

# Задачи к 3 лекции

Нечитаев Дмитрий

2 октября 2019 г.

## Задача 1

### Первый интеграл

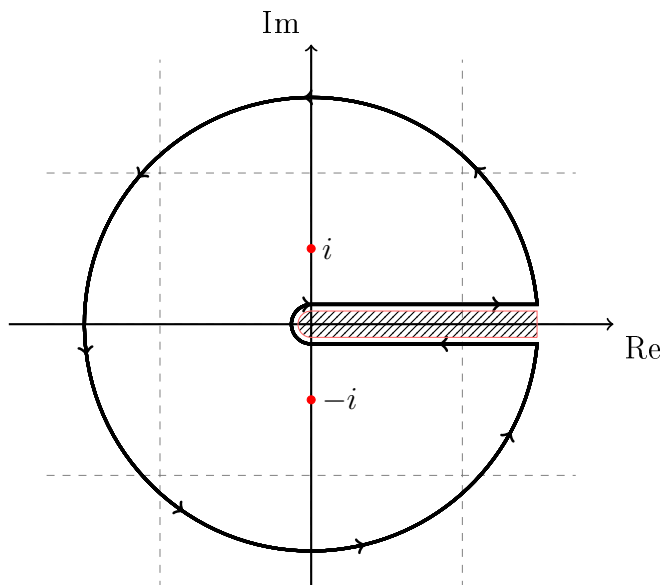
Необходимо вычислить интеграл:

$$I_1(n, \alpha) = \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^2)^n} \text{ при } n = 1, 2, 3$$

$I_1(1, \alpha)$  сходится при  $\alpha \in (-1; 1)$  причем, интегрирование по частям дает нам тождества.

$$\int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} = \frac{2}{\alpha+1} \int_0^\infty \frac{z^{\alpha+2} dz}{(1+z^2)^2} \text{ и } \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^2)^2} = \frac{2}{\alpha+1} \int_0^\infty \frac{z^{\alpha+2} dz}{(1+z^2)^3} \quad (1.1)$$

Для вычисления интеграла  $I_1(1, \alpha)$ . Построим контур  $C$  на комплексной плоскости с разрезом.



Разбиваем интеграл по контуру на три части:  $I_+ + I_- + I_R$ .

$$\int_C \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} = \int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} + \int_{+\infty-0i}^{0-0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} + \int_{C_R} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} \text{ где } C_R - \text{ дуга окружности}$$

Последний интеграл стремится к нулю, при устремлении  $R$  в бесконечность. Осталось только разобраться со вторым слагаемым. Для этого рассмотрим как связаны  $(x+0i)^\alpha$  и  $(x-0i)^\alpha$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Тут необходимо воспользоваться представлением  $z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$ . В таком случае становится понятно, что т.к.  $\ln(x-0i) = \ln(x+0i) + 2i\pi$ , то  $(x-0i)^\alpha = (x+0i)^\alpha e^{2i\pi}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} (1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} &= 2i\pi \left( \operatorname{Res}_{z=i} \frac{z^\alpha}{1+z^2} + \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{z^\alpha}{1+z^2} \right) = i\pi(i^{\alpha-1} + (-i)^{\alpha-1}) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \beta = \alpha - 1 \\ i^\beta = e^{\beta \ln(i) = e^{\beta i \frac{\pi}{2}}} \\ (-i)^\beta = e^{i \frac{3\pi}{2}} \end{array} \right\} = i\pi(e^{\beta i \frac{\pi}{2}} + e^{\beta i \frac{3\pi}{2}}) = \{ \gamma = \beta \frac{\pi}{2} \} = i\pi(e^\gamma + e^{3\gamma}) \Rightarrow \\ \int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} &= \frac{i\pi e^{2\gamma}(e^{-\gamma} + e^\gamma)}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})} = \frac{i\pi e^{i\pi(\alpha-1)}(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma})}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})} = \frac{\pi \cos(\gamma)}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \end{aligned}$$

С учетом формул (1.1) получаем окончательно:

$$I_1(1, \alpha) = \frac{\pi}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

$$I_1(2, \alpha) = \frac{\pi(1-\alpha)}{4 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

$$I_1(3, \alpha) = \frac{\pi(3-\alpha)(1-\alpha)}{8 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

