

Задачи к 4 лекции

Нечитаев Дмитрий

20 октября 2019 г.

Задача 1

'Билетик' — это последовательность вида

$$n_1 n_2 \dots n_N m_1 m_2 \dots m_N, \text{ где } \forall i \in \overline{1, N} \rightarrow n_i, m_i \in \overline{0, 9}$$

Будем называть билетик "счастливым" если для него выполняется

$$\sum_{i=1}^N n_i = \sum_{i=1}^N m_i$$

Обозначим число счастливых билетиков как $H(N)$. Необходимо посчитать $H(N)$ в пределе $N \gg 1$. Для этого решим несколько вспомогательных задач.

- Докажем формулу

$$\delta_{a,b} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ix(a-b)}$$

- Найдем интегральное представление $H(N)$.
- Применим метод перевала к интегральному представлению.

Шаг 1

Пусть $a = b$, тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Если $a \neq b$, то пусть $a - b = c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, значение интеграла будет

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{icx} = \frac{1}{2c\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(cx) e^{icx} = \frac{1}{2c\pi} (e^{ic\pi} - e^{-ic\pi}) = \frac{1}{c\pi} \sin(c\pi) = 0$$

Таким образом мы получили:

$$\delta_{a,b} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{ix(a-b)}$$

Шаг 2

В интегральное представление $\delta_{a,b}$ можно подставить в качестве a — сумму первых N цифр, а в b — сумму последних N цифр, тогда представление $H(N)$ запишется в виде:

$$H(N) = \sum_{n_1=0}^9 \sum_{n_2=0}^9 \dots \sum_{n_N=0}^9 \sum_{m_1=0}^9 \sum_{m_2=0}^9 \dots \sum_{m_N=0}^9 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \exp(ix(n_1 + n_2 + \dots + n_N - m_1 - m_2 - \dots - m_N)) \quad (2.1)$$

Это страшное выражение можно упростить. Для этого необходимо занести знаки суммы под интеграл, затем посчитать сумму геометрической прогрессии.

$$\begin{aligned} H(N) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \sum_{n_1=0}^9 \sum_{n_2=0}^9 \dots \sum_{n_N=0}^9 \sum_{m_1=0}^9 \sum_{m_2=0}^9 \dots \sum_{m_N=0}^9 e^{ixn_1} e^{ixn_2} \dots e^{ixn_N} e^{-ixm_1} e^{-ixm_2} \dots e^{-ixm_N} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \frac{e^{10ix} - 1}{e^{ix} - 1} \sum_{n_2=0}^9 \dots \sum_{n_N=0}^9 \sum_{m_1=0}^9 \sum_{m_2=0}^9 \dots \sum_{m_N=0}^9 e^{ixn_2} \dots e^{ixn_N} e^{-ixm_1} e^{-ixm_2} \dots e^{-ixm_N} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \left(\frac{e^{10ix} - 1}{e^{ix} - 1} \right)^N \sum_{m_1=0}^9 \sum_{m_2=0}^9 \dots \sum_{m_N=0}^9 e^{-ixm_1} e^{-ixm_2} \dots e^{-ixm_N} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \left(\frac{e^{10ix} - 1}{e^{ix} - 1} \right)^N \frac{e^{-10ix} - 1}{e^{-ix} - 1} \sum_{m_2=0}^9 \dots \sum_{m_N=0}^9 e^{-ixm_2} \dots e^{-ixm_N} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \left(\frac{e^{10ix} - 1}{e^{ix} - 1} \cdot \frac{e^{-10ix} - 1}{e^{-ix} - 1} \right)^N = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \left(\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \cdot \frac{e^{-5ix} - e^{5ix}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \right)^N = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \left(\frac{\sin(5x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^{2N} \Rightarrow \\ &H(N) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\pi} \frac{\sin^{2N}(10x)}{\sin^{2N}(x)} \quad (2.2) \end{aligned}$$

Шаг 3

Применим к полученному выражению метод перевала. Детальней рассмотрим функцию $\sin(10x)/\sin(x)$. Т.к. данная функция является четной, что в нуле все нечетные производные будут равны 0. Посмотрим что происходит со второй производной.

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\sin(10x)}{\sin(x)} = \csc(x) \left(\sin(10x)(\cot^2(x) + \csc^2(x) - 100) - 20 \cos(10x) \cot(x) \right)$$

В нуле вторая производная стремится к значению -330 . Т.е контур в комплексной плоскости деформировать не нужно.

