# Задачи к 9 лекции

Нечитаев Дмитрий

1 декабря 2019 г.

## Задача 1

Необходимо получить уравнения на медленные переменные в задаче Кеплера, предполагая, что частица находится в среде со слабым трением.

$$\mathbf{F_{ad}} = -\nu\dot{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Запишем уравнение движения частицы:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} - \nu\dot{\mathbf{r}} \tag{2}$$

На временах порядка нескольких периодов $\mathbf{r}$ ведет себя как и в невозмущенной задаче Кеплера, значит данную функцию можно разложиьт в ряд фурье:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}\cos(n\omega t) + \mathbf{b_n}\sin(n\omega t) \tag{3}$$

После дифференцирования по времени постоянный вектор $\mathbf{r_0}$ исчезает, а это значит, что скорость частицы $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ при усреднении по периоду будет давать 0. Из этого можно заключить, что если усреднить уравнение движения (2) по периоду, то последнее слагаемое обнулится, т.е. имеет место соотношение:

$$\Big\langle m\ddot{\mathbf{r}}\Big\rangle_T = -\Big\langle \frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}\Big\rangle_T \tag{4}$$

Перейдем к исследованию эволюции медленных переменных. На лекции было получено соотношение для производных момента импульса и вектора Лапласа-Рунге-Ленца:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r}\times\mathbf{F_{ad}}, \qquad \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha m}\mathbf{F_{ad}}\times\mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}}\times\Big(\mathbf{r}\times\mathbf{F_{ad}}\Big) \tag{5}$$

Переходим к средним значениям:

$$\dot{\mathbf{M}} = -\nu\Big\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Big\rangle_t = -\frac{\nu}{m}\Big\langle \mathbf{r} \times \mathbf{m}\dot{\mathbf{r}} \Big\rangle_T = -\frac{\nu}{m}\Big\langle \mathbf{M} \Big\rangle_T \tag{6}$$

В силу того, что переменная $\mathbf{M}$ является медленной, то считаем, что за период $T$ момент импульса практически не меняется. Таким образом получаем соотношение:

$$\mathbf{M}(t) = -\frac{\nu}{m}\mathbf{M} \tag{7}$$

Интегрирование дает нам соотношение для момента импульса:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M_0}\exp\Big(-\frac{\nu}{m}t\Big) \tag{8}$$

Разберемся теперь как эволюционирует вектор Рунге-Ленца:

$$\dot{\mathbf{A}} = -\Big\langle \frac{1}{\alpha m}\nu\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \Big\rangle_T + \frac{1}{\alpha}\Big\langle \dot{\mathbf{r}} \times \Big(\mathbf{r} \times (-\nu\dot{\mathbf{r}})\Big)\Big\rangle_T =$$

$$= -\Big\langle \frac{1}{\alpha m}\nu\dot{\mathbf{r}} \Big\rangle_T \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\Big\langle \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \Big\rangle_T = \frac{1}{\alpha}\Big\langle \dot{\mathbf{r}} \Big\rangle_T \times \mathbf{M} = 0 \tag{9}$$

Получается что вектор $\mathbf{A}$ остается постоянным. Если обратиться к геометрическим параметрам орбиты, то получим, что эксцентреситет, равный $|\mathbf{A}|$ остается постоянным, а параметры орбиты, пропорциональный $\mathbf{M}^2$ задающий "размеры"траектории убывает со временем как $\sim \exp\Big(-2\frac{\nu}{m}t\Big)$. Т.е тело движется по подобным эллипсам, размеры которых убывают экспоненциально со временем.