## Второй интеграл

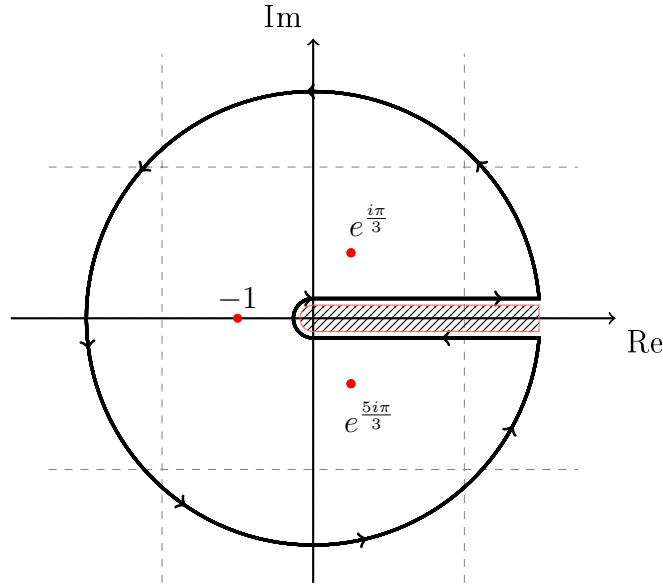
Необходимо вычислить интеграл:

$$I_2(n, \alpha) = \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^3)^n} \text{ при } n = 1, 2, 3$$

$I_2(1, \alpha)$  сходится при  $\alpha \in (-1; 2)$  причем, интегрирование по частям дает нам тождества.

$$\int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} = \frac{3}{\alpha+1} \int_0^\infty \frac{z^{\alpha+3} dz}{(1+z^3)^2} \text{ и } \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^3)^2} = \frac{3}{\alpha+1} \int_0^\infty \frac{z^{\alpha+3} dz}{(1+z^3)^3} \quad (2.1)$$

Для вычисления интеграла  $I_2(1, \alpha)$ . Построим контур  $C$  на комплексной плоскости с разрезом.



Разбиваем интеграл по контуру на три части:  $I_+ + I_- + I_R$ .

$$\int_C \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} = \int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} + \int_{+\infty-0i}^{0-0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} + \int_{C_R} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} \text{ где } C_R - \text{ дуга окружности}$$

Последний интеграл стремится к нулю, при устремлении  $R$  в бесконечность. Осталось только разобраться со вторым слагаемым. Для этого рассмотрим как связаны  $(x+0i)^\alpha$  и  $(x-0i)^\alpha$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Тут необходимо воспользоваться представлением  $z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$ . В таком случае становится понятно, что т.к.  $\ln(x-0i) = \ln(x+0i) + 2i\pi$ , то  $(x-0i)^\alpha = (x+0i)^\alpha e^{2i\pi\alpha}$ . Получаем:

$$(1-e^{2i\pi\alpha}) \int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} = 2i\pi \left( \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{3}}}{3e^{\frac{2i\pi}{3}}} + \frac{e^{i\pi\alpha}}{3e^{2i\pi}} + \frac{e^{\frac{5i\pi\alpha}{3}}}{3e^{\frac{10i\pi}{3}}} \right) = \left\{ \gamma = \frac{\alpha\pi}{3} \right\} = \frac{i\pi}{3} \left( e^{i\gamma}(-1-i\sqrt{3}) + 2e^{3i\gamma} + e^{5i\gamma}(-1+i\sqrt{3}) \right)$$

$$= \frac{2i\pi e^{3i\gamma}}{3} \left( -\cos(2\gamma) - \sqrt{3}\sin(2\gamma) + 1 \right) = \frac{2i\pi e^{3i\gamma}}{3} \left( 1 - 2\cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \right) \Rightarrow$$

$$I_2(1, \alpha) = \frac{2i\pi e^{i\pi\alpha}}{3e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})} \left( 1 - 2\cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{\pi(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{3\sin(\pi\alpha)}$$

