Задачи к 5 лекции

Нечитаев Дмитрий

9 ноября 2019 г.

Упражнение 1

Лагранжиан в ДСК

Выражение для Лагранжиана свободной частицы в интегрциальной системе отсчета с ДПСК:

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{1}$$

Находим уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2}$$

$$m\ddot{q}_i = 0 \tag{3}$$

Лагранжиан в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\sin(\phi)\dot{\phi} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\cos(\phi)\dot{\phi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases} \tag{4}$$

После возведения в квадрат и подстановки в уравнение (1), получаем:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}\right) \tag{5}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}^2\right) = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Лагранжиан в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\cos\theta\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi \\ \dot{y} = \dot{r}\cos\theta\sin\phi - r\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi \\ \dot{z} = \dot{z}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \tag{7}$$

Тогда Лагранжиан примет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) \tag{8}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = mr^2\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}\right) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Лагранжиан в кривольниейных координатах

Пусть нам теперь дан закон преобразования координат:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta & \partial x/\partial\zeta \\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta & \partial y/\partial\zeta \\ \partial z/\partial\xi & \partial z/\partial\eta & \partial z/\partial\zeta \end{pmatrix} \tag{10}$$

Тогда справедливо соотношение между дифференциалами:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \end{pmatrix} D^T \tag{11}$$

Перемножая строчку и столбец можно определить выражение для dl^2:

$$dl^2 = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \end{pmatrix} D^T D \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} \tag{12}$$

Замечаем, что $v^2dt^2 = dl^2$, т.е Лагранжиан преобретает вид:

$$L = \frac{m}{2}\begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} D^T D \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Пусть $\{q_1, q_2, q_3\}$ - новые координаты, а $\{x_1, x_2, x_3\}$ - старые координаты, тогда:

$$D = \Big(\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\Big) \Rightarrow L = \frac{m}{2}\Big(\dot{q}^j \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\dot{q}^k\Big) = \frac{m}{2}\Big(\dot{q}^j\dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\Big) \tag{14}$$

Из выражения (14) можно получить, что в Лагранжиан обобщенные скорости входят только во второй степени, это верно и в случае, когда новые координаты зависят от времени.

Получим уравнения движения. Для этого продифференцируем Лагранжиан по $\dot{q}^p$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^p} = \frac{m}{2}\Big(\delta^j_p \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\frac{\partial x^i}{\partial q^k} + \delta^k_p \dot{q}^j \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\Big) = m\dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^p}\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \tag{15}$$

Тогда уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\Big(m\dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^p}\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\Big) = \frac{\partial}{\partial q^p}\Big(\frac{m}{2}\dot{q}^j\dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\Big) \tag{16}$$

Упражнение 2

Пусть дана гладкая замкнутая кривая Γ без самопересечений.Необходимо найти кривую, которая при заданной длине ограничивает максимальную площадь.

Для решения введем 2 интегральных представления: площади A и длины P, задаваемые следующими формулами:

$$A[\Gamma] = \int_S dxdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x\dot{y} - y\dot{x})dt \tag{1}$$

$$P[\Gamma] = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} ds \tag{2}$$

Если зафиксировать длину кривой, но изменять площадь, то получим задачу на условный экстремум функционала $A[\Gamma]$, причем т.к условие записано в интегральном представлении, то для нахождения нужной кривой достаточно исследовать на безусловный экстремум функционал:

$$F[\Gamma](\lambda) = A[\Gamma] - \lambda P[\Gamma] = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\Big)dt \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Для этого воспользуемся уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\dot{y} = \frac{d}{dt}\Big(-\frac{y}{2} - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big) \\ -\frac{1}{2}\dot{x} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{x}{2} - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big) = 0 \\ \frac{d}{dt}\Big(x - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Из системы следует, что выражения под знаком дифференциала сохраняются, т.е. являются константами:

$$\begin{cases} y + \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = C_1 \\ x - \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - y = \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ x - C_2 = \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \end{cases} \Rightarrow (x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2 \tag{5}$$

