

Задачи к 9 лекции

Нечитаев Дмитрий

28 ноября 2019 г.

Задача 1

Необходимо получить уравнения на медленные переменные в задаче Кеплера, предполагая, что частица находится в среде со слабым трением.

$$\mathbf{F}_{\text{ad}} = -\nu \dot{\mathbf{r}} \quad (1)$$

Запишем уравнение движения частицы:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} - \nu \dot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

На временах порядка нескольких периодов \mathbf{r} ведет себя как и в невозмущенной задаче Кеплера, значит данную функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \cos(n\omega t) + \mathbf{b}_n \sin(n\omega t) \quad (3)$$

После дифференцирования по времени постоянный вектор \mathbf{r}_0 исчезает, а это значит, что скорость частицы $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ при усреднении по периоду будет давать 0. Из этого можно заключить, что если усреднить уравнение движения (2) по периоду, то последнее слагаемое обнулится, т.е. имеет место соотношение:

$$\left\langle m\ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T = -\left\langle \frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} \right\rangle_T \quad (4)$$

Перейдем к исследованию эволюции медленных переменных. На лекции было получено соотношение для производных момента импульса и вектора Лапласа-Рунге-Ленца:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{ad}}, \quad \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha m} \mathbf{F}_{\text{ad}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{ad}}) \quad (5)$$

Переходим к средним значениям:

$$\dot{\mathbf{M}} = -\nu \left\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_t = -\frac{\nu}{m} \left\langle \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T = -\frac{\nu}{m} \left\langle \mathbf{M} \right\rangle_T \quad (6)$$

В силу того, что переменная \mathbf{M} является медленной, то считаем, что за период T момент импульса практически не меняется. Таким образом получаем соотношение:

$$\mathbf{M}(t) = -\frac{\nu}{m} \mathbf{M} \quad (7)$$

Интегрирование дает нам соотношение для момента импульса:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 \exp \left(-\frac{\nu}{m} t \right) \quad (8)$$

Разберемся теперь как эволюционирует вектор Рунге-Ленца:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -\left\langle \frac{1}{\alpha m} \nu \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \right\rangle_T + \frac{1}{\alpha} \left\langle \dot{\mathbf{r}} \times \left(\mathbf{r} \times (-\nu \dot{\mathbf{r}}) \right) \right\rangle_T = \\ &= -\left\langle \frac{1}{\alpha m} \nu \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha} \left\langle \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \right\rangle_T = \frac{1}{\alpha} \left\langle \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Получается что вектор \mathbf{A} остается постоянным. Если обратиться к геометрическим параметрам орбиты, то получим, что эксцентриситет, равный $|\mathbf{A}|$ остается постоянным, а параметры орбиты, пропорциональный \mathbf{M}^2 задающий "размеры" траектории убывает со временем как $\sim \exp \left(-2\frac{\nu}{m} t \right)$. Т.е тело движется по подобным эллипсам, размеры которых убывают экспоненциально со временем.

В классической задаче Кеплера траектория в полярной системе координат определяется выражением:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + A \cos \phi}, \quad p = \frac{M^2}{\alpha m} \quad (10)$$

Посчитаем период обращения тела по такой траектории:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = \int_0^{2\pi} \frac{mr^2}{M^2} d\phi = \frac{mp^2}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + A \cos \phi)^2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J(\beta) &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\beta + A \cos x} = \{t = \tan(x/2)\} = 2 \int_0^\infty \frac{2dt}{\beta(1+t^2) + A(1-t^2)} = 4 \int_0^\infty \frac{dt}{(A+\beta) + t^2(\beta-A)} = \\ &= \frac{4}{\beta-A} \int_0^\infty \frac{dt}{\frac{A+\beta}{\beta-A} + t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - A^2}} \end{aligned} \quad (12)$$

Для вычисления интеграла, который фигурирует в (15) необходимо взять производную $\partial_\beta J(\beta) \Big|_{\beta=1}$

$$\partial_\beta J(\beta) \Big|_{\beta=1} = - \frac{2\pi\beta}{(\beta^2 - A^2)^{3/2}} \Big|_{\beta=1} = - \frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Это выражение соответствует интегралу:

$$\partial_\beta J(\beta) = - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\beta + A \cos x)^2} \quad (14)$$

С учетом выражения (16), (17) находим выражение для периода из формулы (15):

$$\boxed{T = \frac{mp^2}{M} \cdot \frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}}} \quad (15)$$

Задача 2

В данной задаче требуется определить как будет изменяться траектория частицы, если учесть, что происходит потеря массы из-за излучения.

