаем, что функция диф-ма на $\mathbb{C}\backslash\{\frac{i\pi}{2}+i\pi k|k\in\mathbb{Z}\}$, а точки из множества $P=\{\frac{i\pi}{2}+i\pi k|k\in\mathbb{Z}\}$ являются полюсами первого порядка (это следует из того, что $ch(z+i\frac{i\pi}{2})\sim -z$ и $ch(z+i\frac{3i\pi}{2})\sim z$ при малых z)

Вычисление интеграла по единичному квадрату



$I_1 = \int_C zdz = \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+iy)dy + \int_1^0 (x+i)dx + \int_1^0 iydy =$
$= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} - i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

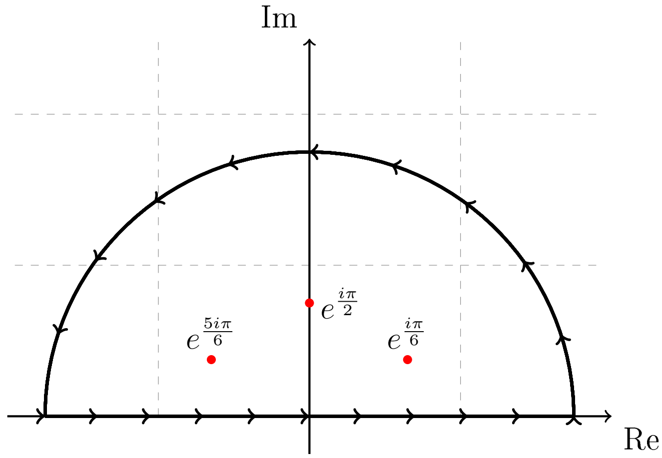
Задача 2

1 интеграл

Рассмотрим интеграл

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

для его рассчета проведем контур в верхней полуплоскости в виде дуги окружности.



$$\int_C \frac{dz}{z^6+1} = I_2 + I_R$$

Вклад второго слагаемого в интеграле по контуру $\sim \frac{1}{R^5}$, где R - радиус окружности. Т.е при $R \to +\infty$ можно считать, что интеграл по контуру равен I_2. Для подсчета интеграла по контуру воспользуемся основной теоремой о вычетах и вспомогательной теоремой, которая утверждает, что если $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ имеет простой полюс в точке z_0, а функции g, h регулярные в некоторой окрестности z_0, то верно

$$\underset{z_0}{Res} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Используя все вместе, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2i\pi\frac{1}{6}(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{5\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = 2i\pi\frac{-2i}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

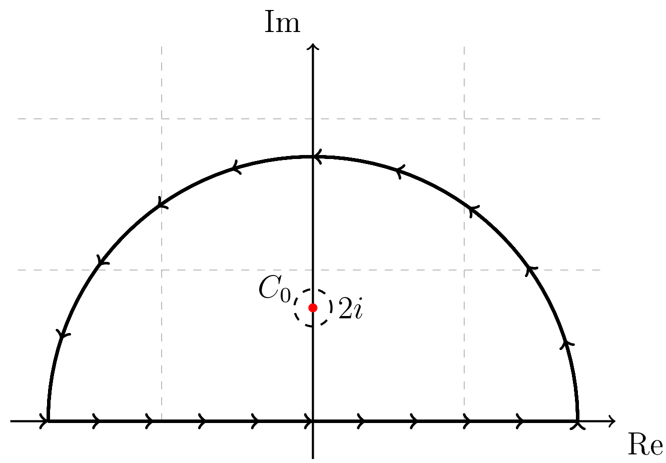
Окончательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}$$

2 интеграл

Для подсчета интеграла I_3 используем тот же контур, что и в прошлом пункте.

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$



$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2} = I_3 + I_R$$

В этот раз честно считаем вычет в токе $2i$.