Получилось уравнение окружности, причем константу λ можно найти из условия для периметра $-2\pi\lambda = P$, тогда все потенциально подходящие кривые описываются уравнением:

$$\boxed{(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \frac{P^2}{4\pi^2}} \tag{6}$$

Проверим теперь, что найденное решение дает нам максимальную площадь. Для этого рассмотрим новый функционал, который по своей сути является функционалом $F[\Gamma]$, но кривая теперь незамкнута.

$$J[u](\lambda) = \int_a^b (u - \lambda\sqrt{1+u'^2})dx = \int_a^b \Psi(x, u, u')dx \tag{7}$$

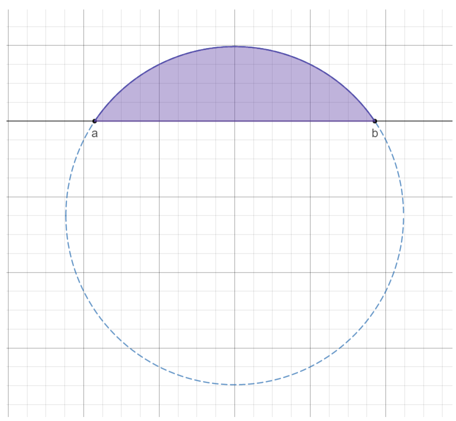


Рис. 1: Интегрирование производится по верхней дуге

Алгоритм исследования функционала на экстремум взят из книги[1, p. 9].

Проверим, что уравнение (6) обеспечивает максимальность функционала (3). Для этого необходимо проверить 2 условия:

1. Услове Лежандра — $\frac{\partial^2\Psi}{\partial u'^2} > 0 \; \forall x \in (a, b)$

2. Условие Якоби

С условием Лежандра все просто. Учет $-2\pi\lambda = P$ дает нам:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u'^2} = \frac{P}{2\pi\sqrt{(1+u'^2)^3}} > 0 \; \forall u' \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Теперь условие Якоби:

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u'^2}V'\Big) - \Big(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2\Psi}{\partial u \partial u'}\Big)V = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\Big(\frac{PV'}{2\pi\sqrt{(1+u'^2)^3}}\Big) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{V'}{\sqrt{(1+u'^2)^3}} = A_1 \Rightarrow \int_{V_0}^{V(x)} dV = A_1 \int_a^x \sqrt{(1+u'^2)^3}dx \tag{10}$$

Теперь вспомним, что вообще $u(x)$ описывает дугу окружности:

$$u = C_2 + \sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2} \Rightarrow u' = -\frac{(x-C_1)}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}} \tag{11}$$

Подставляем в (10):

$$A_1 \int_a^x dx \sqrt{\Big(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-(x-C_1)^2}\Big)^3} = A_1\lambda^3 \int_{a-C_1}^{x-C_1} (\lambda^2 - x^2)^{-3/2}dx = \Big\{x = -\lambda\cos(\theta)\Big\} =$$

$$= A_1\lambda \int_{\arccos(\frac{a-C_1}{\lambda})}^{\arccos(\frac{x-C_1}{\lambda})} sin^{-3}(\theta)\sin(\theta)d\theta = -A_1\lambda\cot(x)\Big|_{\arccos(\frac{a-C_1}{\lambda})}^{\arccos(\frac{x-C_1}{\lambda})} = V(x) - V_0 \Leftrightarrow$$

$$V(x) = V_0 + \frac{A_1 P}{2\pi}\left(\frac{x-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}} - \frac{a-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(a-C_1)^2}}\right) \tag{12}$$

Пусть начальные условия $V(a) = 0, V'(a) = 1$, тогда очевидно, что $V_0 = 0$. Разберемся с A_1, для этого соотношение (11) подставим в (10) при $x = a$:

