

Задачи к 5 лекции

Нечитаев Дмитрий

11 ноября 2019 г.

Изменения

1. Новое доказательство максимальности площади в упражнении 2 ([ссылка](#))
2. Лагранжиан без первой производной координаты от времени в задаче 2 (ф-ла 2.5.1) ([ссылка](#))
3. Анализ устойчивости маятника Капицы в задаче 2 ([ссылка](#))
4. Рассмотрены границы применения потенциала в задаче 2 ([ссылка](#))
5. Изучение порядка обобщенных скоростей в Лагранжиане ([ссылка](#))

Упражнение 1

Лагранжиан в ДСК

Выражение для Лагранжиана свободной частицы в интегральной системе отсчета с ДПСК:

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (1)$$

Находим уравнение движения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2)$$

$$m\ddot{q}_i = 0 \quad (3)$$

Лагранжиан в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \sin(\phi) \dot{\phi} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \cos(\phi) \dot{\phi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases} \quad (4)$$

После возведения в квадрат и подстановки в уравнение (1), получаем:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad (5)$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Лагранжиан в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \phi \\ y = r \cos \theta \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta \cos \phi - r\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - r\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{y} = \dot{r} \cos \theta \sin \phi - r\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ \dot{z} = \dot{z} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \quad (7)$$

Тогда Лагранжиан примет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad (8)$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Лагранжиан в криволинейных координатах

Пусть нам теперь дан закон преобразования координат:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \zeta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \zeta \\ \partial z / \partial \xi & \partial z / \partial \eta & \partial z / \partial \zeta \end{pmatrix} \quad (10)$$

Тогда справедливо соотношение между дифференциалами:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} \Rightarrow (dx \quad dy \quad dz) = (d\xi \quad d\eta \quad d\zeta) D^T \quad (11)$$

Перемножая строчку и столбец можно определить выражение для dl^2 :

$$dl^2 = (dx \quad dy \quad dz) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = (d\xi \quad d\eta \quad d\zeta) D^T D \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} \quad (12)$$

Замечаем, что $v^2 dt^2 = dl^2$, т.е. Лагранжиан приобретает вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\xi} \quad \dot{\eta} \quad \dot{\zeta}) D^T D \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Пусть $\{q_1, q_2, q_3\}$ - новые координаты, а $\{x_1, x_2, x_3\}$ - старые координаты, тогда:

$$D = \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \Rightarrow L = \frac{m}{2} \left(\dot{q}^j \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k \right) = \frac{m}{2} \left(\dot{q}^j \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right) \quad (14)$$

Из выражения (14) можно получить, что в Лагранжиан обобщенные скорости входят только во второй степени, данные рассуждения работают, если нет зависимости координатных функций от времени, в противном случае появляются дополнительные слагаемые.

Получим уравнения движения. Для этого продифференцируем Лагранжиан по \dot{q}^p :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^p} = \frac{m}{2} \left(\delta_p^j \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} + \delta_p^k \dot{q}^j \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right) = m \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^p} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \quad (15)$$

Тогда уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \left(m \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^p} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right) = \frac{\partial}{\partial q^p} \left(\frac{m}{2} \dot{q}^j \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right) \quad (16)$$

Криволинейные координаты с зависимостью от времени

Выясним что происходит с Лагранжианом, когда координатные функции зависят от времени. Пусть $\{q_1, q_2, q_3\}$ - новые координаты, а $\{x_1, x_2, x_3\}$ - старые координаты, тогда:

$$v^2 = \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) = \dot{q}^j \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} + 2 \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial t} \quad (17)$$

Первый член характеризует относительное изменение координаты частицы, а два последних учитывают движение системы координат. Лагранжиан примет вид:

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{q}^k \dot{q}^j \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} + 2 \dot{q}^k \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \quad (18)$$

В качестве примера, когда в Лагранжиане есть слагаемое, содержащее первую степень скорости, можно взять с/к, которая движется равноускоренно вдоль оси OX .

$$L = \frac{m}{2} \left(v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{отн}}at + a^2t^2 \right) \quad (19)$$

Получается, что если координатные функции не содержат зависимости от t , то Лагранжиан свободной частицы имеет только члены квадратичные по скоростям. Если зависимость от времени присутствует, то могут появиться члены первого порядка.

Упражнение 2

Поиск решения

Пусть дана гладкая замкнутая кривая Γ без самопересечений. Необходимо найти кривую, которая при заданной длине ограничивает максимальную площадь.

Для решения введем 2 интегральных представления: площади A и длины P , задаваемые следующими формулами:

$$A[\Gamma] = \int_S dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x \dot{y} - y \dot{x}) dt \quad (1)$$

$$P[\Gamma] = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} ds \quad (2)$$

Если зафиксировать длину кривой, но изменять площадь, то получим задачу на условный экстремум функционала $A[\Gamma]$, причем т.к. условие записано в интегральном представлении, то для нахождения нужной кривой достаточно исследовать на безусловный экстремум функционал:

$$F[\Gamma](\lambda) = A[\Gamma] - \lambda P[\Gamma] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (x \dot{y} - y \dot{x}) - \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) dt \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Для этого воспользуемся уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{y} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{y}{2} - \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \\ -\frac{1}{2} \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{2} - \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(y + \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(x - \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Из системы следует, что выражения под знаком дифференциала сохраняются, т.е. являются константами:

$$\begin{cases} y + \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_1 \\ x - \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - y = \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ x - C_2 = \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{cases} \Rightarrow (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2 \quad (5)$$

Получилось уравнение окружности, причем константу λ можно найти из условия для периметра $\pm 2\pi\lambda = P$, тогда все потенциально подходящие кривые описываются уравнением:

$$\boxed{(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{P^2}{4\pi^2}} \quad (6)$$

Доказательство максимальности

Перепишем функционал $F[\Gamma]$ в полярных координатах:

$$F[\Gamma](\lambda) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \lambda \sqrt{r'^2 + r'^2} \right) d\phi \quad (7)$$

