Задачи к 4 лекции

Нечитаев Дмитрий

20 октября 2019 г.

Задача 1

'Билетик' — это последоательность вида

$$n_1 n_2 ... n_N m_1 m_2 ... m_N, \text{ где } \forall i \in \overline{1,N} \to n_i, m_i \in \overline{0,9}$$

Будем называть билетик "счастливым если для него выполняется

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Обозначим число счастливых билетиков как $H(N)$. Необходимо посчитать $H(N)$ в пределе $N >> 1$. Для этого решим несколько вспомогательных задач.

- Докажем формулу
$$\delta_{a,b} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ix(a-b)}$$
- Найдем интегральное представление $H(N)$.
- Применим метод перевала к интегральному представлению.

Шаг 1

Пусть $a = b$, тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Если $a \neq b$, то пусть $a - b = c \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, значение интеграла будет

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{icx} = \frac{1}{2c\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d(cx) e^{icx} = \frac{1}{2c\pi}\Big(e^{ic\pi} - e^{-ic\pi}\Big) = \frac{1}{c\pi}\sin(c\pi) = 0$$

Таким образом мы получили:

$$\delta_{a,b} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ix(a-b)}$$

Шаг 2

В интегральное представление $\delta_{a,b}$ можно подставить в качестве a — сумму первых N цифр, а в b — сумму последних N цифр, тогда представление $H(N)$ запишется в виде:

$$H(N) = \sum_{n_1=0}^{9}\sum_{n_2=0}^{9}...\sum_{n_N=0}^{9}\sum_{m_1=0}^{9}\sum_{m_2=0}^{9}...\sum_{m_N=0}^{9}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\exp(ix(n_1+n_2+...+n_N-m_1-m_2-...-m_N)) \quad (2.1)$$

Это страшное выражение можно упростить. Для этого необходимо занести знаки суммы под интеграл, затем посчитать сумму геометрической прогрессии.

$$H(N) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\sum_{n_1=0}^{9}\sum_{n_2=0}^{9}...\sum_{n_N=0}^{9}\sum_{m_1=0}^{9}\sum_{m_2=0}^{9}...\sum_{m_N=0}^{9} e^{ixn_1}e^{ixn_2}...e^{ixn_N}e^{-ixm_1}e^{-ixm_2}...e^{-ixm_N} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\frac{e^{10ix}-1}{e^{ix}-1}\sum_{n_2=0}^{9}...\sum_{n_N=0}^{9}\sum_{m_1=0}^{9}\sum_{m_2=0}^{9}...\sum_{m_N=0}^{9} e^{ixn_2}...e^{ixn_N}e^{-ixm_1}e^{-ixm_2}...e^{-ixm_N} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\Big(\frac{e^{10ix}-1}{e^{ix}-1}\Big)^N\sum_{m_1=0}^{9}\sum_{m_2=0}^{9}...\sum_{m_N=0}^{9} e^{-ixm_1}e^{-ixm_2}...e^{-ixm_N} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\Big(\frac{e^{10ix}-1}{e^{ix}-1}\Big)^N\frac{e^{-10ix}-1}{e^{-ix}-1}\sum_{m_2=0}^{9}...\sum_{m_N=0}^{9} e^{-ixm_2}...e^{-ixm_N} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\Big(\frac{e^{10ix}-1}{e^{ix}-1}\cdot\frac{e^{-10ix}-1}{e^{-ix}-1}\Big)^N = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\Big(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\cdot\frac{e^{-5ix}-e^{5ix}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}\Big)^N = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\Big(\frac{\sin(5x)}{\sin(\frac{x}{2})}\Big)^{2N} \Rightarrow$$

$$H(N) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\pi}\frac{\sin^{2N}(10x)}{\sin^{2N}(x)} \quad (2.2)$$

Шаг 3

Применим к полученному выражению метод перевала. Детальней рассмотрим функцию $\sin(10x)/\sin(x)$. Т.к. данная функция является четной, что в нуле все нечентные производные будут равны 0. Посмотрим что происходит со второй производной.

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\sin(10x)}{\sin(x)} = \csc(x)\Big(\sin(10x)(\cot^2(x) + \csc^2(x) - 100) - 20\cos(10x)\cot(x)\Big)$$

В нуле вторая производная стремится к значению -330. Т.е контур в комплексной плоскости деформировать не нужно.