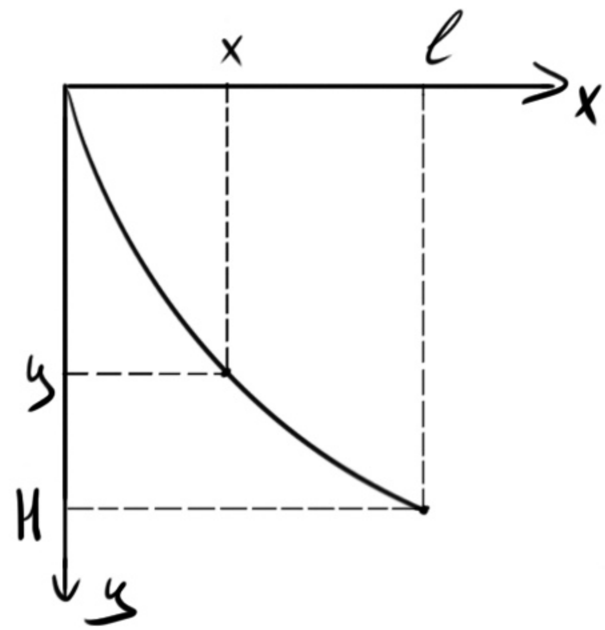
$$u'^2 + 1 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - (x-C_1)^2} \Rightarrow A_1 = \left(\frac{\lambda^2-(a-C_1)^2}{\lambda^2}\right)^{3/2} > 0 \tag{13}$$

Непосредственно из уравнения (10) следует, что функция $V(x)$ строго возрастает, а значит $\forall x \in (a,b) \to V(x) > 0$. Таким образом мы установили, что условие Якоби выполнено, т.е окружность огриничивает наибольшую площадь.

Задача 1

Пусть дан шарик и две точки в пространстве с известными координатами. Какую форму желоба нужно сделать, чтобы шарик без начальной скорости скатился под действием силы тяжести от одной точки к другой за наименьшее время?

Для удобства введем систему координат как показано на рисунке: Пусть параметризация кри-



вой имеет вид: $y = y(x)$, тогда длина элемента дуги определяется соотношением:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx \tag{1}$$

Из теоремы об изменении кин энергии находим:

$$v = \sqrt{\varkappa y} \tag{2}$$

Тогда за время $dt = dl/v$ шарик пройдет кусочек дуги, а значит для оптимизации времени спуска можно ввести функционал:

$$S[y(x)] = \int_0^l \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{\varkappa y}}dx \tag{2}$$

Для удобства рассчетов таскать за собой $\sqrt{\varkappa}$ не будем. Обозначим подынтегральное выражение за $L(y, y')$.

Можно и дальше упрощать жизнь: для этого стоит заметить, что L не зависит явно от x, а это нам очень помогает, ведь тогда верен переход:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial y}y' + \frac{\partial L}{\partial y'}y'' + \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial y}y' + \frac{\partial L}{\partial y'}y'' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial y'}y' = \frac{dL}{dx} - \frac{\partial L}{\partial y'}y'' \tag{3}$$

Для оптимизации интегрального функционала используем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} \tag{4}$$

Домножим обе части на y' и воспользуемся подстановкой из выражения (3):

$$\frac{dL}{dx} = y''\frac{\partial L}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\Big(y'\frac{\partial L}{\partial y'}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}\Big) = 0 \tag{5}$$

Поучаем дифференциальное уравнение:

$$L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = C \tag{6}$$

Подставляем L в уравнение (6):

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = C \quad \Leftrightarrow \quad (1+y'^2)y = (1/C)^2 \equiv k \tag{7}$$

$$y'^2 = \frac{k}{y} - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{k-y}{y}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{k-y}}dy = dx \tag{8}$$

$$y = k\sin^2\theta \Rightarrow dy = 2k\sin\theta\cos\theta d\theta \tag{9}$$

$$\int_0^{\theta_0}\Big|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Big|2k\cos\theta\sin\theta d\theta = k\int_0^{\theta_0}(1-\cos(2\theta))d\theta = \frac{k}{2}\Big(2\theta_0 - \sin(2\theta_0)\Big) = x(\theta_0) \tag{10}$$

Получаем кривую, заданную параметрически:

$$\boxed{\begin{cases} x(\theta) = \frac{k}{2}\Big(2\theta - \sin(2\theta)\Big) \\ y(\theta) = k\sin^2(\theta) \end{cases} \quad \forall\theta \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big]} \tag{11}$$

Числа k, θ_0 находится из системы (11) при подстановке $x(\theta_0) = l$ и $y(\theta_0) = H$.