Переобозначим подынтегральную функцию как $L(r, r', \phi)$, тогда вторая вариационная производная $F[\Gamma](\lambda)$ в точке $r(\phi) = r_0$, где r_0 — радиус окружности.

$$\frac{\delta^2 F}{\delta \eta^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_0^{2\pi} L(r_0 + \alpha \eta, r'_0 + \alpha \eta', \phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} L(r_0 + \alpha \eta, r'_0 + \alpha \eta', \phi) d\phi \quad (8)$$

Для нахождения второй производной посчитаем $d^2 L$, с учетом того, что функция не зависит явно от ϕ получаем соотношение:

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} dr^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial r'^2} dr'^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial r'} dr' dr \quad (9)$$

Непосредственное вычисление частных производных и подстановка функции $r(\phi) = r_0 = \text{const}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} = 1 - \lambda \frac{r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial r'^2} = -\lambda \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial r'} = \lambda \frac{rr'}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} = 1 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial r'^2} = -\frac{\lambda}{r_0} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial r'} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Вместо dr подставляем $\alpha \eta$, а заменяем dr' на $\alpha \eta'$, тогда вторая вариационная производная примет вид¹:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta \eta^2} = \int_0^{2\pi} \left(\eta^2 - \frac{\lambda}{r_0} \eta'^2 \right) d\phi \quad (11)$$

Вспомним, что из условия на периметр было получено: $\lambda = r_0$.

$$\frac{\delta^2 F}{\delta \eta^2} = \int_0^{2\pi} \left(\eta^2 - \eta'^2 \right) d\phi \quad (12)$$

Тут η - хорошая² периодическая функция, которую можно разложить в ряд Фурье:

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi) \Rightarrow \eta' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n \cos(n\phi) - B_n n \sin(n\phi) \quad (13)$$

Тогда равенство Парсеваля дает:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 + B_n^2 - n^2 A_n^2 - n^2 B_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\eta^2 - \eta'^2 \right) d\phi \quad (14)$$

Левая часть уравнения (14) отрицательна, при всех функциях $\eta \in C^1[0; 2\pi]$, кроме функций вида: $A \sin(\phi) + B \cos(\phi)$. Покажем, что класс подобных функций периметр не сохраняет.

Несколько рассуждений позволят нам упростить дальнейшие выкладки:

¹ Тут мы подставили значение dr, dr' , затем использовали формулу Тейлора $L(q, q', t) = L(q_0, q'_0, t) + dL + \frac{1}{2!} d^2 L + \dots$, вычислили производную по α , затем взяли предел.

² Суммируемая с квадратом на $[0; 2\pi]$, дифференцируемая.

1. Функцию вида $A \sin \phi + B \cos \phi$ можно привести к виду $R \sin(\phi + \theta)$, где $R, \theta \in \mathbb{R}$
2. Т.к. мы будем производить интегрирование по периоду, то на θ можно не обращать внимание.

С учетом сказанного выше находим периметр:

$$\tilde{P} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r_0 + R \sin \phi)^2 + R^2 \cos^2 \phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_0^2 + 2r_0 R \sin \phi + R^2} d\phi \quad (15)$$

Эллиптический интеграл, брать мы, конечно, не будем, а вот оценить разность можно.

$$\tilde{P} - P = \int_0^\pi \left(\sqrt{r_0^2 + 2r_0 R \sin \phi + R^2} - r_0 \right) d\phi + \int_0^\pi \left(\sqrt{r_0^2 - 2r_0 R \sin \phi + R^2} - r_0 \right) d\phi \quad (16)$$

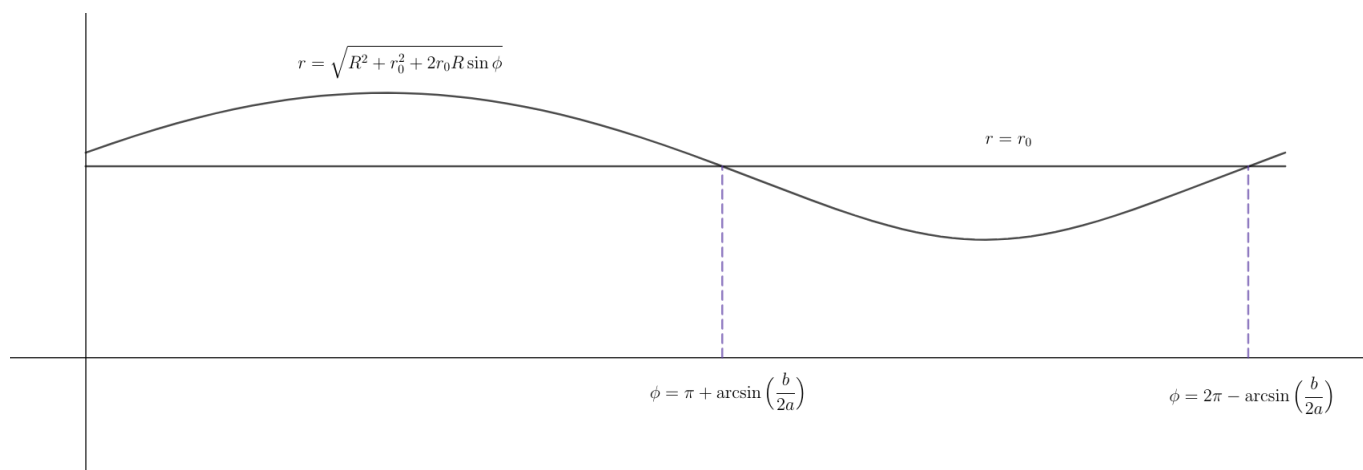
Покажем, что периметр \tilde{P} будет больше изначального периметра. Для этого исследуем на сколько сильно отличаются подынтегральные выражения от r_0 .