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma = x - 2i \\ d\gamma = dx \end{array} \right\} = \int_{C_0} \frac{d\gamma}{\gamma^2(\gamma+4i)^2} = -\frac{1}{16}\int_{C_0} \frac{d\gamma}{\gamma^2(\frac{\gamma}{4i}+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{16}\int_{C_0} \frac{d\gamma}{\gamma^2}\Big(1 - \frac{2\gamma}{4i}\Big) = \frac{1}{16}\int_{C_0} \frac{d\gamma}{2i\gamma} = \frac{2i\pi}{2i\cdot 16} = \frac{\pi}{16}$$

Окончательно:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}$$

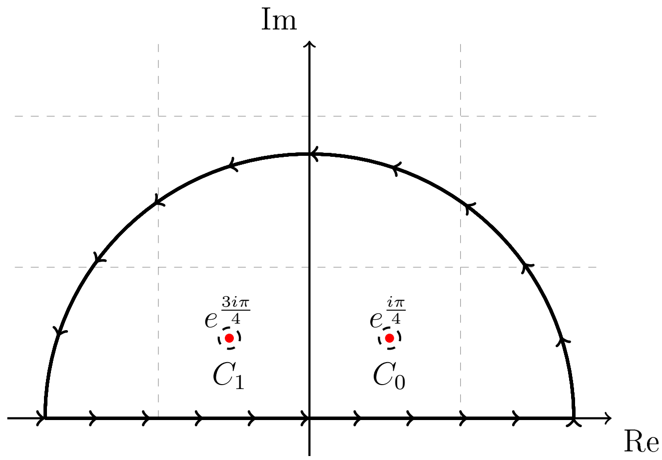
Задача 3

1 интеграл

Для вычисления интеграла I_4 заметим, что данный интеграл не зависит он знака t. Действительно, если раскрыть экспоненту в синус и косинус, то получим, что интеграл с синусом зануляется в силу нечетности подынтегральной функции. Т.е нам достаточно рассмотреть только один случай.

$$I_4(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}dx}{(x^4+1)}$$

Пусть $t > 0$, тогда контур необходимо прокладывать через верхнюю полуплоскость, т.к. в ней экспонента убывает, а следовательно при стремелении $R \to +\infty$ вклад по дуге в общий интеграл по контуру $\to 0$.



Все корни знаменателя простые, так что считаем вычеты по формуле с производной.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}dx}{x^4+1} = \frac{2i\pi}{4}\Big(\frac{e^{iz_1t}}{z_1^3} + \frac{e^{iz_2t}}{z_2^3}\Big) \text{ где } z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}};\ z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$\Big(\frac{e^{iz_1t}}{z_1^3} + \frac{e^{iz_2t}}{z_2^3}\Big) = e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\Big(e^{\frac{it}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{3i\pi}{4}} + e^{-\frac{it}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{i\pi}{4}}\Big) \text{ пусть } a = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-a}\Big(\frac{-i}{2}(e^{ai}+e^{-ai}) + \frac{i}{2i}(e^{-ai}-e^{ai})\Big) = \frac{-2i}{\sqrt{2}}e^{-a}(\cos a + \sin a) \Rightarrow$$

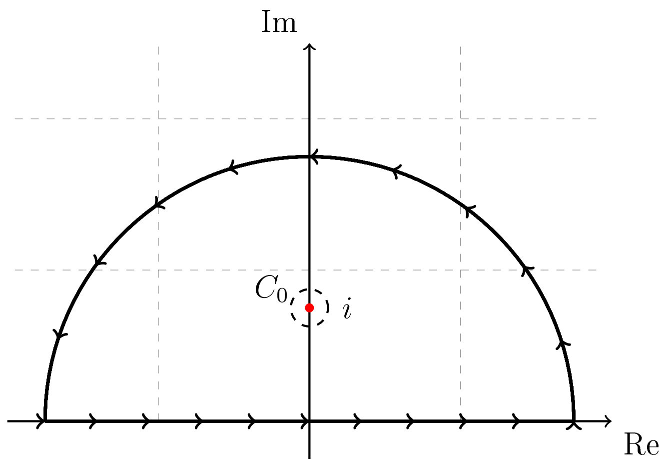
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}dx}{x^4+1} = \frac{2i\pi}{4}\ \frac{-2i}{\sqrt{2}}e^{-a}(\cos a + \sin a) = \pi e^{\frac{-t}{\sqrt{2}}} sin(t+\frac{\pi}{4}) \text{ при } t > 0$$

Но т.к. интеграл не зависит от знака t, то окончательный ответ.

$$I_4(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}dx}{x^4+1} = \pi e^{\frac{-|t|}{\sqrt{2}}} sin(|t| + \frac{\pi}{4})$$

2 интеграл

В этом пункте мы просто раскладываем экспоненту вблизи особенности знаменателя. Если $t > 0$, контур должен располагаться в верхней полуплоскости, т.к. в таком случае интеграл по дуге экспоненциально убывает с увеличением радиуса окружности. При $t < 0$ ситуация обратная.