В классической задаче Кеплера траектория в полярной системе координат определяется выражением:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + A\cos\phi}, \quad p = \frac{M^2}{\alpha m} \tag{10}$$

Посчитаем период обращения тела по такой траектории:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\phi'_t} = \int_0^{2\pi} \frac{mr^2}{M^2} d\phi = \frac{mp^2}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + A\cos\phi)^2} \tag{11}$$

$$J(\beta) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\beta + A\cos x} = \{t = \tan(x/2)\} = 2\int_0^{\infty} \frac{2dt}{\beta(1+t^2) + A(1-t^2)} = 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{(A+\beta) + t^2(\beta - A)} =$$

$$= \frac{4}{\beta - A} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\frac{A+\beta}{\beta-A} + t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - A^2}} \tag{12}$$

Для вычисления интеграла, который фигурирует в (15) необходимо взять производную $\partial_\beta J(\beta)\Big|_{\beta=1}$

$$\partial_\beta J(\beta)\Big|_{\beta=1} = -\frac{2\pi\beta}{(\beta^2 - A^2)^{3/2}}\Big|_{\beta=1} = -\frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}} \tag{13}$$

Это выражение соответствет интегралу:

$$\partial_\beta J(\beta) = -\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\beta + A\cos x)^2} \tag{14}$$

С учетом выражения (16), (17) находим выражение для периода из формулы (15):

$$\boxed{T = \frac{mp^2}{M} \cdot \frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}}} \tag{15}$$

# Задача 2

В данной задаче требуется определить как будет изменяться траектория частицы, если учесть, что происходит потеря массы из-за излучения.

Первым делом определим внешнюю силу, которая действует на частицу, для этого запишем теорему об изменении количества движения:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow \dot{m}\dot{\mathbf{r}} + m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} - \dot{m}\dot{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Исследуем как меняется момент импульса. С учетом формулы (1) получаем:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \dot{\mathbf{M}} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{m}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\dot{m}}{m}\mathbf{M} \tag{2}$$

Важно заметить, что $\mathbf{M}$ — это момент импульса только планеты, поэтому при посчете производной член, содержащий $\dot{m}$ мы не учитывали, т.к. в таком случае получили бы изменение импульса системы: планета + излученное вещество. Из формулы (1) видно, что на такую систему действует только одна центральная сила, а значит и изменение момента импульса относительно центра поля будет нулевым.

Теперь обратимся к вектору Рунге-Ленца:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{3}$$

Дифференцируем по времени:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}} &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \left\{\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + \frac{\dot{m}}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right\} - \frac{\dot{m}}{\alpha m}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} = -\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\right)\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}\end{aligned} \tag{4}$$

Произведем усреднение выражений (2) и (4), учитывая, что[1] $T\dot{\alpha}/\alpha, T\dot{m}/m \ll 1$, где $T$ — период обращения.

$$\dot{\mathbf{M}} = -\left\langle\frac{\dot{m}}{m}\right\rangle_T \mathbf{M} = -\frac{\dot{m}}{m}\mathbf{M} \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\left\langle\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\right)\dot{\mathbf{r}}\right\rangle_T \times \mathbf{M} = -\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\right)\left\langle\dot{\mathbf{r}}\right\rangle_T \times \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Получается, что т.к. планета теряет массу, то $\dot{m}/m < 0$ т.е. момент импульса экспоненциально растет, а значит характерный размер орбит возрастает как $\sim \exp(-2\frac{\dot{m}}{m}t)$. Причем эксцентриситет орбиты остается постоянным.

[1] Данные соотношения показывают, что за время периода величины $\alpha, m$ практически не изменаются

# Задача 3

Исследуем траекторию электрона в поле протона при добавлении слабого магнитного поля.

Уравнение движения электрона:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

Производные векторов $\mathbf{M}, \mathbf{A}$:

$$\dot{\mathbf{M}} = -e\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} - \frac{e}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \Big(\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})\Big) \tag{2}$$

Отметим пару тождеств:

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times B) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})\Big) \tag{3}$$

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \tag{4}$$

В силу того, что поле слабое, можно считать $\mathbf{r}$ — периодическая функция, а значит $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})$ — тоже периодическая функция, тогда среднее значение производной (3) за период будет равно нулю[2]. Тогда можно установить:

$$\Big\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times B) \Big\rangle_T = \Big\langle \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \Big\rangle_T \tag{5}$$

Усредняя выражение (4), учитывая соотношение (5), получаем:

$$2\Big\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times B) \Big\rangle_T = -\Big\langle \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \Big\rangle_T \tag{6}$$

Тепрь можно посчитать усреднение момента импульса за период:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{e}{2m}\Big\langle \mathbf{B} \times (m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \Big\rangle_T = \frac{e}{2m}\mathbf{B} \times \mathbf{M} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{M} \tag{7}$$

Тут введено обозначение $\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2m}\mathbf{B}$.