$$\begin{aligned} & \sqrt{r_0^2 + R^2 + 2r_0 R \sin \phi} - r_0 \quad \vee \quad r_0 - \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \sin \phi} \\ & \sqrt{r_0^2 + R^2 + 2r_0 R \sin \phi} + \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \sin \phi} \quad \vee \quad 2r_0 \\ & 2r_0^2 + 2R^2 + 2\sqrt{(r_0^2 + R^2)^2 - 4r_0^2 R^2 \sin^2 \phi} \quad \vee \quad 4r_0^2 \\ & \sqrt{(r_0^2 + R^2)^2 - 4r_0^2 R^2 \sin^2 \phi} \quad \vee \quad r_0^2 - R^2 > 0 \\ & r_0^4 + R^4 + 2r_0^2 R^2 - 4r_0^2 R^2 \sin^2 \phi \quad \vee \quad r_0^4 + R^4 - 2r_0^2 R^2 \\ & r_0^2 R^2 \vee r_0^2 R^2 \sin^2 \phi \\ & 1 \vee \sin^2 \phi \\ & 1 \geq \sin^2 \phi \end{aligned}$$

Данная цепочка сравнений справедлива при двух условиях: $r_0 > R$ и $x \in [\arcsin(\frac{b}{2a}); \pi - \arcsin(\frac{b}{2a})]$. Второе условие отвечает тому, что $r_0 - \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \sin \phi} \geq 0$.

Возвращаясь к интегралу (16) делаем вывод, что на $x \in [\arcsin(\frac{b}{2a}); \pi - \arcsin(\frac{b}{2a})]$ сумма от двух интегралов положительна. На оставшемся множестве подынтегральные функции положительны, а значит и разность периметров не будет равна 0.

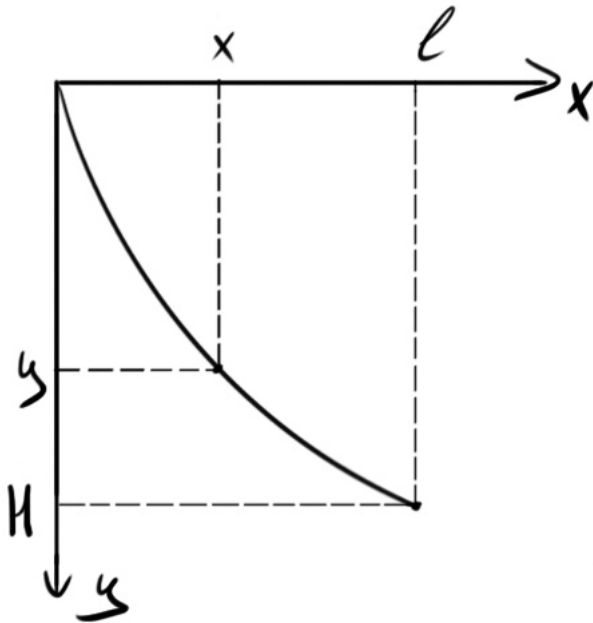
Таким образом мы доказали, что семейство возмущений $\eta = A \sin \phi + B \sin \phi$ при достаточно малых $\sqrt{A^2 + B^2}$ не входит во множество функций, которые сохраняют периметр фигуры. Таким образом доказан сильный максимум функционала $F[\Gamma]$.



Задача 1

Пусть дан шарик и две точки в пространстве с известными координатами. Какую форму желоба нужно сделать, чтобы шарик без начальной скорости скатился под действием силы тяжести от одной точки к другой за наименьшее время?

Для удобства введем систему координат как показано на рисунке: Пусть параметризация кри-



вой имеет вид: $y = y(x)$, тогда длина элемента дуги определяется соотношением:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1)$$

Из теоремы об изменении кин энергии находим:

$$v = \sqrt{\varkappa y} \quad (2)$$

Тогда за время $dt = dl/v$ шарик пройдет кусочек дуги, а значит для оптимизации времени спуска можно ввести функционал:

$$S[y(x)] = \int_0^l \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{\varkappa y}} dx \quad (2)$$

Для удобства расчетов таскать за собой $\sqrt{\varkappa}$ не будем. Обозначим подынтегральное выражение за $L(y, y')$.

Можно и дальше упрощать жизнь: для этого стоит заметить, что L не зависит явно от x , а это нам очень помогает, ведь тогда верен переход:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial y} y' + \frac{\partial L}{\partial y'} y'' + \frac{\partial L}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial y} y' + \frac{\partial L}{\partial y'} y'' \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial y} y' = \frac{dL}{dx} - \frac{\partial L}{\partial y'} y'' \quad (3)$$

Для оптимизации интегрального функционала используем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \quad (4)$$

Домножим обе части на y' и воспользуемся подстановкой из выражения (3):

$$\frac{dL}{dx} = y'' \frac{\partial L}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \quad (5)$$

Получаем дифференциальное уравнение:

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C \quad (6)$$

Подставляем L в уравнение (6):

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}} = C \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}} = C \Leftrightarrow (1 + y'^2)y = (1/C)^2 \equiv k \quad (7)$$

$$y'^2 = \frac{k}{y} - 1 \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{k - y}{y}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{k - y}} dy = dx \quad (8)$$

$$y = k \sin^2 \theta \Rightarrow dy = 2k \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (9)$$

$$\int_0^{\theta_0} \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| 2k \cos \theta \sin \theta d\theta = k \int_0^{\theta_0} (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \frac{k}{2} (2\theta_0 - \sin(2\theta_0)) = x(\theta_0) \quad (10)$$

Получаем кривую, заданную параметрически:

$$\boxed{\begin{cases} x(\theta) = \frac{k}{2} (2\theta - \sin(2\theta)) \\ y(\theta) = k \sin^2(\theta) \end{cases} \quad \forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} \quad (11)$$

Числа k, θ_0 находится из системы (11) при подстановке $x(\theta_0) = l$ и $y(\theta_0) = H$.