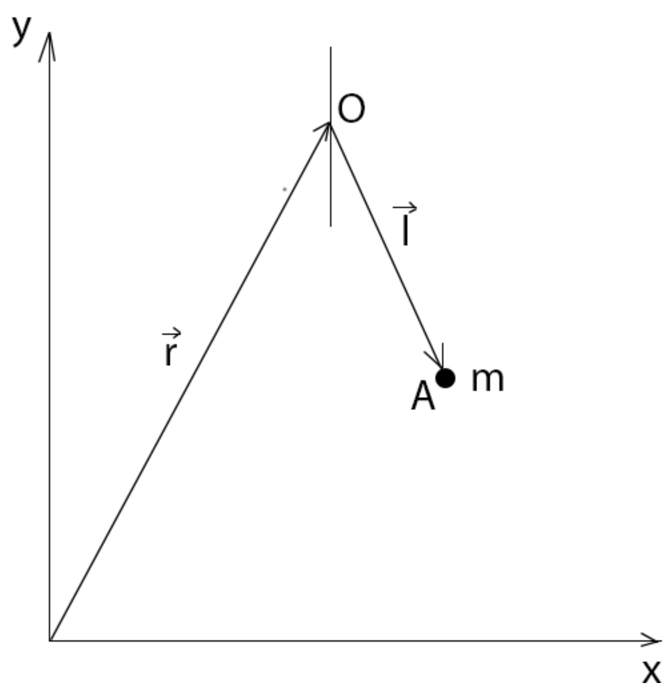
Задача 2

Рассмотрим обычный маятник, точка подвеса которого может совершать движение по какому-то произвольному, но известному закону $\mathbf{r}(t)$. Сам маятник представляет собой невесомую палку длины l и с массой m на конце.

1. Лагранжиан системы

Для однозначного определения положения маятника нам достаточно знать где находится точка подвеса и 2 угла, задающие точку на сфере, причем скорость маятника определяется соотношением:

$$\vec{V_A} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{l} \tag{1.1}$$



Тогда лагранжиан системы примет вид:

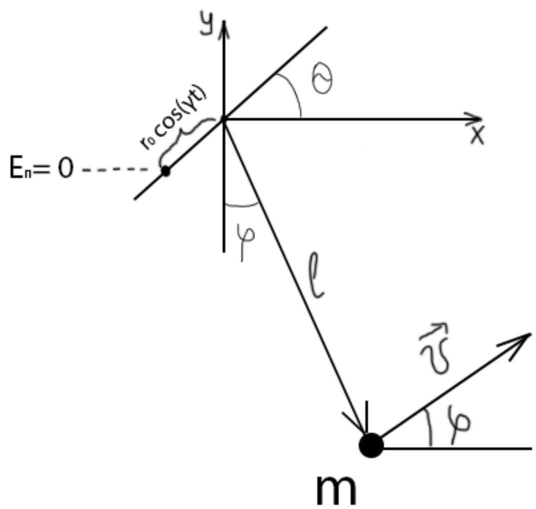
$$L = \frac{m(\vec{V_0}(t) + \vec{\omega} \times \vec{l})^2}{2} + m\vec{g}\Big(\ \vec{r}(t) + \vec{l}\ \Big) \tag{1.2}$$

$$L = \frac{m}{2}V_0^2 + \frac{m}{2}\omega^2 l^2 + m(\vec{V_0}, \vec{\omega} \times \vec{l}) + m\vec{g}\Big(\ \vec{r} + \vec{l}\ \Big) \tag{1.3}$$