С учетом формул (2.1) получаем окончательно:

$$I_2(1, \alpha) = \frac{\pi(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{3\sin(\pi\alpha)}$$

$$I_2(2, \alpha) = \frac{\pi(2 - \alpha)(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{9\sin(\pi\alpha)}$$

$$I_2(3, \alpha) = \frac{(5 - \alpha)(2 - \alpha)(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{27\sin(\pi\alpha)}$$

## Задача 2

Вычислим интеграл:

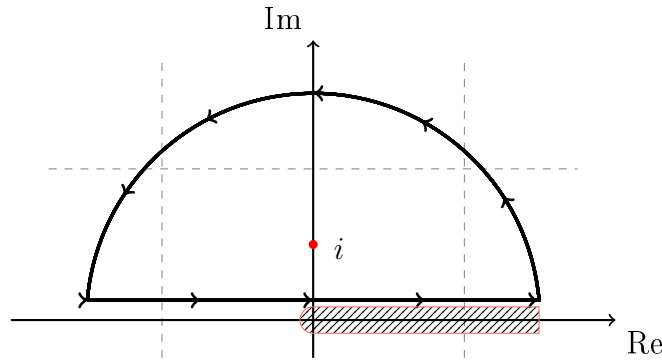
$$I_3(\alpha, n) = \int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha \ln^n(z) dz}{1+z^2} \text{ при } n = 1, 2$$

Можно заметить, что дифференцирование по параметру  $\alpha$  интеграла  $I_1(1, \alpha)$  даст нам ответ.

$$I_3(\alpha, 1) = \frac{\partial I_1(1, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\pi^2 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{4 \cos^2(\frac{\pi\alpha}{4})}$$

$$I_3(\alpha, 2) = \frac{\partial^2 I_1(1, \alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{\pi^3}{8 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \left( 2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + 1 \right)$$

Теперь прямыми вычислениями найдем первый интеграл, а затем сравним ответы. Для подсчета  $I_3(\alpha, 1)$  проведем в комплексной плоскости контур, представленный на рисунке.



$$\int_C \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz + \int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz \text{ где } C_R - \text{ дуга окружности} \quad (1)$$

При устремлении  $R$  в бесконечность, последний интеграл стремится к нулю (это следует из сходимости интеграла при  $|\alpha| < 1$ ). Осталось только разобраться с интегралом по отрицательной полуоси. Для этого воспользуемся тождествами.

$$\ln(-x) = \ln(x) + i(\arg(-x) - \arg(1)) = \ln(x) + i\pi, \text{ где } x > 0$$

$$(-x)^\alpha = e^{i\pi\alpha} x^\alpha, \text{ где } x > 0$$

Тогда интеграл по отрицательной полуоси преобразуется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz = -e^{i\pi\alpha} \int_{+\infty}^0 \frac{z^\alpha (\ln(z) + i\pi)}{1+z^2} dz = e^{i\pi\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha (\ln(z) + i\pi)}{1+z^2} dz = e^{i\pi\alpha} I_3(1, \alpha) + e^{i\pi\alpha} i\pi I_1(\alpha, 1)$$

Подставляем все в выражение (1) и применяем теорему о вычетах.

$$(1 + e^{i\pi\alpha}) I_3(1, \alpha) + e^{i\pi\alpha} \frac{i\pi^2}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} = 2i\pi \frac{i^\alpha \ln(i)}{2i} = \pi e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \frac{i\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$(1 + e^{i\pi\alpha}) I_3(1, \alpha) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \frac{i\pi^2}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \left( \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - e^{\frac{\pi\alpha}{2}} \right) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \frac{i\pi^2}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \left( \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - i \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) \right) \Leftrightarrow$$

$$e^{i\pi\alpha/2} (e^{-i\pi\alpha/2} + e^{i\pi\alpha/2}) I_3(1, \alpha) = e^{i\pi\alpha/2} \frac{\pi^2 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \Leftrightarrow$$

$$I_3(1, \alpha) = \frac{\pi^2 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{4 \cos^2(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

При стремлении  $\alpha \rightarrow 0$  получаем, что  $I_3(1, \alpha) \rightarrow 0$ , что согласуется с результатом, который был получен на лекции.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(z)}{a^2 + z^2} dz = \frac{\pi \ln(a)}{2a}, \text{ где } a > 0$$

Окончательно:

$$I_3(\alpha, 1) = \frac{\pi^2 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{4 \cos^2(\frac{\pi\alpha}{4})}$$

