4 задача из 3 лекции

Нечитаев Дмитрий

14 октября 2019 г.

Задача 4*

Необходимо вычислить интеграл.

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} dx$$

Шаг 1

Для начала исследуем сходимость несобственного интеграла. На бесконечности подынтегральная функция $\sim \frac{4ln(x)}{e^{2x}} \Rightarrow$ инт. сх-ся на $+\infty$. Рассмотрим теперь вторую особенность.

$$\operatorname{ch}^2(x) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \leq 1 \Rightarrow \frac{|\ln(x)|}{\operatorname{ch}^2(x)} \leq |\ln(x)|$$

Тогда для интеграла справедлива оценка.

$$\Big|\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} dx\Big| = \int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{\operatorname{ch}^2(x)} dx \leq \int_0^1 |\ln(x)| dx = 1$$

Таким образом мы установили, что интеграл сходится (абсолютно). А это значит, что множно ввести последовательность I_n, определяемую выражением:

$$I_n = \int_0^{\pi n} \frac{\ln(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \ln(\pi n)\tanh(\pi n) - \int_0^{\pi n} \frac{\tanh(x)}{x} dx \tag{1.1}$$

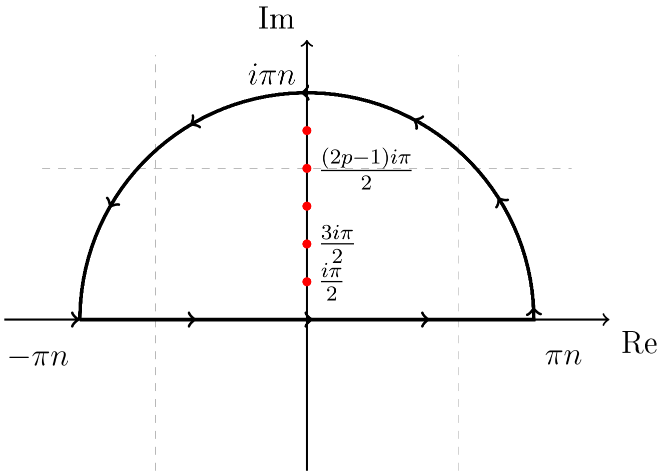
Предельный переход $n \to +\infty$ даст нам ответ на задачу.

Шаг 2

Теперь разберемся с интегралом.

$$\int_0^{\pi n} \frac{\tanh(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi n}^{\pi n} \frac{\tanh(x)}{x}dx \tag{2.1}$$

Для его подсчета воспользуемся ТФКП. В комплексной плоскости проведем контур, представленный на рисунке.



$$\int_C \frac{\tanh(z)}{z}dz = \int_{-\pi n}^{\pi n} \frac{\tanh(z)}{z}dz + \int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z}dz = 2i\pi \sum Res \frac{\tanh(z)}{z} \tag{2.2}$$

Вычеты определяются следующим выражением:

$$\underset{(2p-1)i\pi/2}{Res} \frac{\tanh(z)}{z} = \underset{(2p-1)i\pi/2}{Res} \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)z} = \frac{2}{(2p-1)i\pi} \tag{2.3}$$

Теперь разберемся с интегралом по окружности, для этого произведем параметризацию $z = re^{i\phi}$:

$$\int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z}dz = \int_0^{\pi} \frac{\tanh(re^{i\phi})ire^{i\phi}d\phi}{re^{i\phi}} = i\int_0^{\pi} \tanh(re^{i\phi})d\phi \tag{2.4}$$

Шаг 3

Рассмотрим детальто поведение интеграла при предельном переходе $r = \pi n \to \infty$. Пусть $e^{i\phi} = x + iy$, тогда верно:

$$\tanh(re^{i\phi}) = \frac{\mathrm{sh}(2rx)}{\cosh(2rx) + \cos(2ry)} + \frac{i\sin(2ry)}{\cosh(2rx) + \cos(2ry)} \tag{3.1}$$

