

# Задачи к 9 лекции

Нечитаев Дмитрий

25 ноября 2019 г.

## Задача 1

Необходимо получить уравнения на медленные переменные в задаче Кеплера, предполагая, что частица находится в среде со слабым трением.

$$\mathbf{F}_{\text{ad}} = -\nu \dot{\mathbf{r}} \quad (1)$$

Запишем уравнение движения частицы:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} - \nu \dot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

На временах порядка нескольких периодов  $\mathbf{r}$  ведет себя как и в невозмущенной задаче Кеплера, значит данную функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \cos(n\omega t) + \mathbf{b}_n \sin(n\omega t) \quad (3)$$

После дифференцирования по времени постоянный вектор  $\mathbf{r}_0$  исчезает, а это значит, что скорость частицы  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  при усреднении по периоду будет давать 0. Из этого можно заключить, что если усреднить уравнение движения (2) по периоду, то последнее слагаемое обнулится, т.е. имеет место соотношение:

$$\left\langle m\ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T = -\left\langle \frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} \right\rangle_T \quad (4)$$

Перейдем к исследованию эволюции медленных переменных. На лекции было получено соотношение для производных момента импульса и вектора Лапласа-Рунге-Ленца:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{ad}}, \quad \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha m} \mathbf{F}_{\text{ad}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{ad}}) \quad (5)$$

Переходим к средним значениям:

$$\dot{\mathbf{M}} = \left\langle \mathbf{r} \times \left( m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \right) \right\rangle_T = m \left\langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \quad (6)$$

Преобразуем выражение для среднего:

$$\left\langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T = \left\langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T + \left\langle \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T = \frac{d}{dt} \left\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T = -\frac{m}{\nu} \frac{d}{dt} \left\langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \quad (7)$$

Решаем диффур:

$$\left\langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \right\rangle_T = \mathbf{Q}_0 \exp \left( -\frac{\nu}{m} t \right) \quad (8)$$

Тут  $\mathbf{Q}_0$  — постоянный вектор, значение которого мы определим чуть позже.

Подставляем соотношение (8) в уравнение (6):

$$\dot{\mathbf{M}} = m \mathbf{Q}_0 \exp \left( -\frac{\nu}{m} t \right) \quad (9)$$

Т.к. в системе есть диссипация, то в конечном итоге тело потеряет весь свой момент импульса, т.е. на бесконечности  $\mathbf{M} \rightarrow 0$ . Интегрируем уравнение (9):

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 + \frac{m^2 \mathbf{Q}_0}{\nu} \left( 1 - \exp \left( -\frac{\nu}{m} t \right) \right) \quad (10)$$

Предельный переход  $t \rightarrow \infty$  дает соотношение для  $\mathbf{Q}_0$ :

$$\mathbf{Q}_0 = -\mathbf{M}_0 \frac{\nu}{m^2} \quad (11)$$

Тогда уравнение на момент импульса примет вид:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 \exp \left( -\frac{\nu}{m} t \right) \quad (12)$$

Разберемся теперь как эволюционирует вектор Рунге-Ленца:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -\left\langle \frac{1}{\alpha m} \nu \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \right\rangle_T + \frac{1}{\alpha} \left\langle \dot{\mathbf{r}} \times \left( \mathbf{r} \times (-\nu \dot{\mathbf{r}}) \right) \right\rangle_T = \\ &= -\left\langle \frac{1}{\alpha m} \nu \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha} \left\langle \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \right\rangle_T = \frac{1}{\alpha} \left\langle \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Получается что вектор  $\mathbf{A}$  остается постоянным. Если обратиться к геометрическим параметрам орбиты, то получим, что эксцентриситет, равный  $|\mathbf{A}|$  остается постоянным, а параметры орбиты, пропорциональный  $\mathbf{M}^2$  задающий "размеры" траектории убывает со временем как  $\sim \exp \left( -2 \frac{\nu}{m} t \right)$ . Т.е. тело движется по подобным эллипсам, размеры которых убывают экспоненциально со временем.