Вообще, подынтегральная функция имеет и другие точки максимума, но значения, которые в этих точках достигаются будут меньше 10. Возьмем точку $x_0 = \frac{\pi}{10}$ — точка, соответствующая первому нулю числителя. Тогда верна оценка неравенств:

$$\frac{|\sin(10x)|}{\sin(x)} \leq \frac{|\sin(10x)|}{\sin(\pi/10)} \leq \frac{|\sin(10x)|}{\sin(\pi/12)} \leq \frac{1}{\sin(\pi/12)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \leq 3.9 \quad \forall |x| \in \left[\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2} \right]$$

Получается, что при больших значениях N нам достаточно учесть влияние одной перевальной точки. Разложим логарифм в нуле до второго порядка:

$$\ln \left(\frac{\sin(10x)}{\sin(x)} \right) = \ln(10) - \frac{33}{2}x^2 + o(x^3) \quad (3.1)$$

Подставляем это разложение в интеграл (2.2):

$$\begin{aligned} H(N) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\pi} \exp \left(2N \ln \left(\left| \frac{\sin(10x)}{\sin(x)} \right| \right) \right) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi} \exp \left(2N \left(\ln(10) - \frac{33}{2}x^2 \right) \right) = \\ &= \frac{10^{2N}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-33Nx^2} = \frac{10^{2N}}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{33N}} = \frac{100^N}{\sqrt{33\pi N}} \end{aligned}$$

Оценим точность полученного результата. Известно, что $H(3) = 55252$, наша формула дает значение $H(3) \approx 56700$. В таком случае относительная ошибка не более 3%.

Задача 2

Вычислить асимптотику биномиальных коэффициентов, используя интегрирование в комплексной плоскости и метод перевала.

- Докажем формулу

$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{(1+z)^n}{z^k}$$

интегрирование по единичной окружности против часовой стрелки.

- Положим теперь $k = xn$, где $0 < x < 1$. Считая, что $n, x, (1-x)n \gg 1$, найдем методом перевала асимптотику C_n^k .
- Проверка правильности ответа с помощью формулы Стирлинга.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Шаг 1

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{(1+z)^n}{z^k} \quad \text{где } n, k > 0$$

Подынтегральное выражение имеет особенность в нуле, а это значит, что интеграл определяется только вычетом в нуле.

Воспользуемся разложением числителя дроби в ряд:

$$(1+z)^n = \sum_{p=1}^{\infty} C_n^p z^p \quad (1.1)$$

$$\frac{(1+z)^n}{z^k} = \sum_{p=1}^{\infty} C_n^p z^{p-k} \quad (1.2)$$

Тогда при интегрировании по единичной окружности мы получим:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{(1+z)^n}{z^k} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left(\sum_{p=1}^{\infty} C_n^p z^{p-k} \right) = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} C_n^k = 2i\pi C_n^k \quad (1.3)$$

Окончательно:

$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{(1+z)^n}{z^k} \quad (1.4)$$

Шаг 2

Положим теперь $k = xn$, где $0 < x < 1$. Считая, что $n, x, (1-x)n \gg 1$.

Найдем методом перевала асимптотику C_n^k , для этого рассмотрим поведение функции $f(z) = \ln(z+1) - x \ln(z)$.

$$f'(z_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_0+1} - \frac{x}{z_0} = 0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow z_0+1 = \frac{1}{1-x} \quad (2.1)$$

$$f''(z_0) = -\frac{1}{(z_0+1)^2} + \frac{x}{z_0^2} = \frac{(1-x)^2}{x} - (1-x)^2 = \frac{(1-x)^3}{x} = -\frac{e^{i\pi}(1-x)^3}{x} \quad (2.2)$$

Т.е. деформированный контур должен проходить через точку $z_0 = x/(1-x)$ под углом $\pi/2$. Для этого достаточно изменить радиус окружности в исходном интеграле. Разложим функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 до второго порядка.

$$f(z) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - x \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{e^{i\pi}(1-x)^3}{2x} z^2 + o(z^3) \quad (2.3)$$

