

Задачи к 6 лекции

Нечитаев Дмитрий

24 ноября 2019 г.

Упражнение 1

Для уравнения

$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^3 \quad (1)$$

Нужно найти поправку второго порядка в рамках теории возмущений по малому параметру ϵ для начальных условий $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$.

Будем искать решение в виде: $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2$, тогда подстановка в уравнение (1) и группирование членов с одинаковыми подяками дает нам систему:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\ \ddot{x}_1 + x_1 = -x_0^3 \\ \ddot{x}_2 + x_2 = -3x_0^2 x_1 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $\ddot{x}(t) + x(t) = -y(t)$ записывается в виде:

$$x(t) = \left[x(0) + \int_0^t y(\tau) \sin \tau d\tau \right] \cos t - \sin t \left[\dot{x}(0) + \int_0^t y(\tau) \cos \tau d\tau \right] \quad (2)$$

Положим что $x_0(0) = a$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_0(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, тогда выражения для поправок примут вид¹:

$$\begin{cases} x_0(t) = a \cos(t) \\ x_1(t) = -\frac{a^3}{16} \left(6t \sin t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \right) \end{cases} \quad (3)$$

Вычисляем $x_0^2 x_1$:

$$x_0^2 x_1 = -a^2 \cos^2 t \frac{a^3}{16} \left(6t \sin t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \right) = -\frac{a^5}{32} (1 + \cos 2t) \left(6t \sin t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \right) =$$

¹Второе уравнение в системе было получено на лекции

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a^5}{32} \left(6t \sin t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t + 6t \sin t \cos 2t + \frac{1}{2} \cos t \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 3t \cos 2t \right) = \\
&= -\frac{a^5}{32} \left(3t \sin t + 3t \sin 3t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t - \frac{1}{4} \cos 5t \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда $-3x_0^2 x_1$:

$$-3x_0^2 x_1 = \frac{3a^5}{32} \left(3t \sin t + 3t \sin 3t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t - \frac{1}{4} \cos 5t \right) \tag{5}$$

Вычислим пару интегралов:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\tau (-3x_0^2 x_1) \sin t dt = \frac{3a^5}{32} \int_0^\tau dt \left(3t \sin t + 3t \sin 3t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t - \frac{1}{4} \cos 5t \right) \sin t = \\
&= \frac{3a^5}{32} \int_0^\tau dt \left(3t \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} + \frac{\cos 2t - \cos 4t}{2} \right) + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 2t - \sin 4t}{8} + \frac{\sin 4t - \sin 6t}{8} \right) = \\
&= \frac{3a^5}{32} \int_0^\tau dt \left(3t \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 2t - \sin 6t}{8} \right) = \frac{3a^5}{32 \cdot 96} \left(72t^2 - 36t \sin 4t - 18 \cos 2t - 9 \cos 4t + 2 \cos 6t \right) \Big|_0^\tau = \\
&= \frac{a^5}{1024} (72\tau^2 - 36\tau \sin 4\tau - 18 \cos 2\tau - 9 \cos 4\tau + 2 \cos 6\tau + 25)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\tau (-3x_0^2 x_1) \cos t dt = \frac{3a^5}{32} \int_0^\tau dt \left(3t \sin t + 3t \sin 3t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t - \frac{1}{4} \cos 5t \right) \cos t = \\
&= \frac{a^5}{1024} (24\tau + 78 \sin 2\tau + 3 \sin 4\tau - 2 \sin 6\tau - 144\tau \cos 2\tau - 36\tau \cos 4\tau)
\end{aligned} \tag{7}$$

Выражение для второй поправки:

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \frac{a^5 \sin t}{1024} (24t + 78 \sin 2t + 3 \sin 4t - 2 \sin 6t - 144t \cos 2t - 36t \cos 4t) - \\
&- \frac{a^5 \cos t}{1024} (72t^2 - 36t \sin 4t - 18 \cos 2t - 9 \cos 4t + 2 \cos 6t + 25) = \\
&= \frac{a^5}{1024} \left(-72t^2 \cos t + 96t \sin t - 36t \sin 3t + 23 \cos t - 24 \cos 3t + \cos 5t \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