Вообще, подынтегральная функция имеет и другие точки максимума, но значения, которые в этих точках достигаются будут меньше 10. Возьмем точку $x_0 = \frac{\pi}{10}$ — точка, соответсвующая первому нулю числителя. Тогда верна оценка неравенств:

$$\frac{|\sin(10x)|}{\sin(x)} \le \frac{|\sin(10x)|}{\sin(\pi/10)} \le \frac{|\sin(10x)|}{\sin(\pi/12)} \le \frac{1}{\sin(\pi/12)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \le 3.9 \quad \forall |x| \in \left[\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Получается, что при больших значениях N нам достаточно учесть влияние одной перевальной точки. Разложим логарифм в нуле до второго порядка:

$$\ln\left(\frac{\sin(10x)}{\sin(x)}\right) = \ln(10) - \frac{33}{2}x^2 + o(x^3) \tag{3.1}$$

Подставляем это разложение в интеграл (2.2):

$$H(N) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\pi}\exp\left(2N\ln\left(\left|\frac{\sin(10x)}{\sin(x)}\right|\right)\right) \approx \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\pi}\exp\left(2N(\ln(10) - \frac{33}{2}x^2)\right) =$$

$$= \frac{10^{2N}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-33Nx^2} = \frac{10^{2N}}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{33N}} = \frac{100^N}{\sqrt{33\pi N}}$$

Оценим точность полученного результата. Известно, что $H(3) = 55252$, наша формула дает значение $H(3) \approx 56700$. В таком случае относительная ошибка не более 3%.

Задача 2

Вычислить асиптотику биномиальных коэффециентов, используя интегрирование в комплексной плоскости и метод перевала.

- Докажем формулу
$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}\frac{(1+z)^n}{z^k}$$
интегирование по единичной окружности против часовой стрелки.

- Положим теперь $k = xn$, где $0 < x < 1$. Считая, что $n, x, (1-x)n \gg 1$, найдем методом перевала асиптотику C_n^k.

- Проверка правильности ответа с помощью формулы Стирлинга.
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Шаг 1

Рассмотрим интеграл:
$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}\frac{(1+z)^n}{z^k} \text{ где } n, k > 0$$
Подынтегральное выражение имеет особенность в нуле, а это значит, что интеграл определяется только вычетом в нуле.

Воспользуемся разложением числителя дроби в ряд:
$$(1+z)^n = \sum_{p=1}^{\infty} C_n^p z^p \tag{1.1}$$
$$\frac{(1+z)^n}{z^k} = \sum_{p=1}^{\infty} C_n^p z^{p-k} \tag{1.2}$$
Тогда при интегрировании по единичной окружности мы получем:
$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}\frac{(1+z)^n}{z^k} = \int_{|z|=1}\frac{dz}{z}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} C_n^p z^{p-k}\Big) = \int_{|z|=1}\frac{dz}{z}C_n^k = 2i\pi C_n^k \tag{1.3}$$
Окончательно:
$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}\frac{(1+z)^n}{z^k} \tag{1.4}$$

Шаг 2

Положим теперь $k = xn$, где $0 < x < 1$. Считая, что $n, x, (1-x)n \gg 1$.

Найдем методом перевала асиптотику C_n^k, для этого рассмотрим поведение фунции $f(z) = \ln(z+1) - x\ln(z)$.

$$f'(z_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_0+1} - \frac{x}{z_0} = 0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow z_0 + 1 = \frac{1}{1-x} \tag{2.1}$$

$$f''(z_0) = -\frac{1}{(z_0+1)^2} + \frac{x}{z_0^2} = \frac{(1-x)^2}{x} - (1-x)^2 = \frac{(1-x)^3}{x} = -\frac{e^{i\pi}(1-x)^3}{x} \tag{2.2}$$

Т.е. деформированный контур должен проходить через точку $z_0 = x/(1-x)$ под уголом $\pi/2$. Для этого достаточно изменить радиус окружности в исходном интеграле. Разложим функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 до второго порядка.

$$f(z) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - x\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{e^{i\pi}(1-x)^3}{2x}z^2 + o(z^3) \tag{2.3}$$