Подставляем разложение в интеграл:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{(1+z)^n}{z^k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \exp(nf(z)) \approx \\ & \approx \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{xn+1} \frac{1}{(1-x)^n} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left(\frac{n(1-x)^3}{2x} z^2\right) dz = \frac{i(1-x)^{xn-n+1}}{2i\pi x^{xn+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n(1-x)^3}{2x} z^2\right) dz = \\ & = \frac{(1-x)^{xn-n+1}}{2\pi x^{xn+1}} \sqrt{\frac{2x\pi}{n(1-x)^3}} = \frac{(1-x)^{xn-n+1}}{x^{xn+1}} \sqrt{\frac{x}{2\pi n(1-x)^3}} = \frac{(1-x)^{xn-n}}{x^{xn}} \sqrt{\frac{1}{2\pi nx(1-x)}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Возвращаясь обратно к переменным k, n , получаем:

$$C_n^k = \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \quad (2.5)$$

Проверка результата

Проверим полученный результат. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Подставим данное представление в формулу для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2\pi(n-k)}((n-k)/e)^{n-k} \sqrt{2\pi k}(k/e)^k} = \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}$$

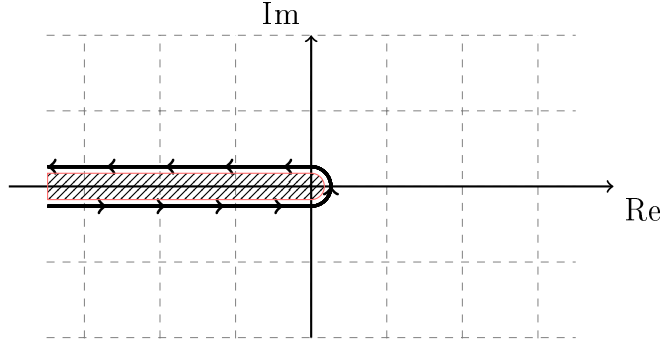
Можно радоваться, т.к. мы получили выражение (2.5).

Задача 3

Вычислить асимптотику функции Бесселя $z \rightarrow +\infty$.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{dt}{t^{\nu+1}} \exp\left(\frac{z}{2}\left\{t - \frac{1}{t}\right\}\right)$$

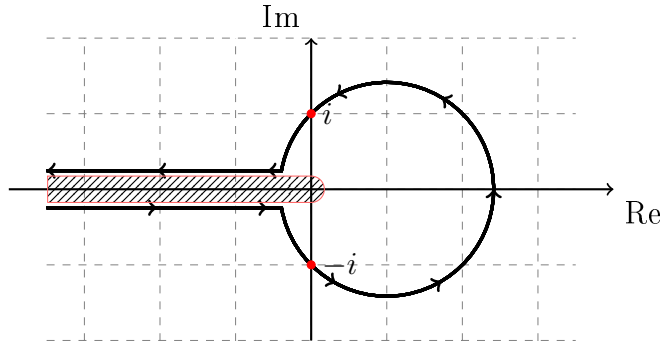
Разрез и контур изображены на рисунке:



Введем функцию $f(t) = t - \frac{1}{t}$. Исследуем её поведение:

$$f'(t_0) = 1 + \frac{1}{t_0^2} = 0 \Leftrightarrow t_0 = \pm i \Rightarrow f''(t) = -\frac{2}{t^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(i) = -2i \\ f''(-i) = 2i \end{cases}$$

Тогда проложим контур в комплексной плоскости следующим образом:



В данном случае у нас есть 2 перевальные точки, причем контур через точку i проходит под углом $5\pi/4$. Если изменить обход контура, то угол станет $\pi/4$ — тот, который нам и нужен. Получается, что для учета перевальной точки i нужно просто считать набор интеграла в окрестности i отрицательным.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2i\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(-\frac{\exp(-i\pi/4) \exp(iz)}{\exp(\frac{i\pi}{2}(\nu+1))} + \frac{\exp(i\pi/4) \exp(-iz)}{\exp(-\frac{i\pi}{2}(\nu+1))} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\exp \left\{ \frac{i\pi}{4} - iz + \frac{i\pi}{2}(\nu+1) \right\} - \exp \left\{ -\frac{i\pi}{4} + iz - \frac{i\pi}{2}(\nu+1) \right\} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left(-z + \frac{\pi}{2}(\nu+1) + \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4} \right)
\end{aligned}$$

Окончательно:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4} \right)$$