Данный ответ работает при тех временах, когда вклад от второй поправки много меньше чем от первой, т.е. время до которого приближение работает хорошо определяется соотношением:

$$\frac{a^3}{16} \cdot 6t = \epsilon \cdot \frac{72a^5 t^2}{1024} \Rightarrow t = \frac{3}{8} \cdot \frac{1024}{72} \frac{1}{a^2 \epsilon} \Rightarrow t \sim \frac{1}{a^2 \epsilon}$$

Теперь разберемся с различными членами в ответе:

1. $72t^2 \cos t$ отвечает за квадрат первой поправки к частоте
2. $96t \sin t$ содержит вторую поправку к частоте
3. $23 \cos t$ — поправка к амплитуде
4. $\cos 5t, 24 \cos 3t$ поправки к амплитудам для третьей и пятой гармоник

Упражнение 2

Вторая поправка к частоте

Для получения уравнения на вторую поправку к частоте воспользуемся разложением по гармоникам. На лекции мы получили выражение, учитывающее первые поправки к амплитудам и частотам:

$$x(t) = A \left(1 - \epsilon \frac{A^2}{32} \right) \cos \left(\left[1 + \epsilon \frac{3A^2}{8} \right] t \right) + \epsilon \frac{A^3}{32} \cos \left(3 \left[1 + \epsilon \frac{3A^2}{8} \right] t \right) \quad (1)$$

В правой части уравнения:

$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^3 \quad (2)$$

уже содержится множитель ϵ , а это значит, что для учета второй поправки нам достаточно подставлять вместо $x(t)$ первое приближение решения.

Важно отметить, что исходное выражение (1) содержит только косинусы, а это значит, что в ряде Фурье функции $x^3(t)$ будут содержаться только косинусы, причем дальше 9 гармоники искать бессмысленно². Выражение для коэффициентов Фурье задается формулой:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x^3(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (3)$$

Для нахождения второй поправки к частоте нам достаточно посчитать только α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{3A^3}{4} - \frac{3A^5}{64}\epsilon \quad (4)$$

Тут мы выкинули члены порядка больше 2-х, т.к. данные коэффициенты дальше умножатся на ϵ .

Пусть решение $x(t)$ является рядом Фурье:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) \quad (4)$$

²это следует из того, что исходное решение имеет гармоники $\omega, 3\omega$, а в x^3 будут содержаться гармоники, частоты которых представляют собой суммы и разности частот исходной функции, т.е. максимальная частота будет $3+3+3 = 9$

Тогда вторая производная:

$$\ddot{x} = - \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega)^2 A_n \cos(n\omega t) \quad (5)$$

Тут коэффициенты и частота являются формальными рядами по малому параметру ϵ .

Подставим данные ряды в уравнение (2) и сгруппируем все члены при первой гармонике:

$$(1 - \omega^2)A_1 \cos(\omega t) = -\epsilon\alpha_1 \cos(\omega t) \quad (6)$$

Подставляем в данное соотношение уравнения:

$$A_1 = A \left(1 - \epsilon \frac{A^2}{32} \right) + \epsilon^2 A_1^{(2)} \quad (7)$$

$$\omega = 1 + \epsilon \frac{3A^2}{8} + \epsilon^2 \omega^{(2)} \quad (8)$$

После группировки слагаемых при ϵ^2 получаем соотношение на $\omega^{(2)}$:

$$-\frac{21}{128}A^5 = 2A\omega^{(2)} \Leftrightarrow \quad (9)$$

$$\boxed{\omega^{(2)} = -\frac{21A^4}{256}} \quad (10)$$

Поправки к амплитудам

Как уже отмечалось выше: при подстановке первого приближения в x^3 будут получаться гармоники равные суммам и разностям исходных, а это значит, что и следующая поправка будет содержать больше гармоник с ненулевыми амплитудами. Для вычисления поправок обратимся к формуле (3) из прошлого пункта.

$$\alpha_3 = \frac{A^3}{4} + \frac{3A^5}{128}\epsilon \quad (11)$$

$$\alpha_5 = \frac{3A^5}{128}\epsilon \quad (12)$$

Остальные коэффициенты либо равны нулю (четные) либо содержат величины из $O(\epsilon)$.