В классической задаче Кеплера траектория в полярной системе координат определяется выражением:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + A \cos \phi}, \quad p = \frac{M^2}{\alpha m} \quad (14)$$

Посчитаем период обращения тела по такой траектории:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\phi'_t} = \int_0^{2\pi} \frac{mr^2}{M^2} d\phi = \frac{mp^2}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + A \cos \phi)^2} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} J(\beta) &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\beta + A \cos x} = \{t = \tan(x/2)\} = 2 \int_0^\infty \frac{2dt}{\beta(1+t^2) + A(1-t^2)} = 4 \int_0^\infty \frac{dt}{(A+\beta) + t^2(\beta-A)} = \\ &= \frac{4}{\beta-A} \int_0^\infty \frac{dt}{\frac{A+\beta}{\beta-A} + t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - A^2}} \end{aligned} \quad (16)$$

Для вычисления интеграла, который фигурирует в (15) необходимо взять производную  $\partial_\beta J(\beta) \Big|_{\beta=1}$

$$\partial_\beta J(\beta) \Big|_{\beta=1} = -\frac{2\pi\beta}{(\beta^2 - A^2)^{3/2}} \Big|_{\beta=1} = -\frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}} \quad (17)$$

Это выражение соответствует интегралу:

$$\partial_\beta J(\beta) = - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\beta + A \cos x)^2} \quad (18)$$

С учетом выражения (16), (17) находим выражение для периода из формулы (15):

$$\boxed{T = \frac{mp^2}{M} \cdot \frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}}} \quad (19)$$

## Задача 2

В данной задаче требуется определить как будет изменяться траектория частицы, если учесть, что происходит потеря массы из-за излучения.

Первым делом определим внешнюю силу, которая действует на частицу, для этого запишем теорему об изменении количества движения:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} &= -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow m\dot{\mathbf{r}} + m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow \\ m\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} - m\dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (1)$$

Исследуем как меняется момент импульса. С учетом формулы (1) получаем:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \dot{\mathbf{M}} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{m}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\dot{m}}{m}\mathbf{M} \quad (2)$$

Важно заметить, что  $\mathbf{M}$  — это момент импульса только планеты, поэтому при посчете производной член, содержащий  $\dot{m}$  мы не учитывали, т.к. в таком случае получили бы изменение импульса системы: планета + излученное вещество. Из формулы (1) видно, что на такую систему действует только одна центральная сила, а значит и изменение момента импульса относительно центра поля будет нулевым.

Теперь обратимся к вектору Рунге-Ленца:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3)$$

Дифференцируем по времени:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + \frac{\dot{m}}{\alpha} \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \right\} - \frac{\dot{m}}{\alpha m} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} = -\left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \right) \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \end{aligned} \quad (4)$$

Произведем усреднение выражений (2) и (4), учитывая, что<sup>1</sup>  $T\dot{\alpha}/\alpha, T\dot{m}/m \ll 1$ , где  $T$  — период обращения.

$$\dot{\mathbf{M}} = -\left\langle \frac{\dot{m}}{m} \right\rangle_T \mathbf{M} = -\frac{\dot{m}}{m} \mathbf{M} \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\left\langle \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \right) \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = -\left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m} \right) \left\langle \dot{\mathbf{r}} \right\rangle_T \times \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Получается, что т.к. планета теряет массу, то  $\dot{m}/m < 0$  т.е. момент импульса экспоненциально растет, а значит характерный размер орбит возрастает как  $\sim \exp(-2\frac{\dot{m}}{m}t)$ . При этом эксцентриситет орбиты остается постоянным.

---

<sup>1</sup>Данные соотношения показывают, что за время периода величины  $\alpha, m$  практически не изменяются

## Задача 3

Исследуем траекторию электрона в поле протона при добавлении слабого магнитного поля.

Уравнение движения электрона:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

Производные векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}$ :

$$\dot{\mathbf{M}} = -e\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} - \frac{e}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})) \quad (2)$$

Отметим пару тождеств:

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})) \quad (3)$$

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

В силу того, что поле слабое, можно считать  $\mathbf{r}$  — периодическая функция, а значит  $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})$  — тоже периодическая функция, тогда среднее значение производной (3) за период будет равно нулю<sup>2</sup>. Тогда можно установить:

$$\left\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \right\rangle_T = \left\langle \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \right\rangle_T \quad (5)$$

Усредняя выражение (4), учитывая соотношение (5), получаем:

$$2\left\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \right\rangle_T = -\left\langle \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \right\rangle_T \quad (6)$$

Теперь можно посчитать усреднение момента импульса за период:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{e}{2m}\left\langle \mathbf{B} \times (m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \right\rangle_T = \frac{e}{2m}\mathbf{B} \times \mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} \quad (7)$$

Тут введено обозначение  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m}\mathbf{B}$ .

Из выражения (7) понятно, что вектор  $\mathbf{M}$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$ .

---

<sup>2</sup>Это утверждение доказывалось в первой задаче