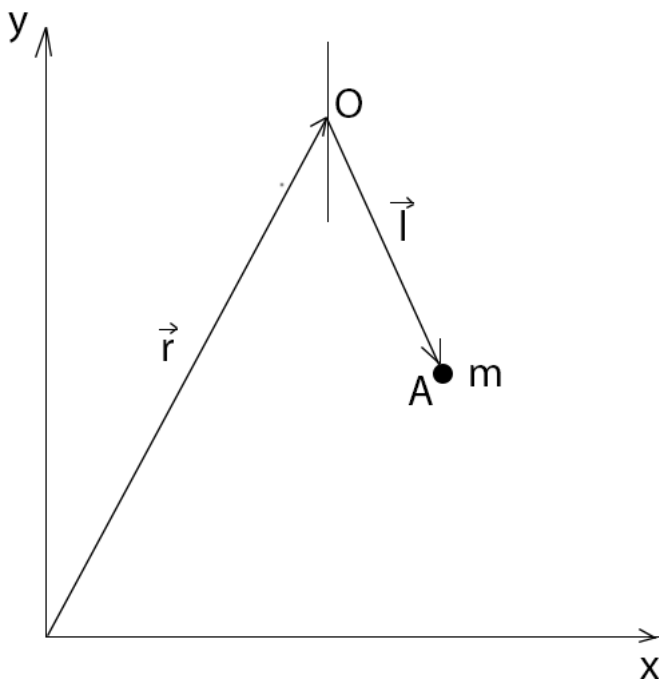
Задача 2

Рассмотрим обычный маятник, точка подвеса которого может совершать движение по какому-то произвольному, но известному закону $\mathbf{r}(t)$. Сам маятник представляет собой невесомую палку длины l и с массой m на конце.

1. Лагранжиан системы

Для однозначного определения положения маятника нам достаточно знать где находится точка подвеса и 2 угла, задающие точку на сфере, причем скорость маятника определяется соотношением:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{l} \quad (1.1)$$



Тогда лагранжиан системы примет вид:

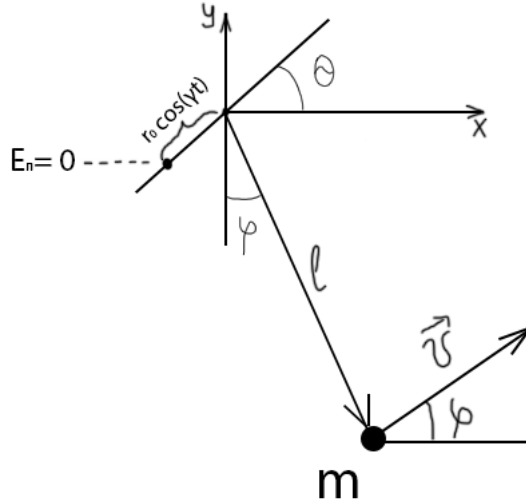
$$L = \frac{m(\vec{V}_0(t) + \vec{\omega} \times \vec{l})^2}{2} + m\vec{g} \cdot (\vec{r}(t) + \vec{l}) \quad (1.2)$$

$$L = \frac{m}{2} V_0^2 + \frac{m}{2} \omega^2 l^2 + m(\vec{V}_0, \vec{\omega} \times \vec{l}) + m\vec{g} \cdot (\vec{r} + \vec{l}) \quad (1.3)$$

2. Конкретный закон $r(t)$

Пусть теперь $\vec{r}(t) = r_0 \cos(\gamma t) \cdot (\cos \theta, \sin \theta)$, тогда лагранжиан примет вид:

$$L = \frac{m}{2} \gamma^2 r_0^2 \sin^2(\gamma t) + \frac{m}{2} \dot{\phi}^2 l^2 - m \gamma r_0 \sin(\gamma t) \dot{\phi} l \cos(\phi - \theta) - mg \left(r_0 \cos(\gamma t) \sin(\theta) - l \cos(\phi) \right) \quad (2.1)$$



Выкидываем все полные производные из Лагранжиана:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\phi}^2 l^2 - m \gamma r_0 \sin(\gamma t) \dot{\phi} l \cos(\phi - \theta) + m g l \cos(\phi) \quad (2.2)$$

Если ввести обозначения $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, $A = \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{r_0}{l}$, $B = \frac{\gamma}{\omega_0}$ то можно обезразмерить Лагранжиан ($m = 1$):

$$\tilde{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2\omega_0^2} - A \frac{\dot{\phi}}{\omega_0} \sin(\gamma t) \cos(\phi - \theta) + \cos(\phi) \quad (2.3)$$

Параметр A характеризует отношение максимальных скоростей точки подвеса (γr_0) и математического маятника ($\omega_0 l$). Последним штрихом будет нахождение связи между производными ϕ'_τ и ϕ'_t :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \Leftrightarrow \frac{\phi'_t}{\omega_0} = \phi'_\tau \quad (2.4)$$

Собираем все вместе:

$$\tilde{L} = \frac{\phi'^2_\tau}{2} - A\phi'_\tau \sin(B\tau) \cos(\phi - \theta) + \cos(\phi) \quad (2.5)$$

Выделим полную производную по времени:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{\phi'^2_\tau}{2} + \cos(\phi) + \left(-A\phi'_\tau \sin(B\tau) \cos(\phi - \theta) - B \cos(B\tau) A \sin(\phi - \theta) \right) + B \cos(B\tau) A \sin(\phi - \theta) = \\ &= \frac{\phi'^2_\tau}{2} + \cos(\phi) + \frac{d}{d\tau} \left(-A \sin(B\tau) \sin(\phi - \theta) \right) + AB \cos(B\tau) \sin(\phi - \theta) \end{aligned}$$

Выкидываем полную производную:

$$\tilde{L} = \frac{\phi'^2_\tau}{2} + \cos(\phi) + AB \cos(B\tau) \sin(\phi - \theta) \quad (2.5.1)$$

Находим уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\phi'_\tau - A \sin(B\tau) \cos(\phi - \theta) \right) &= -A\phi'_\tau \sin(B\tau) \sin(\phi - \theta) - \sin(\phi) \Leftrightarrow \\ \phi''_\tau + A\phi'_\tau \sin(B\tau) \sin(\phi - \theta) - AB \cos(B\tau) \cos(\phi - \theta) &= A\phi'_\tau \sin(B\tau) \sin(\phi - \theta) - \sin(\phi) \Leftrightarrow \\ \phi''_\tau &= AB \cos(B\tau) \cos(\phi - \theta) - \sin(\phi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Или в старых обозначениях:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin(\phi) = \frac{r_0}{l} \gamma^2 \cos(\gamma t) \cos(\phi - \theta) \quad (2.7)$$

3. Вспомогательная задача

Рассмотрим колебание грузика на пружинке жесткости k , к которому приложена быстрая периодическая сила $F = mf_0 \cos(\omega t)$, $\omega \gg \sqrt{k/m} = \omega_0$.