Из выражения (7) понятно, что вектор $\mathbf{M}$ вращается с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$.

[2]Это утверждение доказывалось в первой задаче

Перепишем уравнение (2) еще раз:

$$\dot{\mathbf{M}} = -e\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} - \frac{e}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \Big(\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})\Big) \tag{2}$$

С учетом выражения для $\dot{\mathbf{M}}$ из уравнения (2) получаем соотношение для производной вектора $\mathbf{A}$:

$$\dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} + \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} =$$

$$= -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} + \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}\Big) - \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \tag{8}$$

Первые два члена в сумме зануляются при усреднении по периоду обращения. Подробнее рассмотрим что происходит с последним челеном: если подставить вторую производную из уравнения движения и усреднить полученный результат, то понятно, что т.к. вектор $\mathbf{M}$ практически не изменяется, то среднее значение величины $\sim \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}$ будет нулевым, тогда верно соотношение:

$$\Big\langle \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \Big\rangle_T = \Big\langle \frac{\mathbf{r}}{\alpha r^3} \times \mathbf{M} \Big\rangle_T \tag{9}$$

Теперь воспользуемся симметрией невозмущенной орбиты: для этого разложим вектор $\mathbf{r}$ на 2 компоненты, первая будет параллельна $\mathbf{A}$, вторая перпендикулярна. Т.к. орбиты планет в невозмущенной задаче являются эллипсами, а вектор $\mathbf{A}$ проведен из фокуса к перигею орбиты, то получается, что среднее значение величины $\sim \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{M}$ будет равно 0.

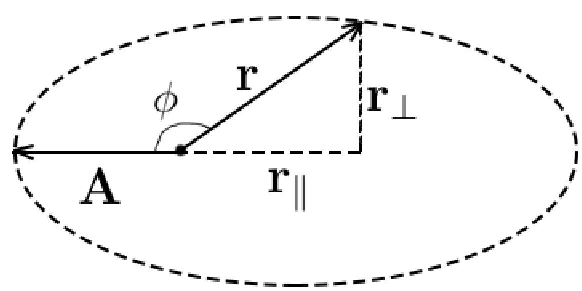


Рис. 1: Примерная орбита планеты

Получается что выражние (9) можно переписать в виде:

$$\Big\langle \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \Big\rangle_T = \Big\langle \frac{\mathbf{r}_\parallel}{\alpha r^3} \times \mathbf{M} \Big\rangle_T = \Big\langle \frac{r\cos\phi \mathbf{A}}{\alpha r^3 A} \Big\rangle_T \times \mathbf{M} = \frac{1}{A\alpha}\Big\langle \frac{\cos\phi}{r^2} \Big\rangle_T \mathbf{A} \times \mathbf{M} \tag{10}$$

Теперь считаем интеграл:

$$\left\langle \frac{\cos\phi}{r^2} \right\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\cos\phi}{r^2}dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{r^2}\frac{d\phi}{\phi'_t} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{r^2}\frac{r^2 m}{M}d\phi = 0 \tag{11}$$

Возвращаясь по цепочке уравнений обратно к (2) делаем вывод, что вектор $\mathbf{A}$ является постоянной величиной.

# Задача 4

На электрон действует сила $\mathbf{F}_{ad} = \beta\ddot{\mathbf{v}}$, где коэффициент $\beta = \frac{2e^2}{3c^3}$. Требуется определить что будет происходить с орбитой электрона и через какое время он упадет на протон.