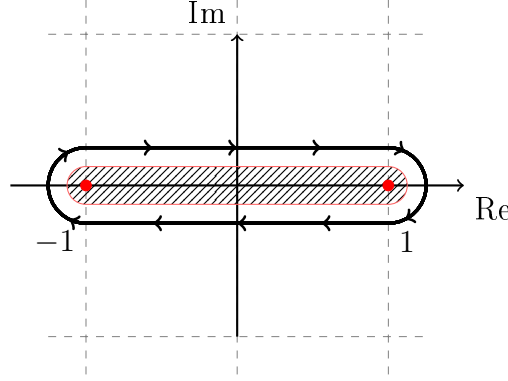
$$I_3(\alpha, 2) = \frac{\pi^3}{8 \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} (2 \tan^2(\frac{\pi\alpha}{2}) + 1)$$

### Задача 3

Вычислим интеграл:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{(1+z)^{1/4} (1-z)^{3/4}}{1+z} dz = \int_{-1}^1 \left( \frac{1-z}{1+z} \right)^{3/4} dz$$

Замена  $t^4 = \frac{1-z}{1+z}$  позволяет вычислить интеграл классическими методами, но мы воспользуемся ТФКП. Для этого в комплексной плоскости с разрезом проведем контур, представленный на рисунке.



Теперь разберемся с подынтегральной функцией. Для этого определим  $\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$  в комплексной плоскости с разрезом:

$$f(z) = \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \ln\left(\frac{1-z_0}{1+z_0}\right) + \int_{\Gamma(z_0 \rightarrow z)} \frac{dz}{z-1} - \int_{\Gamma(z_0 \rightarrow z)} \frac{dz}{z+1} \quad (1)$$

Пусть функция  $f(z)$  на верхнем берегу разреза совпадает с функцией, определенной на  $(-1; 1)$ , тогда если в определение (1) подставить  $z_0 = x + i0$ , то можно получить, что  $f(x - i0) = f(x + i0) - 2i\pi$ . Из этого следует, что интеграл по контуру можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_C \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} dz &= \int_{-1+i0}^{1+i0} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} dz + \int_{1-i0}^{-1-i0} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} dz = \int_{-1+i0}^{1+i0} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} - e^{-\frac{6i\pi}{4}} \int_{-1+i0}^{1+i0} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} dz \\ &\Leftrightarrow \int_C \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} dz = I \cdot (1-i) \end{aligned} \quad (2)$$

Для вычисления интеграла по контуру необходимо найти вычет функции на бесконечности. Получить этот вычет можно разложением подынтегральной функции по степеням  $\frac{1}{z}$ . Проще всего считать это разложение в том случае, когда  $z \rightarrow +\infty + i0$ . В определении (1) распишем 2 интеграла по аналогии с логарифмом от комплексной функции:

$$f(z) = \ln\left(\frac{1-z_0}{1+z_0}\right) + \ln(|z-1|) - \ln(|z+1|) + i\left(\arg(z-1) - \arg(z_0-1)\right) - i\left(\arg(z+1) - \arg(z_0+1)\right)$$

Пусть  $z_0 = 0 + i0$ , а  $z \rightarrow +\infty + i0$  тогда:

$$f(z) = \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + i(0-\pi) - i(0-0) = \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) - i\pi \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} = e^{-i\pi\frac{3}{4}}(1-z^{-1})^{3/4}(1+z^{-1})^{-3/4} = e^{-i\pi\frac{3}{4}}\left(1 - \frac{3}{2z} + \dots\right) \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=\infty} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{3/4} = -\frac{3}{2}e^{-i\pi\frac{3}{4}}$$

Важно заметить, что изначальный контур ориентирован отрицательно, а это значит, что выражение (2) перепишется в виде:

$$2i\pi \frac{3}{2} e^{-i\pi \frac{3}{4}} = I \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} \Leftrightarrow 3i\pi e^{-i\pi \frac{3}{4}} = I\sqrt{2} e^{-i\pi \frac{1}{4}} \Leftrightarrow 3e^{i\pi/2} \pi e^{-i\pi/2} = I\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

Окончательно:

$$\boxed{I = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}}$$