Первым делом определим внешнюю силу, которая действует на частицу, для этого запишем теорему об изменении количества движения:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} &= - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow m\dot{\mathbf{r}} + m\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow \\ m\ddot{\mathbf{r}} &= - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} - \dot{m}\dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (1)$$

Исследуем как меняется момент импульса. С учетом формулы (1) получаем:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \dot{\mathbf{M}} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{m}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\dot{m}}{m}\mathbf{M} \quad (2)$$

Важно заметить, что \mathbf{M} — это момент импульса только планеты, поэтому при посчете производной член, содержащий \dot{m} мы не учитывали, т.к. в таком случае получили бы изменение импульса системы: планета + излученное вещество. Из формулы (1) видно, что на такую систему действует только одна центральная сила, а значит и изменение момента импульса относительно центра поля будет нулевым.

Теперь обратимся к вектору Рунге-Ленца:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3)$$

Дифференцируем по времени:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + \frac{\dot{m}}{\alpha} \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \right\} - \frac{\dot{m}}{\alpha m} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} = -\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \right) \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \end{aligned} \quad (4)$$

Произведем усреднение выражений (2) и (4), учитывая, что¹ $T\dot{\alpha}/\alpha, T\dot{m}/m \ll 1$, где T — период обращения.

$$\dot{\mathbf{M}} = -\left\langle \frac{\dot{m}}{m} \right\rangle_T \mathbf{M} = -\frac{\dot{m}}{m} \mathbf{M} \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\left\langle \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \right) \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = -\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \right) \left\langle \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Получается, что т.к. планета теряет массу, то $\dot{m}/m < 0$ т.е. момент импульса экспоненциально растет, а значит характерный размер орбит возрастает как $\sim \exp(-2\frac{\dot{m}}{m}t)$. При этом эксцентриситет орбиты остается постоянным.

¹Данные соотношения показывают, что за время периода величины α, m практически не изменяются

Задача 3

Исследуем траекторию электрона в поле протона при добавлении слабого магнитного поля.

Уравнение движения электрона:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

Производные векторов \mathbf{M} , \mathbf{A} :

$$\dot{\mathbf{M}} = -e\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} - \frac{e}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})) \quad (2)$$

Отметим пару тождеств:

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})) \quad (3)$$

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

В силу того, что поле слабое, можно считать \mathbf{r} — периодическая функция, а значит $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})$ — тоже периодическая функция, тогда среднее значение производной (3) за период будет равно нулю². Тогда можно установить:

$$\left\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \right\rangle_T = \left\langle \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \right\rangle_T \quad (5)$$

Усредняя выражение (4), учитывая соотношение (5), получаем:

$$2\left\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \right\rangle_T = -\left\langle \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \right\rangle_T \quad (6)$$

Теперь можно посчитать усреднение момента импульса за период:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{e}{2m}\left\langle \mathbf{B} \times (m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \right\rangle_T = \frac{e}{2m}\mathbf{B} \times \mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} \quad (7)$$

Тут введено обозначение $\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m}\mathbf{B}$.

Из выражения (7) понятно, что вектор \mathbf{M} вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

²Это утверждение доказывалось в первой задаче

Перепишем уравнение (2) еще раз:

$$\dot{\mathbf{M}} = -e\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} - \frac{e}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})) \quad (2)$$

С учетом выражения для $\dot{\mathbf{M}}$ из уравнения (2) получаем соотношение для производной вектора \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} + \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} = \\ &= -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}\right) - \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \end{aligned} \quad (8)$$

Первые два члена в сумме зануляются при усреднении по периоду обращения. Подробнее рассмотрим что происходит с последним членом: если подставить вторую производную из уравнения движения и усреднить полученный результат, то понятно, что т.к. вектор \mathbf{M} практически не изменяется, то среднее значение величины $\sim \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}$ будет нулевым, тогда верно соотношение:

$$\left\langle \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \right\rangle_T = \left\langle \frac{\mathbf{r}}{\alpha r^3} \times \mathbf{M} \right\rangle_T \quad (9)$$

Теперь воспользуемся симметрией невозмущенной орбиты: для этого разложим вектор \mathbf{r} на 2 компоненты, первая будет параллельна \mathbf{A} , вторая перпендикулярна. Т.к. орбиты планет в невозмущенной задаче являются эллипсами, а вектор \mathbf{A} проведен из фокуса к перигею орбиты, то получается, что среднее значение величины $\sim \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{M}$ будет равно 0.