Производная момента импульса записывается:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{ad} \tag{1}$$

Пусть изначально электрон двигался по окружности, тогда его скорость определяется соотношением:

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{2}$$

Пренебрегая изменением $r$ за период находим соотношения для производных скорости:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{v}} \tag{3}$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что движение электрона будет плоским. Это утверждение очевидно, если сила является центральной, поэтому необходимо разобраться как добавочная сила $\mathbf{F}_{ad}$ влияет на момент импульса. Если отталкиваться от задачи Кеплера, то получим, что вектор $\ddot{\mathbf{v}}$ лежит в плоскости орбиты, причем он $\parallel \mathbf{v}$. Получается, добавочная сила меняет модуль момента импульса, и движение остается плоским. В таком случае можно переписать уравнение (3) через скалярные[3] величины.

$$F_{ad} = \beta\omega^3 r \tag{4}$$

В скалярном виде уранение (1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}\Big(mrv\Big) = -\beta\omega^3 r \cdot r \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\Big(m\omega r^2\Big) = -\beta\omega^3 r^2 \tag{5}$$

[3] Тут под $\omega$ подразумевается $|\mathbf{\Omega}|$

Для определения зависимости радиуса от времени воспользуемся проекцией закона движения электрона на радиуальную ось:

$$m\omega^2 r = \frac{e^2}{r^2} \tag{6}$$

Вытаскивем из этого соотношения $\omega$:

$$\omega = \frac{e}{r^{3/2}\sqrt{m}} \tag{7}$$

Тогда подстановка в (5) дает соотношение:

$$\frac{d}{dt}\left(e\sqrt{mr}\right) = -\frac{\beta e^3 r^2}{r^{9/2} m^{3/2}} \tag{8}$$

Интегрируем уравнение (8):

$$\int_{R_0}^{0} \sqrt{r^5} d\sqrt{r} = -\int_0^T \frac{\beta e^2}{m^2} dt \tag{9}$$

$$\frac{R_0^3}{6} = \frac{\beta e^2}{m^2} T \Leftrightarrow T = \frac{R_0^3 m^2}{6e^2\beta} = \frac{R_0^3 m^2 3c^3}{12e^4} = \frac{R_0^3 m^2 c^3}{4e^4} \tag{10}$$

Окончательно получаем:

$$\boxed{T = \frac{m^2 c^3 R_0^2}{4e^4}}$$

Теперь разберемся что происходит в процессе движения с вектором $\mathbf{A}$, при условии, что изначально орбита электрона не являлась круговой.

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha m}\mathbf{F_{ad}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F_{ad}}) \tag{11}$$

Первое слагаемое при усреденении дает 0, т.к. в $\mathbf{F}_{ad}$ сидит $\ddot{\mathbf{v}}$, которое является полной производной периодической функции.

Рассмотрим второе слагаемое в сумме.

$$\frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F_{ad}}) = \frac{\beta}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dddot{\mathbf{r}})$$

Преобразуем[4] векторное произведение:

$$\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dddot{\mathbf{r}}) = \dddot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}}) = \frac{\dddot{\mathbf{r}}}{\mathbf{m}} \times \mathbf{M} + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}}) \tag{12}$$

[4] Используем тождество Якоби

При усреднении первое слагаемое даст 0, во втором слагаемом выделяем полную производную:

$$\mathbf{r}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\Big(\mathbf{r}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})\Big) - \dot{\mathbf{r}}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\Big(\mathbf{r}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})\Big) + \mathbf{v}\times(\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{v})$$

Тогда при усреднении соотношения (11) получим выражение:

$$\dot{\mathbf{A}} = \Big\langle \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v}\times(\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{v})\Big\rangle_{\mathbf{T}} \tag{13}$$