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}dx}{(x-i)^2}=\left\{\begin{array}{c}\gamma=x-i\\ d\gamma=dx\end{array}\right\}=e^{-t}\int_{C_0}\frac{e^{i\gamma t}d\gamma}{\gamma^2}=e^{-t}\int_{C_0}\frac{(1+i\gamma t)d\gamma}{\gamma^2}=ite^{-t}\int_{C_0}\frac{d\gamma}{\gamma^2}=-2\pi te^{-t}\text{ при }t>0$$

Когда $t<0$ располащающийся в нижней полуплоскости контур не захватывает особенностей подынтегральной функции, а следовательно интеграл равен 0. Окончательно:

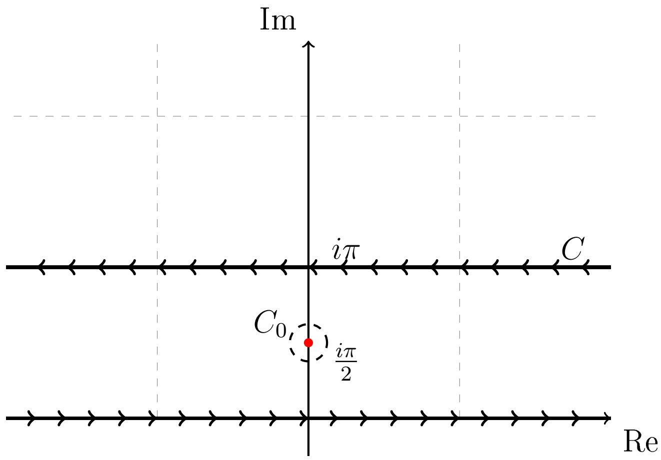
$$I_5(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}dx}{(x-i)^2}=\begin{cases}-2\pi te^{-t}\text{ при }t>0\\ 0\text{ при }t\leq 0\end{cases}$$

Задача 4

Рассмотрим интеграл.

$$I_6=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\cosh x}$$

Особенностей знаменателя много, очень много $P=\{\frac{i\pi}{2}+i\pi k|k\in\mathbb{Z}\}$, в таком случае возьмем хитрый контур, а именно:



$$\int_C \frac{x^2dx}{\cosh(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\cosh(x)} + \int_{+\infty+i\pi}^{-\infty+i\pi} \frac{x^2dx}{\cosh(x)} \; = I_6 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+i\pi)^2dx}{\cosh(x+i\pi)} =$$

$$= I_6 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+i\pi)^2dx}{\cosh(x)} = I_6 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\cosh(x)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i\pi x dx}{\cosh(x)} - \pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh(x)}$$

Первый интерал, очевидно, равен I_6. Второй интеграл равен 0 в силу нечетности подынтегральной функции. Третий интеграл был вычислен на лекции.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh(x)} = \pi$$

Все вместе дает:

$$\int_C \frac{x^2dx}{\cosh(x)} = 2I_6 - \pi^3$$

Точка $\frac{i\pi}{2}$ является простым полюсом, а значит используем формулу с производной.

$$2I_6 - \pi^3 = 2i\pi \frac{(\frac{i\pi}{2})^2}{\sinh(\frac{i\pi}{2})} = -\frac{\pi^3}{2} \Leftrightarrow I_6 = \frac{\pi^3}{4}$$

Окончательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\cosh x} = \frac{\pi^3}{4}$$