Уравнение движения:

$$x'' + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0 \quad (3.1)$$

Точное решение данной задачи Коши:

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (3.2)$$

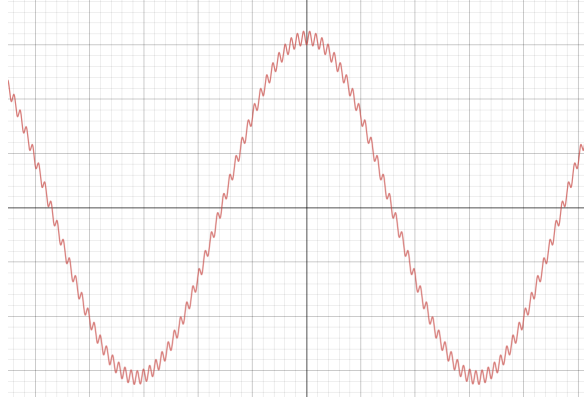


Рис. 1: График решения $x(t)$ при $\omega/\omega_0 = 55$

Перепишем уравнение (3.2) и учтем, что $v_0/\omega_0 \gg f_0/(\omega^2 - \omega_0^2)$, при $\omega \gg \omega_0$:

$$x(t) \approx \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (3.3)$$

Вид уравнения (3.3) позволяет сделать некоторые выводы относительно решения:

1. В системе есть 2 характерных времени $\tau_1 = 1/\omega_0$ и $\tau_2 = 1/\omega$. Это связано с тем, что решение уравнения состоит из двух гармоник. Гармоника с частотой ω_0 отвечает за движение маятника без учета внешней силы: $x_0(t)$ — невозмущенное решение. Вторая гармоника задает смещение относительно $x_1(t)$ и появляется из-за внешней силы.
2. Смещение относительно невозмущенного решения задается формулой:

$$x_1(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

При $\omega \gg \omega_0$ можно разложить $x_1(t)$ по степеням ω_0/ω . Первый порядок дает нам ответ:

$$x_1(t) \approx -\frac{f_0}{\omega^2} \cos(\omega t) \quad (3.5)$$

4. Быстрые и медленные переменные

Вернемся к исследованию решения уравнения (2.7). Решение будем искать в виде суммы $\phi(t) = \psi(t) + \chi(t)$, где $\psi(t)$ — периодическое решение с частотой ω_0 , а $\chi(t)$ — периодическое решение с частотой γ и амплитудой $\ll 1$.

Малось амплитуды решения с частотой γ следует из соотношения (3.5). Действительно, если подставить в качестве $f_0 = \frac{r_0}{l}\gamma^2 \cos(\phi - \theta)$, то амплитуда χ будет порядка $r_0/l \ll 1$.

Подставим теперь в уравнение (2.7) вместо $\phi(t)$ сумму $\psi(t) + \chi(t)$, раскладывая функции по степеням χ до первого порядка.

$$\ddot{\psi} + \ddot{\chi} + \omega_0^2 \sin \psi + \chi \omega_0^2 \cos \psi = \frac{r_0}{l} \gamma^2 \cos(\gamma t) \left(\cos(\psi - \theta) - \chi \sin(\psi - \theta) \right) \quad (4.1)$$

Т.к функция $\chi(t)$ осциллирует с частотой γ , то для получения уравнения на $\chi(t)$ необходимо сгруппировать все слагаемые осциллирующие с той же частотой (или достаточно близкой к ней).

$$\ddot{\chi} + \chi \omega_0^2 \cos \psi = \frac{r_0}{l} \gamma^2 \cos(\gamma t) \left(\cos(\psi - \theta) - \chi \sin(\psi - \theta) \right) \quad (4.2)$$

Теперь вспоминаем, что на самом деле $\chi \ll 1$ и слагаемые содержащие χ можно выкинуть. Но выкидывать $\ddot{\chi}$ **НЕЛЬЗЯ** т.к. амплитуда второй производной порядка $\frac{r_0}{l} \gamma^2 \gg \frac{r_0}{l}$.

$$\ddot{\chi} = \frac{r_0}{l} \gamma^2 \cos(\gamma t) \cos(\psi - \theta) \Rightarrow \chi(t) = -\frac{r_0}{l} \cos(\gamma t) \cos(\psi - \theta) \quad (4.3)$$

В последнем переходе мы интегрировали вторую производную, считая что ψ на временах порядка $1/\gamma$ практически не меняется.

Усредним уравнение (4.1) по периоду $T = 2\pi/\gamma$, в таком случае все слагаемые содержащие χ в нечетных степенях обратятся в 0, а величины, которые осциллируют с частотой $\omega_0 \ll \gamma$ практически не изменяются.