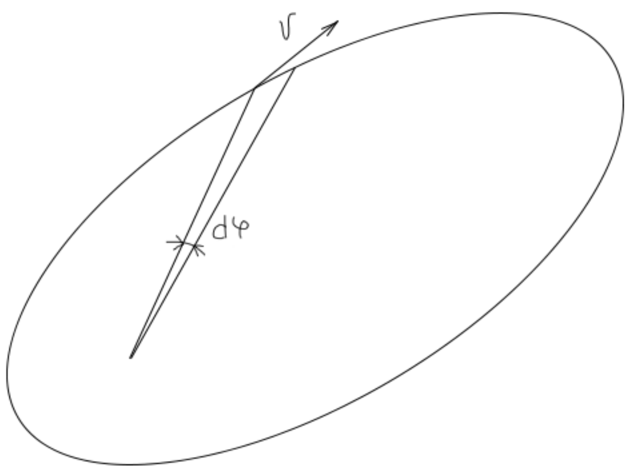


Рис. 2: К выводу зависимости изменения скорости

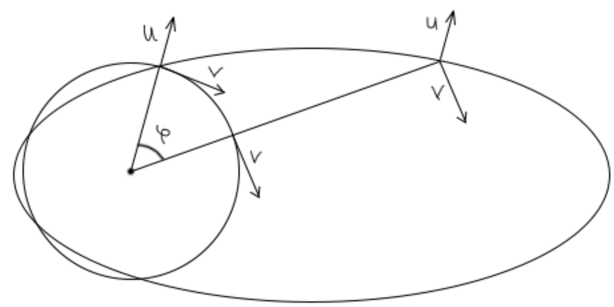


Рис. 3: Разложение скорости

Для начала заметим, что измение скорости можно описать соотношением:

$$d\vec{v} = \vec{a}dt \Rightarrow dv = adt = \frac{\alpha}{mr^2}dt = \frac{\alpha}{mr^2}\cdot\frac{d\phi}{\phi'_t} = \frac{\alpha}{M}d\phi, \quad dv \text{ — измение проекции скорости на } \vec{r}$$

Из данного соотнношениия понятно, что изменение скорости при конечных изменениxя угла будет такой же, как если бы тело двигалось просто по окружности с постоянной по модулю скоростью. Рисунок (3) демонстирует как данный факт можно применить к эллиптической орбите.

Становится очевидно, что годограф скорости при движении по эллипсу представляет из себя окружность, центр которой смещен на вектор $u$. Разложим скорость $\mathbf{V}$ на 2 составляющие: $\mathbf{u_0}+\mathbf{v_0}$, где вектор $\mathbf{u_0}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{v_0}$ — вращается.

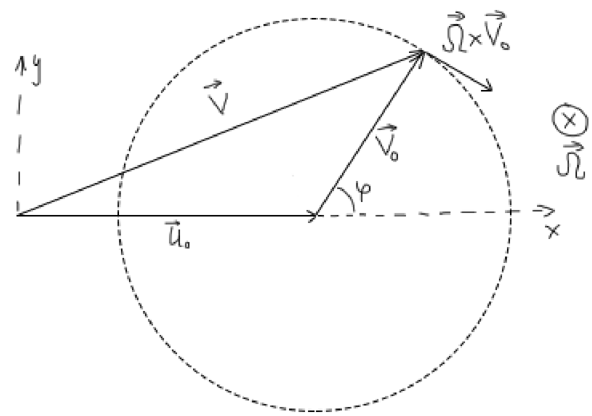


Рис. 4: Годограф скоростей

Перепишем соотношение (13):

$$\mathbf{V} \times (\dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{V}) = \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V^2} - \mathbf{V}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) \tag{14}$$

Разбираемся со вторым членом:

$$\mathbf{V}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) = \mathbf{V}([\mathbf{\Omega}, \mathbf{V_0}], \mathbf{U_0}) = \mathbf{V}\Omega V_0 U_0 \sin(\phi) = (\mathbf{V_0} + \mathbf{U_0})\Omega V_0 U_0 \sin(\phi)$$