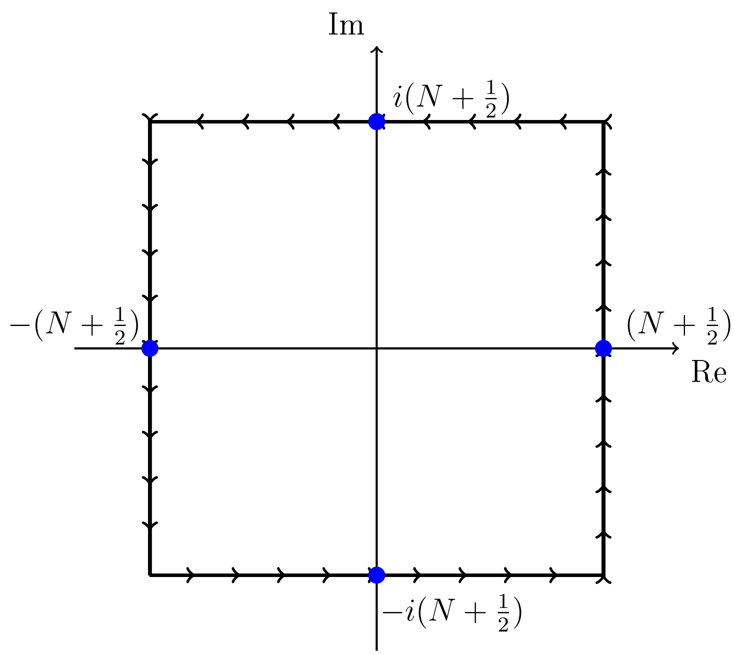
Задача 5

Необходимо вычислить сумму:

$$S(a,b) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi n + a} \frac{1}{2i\pi n + b} \text{ где } a, b \in \mathbb{R}$$

Для этого посчитаем интеграл:

$$\int_{C_N} \frac{\pi \cot(\pi z) dz}{(2i\pi z + a)(2i\pi z + b)}$$



Произведем оценку $cot(\pi z)$ на контуре C_N.

$$z = \pm(N + \frac{1}{2}) + iy \Rightarrow |\cot(\pi z)| = |\cot(\pm\frac{\pi}{2} + i\pi y)| = |\tan(i\pi y)| = |i\,\mathrm{th}(\pi y)| \leq 1$$

$$z = x \pm i(N + \frac{1}{2}) = x + iy \Rightarrow |\cot(\pi z)| = \left|\frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}\right| \leq \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{|e^{-\pi y} - e^{\pi y}|} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|} = \frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}} = \frac{1+e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}} \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} \\ y < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|} = \frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{e^{-\pi y}-e^{\pi y}} = \frac{1+e^{2\pi y}}{1-e^{2\pi y}} \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} \end{cases}$$

Таким образом, мы показали, что существует число M, которое не зависит от N и ограничивает $|\pi \cot(\pi z)|$ на контуре C_N. Это дает оценку:

$$\left|\int_{C_N} \frac{\pi \cot(\pi z) dz}{(2i\pi z + a)(2i\pi z + b)}\right| \leq \frac{4M(2N+1)}{4\pi^2 N^2} \to 0, N \to +\infty$$

Но с другой стороны, все полюса подынтегральной функции являются простыми, а это значит, что можно записать следующее тождество:

$$2i\pi\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\pi n)\pi}{\cos(\pi n)\pi}\frac{1}{(2i\pi n+a)(2i\pi n+b)}+\frac{\pi\cot(\pi\frac{ia}{2\pi})}{2i\pi(b-a)}+\frac{\pi\cot(\pi\frac{ib}{2\pi})}{2i\pi(a-b)}\Big)=0 \Leftrightarrow$$

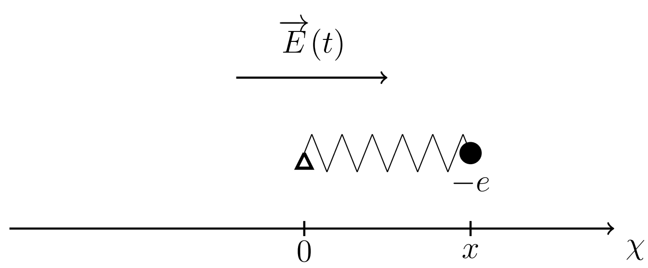
$$S(a,b)=\frac{\pi}{2i\pi(a-b)}\Big(i\coth\Big(\frac{b}{2}\Big)-i\coth\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big)$$

Окончательно:

$$S(a,b)=\frac{1}{2(a-b)}\Big(\coth\Big(\frac{b}{2}\Big)-\coth\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big)$$

Задача 6

Для начала рассмотрим поведение одного электрона.