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \sin \psi = \frac{r_0^2 \gamma^2}{l^2} < \cos^2(\gamma t) >_T \sin(\psi - \theta) \cos(\psi - \theta) = \frac{r_0^2 \gamma^2}{2l^2} \sin(\psi - \theta) \cos(\psi - \theta) \quad (4.4)$$

Преобразуем выражение:

$$\ddot{\psi} = -\frac{d}{d\psi} \left(\frac{r_0^2 \gamma^2}{4l^2} \cos^2(\psi - \theta) - \omega_0^2 \cos \psi \right) \quad (4.5)$$

Выражение в скобках можно заменить функцией $U_{\text{эфф}}(\psi)$.

$$U_{\text{эфф}}(\psi) = \frac{r_0^2 \gamma^2}{4l^2} \cos^2(\psi - \theta) - \omega_0^2 \cos \psi \quad (4.6)$$

5. Положения равновесия и их устойчивость

1 случай $\theta = \frac{\pi}{2}$

Положения равновесия соответствуют экстремумам потенциальной энергии. Используем коэффициент A , введенный во 2 пункте, тогда при $\theta = \pi/2$ потенциал можно переписать:

$$U = \omega_0^2 \left(\frac{A^2}{4} \sin^2(\psi) - \cos(\psi) \right) \quad (5.1.1)$$

$$\frac{dU}{d\psi} = \omega_0^2 \left(\frac{A^2}{2} \sin \psi \cos \psi + \sin \psi \right) \quad (5.1.2)$$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \omega_0^2 \left(\frac{A^2}{2} \cos(2\psi) + \cos \psi \right) \quad (5.1.3)$$

Точки экстремума отвечают углам: $0, \pi, \arccos(-2A^{-2})$, причем положение $\psi = 0$ устойчиво, а $\psi = \arccos(-2A^{-2})$ устойчивым не является:

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\arccos(-2A^{-2})) = \omega_0^2 \left(\frac{A^2}{2} (2(2A^{-2})^2 - 1) - 2A^{-2} \right) = \omega_0^2 \left(\frac{2}{A^2} - \frac{A^2}{2} \right) < 0 \quad (5.1.4)$$

Данное соотношение верно, если существует $\arccos(-2A^{-2})$ т.е. $2A^{-2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < A \Leftrightarrow \sqrt{2gl} < \gamma r_0$. В точке $\psi = \pi$ устойчивость определяется параметром A :

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\pi) = \omega_0^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \quad (5.1.5)$$

При $\sqrt{2} < A \Leftrightarrow \sqrt{2gl} < \gamma r_0$ положение является устойчивым, в противном случае равновесие неустойчиво.

2 случай $\theta = 0$

Положения равновесия соответствуют экстремумам потенциальной энергии. Используем коэффициент A , введенный во 2 пункте, тогда при $\theta = 0$ потенциал можно переписать:

$$U = \omega_0^2 \left(\frac{A^2}{4} \cos^2(\psi) - \cos(\psi) \right) \quad (5.2.1)$$

$$\frac{dU}{d\psi} = \omega_0^2 \left(-\frac{A^2}{2} \sin \psi \cos \psi + \sin \psi \right) \quad (5.2.2)$$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \omega_0^2 \left(-\frac{A^2}{2} \cos(2\psi) + \cos \psi \right) \quad (5.2.3)$$

Точки экстремума отвечают углам: $0, \pi, \arccos(2A^{-2})$, причем положение $\psi = 0$ неустойчиво, а $\psi = \arccos(2A^{-2})$ устойчиво:

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\arccos(2A^{-2})) = \omega_0^2 \left(-\frac{A^2}{2}(2(2A^{-2})^2 - 1) + 2A^{-2} \right) = \omega_0^2 \left(-\frac{2}{A^2} + \frac{A^2}{2} \right) > 0 \quad (5.2.4)$$

Данное соотношение верно, если существует $\arccos(-2A^{-2})$ т.е. $2A^{-2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < A \Leftrightarrow \sqrt{2gl} < \gamma r_0$. В точке $\psi = \pi$ устойчивости нет:

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}(\pi) = \omega_0^2 \left(-\frac{A^2}{2} - 1 \right) < 0 \quad (5.2.5)$$

Общий случай $\theta \in (0; \pi/2)$

Рассмотрим качественное поведение точек равновесия. Для этого обратимся к потенциалу $U_{\text{эфф}}(\psi)$ из формулы (4.6), который упростим для дальнейших выкладок:

$$U_{\text{эфф}}(\psi) = \omega_0^2 \left(\frac{A^2}{4} \cos^2(\psi - \theta) - \cos \psi \right) = \omega_0^2 U(\psi) \quad (5.3.1)$$

Можно заметить, что потенциал $\forall \psi, \theta$ зажат между кривыми $\frac{A^2}{4} - \cos \psi$ и $-\cos \psi$.

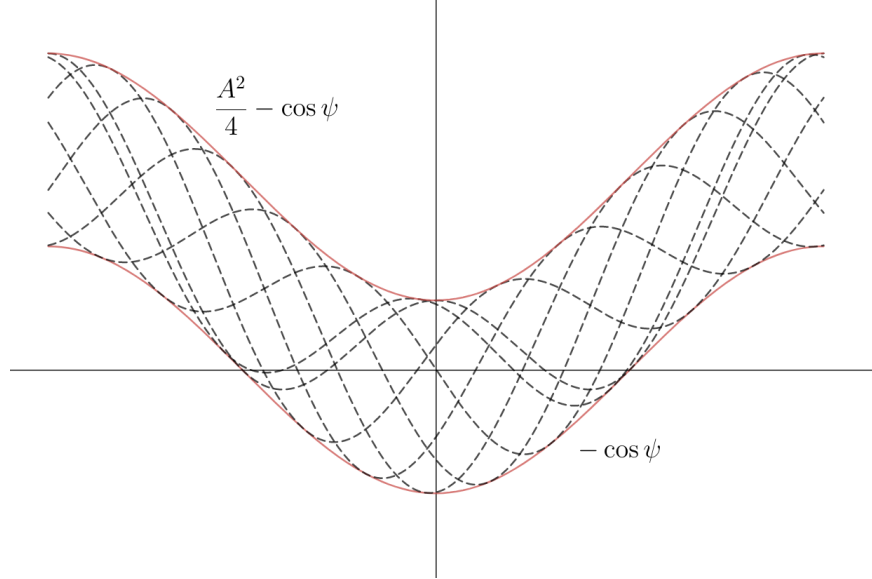


Рис. 2: Графики зависимости $U(\psi)$ при различных θ отмечены пунктиром.