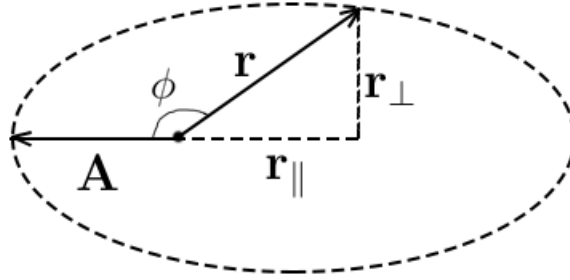


Рис. 1: Примерная орбита планеты

Получается что выражение (9) можно переписать в виде:

$$\left\langle \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \right\rangle_T = \left\langle \frac{\mathbf{r}_\parallel}{\alpha r^3} \times \mathbf{M} \right\rangle_T = \left\langle \frac{r \cos \phi \mathbf{A}}{\alpha r^3 A} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = \frac{1}{A\alpha} \left\langle \frac{\cos \phi}{r^2} \right\rangle_T \mathbf{A} \times \mathbf{M} \quad (10)$$

Теперь считаем интеграл:

$$\left\langle \frac{\cos \phi}{r^2} \right\rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos \phi}{r^2} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{d\phi}{\phi'_t} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{r^2 m}{M} d\phi = 0 \quad (11)$$

Возвращаясь по цепочке уравнений обратно к (2) делаем вывод, что вектор \mathbf{A} является постоянной величиной.

Задача 4

На электрон действует сила $\mathbf{F}_{ad} = \beta \ddot{\mathbf{v}}$, где коэффициент $\beta = \frac{2e^2}{3c^3}$. Требуется определить что будет происходить с орбитой электрона и через какое время он упадет на протон.

Производная момента импульса записывается:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{ad} \quad (1)$$

Пусть изначально электрон двигался по окружности, тогда его скорость определяется соотношением:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2)$$

Пренебрегая изменением r за период находим соотношения для производных скорости:

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad \ddot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{v}} \quad (3)$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что движение электрона будет плоским. Это утверждение очевидно, если сила является центральной, поэтому необходимо разобраться как добавочная сила \mathbf{F}_{ad} влияет на момент импульса. Если отталкиваться от задачи Кеплера, то получим, что вектор $\ddot{\mathbf{v}}$ лежит в плоскости орбиты, причем он $\parallel \mathbf{v}$. Получается, добавочная сила меняет модуль момента импульса, и движение остается плоским. В таком случае можно переписать уравнение (3) через скалярные³ величины.

$$F_{ad} = \beta \omega^3 r \quad (4)$$

В скалярном виде уравнение (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mrv) &= -\beta \omega^3 r \cdot r \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt}(m\omega r^2) &= -\beta \omega^3 r^2 \end{aligned} \quad (5)$$

³Тут под ω подразумевается $|\boldsymbol{\Omega}|$

Для определения зависимости радиуса от времени воспользуемся проекцией закона движения электрона на радиальную ось:

$$m\omega^2 r = \frac{e^2}{r^2} \quad (6)$$

Вытащим из этого соотношения ω :

$$\omega = \frac{e}{r^{3/2}\sqrt{m}} \quad (7)$$

Тогда подстановка в (5) дает соотношение:

$$\frac{d}{dt}(e\sqrt{mr}) = -\frac{\beta e^3 r^2}{r^{9/2} m^{3/2}} \quad (8)$$

Интегрируем уравнение (8):

$$\int_{R_0}^0 \sqrt{r^5} d\sqrt{r} = - \int_0^T \frac{\beta e^2}{m^2} dt \quad (9)$$

$$\frac{R_0^3}{6} = \frac{\beta e^2}{m^2} T \Leftrightarrow T = \frac{R_0^3 m^2}{6e^2 \beta} = \frac{R_0^3 m^2 3c^3}{12e^4} = \frac{R_0^3 m^2 c^3}{4e^4} \quad (10)$$

Окончательно получаем:

$$\boxed{T = \frac{m^2 c^3 R_0^2}{4e^4}}$$

Теперь разберемся что происходит в процессе движения с вектором \mathbf{A} .

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha m} \mathbf{F}_{ad} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{ad}) \quad (11)$$

Первое слагаемое при усреднении дает 0, т.к. в \mathbf{F}_{ad} сидит $\ddot{\mathbf{v}}$, которое является полной производной периодической функции. Для определения среднего значения второго члена выполним следующий ход:

$$\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{ad}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} + \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}) - \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}$$

Получается, что усреднение по периоду дает соотношение:

$$\left\langle \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{ad}) \right\rangle_T = -\left\langle \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \right\rangle_T = -\left\langle \ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = 0 \quad (12)$$

Последний переход в цепочке равенств (12) справедлив, т.к. электрон в невозмущенной задаче движется по окружности, а значит среднее ускорение будет нулевым.

Получается что вектор \mathbf{A} остается постоянным в процессе движения электрона.