Задачи к 9 лекции

Нечитаев Дмитрий

27 ноября 2019 г.

Задача 1

Необходимо получить уравнения на медленные переменные в задаче Кеплера, предполагая, что частица находится в среде со слабым трением.

$$\mathbf{F_{ad}} = -\nu\dot{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Запишем уравнение движения частицы:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r} - \nu\dot{\mathbf{r}} \tag{2}$$

На временах порядка нескольких периодов $\mathbf{r}$ ведет себя как и в невозмущенной задаче Кеплера, значит данную функцию можно разложиьт в ряд фурье:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}\cos(n\omega t) + \mathbf{b_n}\sin(n\omega t) \tag{3}$$

После дифференцирования по времени постоянный вектор $\mathbf{r_0}$ исчезает, а это значит, что скорость частицы $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ при усреднении по периоду будет давать 0. Из этого можно заключить, что если усреднить уравнение движения (2) по периоду, то последнее слагаемое обнулится, т.е. имеет место соотношение:

$$\Big\langle m\ddot{\mathbf{r}}\Big\rangle_T = -\Big\langle\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}\Big\rangle_T \tag{4}$$

Перейдем к исследованию эволюции медленных переменных. На лекции было получено соотношение для производных момента импульса и вектора Лапласа-Рунге-Ленца:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r}\times\mathbf{F_{ad}}, \qquad \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\alpha m}\mathbf{F_{ad}}\times\mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}}\times\Big(\mathbf{r}\times\mathbf{F_{ad}}\Big) \tag{5}$$

Переходим к средним значениям:

$$\dot{\mathbf{M}} = -\nu\Big\langle \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\Big\rangle_t = -\frac{\nu}{m}\Big\langle \mathbf{r}\times\mathbf{m}\dot{\mathbf{r}}\Big\rangle_T = -\frac{\nu}{m}\Big\langle \mathbf{M}\Big\rangle_T \tag{6}$$

В силу того, что переменная $\mathbf{M}$ является медленной, то считаем, что за период T момент импульса практически не меняется. Таким образом получаем соотношение:

$$\mathbf{M}(t) = -\frac{\nu}{m}\mathbf{M} \tag{7}$$

Интегрирование дает нам соотношение для момента импульса:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M_0}\exp\Big(-\frac{\nu}{m}t\Big) \tag{8}$$

Разберемся теперь как эволюционирует вектор Рунге-Ленца:

$$\dot{\mathbf{A}} = -\Big\langle\frac{1}{\alpha m}\nu\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}\Big\rangle_T + \frac{1}{\alpha}\Big\langle\dot{\mathbf{r}}\times\Big(\mathbf{r}\times(-\nu\dot{\mathbf{r}})\Big)\Big\rangle_T =$$

$$= -\Big\langle\frac{1}{\alpha m}\nu\dot{\mathbf{r}}\Big\rangle_T\times\mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\Big\langle\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}\Big\rangle_T = \frac{1}{\alpha}\Big\langle\dot{\mathbf{r}}\Big\rangle_T\times\mathbf{M} = 0 \tag{9}$$

Получается что вектор $\mathbf{A}$ остается постоянным. Если обратиться к геометрическим параметрам орбиты, то получим, что эксцентреситет, равный $|\mathbf{A}|$ остается постоянным, а параметры орбиты, пропорциональный $\mathbf{M}^2$ задающий "размеры"траектории убывает со временем как $\sim\exp\Big(-2\frac{\nu}{m}t\Big)$. Т.е тело движется по подобным эллипсам, размеры которых убывают экспоненциально со временем.

В классической задаче Кеплера траектория в полярной системе координат определяется выражением:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + A\cos\phi}, \quad p = \frac{M^2}{\alpha m} \tag{10}$$

Посчитаем период обращения тела по такой траектории:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\phi'_t} = \int_0^{2\pi} \frac{mr^2}{M^2} d\phi = \frac{mp^2}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + A\cos\phi)^2} \tag{11}$$

$$J(\beta) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\beta + A\cos x} = \{t = \tan(x/2)\} = 2\int_0^{\infty} \frac{2dt}{\beta(1+t^2) + A(1-t^2)} = 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{(A+\beta) + t^2(\beta - A)} =$$

$$= \frac{4}{\beta - A} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\frac{A+\beta}{\beta-A} + t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - A^2}} \tag{12}$$