Понятно, что касание с ограничивающими кривыми происходит когда слагаемое $\frac{A^2}{4} \cos^2(\psi - \theta)$ обращается в 0 или 1.

Детальней рассмотрим что происходит на интервалах между касаниями. Сначала положим, что $A > 2$. Точки касания: $\{\theta - \pi; \theta - \pi/2; \theta; \theta + \pi/2\} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$.

Участок (ψ_1, ψ_2)

На интервале (ψ_1, ψ_2) производная $\partial U / \partial \psi < 0$:

$$\partial U / \partial \psi = -\frac{A^2}{4} \sin(2\psi - 2\theta) + \sin \psi = \{\psi = t + \theta - \pi\} = -\frac{A^2}{4} \sin(2t) - \sin(t + \theta) \quad (5.3.2)$$

$$\begin{cases} t \in (0; \pi/2) \\ \theta \in (0; \pi/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta + t \in (0; \pi) \\ -A^2/4 \sin(2t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sin(\theta + t) < 0 \\ -A^2/4 \sin(2t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \partial U / \partial \phi < 0 \quad (5.3.3)$$

Важно заметить, что в рассуждениях не использовался факт $A > 2$, значит вывод о знаке произ-

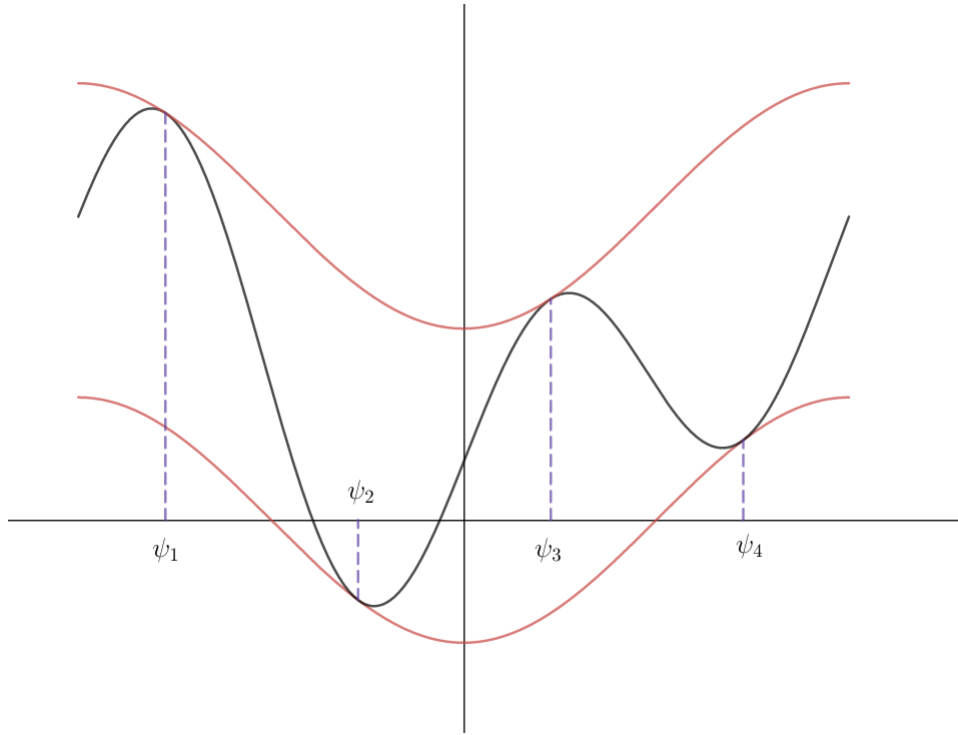


Рис. 3: Пример графика зависимости $U(\psi)$, $A > 2$

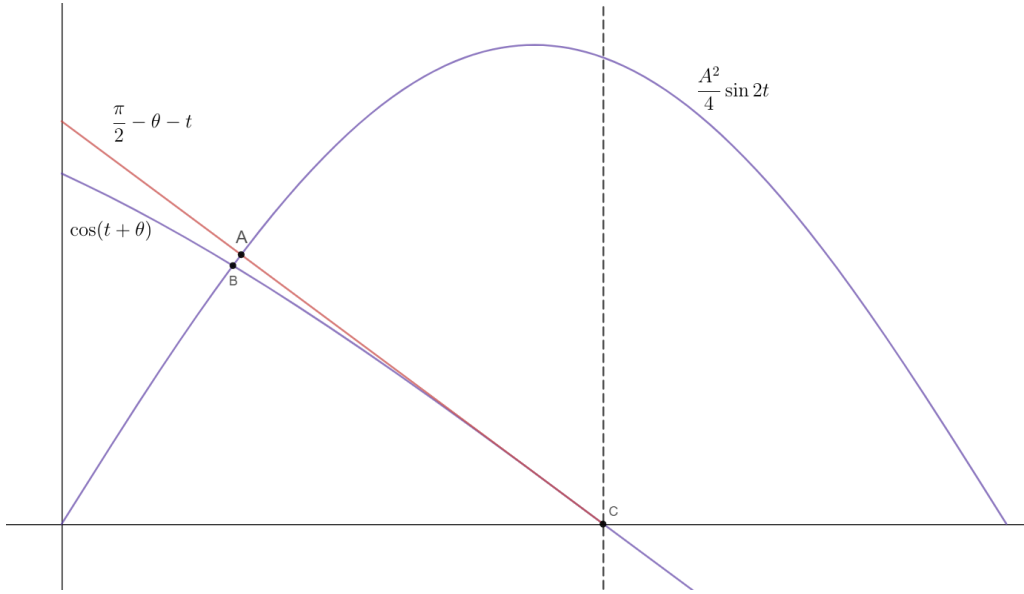
водной справедлив при любых A .