Усредняем:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{V}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V})dt = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{V_0} + \mathbf{U_0})\Omega V_0 U_0 \sin(\phi)dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} (\mathbf{V_0} + \mathbf{U_0})\Omega V_0 U_0 \sin(\phi)\frac{d\phi}{\Omega} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \mathbf{V_0} V_0 U_0 \sin(\phi)d\phi = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} V_0\cos\phi \\ V_0 \sin\phi \end{pmatrix} V_0 U_0 \sin(\phi)d\phi = \frac{U_0 \cdot V_0^2}{2T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Осталось только вычислить среднее значение первого слагаемого в сумме (14):

$$\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\mathbf{V}} V^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \Omega V_0 \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} V^2 \frac{d\phi}{\Omega} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} V_0 \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} (V_0^2 + U_0^2 + 2U_0V_0\cos\phi)d\phi =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} 2V_0^2 \cdot U_0 \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} \cos\phi d\phi = \frac{U_0 \cdot V_0^2}{T} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

С учетом формул (15) и (16) получаем ответ для усреднения формулы (14):

$$\Big\langle \mathbf{V} \times (\dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{V}) \Big\rangle_T = \frac{3U_0 \cdot V_0^2}{2T} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Теперь займемся определением величин $U_0, V_0$. Первым делом следует заметить, что годограф скоростей Рис.(4) позволяет отпределить максимальную и минимальную скорость электрона:

$$V_{min} = U_0 - V_0, \quad V_{max} = U_0 + V_0 \tag{18}$$

С другой стороны, мы знаем что максимальная и минимальная скорость при движении электрона по эллипсу достигаются в апогее и перигее орбиты. Из этого следует вектор, полученный в формуле (17) и равный $\dot{\mathbf{A}}$ направлен против $\mathbf{A}$, т.е модуль вектора $\mathbf{A}$ (он же эксцентриситет орбиты) уменьшается. Для нахождения скоростей параметризуем орбиту через угол $\phi$:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + A\cos\phi}, \quad p = \frac{M^2}{\alpha m}$$

Тогда скорости в апогее и перигее можно найти из ЗСЭ:

$$\begin{cases} \frac{mV_{min}^2}{2} - \alpha/r_1 = E \\ \frac{mV_{max}^2}{2} - \alpha/r_2 = E \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{min}^2 = \frac{2}{m}(E + \frac{\alpha}{p}(1-A)) \\ V_{max}^2 = \frac{2}{m}(E + \frac{\alpha}{p}(1+A)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{min}^2 = \frac{2}{m}((A^2-1)\frac{\alpha}{2p} + \frac{\alpha}{p}(1-A)) \\ V_{max}^2 = \frac{2}{m}((A^2-1)\frac{\alpha}{2p} + \frac{\alpha}{p}(1+A)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} V_{min}^2 = \frac{1}{m}\frac{\alpha}{p}(1-A)(-1-A+2) \\ V_{max}^2 = \frac{1}{m}\frac{\alpha}{p}(1+A)((A-1)+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{min}^2 = \frac{\alpha}{mp}(1-A)^2 \\ V_{max}^2 = \frac{\alpha}{mp}(1+A)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{min}^2 = \frac{\alpha^2}{M^2}(1-A)^2 \\ V_{max}^2 = \frac{\alpha^2}{M^2}(1+A)^2 \end{cases}$$

Окончательные выражения для скоростей:

$$\begin{cases} V_{min} = \frac{\alpha}{M}(1-A) \\ V_{max} = \frac{\alpha}{M}(1+A) \end{cases} \tag{19}$$

Тогда скорости $V_0, U_0$ выражаются из (19),(18):

$$\begin{cases} U_0 = \frac{\alpha}{M} \\ V_0 = \frac{\alpha A}{M} \end{cases} \tag{20}$$

Окончательное выражение для производной вектора **A** принимает вид:

$$\dot{A} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha^3}{M^3} A^2 \cdot \frac{\alpha^2 m (1 - A^2)^{3/2}}{2\pi M^3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\dot{A} = -\frac{3\beta\alpha^4 m A^2 (1 - A^2)^{3/2}}{4\pi M^6}} \tag{21}$$