Задачи к 6 лекции

Нечитаев Дмитрий

8 ноября 2019 г.

Упражнение 1

Для уравнения

$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^3 \tag{1}$$

Нужно найти поправку второго порядка в рамках теории возмущений по малому параметру ϵ для начальных условий $x(0) = a,\ \dot{x}(0) = 0$.

Будем искать решение в виде: $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2$, тогда подстановка в уравнение (1) и группирование членов с одинаковыми подяками дает нам систему:

$$\begin{cases} \ddot{x_0} + x_0 = 0 \\ \ddot{x_1} + x_1 = -x_0^3 \\ \ddot{x_2} + x_2 = -3x_0^2 x_1 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $\ddot{x}(t) + x(t) = -y(t)$ записывается в виде:

$$x(t) = \Big[x(0) + \int_0^t y(\tau)\sin\tau d\tau\Big]\cos t - \sin t\Big[\dot{x}(0) + \int_0^t y(\tau)\cos\tau d\tau\Big] \tag{2}$$

Положим что $x_0(0) = a,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ \dot{x_0}(0) = \dot{x_1}(0) = \dot{x_2}(0) = 0$, тогда выражения для поправок примут вид[1]:

$$\begin{cases} x_0(t) = a\cos(t) \\ x_1(t) = -\frac{a^3}{16}\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t\Big) \end{cases} \tag{3}$$

Вычисляем $x_0^2 x_1$:

$$x_0^2 x_1 = -a^2\cos^2 t\frac{a^3}{16}\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t\Big) = -\frac{a^5}{32}(1+\cos 2t)\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t\Big) =$$

[1]Второе уравниение в системе было получено на лекции

$$= -\frac{a^5}{32}\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t + 6t\sin t\cos 2t + \frac{1}{2}\cos t\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 3t\cos 2t\Big) =$$

$$= -\frac{a^5}{32}\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big) \tag{4}$$

Тогда $-3x_0^2x_1$:

$$-3x_0^2x_1 = \frac{3a^5}{32}\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big) \tag{5}$$

Вычислим пару интегралов:

$$I_1 = \int_0^\tau (-3x_0^2x_1)\sin t dt = \frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big)\sin t =$$

$$\frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\left(3t\Big(\frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{\cos 2t - \cos 4t}{2}\Big) + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 2t - \sin 4t}{8} + \frac{\sin 4t - \sin 6t}{8}\right) =$$

$$\frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\left(3t\cdot\frac{1-\cos 4t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 2t - \sin 6t}{8}\right) = \frac{3a^5}{32\cdot 96}\Big(72t^2 - 36t\sin 4t - 18\cos 2t - 9\cos 4t + 2\cos 6t\Big)\Big|_0^\tau =$$

$$\frac{a^5}{1024}\big(72\tau^2 - 36\tau\sin 4\tau - 18\cos 2\tau - 9\cos 4\tau + 2\cos 6\tau + 25\big) \tag{6}$$

$$I_2 = \int_0^\tau (-3x_0^2x_1)\cos t dt = \frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big)\cos t =$$

$$\frac{a^5}{1024}\big(24\tau + 78\sin 2\tau + 3\sin 4\tau - 2\sin 6\tau - 144\tau\cos 2\tau - 36\tau\cos 4\tau\big) \tag{7}$$

Выражение для второй поправки:

$$x_2(t) = \frac{a^5\sin t}{1024}\Big(24t + 78\sin 2t + 3\sin 4t - 2\sin 6t - 144t\cos 2t - 36t\cos 4t\Big) -$$

$$-\frac{a^5\cos t}{1024}\big(72t^2 - 36t\sin 4t - 18\cos 2t - 9\cos 4t + 2\cos 6t + 25\big) =$$

$$= \frac{a^5}{1024}\Big(-72t^2\cos t + 96t\sin t - 36t\sin 3t + 23\cos t - 24\cos 3t + \cos 5t\Big) \tag{8}$$

Данный ответ работает при тех временах, когда вклад от второй поправки много меньше чем от первой, т.е. время до которого приближение работает хорошо определяется соотношением:

$$\frac{a^3}{16}\cdot 6t = \epsilon\cdot\frac{72a^5t^2}{1024} \Rightarrow t = \frac{3}{8}\cdot\frac{1024}{72}\frac{1}{a^2\epsilon} \Rightarrow t \sim \frac{1}{a^2\epsilon}$$