2. Конкретный закон $r(t)$

Пусть теперь $\vec{r}(t) = r_0 \cos(\gamma t) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$, тогда лагранжиан примет вид:

$$L = \frac{m}{2}\gamma^2 r_0^2 \sin^2(\gamma t) + \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 l^2 - m\gamma r_0 \sin(\gamma t)\dot{\phi} l \cos(\phi - \theta) - mg\Big(r_0 \cos(\gamma t)\sin(\theta) - l\cos(\phi)\Big) \tag{2.1}$$



Выкидываем все полные производные из Лагранжиана:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 l^2 - m\gamma r_0 \sin(\gamma t)\dot{\phi} l \cos(\phi - \theta) + mgl\cos(\phi) \tag{2.2}$$

Если ввести обозначения $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, $A = \frac{\gamma}{\omega_0}\frac{r_0}{l}$, $B = \frac{\gamma}{\omega_0}$ то можно обезразмерить Лагранжиан ($m = 1$):

$$\tilde{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2\omega_0^2} - A\frac{\dot{\phi}}{\omega_0}\sin(\gamma t)\cos(\phi - \theta) + \cos(\phi) \tag{2.3}$$

Параметр A характеризует отношение максимальных скоростей точки подвеса (γr_0) и математического маятника ($\omega_0 l$). Последним штрихом будет нахождение связи между производными ϕ'_τ и ϕ'_t:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \Leftrightarrow \frac{\phi'_t}{\omega_0} = \phi'_\tau \tag{2.4}$$

Собираем все вместе:

$$\tilde{L} = \frac{\phi_\tau'^2}{2} - A\phi_\tau' \sin(B\tau)\cos(\phi - \theta) + \cos(\phi) \tag{2.5}$$

Находим уравнения движения:

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\phi_\tau' - A\sin(B\tau)\cos(\phi-\theta)\Big) = -A\phi_\tau'\sin(B\tau)\sin(\phi-\theta) - \sin(\phi) \Leftrightarrow$$

$$\phi_\tau'' + A\phi_\tau'\sin(B\tau)\sin(\phi-\theta) - AB\cos(B\tau)\cos(\phi-\theta) = A\phi_\tau'\sin(B\tau)\sin(\phi-\theta) - \sin(\phi) \Leftrightarrow$$

$$\phi_\tau'' = AB\cos(B\tau)\cos(\phi-\theta) - \sin(\phi) \tag{2.6}$$

Или в старых обозначениях:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin(\phi) = \frac{r_0}{l}\gamma^2\cos(\gamma t)\cos(\phi - \theta) \tag{2.7}$$

3. Вспомогательная задача

Рассмотрим колебание грузика на пружинке жесткости k, к которому приложена быстрая периодическая сила $F = mf_0\cos(\omega t)$, $\omega \gg \sqrt{k/m} = \omega_0$.

Уравнение движения:

$$x'' + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t) \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0 \tag{3.1}$$

Точное решение данной задачи Коши:

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \tag{3.2}$$

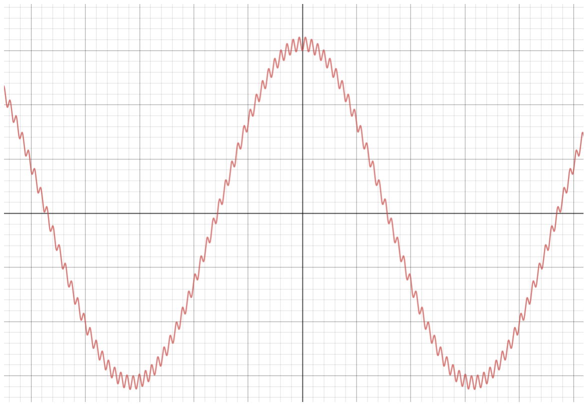


Рис. 2: График решения $x(t)$ при $\omega/\omega_0 = 55$

Перепишем уравнение (3.2) и учтем, что $v_0/\omega_0 \gg f_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$, при $\omega \gg \omega_0$:

$$x(t) \approx \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \tag{3.3}$$

Вид уравнения (3.3) позволяет сделать некоторые выводы относительно решения:

1. В системе есть 2 характерных времени $\tau_1 = 1/\omega_0$ и $\tau_2 = 1/\omega$. Это связано с тем, что решение уравнения состоит из двух гармоник. Гармоника с частотой ω_0 отвечает за движение маятника без учета внешней силы: $x_0(t)$ — невозмущенное решение. Вторая гармоника задает смещение относительно $x_1(t)$ и появляется из-за внешней силы.