Участок (ψ_2, ψ_3)

Производные в точках ψ_2, ψ_3 имеют разные знаки: $\frac{\partial U}{\partial \psi}(\psi_2) < 0$ $\frac{\partial U}{\partial \psi}(\psi_3) > 0$, действительно, ведь в точках ψ_2, ψ_3 член $\sim \cos^2(\psi - \theta)$ имеет нулевую производную, значит знак производной определяет $-\cos(\psi)$. Из гладкости функции потенциала делаем вывод, что производная непрерывна, а значит существует точка $\psi^* \in (\psi_2; \psi_3)$, которая отвечает минимуму потенциальной энергии.

Покажем, что на (ψ_2, ψ_3) существует только один экстремум. Для этого положим противное и выберем из набора точек экстремума $\psi_{*1}, \psi_{*2}, \dots \in (\psi_2, \psi_3)$ минимальный, пусть это будет $\psi_{*1} \equiv \psi_0$. Тогда для производной потенциальной энергии верно:

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = -\frac{A^2}{4} \sin(2\psi - 2\theta) + \sin \psi = \{\psi = t + \theta - \pi/2\} = \frac{A^2}{4} \sin(2t) - \cos(t + \theta) \quad (5.3.4)$$



Функция $\frac{A^2}{4} \sin(2t)$ является выпуклой вверх, а это значит, что любая секущая будет лежать не выше графика. Т.е справедлива цепочка неравенств: $\cos(t+\theta) < \frac{\pi}{2} - \theta - t < \frac{A^2}{4} \sin(2t) \quad \forall t \in (A_t, C_t)$ ³. Причем, проверка крайних точек интервала показывает, что $\forall t \in [A_t, C_t]$ верно $\cos(t + \theta) < \frac{A^2}{4} \sin(2t)$. Повторяя рассуждения для интервала (B_t, A_t) , убеждаемся, что $\forall t \in (B_t, C_t]$ $\cos(t + \theta) < \frac{A^2}{4} \sin(2t)$, а с учетом того, что $\frac{A^2}{4} \sin 2t \geq 0 > \cos(t + \theta) \forall t \in (C_t, \frac{\pi}{2}]$ делаем вывод: на $(\psi_2; \psi_3)$ будет только один минимум потенциальной энергии. В данном пункте никаких предположений

³Тут A — это точка на графике, а A_t — ордината точки A

относительно значений A не выдвигалось, а значит и результат, полученный в данном пункте не зависит от A .

Участок $(-\pi, \psi_1) \cup (\psi_4, \pi)$

Тут, как и в прошлом пункте, в крайних⁴ точках знаки $\frac{\partial U}{\partial \psi}$ различны: $\frac{\partial U}{\partial \psi}(\psi_4) > 0$ $\frac{\partial U}{\partial \psi}(\psi_1) < 0$. Гладкость функции потенциала позволяет нам заключить, что на данном участке есть точка максимума. Доказательство единственности и независимости от A ответа можно посмотреть в прошлом пункте, ход рассуждений для данного интервала будет аналогичным.

Участок (ψ_3, ψ_4)

Самый интересный участок потенциала, т.к. на данном интервале углов количество точек равновесия зависит от параметра A . Разобьем интервал на два равных и посмотрим что происходит с точками равновесия. Для этого изучим знак производной в точке $\psi_3 + \pi/4$:

$$\frac{\partial U}{\partial \psi}(\psi_3 + \pi/4) = \sin(\theta + \pi/4) - \frac{A^2}{4} \quad (5.3.5)$$

1. $A > 2$, тогда для любого угла θ значение производной в центральной точке будет отрицательным, тогда мы приходим к знакомой ситуации, когда знаки производных в крайних точках интервала различны ($U'_\psi(\psi_3) > 0$ $U'_\psi(\psi_4) > 0$ $U'_\psi(\psi_3 + \pi/4) < 0$). Интервал содержит 1 максимум и 1 минимум потенциальной энергии.
2. $A = 2$, тогда при $\theta = \frac{\pi}{4}$ производная обращается в 0, но данная точка не является точкой экстремума.
3. $A = 2$, $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ возвращаемся к пункту 1.
4. $\sqrt{2} < A < 2$, $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \arcsin\left(\frac{A^2}{4}\right)\right) \cup \left(\pi - \arcsin\left(\frac{A^2}{4}\right); \frac{3\pi}{4}\right]$ производная в центральной точке будет отрицательна \Rightarrow 1 пункт.
5. $\sqrt{2} < A < 2$, $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \arcsin\left(\frac{A^2}{4}\right)\right) \cup \left(\pi - \arcsin\left(\frac{A^2}{4}\right); \frac{3\pi}{4}\right]$ производная в центральной точке будет положительна \Rightarrow точек экстремума нет.
6. $0 < A \leq \sqrt{2}$ производная в центральной точке положительна при любом угле $\theta \in (0; \pi/4)$ \Rightarrow точек экстремума нет.

⁴Под крайними точками в данном случае мы будем понимать ψ_1 и ψ_4 , т.к. объединение двух интервалов по сути описывает изменение угла в пределах $(\psi_4, 2\pi + \psi_1)$

Применимость результата

Стоит отметить, что соотношение (4.6) было получено в предположении $r_0/l \ll 1$. Это равносильно $\gamma/\omega_0 \gg A$. Действительно если по условию нам дано, что $\gamma \gg \omega_0$, то увеличение r_0 до величин порядка l повлечет за собой рост амплитуды колебаний маятника, но с другой стороны, если обратиться к виду потенциальной кривой (см Рис.3 или Рис. 2), то становится ясно, что увеличение A делает потенциальные ямы уже, а следовательно, и амплитуды колебаний меньше.

Список литературы

- [1] А.В. Ожегова, Р.Г. Насибуллин, Методические указания к решению "простейшей задачи" вариационного исчисления, Казань, 2013.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Издание 4-е, исправленное. — Москва: Наука, 1988.