Для вычисления интеграла, который фигурирует в (15) необходимо взять производную $\partial_\beta J(\beta)\Big|_{\beta=1}$

$$\partial_\beta J(\beta)\Big|_{\beta=1} = -\frac{2\pi\beta}{(\beta^2 - A^2)^{3/2}}\Big|_{\beta=1} = -\frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}} \tag{13}$$

Это выражение соответствет интегралу:

$$\partial_\beta J(\beta) = -\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\beta + A\cos x)^2} \tag{14}$$

С учетом выражения (16), (17) находим выражение для периода из формулы (15):

$$\boxed{T = \frac{mp^2}{M} \cdot \frac{2\pi}{(1 - A^2)^{3/2}}} \tag{15}$$

Задача 2

В данной задаче требуется определить как будет изменяться траектория частицы, если учесть, что происходит потеря массы из-за излучения.

Первым делом определим внешнюю силу, которая действует на частицу, для этого запишем теорему об изменении количества движения:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow \dot{m}\dot{\mathbf{r}} + m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} - \dot{m}\dot{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Исследуем как меняется момент импульса. С учетом формулы (1) получаем:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \dot{\mathbf{M}} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{m}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\dot{m}}{m}\mathbf{M} \tag{2}$$

Важно заметить, что $\mathbf{M}$ — это момент импульса только планеты, поэтому при посчете производной член, содержащий $\dot{m}$ мы не учитывали, т.к. в таком случае получили бы изменение импульса системы: планета + излученное вещество. Из формулы (1) видно, что на такую систему действует только одна центральная сила, а значит и изменение момента импульса относительно центра поля будет нулевым.

Теперь обратимся к вектору Рунге-Ленца:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{3}$$

Дифференцируем по времени:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{M}} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \left\{\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + \frac{\dot{m}}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right\} - \frac{\dot{m}}{\alpha m}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} = -\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\right)\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} \end{aligned} \tag{4}$$

Произведем усреднение выражений (2) и (4), учитывая, что[1] $T\dot{\alpha}/\alpha, T\dot{m}/m \ll 1$, где T — период обращения.

$$\dot{\mathbf{M}} = -\left\langle\frac{\dot{m}}{m}\right\rangle_T \mathbf{M} = -\frac{\dot{m}}{m}\mathbf{M} \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\left\langle\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\right)\dot{\mathbf{r}}\right\rangle_T \times \mathbf{M} = -\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{2\dot{m}}{\alpha m}\right)\left\langle\dot{\mathbf{r}}\right\rangle_T \times \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Получается, что т.к. планета теряет массу, то $\dot{m}/m < 0$ т.е. момент импульса экспоненциально растет, а значит характерный размер орбит возрастает как $\sim \exp(-2\frac{\dot{m}}{m}t)$. Причем эксцентриситет орбиты остается постоянным.

[1] Данные соотношения показывают, что за время периода величины α, m практически не изменаются

Задача 3

Исследуем траекторию электрона в поле протона при добавлении слабого магнитного поля.

Уравнение движения электрона:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

Производные векторов $\mathbf{M}, \mathbf{A}$:

$$\dot{\mathbf{M}} = -e\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{\alpha m}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{M} - \frac{e}{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \times \Big(\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})\Big) \tag{2}$$

Отметим пару тождеств:

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times B) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})\Big) \tag{3}$$

$$\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \tag{4}$$

В силу того, что поле слабое, можно считать $\mathbf{r}$ — периодическая функция, а значит $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})$ — тоже периодическая функция, тогда среднее значение производной (3) за период будет равно нулю[2]. Тогда можно установить:

$$\Big\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times B) \Big\rangle_T = \Big\langle \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \Big\rangle_T \tag{5}$$

Усредняя выражение (4), учитывая соотношение (5), получаем:

$$2\Big\langle \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times B) \Big\rangle_T = -\Big\langle \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \Big\rangle_T \tag{6}$$

Тепрь можно посчитать усреднение момента импульса за период:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{e}{2m}\Big\langle \mathbf{B} \times (m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \Big\rangle_T = \frac{e}{2m}\mathbf{B} \times \mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} \tag{7}$$

Тут введено обозначение $\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m}\mathbf{B}$.

Из выражения (7) понятно, что вектор $\mathbf{M}$ вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

[2] Это утверждение доказывалось в первой задаче