2. Смещение относительно невозмущенного решения задается формулой:

$$x_1(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) \tag{3.4}$$

При $\omega \gg \omega_0$ можно разложить $x_1(t)$ по степеням ω_0/ω. Первый порядок дает нам ответ:

$$x_1(t) \approx -\frac{f_0}{\omega^2}\cos(\omega t) \tag{3.5}$$

4. Быстрые и медленные переменные

Вернемся к исследованию решения уравнения (2.7). Решение будем искать в виде суммы $\phi(t) = \psi(t) + \chi(t)$, где $\psi(t)$ — периодическое решение с частотой ω_0, а $\chi(t)$ — периодическое решение с частотой γ и амплитудой $\ll 1$.

Малось амплитуды решения с частотой γ следует из соотношения (3.5). Действительно, если подставить в качестве $f_0 = \frac{r_0}{l}\gamma^2 cos(\phi - \theta)$, то амплитуда χ будет порядка $r_0/l \ll 1$.

Подставим теперь в уравнение (2.7) вместо $\phi(t)$ сумму $\psi(t) + \chi(t)$, раскладывая функции по степеням χ до первого порядка.

$$\ddot{\psi} + \ddot{\chi} + \omega_0^2 \sin\psi + \chi\omega_0^2 \cos\psi = \frac{r_0}{l}\gamma^2 \cos(\gamma t)\Big(\cos(\psi - \theta) - \chi \sin(\psi - \theta)\Big) \tag{4.1}$$

Т.к функция $\chi(t)$ осциллирует с частотой γ, то для получения уравнения на $\chi(t)$ необходимо сгруппировать все слагаемые осциллирующие с той же частотой (или достаточно близкой к ней).

$$\ddot{\chi} + \chi\omega_0^2 \cos\psi = \frac{r_0}{l}\gamma^2 \cos(\gamma t)\Big(\cos(\psi - \theta) - \chi \sin(\psi - \theta)\Big) \tag{4.2}$$

Теперь вспоминаем, что на самом деле $\chi \ll 1$ и слагаемые содержащие χ можно выкинуть. Но выкидывать $\ddot{\chi}$ **НЕЛЬЗЯ** т.к. амплитуда второй производной порядка $\frac{r_0}{l}\gamma \gg \frac{r_0}{l}$.

$$\ddot{\chi} = \frac{r_0}{l}\gamma^2 \cos(\gamma t)\cos(\psi - \theta) \Rightarrow \chi(t) = -\frac{r_0}{l}\cos(\gamma t)\cos(\psi - \theta) \tag{4.3}$$

В последнем переходе мы интегрировали вторую производную, считая что ψ на временах порядка $1/\gamma$ практически не меняется.

Усредним уравнение (4.1) по периоду $T = 2\pi/\gamma$, в таком случае все слагаемые содержащие χ в нечетных степенях обратятся в 0, а величины, которые осциллируют с частотой $\omega_0 \ll \gamma$ практически не изменяются.