Запишем аналоги формулы (6) для гармоник $n = 3, 5$

$$\begin{cases} (1 - 9\omega^2)A_3 \cos(3\omega t) = -\epsilon\alpha_3 \cos(3\omega t) \\ (1 - 25\omega^2)A_5 \cos(5\omega t) = -\epsilon\alpha_5 \cos(5\omega t) \end{cases}, \text{ где амплитуды } \begin{cases} A_3 = \epsilon \frac{A^3}{32} + \epsilon^2 A_3^{(2)} \\ A_5 = \epsilon^2 A_5^{(2)} \end{cases} \quad (13)$$

Собираем все слагаемые при ϵ^2 :

$$\begin{cases} -\frac{3A^5}{16} = 8A_3^{(2)} \\ \frac{3A^5}{128} = 24A_5^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3^{(2)} = -\frac{3}{128}A^5 \\ A_5^{(2)} = \frac{1}{1024}A^5 \end{cases} \quad (14)$$

Для получения амплитуды $A_1^{(2)}$ нужно воспользоваться начальными условиями, т.е. мы должны получить, что сумма всех амплитуд A_1, A_3, A_5 дает нам A . Такое может быть только в том случае, если:

$$A_1^{(2)} = -(A_3^{(2)} + A_5^{(2)}) = \frac{23}{1024}A^5 \quad (15)$$

Таким образом мы получили окончательный ответ для второго приближения:

$$x(t) = \left(A - \epsilon \frac{A^3}{32} + \epsilon^2 \frac{23A^5}{1024} \right) \cos(\omega t) + \left(\epsilon \frac{A^3}{32} - \epsilon^2 \frac{3A^5}{128} \right) \cos(3\omega t) + \epsilon^2 \frac{A^5}{1024} \cos(5\omega t) \quad (16)$$

$$\omega = 1 + \epsilon \frac{3A}{8} - \epsilon^2 \frac{21A^4}{256} \quad (17)$$

Разложение в ряд

Разложим³ уравнение (16) в ряд по малому параметру ϵ до $O(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned} x(t) = A \cos(t) + \frac{A^3 \epsilon}{32} \left(-\cos(t) + \cos(3t) - 12t \sin(t) \right) + \\ + \frac{A^5 \epsilon^2}{1024} (23 \cos(t) - 72t^2 \cos(t) - 24 \cos(3t) + \cos(5t) + 96t \sin(t) - 36t \sin(3t)) \end{aligned} \quad (18)$$

Сравним это с выражениями (3),(8) из первого упражнения:

$$\begin{cases} x_0(t) = a \cos(t) \\ x_1(t) = -\frac{a^3}{16} \left(6t \sin t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \right) \end{cases} \quad (3_1)$$

$$x_2(t) = \frac{a^5}{1024} \left(-72t^2 \cos t + 96t \sin t - 36t \sin 3t + 23 \cos t - 24 \cos 3t + \cos 5t \right) \quad (8_1)$$

Получаем, что разложение по гармоникам при малых временах совпадает с ответом, который был получен наивной теорией возмущений.

³Попросим вольфрам посчитать это

Интегральное представление частоты

Существует однако и другой способ найти частоту колебаний, для этого нам потребуются вычислить значение периода, который можно получить непосредственно из уравнения движения.

Перепишем соотношение (2) еще раз:

$$\ddot{x} = -\epsilon x^3 - x \quad (2)$$

Домножим данное соотношение на \dot{x} и проинтегрируем:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{E}{2} - \frac{x^2}{2} - \epsilon \frac{x^4}{4} \Leftrightarrow \dot{x}^2 = E - x^2 - \frac{\epsilon x^4}{2} \quad (19)$$

Тут константа⁴ $E = A^2 - \epsilon A^4/2$, где A — амплитуда колебаний.

Выражаем из ЗСЭ \dot{x} , разделяем переменные и интегрируем выражение для получения периода колебаний.

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} = 2 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} \Leftrightarrow \\ T &= 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} \end{aligned} \quad (20)$$

Возьмем интеграл в соотношении (20), для этого подставим в него значение E :

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} &= \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{(A^2 - x^2) + \epsilon(A^4 - x^4)/2}} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon(A^2 + x^2)/2}} \approx \\ &\approx \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \left(1 - \frac{\epsilon}{4}(A^2 + x^2) + \frac{3\epsilon^2}{32}(A^2 + x^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Вычисляем интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \arcsin\left(\frac{x}{A}\right)\Big|_0^A = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^A \frac{(A^2 + x^2)dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \{x = A \sin t\} = \int_0^{\pi/2} \frac{A^2 + A^2 \sin^2 t}{A \cos t} A \cos t dt = A^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2(t)) dt = \frac{3\pi A^2}{4} \\ \int_0^A \frac{(A^2 + x^2)^2 dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \{x = A \sin t\} = A^4 \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 t)^2 dt = \frac{19\pi A^4}{16} \end{aligned}$$