Подставляем разложение в интеграл:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}\frac{(1+z)^n}{z^k} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}\exp(nf(z)) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{xn+1}\frac{1}{(1-x)^n}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp\left(\frac{n(1-x)^3}{2x}z^2\right)dz = \frac{i(1-x)^{xn-n+1}}{2i\pi x^{xn+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n(1-x)^3}{2x}z^2\right)dz =$$

$$= \frac{(1-x)^{xn-n+1}}{2\pi x^{xn+1}}\sqrt{\frac{2x\pi}{n(1-x)^3}} = \frac{(1-x)^{xn-n+1}}{x^{xn+1}}\sqrt{\frac{x}{2\pi n(1-x)^3}} = \frac{(1-x)^{xn-n}}{x^{xn}}\sqrt{\frac{1}{2\pi nx(1-x)}} \tag{2.4}$$

Возвращаясь обратно к переменным k, n, получаем:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}} \tag{2.5}$$

Проверка результата

Проверим полученный результат. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Подставим данное представление в формулу для биномиальных коэффециентов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2\pi(n-k)}((n-k)/e)^{n-k}\sqrt{2\pi k}(k/e)^k} = \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}$$

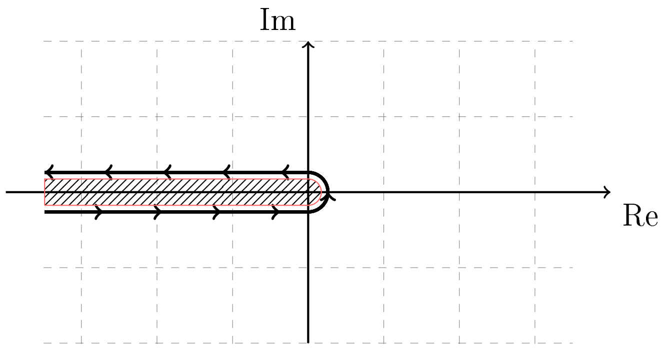
Можно радоваться, т.к. мы получили выражение (2.5).

Задача 3

Вычислить асимптотику функции Бесселя $z \to +\infty$.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{dt}{t^{\nu+1}}\exp\left(\frac{z}{2}\left\{t - \frac{1}{t}\right\}\right)$$

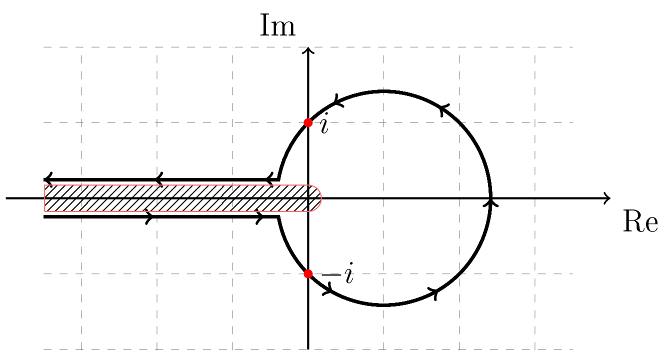
Разрез и контур изображены на рисунке:



Введем функцию $f(t) = t - \frac{1}{t}$. Исследуем её поведение:

$$f'(t_0) = 1 + \frac{1}{t_0^2} = 0 \Leftrightarrow t_0 = \pm i \Rightarrow f''(t) = -\frac{2}{t^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(i) = -2i \\ f''(-i) = 2i \end{cases}$$

Тогда проложим контур в комплексной плоскости следующим образом:



В данном случае у нас есть 2 перевальные точки, причем контур через точку i проходит под углом $5\pi/4$. Если изменить обход котнутура, то угол станет $\pi/4$ — тот, который нам и нужен. Получается, что для учета перевальной точки i нужно просто считать набор интеграла в окрестности i отрицательным.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\Big(- \frac{\exp(-i\pi/4)\exp(iz)}{\exp(\frac{i\pi}{2}(\nu+1))} + + \frac{\exp(i\pi/4)\exp(-iz)}{\exp(-\frac{i\pi}{2}(\nu+1))}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\exp\left\{\frac{i\pi}{4}-iz+\frac{i\pi}{2}(\nu+1)\right\}-\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}+iz-\frac{i\pi}{2}(\nu+1)\right\}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(-z+\frac{\pi}{2}(\nu+1)+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)$$

Окончательно:

$$\boxed{J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}$$