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \sin\psi = \frac{r_0^2\gamma^2}{l^2} < \cos^2(\gamma t) >_T \sin(\psi - \theta)\cos(\psi - \theta) = \frac{r_0^2\gamma^2}{2l^2}\sin(\psi - \theta)\cos(\psi - \theta) \tag{4.4}$$

Преобразуем выражение:

$$\ddot{\psi} = -\frac{d}{d\psi}\left(\frac{r_0^2\gamma^2}{4l^2}\cos^2(\psi - \theta) - \omega_0^2\cos\psi\right) \tag{4.5}$$

Выражение в скобках можно заменить функцией $U_{эфф}(\psi)$.

$$U_{эфф}(\psi) = \frac{r_0^2\gamma^2}{4l^2}\cos^2(\psi - \theta) - \omega_0^2\cos\psi \tag{4.6}$$

5. Положения равновесия и их устойчивость

1 случай $\theta = \frac{\pi}{2}$

Положения равновесия соответствуют экстремумам потенциалной энергии. Используем коэффециент A, введенный во 2 пункте, тогда при $\theta = \pi/2$ потенциал можно переписать:

$$U = \omega_0^2\Big(\frac{A^2}{4}\sin^2(\psi) - \cos(\psi)\Big) \tag{5.1.1}$$

$$\frac{dU}{d\psi} = \omega_0^2\Big(\frac{A^2}{2}\sin\psi\cos\psi + \sin\psi\Big) \tag{5.1.2}$$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \omega_0^2\Big(\frac{A^2}{2}\cos(2\psi) + \cos\psi\Big) \tag{5.1.3}$$

Точки экстремума отвечают углам: $0,\ \pi,\ \arccos(-2A^{-2})$, причем положение $\psi = 0$ устойчиво, а $\psi = \arccos(-2A^{-2})$ устойчивым не является:

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\arccos(-2A^{-2})) = \omega_0^2\Big(\frac{A^2}{2}(2(2A^{-2})^2 - 1) - 2A^{-2}\Big) = \omega_0^2\Big(\frac{2}{A^2} - \frac{A^2}{2}\Big) < 0 \tag{5.1.4}$$

Данное соотношение верно, если существует $\arccos(-2A^{-2})$ т.е. $2A^{-2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < A \Leftrightarrow \sqrt{2gl} < \gamma r_0$. В точке $\psi = \pi$ устойчивость определяется параметром А:

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\pi) = \omega_0^2\Big(\frac{A^2}{2} - 1\Big) \tag{5.1.5}$$

При $\sqrt{2} < A \Leftrightarrow \sqrt{2gl} < \gamma r_0$ положение является устойчивым, в противном случае равновесие неустойчиво.

1 случай $\theta = 0$

Положения равновесия соответствуют экстремумам потенциалной энергии. Используем коэффециент A, введенный во 2 пункте, тогда при $\theta = 0$ потенциал можно переписать:

$$U = \omega_0^2\Big(\frac{A^2}{4}\cos^2(\psi) - \cos(\psi)\Big) \tag{5.2.1}$$

$$\frac{dU}{d\psi} = \omega_0^2\Big(-\frac{A^2}{2}\sin\psi\cos\psi + \sin\psi\Big) \tag{5.2.2}$$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \omega_0^2\Big(-\frac{A^2}{2}\cos(2\psi) + \cos\psi\Big) \tag{5.2.3}$$

Точки экстремума отвечают углам: $0,\ \pi,\ \arccos(2A^{-2})$, причем положение $\psi = 0$ неустойчиво, а $\psi = \arccos(2A^{-2})$ устойчиво:

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\arccos(2A^{-2})) = \omega_0^2\Big(-\frac{A^2}{2}(2(2A^{-2})^2 - 1) + 2A^{-2}\Big) = \omega_0^2\Big(-\frac{2}{A^2} + \frac{A^2}{2}\Big) > 0 \tag{5.2.4}$$

Данное соотношение верно, если существует $\arccos(-2A^{-2})$ т.е. $2A^{-2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < A \Leftrightarrow \sqrt{2gl} < \gamma r_0$. В точке $\psi = \pi$ устойчивости нет:

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\pi) = \omega_0^2\Big(-\frac{A^2}{2} - 1\Big) < 0 \tag{5.2.5}$$

Список литературы

[1] А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин, Методические указания к решению "простейшей задачи"вариационного исчисления, Казань, 2013.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Издание 4-е, исправленное. — Москва: Наука, 1988.