⁴По сути это энергия системы, причем её значение можно определить из начальных условий

Подставляем все в соотношение (21):

$$\frac{T}{4} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{3\pi A^2}{4} + \frac{3\epsilon^2}{32} \cdot \frac{19\pi A^4}{16} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi - \epsilon \frac{3\pi A^2}{4} + \frac{3\epsilon^2}{8} \cdot \frac{19\pi A^4}{16} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\omega} &= 1 - \epsilon \frac{3A^2}{8} + \frac{3\epsilon^2}{16} \cdot \frac{19A^4}{16} \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь разложим функцию ω по малому параметру:

$$\omega = \left(1 - \epsilon \frac{3A^2}{8} + \frac{3\epsilon^2}{16} \cdot \frac{19A^4}{16}\right)^{-1} \approx 1 + \epsilon \frac{3A^2}{8} - \frac{3\epsilon^2}{16} \cdot \frac{19A^4}{16} + \frac{9\epsilon^2 A^4}{64} = 1 + \frac{3\epsilon A^2}{8} - \frac{21\epsilon^2 A^4}{256} \quad (24)$$

Окончательно получаем:

$$\boxed{\omega = 1 + \frac{3\epsilon A^2}{8} - \frac{21\epsilon^2 A^4}{256}} \quad (25)$$

Упражнение 3

Необходимо найти сдвиг частоты и амплитуды неосновных гармоник из-за малого кубического ангармонизма вида:

$$\delta U = \frac{\epsilon x^3}{3}, \quad \epsilon \ll 1 \quad (1)$$

Составим уравнение движения:

$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^2 \quad (2)$$

Нулевое приближение имеет вид: $x_0(t) = A \cos(\omega t)$, тогда для расчета первого приближения подставим в правую часть x_0 :

$$\ddot{x} + x = -\epsilon A^2 \cos^2(\omega t) \quad (3)$$

Разложим функцию $x(t)$ в ряд фурье, причем данный ряд будет содержать только косинусы⁵:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) \quad (4)$$

Для производной:

$$\ddot{x} = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \omega^2 A_n \cos(n\omega t) \quad (5)$$

⁵Такой конфигурации мы добиваемся начальными условиями: $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$.

Преобразуем уравнение (3):

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^2 \omega^2) A_n \cos(n\omega t) = -\epsilon \frac{A^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \quad (6)$$

Соотношение (6) дает систему из 3х уравнений, которые определяют поправки на частоту и амплитуды нулевой и второй гармоник.

$$\begin{cases} (1 - 1^2 \omega^2) A \cos(\omega t) = 0 \\ A_0^{(1)} = -\frac{A^2}{2} \\ (1 - 2^2 \omega^2) A_2^{(1)} = -\frac{A^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^{(1)} = 0 \\ A_0^{(1)} = -\frac{A^2}{2} \\ A_2^{(1)} = \frac{A^2}{6} \end{cases} \quad (7)$$

Для определения поправки к амплитуде основной гармонике обратимся к начальным условиям: $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$, т.е. первый порядок дает нам решение:

$$x(t) = -\epsilon \frac{A^2}{2} + \left(A + \epsilon \frac{A^2}{3} \right) \cos \omega t + \epsilon \frac{A^2}{6} \cos 2\omega t \quad (8)$$

Для нахождения второй поправки проводим аналогичную процедуру: подставляем в соотношение (2) выражение для первой поправки, оставляя члены, степень которых не больше 1:

$$x^2(t) = A^2 \cos^2 \omega t + \frac{A^3}{3} \cos \omega t \left(-3 + 3 \cos \omega t + \cos 2\omega t \right) \epsilon + O(\epsilon) \quad (9)$$

$$x^2(t) = \frac{A^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) + \frac{\epsilon A^3}{2} - \frac{\epsilon 5A^3}{6} \cos \omega t + \frac{\epsilon A^3}{3} \cos 2\omega t + \frac{\epsilon A^3}{6} \cos 3\omega t$$