Введя новую параметризацию дуги: $x = \cos(\phi) \Rightarrow dx = -\sin(\phi)d\phi = -\sqrt{1-x^2}d\phi$

$$\int_0^\pi \tanh(re^{i\phi})d\phi = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{sh}(2rx) + i\sin(2r\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(\cosh(2rx) + \cos(2r\sqrt{1-x^2}))}dx \tag{3.2}$$

Действительная часть подынтегральной функции является нечетной, а мнимая четной, это дает нам соотноешение:

$$\int_0^\pi \tanh(re^{i\phi})d\phi = \int_0^1 \frac{2i\sin(2r\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(\cosh(2rx) + \cos(2r\sqrt{1-x^2}))}dx \tag{3.3}$$

Введем последовательность функций, определенных на множестве $(0;1)$:

$$f_n(x) = \frac{\sin(2rx)}{x(\cosh(2r\sqrt{1-x^2}) + \cos(2rx))}, \text{ где } r = \pi n \tag{3.4}$$

Из определения фунции $f_n(x)$ следует неравенство:

$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin(2rx)|}{x(\cosh(2r\sqrt{1-x^2}) - 1)} \text{ верно для } \forall x \in (0;1) \tag{3.5}$$

Рассмотрим функцию на двух промежутках. Пусть $x \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}})$, тогда верна оценка:

$$\frac{|\sin(2rx)|}{x(\cosh(2r\sqrt{1-x^2}) - 1)} \leq \frac{2rx}{x(\cosh(2r\sqrt{1-1/2}) - 1)} = \frac{2r}{\cosh(r\sqrt{2}) - 1} \leq \frac{2r}{r^2} = \frac{2}{\pi n} \leq \frac{2}{\pi} \tag{3.6}$$

На втором промежутке $x \in (0.5;1)$ произведем замену переменных: $x = 1-t \Rightarrow t \in (0;0.5)$ и вспомним, что $r = \pi n$.

$$\frac{|\sin(2r(1-t))|}{(1-t)(\cosh(2r\sqrt{t(2-t)}) - 1)} \leq \frac{2rt}{(1-t)2r^2t(2-t)} \leq \frac{1}{(t-2)(t-1)r} \leq \frac{1}{2\pi n} \leq \frac{1}{2\pi} \tag{3.7}$$

Таким образом мы установили:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \forall x \in (0;1), \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Лебега об ограниченной сходимости мы можем утверждать:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \tag{3.8}$$

Но с другой стороны:

$$\forall x \in (0;1) \text{ верно: } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \tag{3.9}$$

Собирая все вместе, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z}dz = 0 \tag{3.10}$$

Шаг 4

Собираем теперь все вместе. Из (2.2) выражаем интеграл с гиперболическим тангенсом.

$$\int_0^{\pi n} \frac{\tanh(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi n}^{\pi n} \frac{\tanh(x)}{x} dx = \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{2p-1} - \frac{1}{2} \int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z} dz$$

Подставляем в (1.1):

$$I_n = \int_0^{\pi n} \frac{\ln(x)}{\text{ch}^2(x)} = \ln(\pi n) \tanh(\pi n) - \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{2p-1} + \frac{1}{2} \int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z} dz =$$

$$= \Big(\ln(\pi n) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\Big) \tanh(\pi n) - \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{2p-1} + \frac{1}{2} \int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z} dz$$

Переходя к пределу $n \to \infty$, можно разложить $tanh(\pi n)$ и немного преобразовать выражение.

$$I_\infty = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\Big(\ln(\pi) + \ln(n) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\Big)(1 - 2e^{-2\pi n}) - \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{2p-1} + \frac{1}{2} \int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z} dz \Bigg) =$$

$$= \ln(\pi) - \gamma + \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{2p} - \frac{2}{2p-1}\Big) + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int_{C_R} \frac{\tanh(z)}{z} dz = \ln(\pi) - \gamma + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} =$$

$$= \ln(\pi) - \gamma + 2\ln(2) = \ln(\frac{\pi}{4}) - \gamma$$

Где γ - константа Эйлера - Маскерони.

Окончательно:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{\text{ch}^2(x)} dx = \ln\Big(\frac{\pi}{4}\Big) - \gamma}$$