Запишем систему из уравнения движения электрона и определения плотности тока.

$$\begin{cases} mx''=-kx-\frac{m}{\tau}x'-eE \\ j=-nev \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx'''=-kx'-\frac{m}{\tau}x''-eE' \\ j=-nev \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mv''=-kv-\frac{m}{\tau}v'-eE' \\ j=-nev \end{cases} \Rightarrow$$

$$j''+j\frac{k}{m}+\frac{1}{\tau}j'+\frac{e^2n}{m}E'=0\left\{\begin{array}{l}\omega_0^2=\frac{k}{m}\\ 2\beta=\frac{1}{\tau}\\ A=-\frac{e^2n}{m}\end{array}\right\}j''+2\beta j'+\omega_0^2 j=AE'$$

Воспользуемся преобразованием фурье для нахождения связи между $\widehat{j}(\omega)$ и $\widehat{E}(\omega)$.

$$j(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\widehat{j}(\omega)e^{-i\omega t} \text{ и } E(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\widehat{E}(\omega)e^{-i\omega t}$$

Дифференцирование по времени данных величин и сокращение[1] интегралов дает нам следующее выражение.

$$-\omega^2\widehat{j} - 2i\beta\omega\widehat{j} + \omega_0^2\widehat{j} = -i\omega A\widehat{E} \Leftrightarrow \widehat{j}(\omega) = \frac{i\omega A\widehat{E}}{\omega^2 + 2i\beta\omega - \omega_0^2} \Rightarrow$$

$$\widehat{\sigma}(\omega) = \frac{i\omega A}{\omega^2 + 2i\beta\omega - \omega_0^2}$$

Из выражения для σ понятно, что при нулевой частоте (что соответствует стационарному полю E) проводимость 0, а значит и тока нет. При резонансе $\omega = \omega_0$, а значит:

$$\sigma_{\text{рез}} = \frac{iA}{2i\beta} = -\frac{e^2 n\tau}{m}$$

Обратным преобразованием фурье найдем функцию отклика $\sigma(t)$.

$$\sigma(t) = \frac{Ai}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{-i\omega t} d\omega}{\omega^2 + 2i\beta\omega - \omega_0^2}$$

Для начала проанализируем особенности знаменателя. $\omega_{1,2} = -i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -i\beta \pm \gamma$ (первый с плюсом)

$$\begin{cases} \beta \le \omega_0 \Rightarrow \text{оба корня лежат в нижней полуплоскости} \\ \beta > \omega_0 \Rightarrow \omega = i\beta(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\beta^2}}) \Rightarrow \text{оба корня лежат в нижней полуплоскости} \end{cases}$$

При подсчете интеграла в случае $t < 0$ контур нужно прокладывать в верхней полуплоскости, но т.к особенностей в таком контуре не будет, то и интеграл будет нулевым. Во втором сулчае ($t > 0$) контур располагается в нижней полуплоскости, причем все полюса функции являются простыми, тогда значение интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{-i\omega t} d\omega}{\omega^2 + 2i\beta\omega - \omega_0^2} = -2i\pi\Big(\frac{\omega_1 e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{\omega_2 e^{-i\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1}\Big) = -\frac{2i\pi}{2\gamma}\Big((\gamma - i\beta)e^{-it(\gamma - i\beta)} + (\gamma + i\beta)e^{-it(-\gamma - i\beta)}\Big) =$$

$$= -\frac{i\pi e^{-t\beta}}{\gamma}\Big(\gamma(e^{-it\gamma} + e^{it\gamma}) + i\beta(e^{it\gamma} - e^{-it\gamma})\Big) = -\frac{2i\pi e^{-t\beta}}{\gamma}\Big(\gamma\cos(\gamma t) - \beta\sin(\gamma t)\Big) \Rightarrow$$

$$\sigma(t) = \frac{Ae^{-t\beta}}{\gamma}\Big(\gamma\cos(\gamma t) - \beta\sin(\gamma t)\Big) \text{ при } t > 0$$

При $t = 0$ интеграл расходится. Окончательно:

$$\sigma(t) = \frac{Ae^{-t\beta}}{\gamma}\Big(\gamma\cos(\gamma t) - \beta\sin(\gamma t)\Big) \text{ при } t > 0$$

[1] После формального дифференцирования можно избавиться от интегралов след. образом: необходимо домножить на еще одну экспоненту $e^{i\Omega t}$ и проинтегрировать по t, этот ход даст нам $\delta(\Omega - \omega)$ вместо экспонент. Дальшейшее интегрирование по ω даст нам значение соответствующих производных фурье-образов в точке Ω .

Задача 7