После подстановки в уравнение (2) и учета формул (4),(5) собираем все члены при одинаковых гармониках содержащие ϵ^2 :

$$\begin{cases} (1 - 3^2 \omega^2) A_3 \cos(3\omega t) = -\epsilon^2 \frac{A^3}{6} \cos(3\omega t) \\ (1 - 2^2 \omega^2) A_2 \cos(2\omega t) = -\epsilon^2 \frac{A^3}{3} \cos(2\omega t) \\ (1 - 1^2 \omega^2) A_1 \cos(\omega t) = \epsilon^2 \frac{5A^3}{6} \cos(\omega t) \\ (1 - 0^2 \omega^2) A_0 = \epsilon^2 \frac{A^3}{2} \end{cases} \quad (10)$$

С последним уравнением системы все понятно:

$$\boxed{A_0^{(2)} = \frac{A^3}{2}} \quad (11)$$

Посмотрим теперь на уравнение для первой гармоники:

$$\omega = 1 + \epsilon \omega^{(1)} + \epsilon^2 \omega^{(2)}$$

$$A_1 = A + \epsilon A_1^{(1)} + \epsilon^2 A_1^{(2)}$$

Подставляем разложение во второе уравнение системы (10), откидывая слагаемые порядок малости которых больше ϵ^2 :

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2)A_1 &= (1 - \omega)(1 + \omega)(A + \epsilon A_1^{(1)} + \epsilon^2 A_1^{(2)}) = -(\epsilon\omega^{(1)} + \epsilon^2\omega^{(2)})(2 + \epsilon\omega^{(1)} + \epsilon^2\omega^{(2)})(A + \epsilon A_1^{(1)} + \epsilon^2 A_1^{(2)}) = \\ &= -(2\epsilon\omega^{(1)} + 2\epsilon^2\omega^{(2)} + \epsilon^2(\omega^{(1)})^2)(A + \epsilon A_1^{(1)} + \epsilon^2 A_1^{(2)}) = -(2\epsilon A\omega^{(1)} + 2\epsilon^2 A\omega^{(2)} + \epsilon^2 A(\omega^{(1)})^2 + 2\epsilon^2 A_1^{(1)}\omega^{(1)}) \end{aligned}$$

Тогда группировка слагаемых при ϵ^2 и второе уравнение системы (10) дает соотношение:

$$-(2A\omega^{(2)} + A(\omega^{(1)})^2 + 2A_1^{(1)}\omega^{(1)}) = \frac{5A^3}{6} \quad (12)$$

Подставляем в (12) $\omega^{(1)} = 0$ из системы (7), тогда вторая поправка к частоте примет вид:

$$\boxed{\omega^{(2)} = -\frac{5A^2}{12}} \quad (13)$$

Разбираемся теперь с амплитудами 2 гармоники:

$$(1 - 2^2\omega^2) = (1 - 2\omega)(1 + 2\omega) = -(1 + 2\epsilon^2\omega^{(2)})(3 + 2\epsilon^2\omega^{(2)}) = -(3 + 8\epsilon^2\omega^{(2)}) \quad (14)$$

$$(1 - 2^2\omega^{(2)})A_2 = -(3 + 8\epsilon^2\omega^{(2)})(\epsilon A_2^{(2)} + \epsilon^2 A_2^{(2)}) = -3\epsilon A_2^{(2)} - 3\epsilon^2 A_2^{(2)} \quad (15)$$

Тогда из системы (10) следует:

$$\boxed{A_2^{(2)} = \frac{A^3}{9}} \quad (16)$$

Для третьей гармоники:

$$(1 - 3^2\omega^2)\epsilon^2 A_3^{(2)} = -\epsilon^2 \frac{A^3}{6} \quad (17)$$

$$8A_3^{(2)} = \frac{A^3}{6} \quad (18)$$

$$\boxed{A_3^{(2)} = \frac{A^3}{48}} \quad (19)$$

Из граничных условий находим поправку к первой гармонике⁶:

$$\boxed{A_1^{(2)} = -\frac{91A^3}{144}} \quad (20)$$

⁶Сумма всех вторых поправок к амплитудам должна быть нулевой.

Окончательный ответ:

$$x(t) = \left(-\epsilon \frac{A^2}{2} + \epsilon^2 \frac{A^3}{2} \right) + \left(A + \epsilon \frac{A^2}{3} - \epsilon^2 \frac{91A^3}{144} \right) \cos \omega t + \left(\epsilon \frac{A^2}{6} + \epsilon^2 \frac{A^3}{9} \right) \cos 2\omega t + \epsilon^2 \frac{A^3}{48} \cos 3\omega t$$

$$\omega = 1 - \epsilon^2 \frac{5A^2}{12}$$

Задача 1

Частица массой m движется в потенциале:

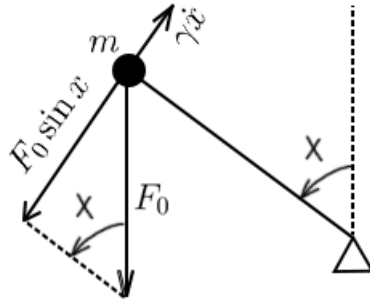
$$U(x) = U_0(\cos x - Ax) \quad (1)$$

На частицу также действует малая сила трения с коэффициентом γ . Требуется определить при каком значении A возможна ненулевая средняя скорость движения частицы, найти поведение средней скорости вблизи границы диапазона.

Запишем уравнение движения частицы:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = U_0 A + U_0 \sin x \quad (2)$$

Можно заменить, что подобным уравнением описывается маятник с трением, который может вращаться в вертикальной плоскости.



Рассмотрим предельный случай движения такого маятника (нет внешней постоянной силы и нет трения), когда маятник совершает полный оборот, стартуя из вертикального положения с

нулевой начальной скоростью. Понятно, что т.к. трения нет, то в конечном итоге маятник придет в конечную точку с нулевой скоростью. Запишем уравнение движения такого маятника:

$$\ddot{x} = U_0 \sin x \quad (3)$$

Домножим его на \dot{x} и проинтегрируем, учитывая, что $E_0 = U_0$, получим:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U_0 \cos(x) = U_0 \quad (4)$$

Выберем отсчет времени таким образом, чтобы в $t = 0$ маятник находится в положении $x = \pi$. Пусть $x_1 := x - \pi$. Тогда $x_1(0) = 0$ и ЗСЭ принимает вид:

$$\frac{\dot{x}_1^2}{2} - U_0 \cos(x_1) = U_0 \quad (5)$$

Выражаем \dot{x}_1 , задеваем переменные и интегрируем:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_1(t)} \frac{dx}{\sqrt{U_0 + U_0 \cos(x)}} = \frac{1}{\sqrt{4U_0}} \int_0^{x_1(t)} \frac{dx}{\cos(x/2)} = \{\sin(x/2) = \tanh(z)\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{U_0}} \int_0^{\operatorname{arctanh} \sin \frac{x_1}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{U_0}} \operatorname{arctanh} \sin \frac{x_1}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\boxed{x = \pi + 2 \arcsin \tanh \sqrt{U_0} t} \quad (7)$$

$$\dot{x} = 2\sqrt{U_0} \frac{1}{\cosh^2(t\sqrt{U_0}) \sqrt{1 - \tanh^2(t\sqrt{U_0})}} = \frac{2\sqrt{U_0}}{\cosh(t\sqrt{U_0})} \quad (8)$$

Пусть теперь есть трение и внешняя сила. Запишем маятник из верхнего положения без начальной скорости, после совершения оборота скорость должна быть ненулевой. Рассмотрим приращение энергии в таком движении, считая, что сила трения и внешняя сила малы.

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{конечная}}^2}{2} - 0 &= \int_0^{2\pi} U_0 A dx - \int_0^{2\pi} \gamma \dot{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 A \dot{x} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \dot{x}^2 dt = \\ &= U_0 A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sqrt{U_0}}{\cosh(t\sqrt{U_0})} dt - 4\gamma U_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh^2(t\sqrt{U_0})} = 2U_0 A \pi - 8\gamma \sqrt{U_0} \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Критическое значение параметра A :

$$\boxed{A = \frac{4\gamma}{\pi\sqrt{U_0}}} \quad (10)$$

Исходя из формулы (10) можно заключить, что наше предположение о малости A было правильным, причем стоит заметить, что если поменять знак в выражении для A , то все рассуждения будут аналогичными, просто маятник будет двигаться в противоположную сторону.