# Задачи к 6 лекции

Нечитаев Дмитрий

1 декабря 2019 г.

## Упражнение 1

Для уравнения
$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^3 \tag{1}$$
Нужно найти поправку второго порядка в рамках теории возмущений по малому параметру $\epsilon$ для начальных условий $x(0) = a,\ \dot{x}(0) = 0$.

Будем искать решение в виде: $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2$, тогда подстановка в уравнение (1) и группирование членов с одинаковыми подяками дает нам систему:

$$\begin{cases} \ddot{x_0} + x_0 = 0 \\ \ddot{x_1} + x_1 = -x_0^3 \\ \ddot{x_2} + x_2 = -3x_0^2 x_1 \end{cases}$$

Общее решение уравнения $\ddot{x}(t) + x(t) = -y(t)$ записывается в виде:

$$x(t) = \Big[x(0) + \int_0^t y(\tau)\sin\tau d\tau\Big]\cos t - \sin t\Big[\dot{x}(0) + \int_0^t y(\tau)\cos\tau d\tau\Big] \tag{2}$$

Положим что $x_0(0) = a,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ \dot{x_0}(0) = \dot{x_1}(0) = \dot{x_2}(0) = 0$, тогда выражения для поправок примут вид[1]:

$$\begin{cases} x_0(t) = a\cos(t) \\ x_1(t) = -\frac{a^3}{16}\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t\Big) \end{cases} \tag{3}$$

Вычисляем $x_0^2 x_1$:

$$x_0^2 x_1 = -a^2\cos^2 t\frac{a^3}{16}\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t\Big) = -\frac{a^5}{32}(1+\cos 2t)\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t\Big) =$$

[1] Второе уравниение в системе было получено на лекции

$$= -\frac{a^5}{32}\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t + 6t\sin t\cos 2t + \frac{1}{2}\cos t\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 3t\cos 2t\Big) =$$

$$= -\frac{a^5}{32}\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big) \tag{4}$$

Тогда $-3x_0^2x_1$:

$$-3x_0^2x_1 = \frac{3a^5}{32}\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big) \tag{5}$$

Вычислим пару интегралов:

$$I_1 = \int_0^\tau (-3x_0^2x_1)\sin t dt = \frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big)\sin t =$$

$$\frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\left(3t\Big(\frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{\cos 2t - \cos 4t}{2}\Big) + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 2t - \sin 4t}{8} + \frac{\sin 4t - \sin 6t}{8}\right) =$$

$$\frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\left(3t\cdot\frac{1-\cos 4t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 2t - \sin 6t}{8}\right) = \frac{3a^5}{32\cdot 96}\Big(72t^2 - 36t\sin 4t - 18\cos 2t - 9\cos 4t + 2\cos 6t\Big)\Big|_0^\tau =$$

$$\frac{a^5}{1024}\big(72\tau^2 - 36\tau\sin 4\tau - 18\cos 2\tau - 9\cos 4\tau + 2\cos 6\tau + 25\big) \tag{6}$$

$$I_2 = \int_0^\tau (-3x_0^2x_1)\cos t dt = \frac{3a^5}{32}\int_0^\tau dt\Big(3t\sin t + 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos 5t\Big)\cos t =$$

$$\frac{a^5}{1024}\big(24\tau + 78\sin 2\tau + 3\sin 4\tau - 2\sin 6\tau - 144\tau\cos 2\tau - 36\tau\cos 4\tau\big) \tag{7}$$

Выражение для второй поправки:

$$x_2(t) = \frac{a^5\sin t}{1024}\Big(24t + 78\sin 2t + 3\sin 4t - 2\sin 6t - 144t\cos 2t - 36t\cos 4t\Big) -$$

$$-\frac{a^5\cos t}{1024}\big(72t^2 - 36t\sin 4t - 18\cos 2t - 9\cos 4t + 2\cos 6t + 25\big) =$$

$$= \frac{a^5}{1024}\Big(-72t^2\cos t + 96t\sin t - 36t\sin 3t + 23\cos t - 24\cos 3t + \cos 5t\Big) \tag{8}$$

Данный ответ работает при тех временах, когда вклад от второй поправки много меньше чем от первой, т.е. время до которого приближение работает хорошо определяется соотношением:

$$\frac{a^3}{16}\cdot 6t = \epsilon\cdot\frac{72a^5t^2}{1024} \Rightarrow t = \frac{3}{8}\cdot\frac{1024}{72}\frac{1}{a^2\epsilon} \Rightarrow t \sim \frac{1}{a^2\epsilon}$$

Теперь разберемся с различными членами в ответе:

1. $72t^2 \cos t$ отвечает за квадрат первой поправки к частоте

2. $96t \sin t$ содержит вторую поправку к частоте

3. $23 \cos t$ — поправка к амплитуде

4. $\cos 5t, 24 \cos 3t$ поправки к амплитудам для третьей и пятой гармоник

# Упражнение 2

## Вторая поправка к частоте

Для получения уравнения на вторую поправку к частоте воспользуемся разложением по гармоникам. На лекции мы получили выражение,учитывающее первые поправки к амплитудам и частотам:

$$x(t) = A\Big(1 - \epsilon\frac{A^2}{32}\Big)\cos\left(\Big[1 + \epsilon\frac{3A^2}{8}\Big]t\right) + \epsilon\frac{A^3}{32}\cos\left(3\Big[1 + \epsilon\frac{3A^2}{8}\Big]t\right) \tag{1}$$

В правой части уравнения:

$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^3 \tag{2}$$

уже содержится множитель $\epsilon$, а это значит, что для учета второй попраки нам достаточно подставлять вместо $x(t)$ первое приближение решения.

Важно отметить, что исходное выражение (1) содержит только косинусы, а это значит, что в ряде фурье функции $x^3(t)$ будут содержаться только косинусы, причем дальше 9 гармоники искать бессмысленно[2]. Выражение для коэффициентов фурье задается формулой:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} x^3(t)\cos(n\omega t)d(\omega t) \tag{3}$$

Для нахождения второй поправки к частоте нам достаточно посчитать только $\alpha_1$:

$$\alpha_1 = \frac{3A^3}{4} - \frac{3A^5}{64}\epsilon \tag{4}$$

Тут мы выкинули члены порядка больше 2-х, т.к. данные коэффициенты дальше умножатся на $\epsilon$.

Пусть решение $x(t)$ является рядом фурье:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) \tag{4}$$

[2]это следует из того, что исходное решние имеет гармоники $\omega, 3\omega$, а в $x^3$ буду содержаться гармоники, частоты которых представляют собой суммы и разности частот исходной функции, т.е. максимальная частота будет $3+3+3 = 9$

Тогда вторая производная:

$$\ddot{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} (n\omega)^2 A_n \cos(n\omega t) \tag{5}$$

Тут коэффициенты и частота являются формальными рядами по малому параметру $\epsilon$.

Подставми данные ряды в уравнение (2) и сгруппируем все члены при первой гармонике:

$$(1-\omega^2)A_1\cos(\omega t) = -\epsilon\alpha_1\cos(\omega t) \tag{6}$$

Подставляем в данное соотношение уравнения:

$$A_1 = A\left(1-\epsilon\frac{A^2}{32}\right) + \epsilon^2 A_1^{(2)} \tag{7}$$

$$\omega = 1 + \epsilon\frac{3A^2}{8} + \epsilon^2\omega^{(2)} \tag{8}$$

После группировки слагаемых при $\epsilon^2$ получаем соотношение на $\omega^{(2)}$:

$$-\frac{21}{128}A^5 = 2A\omega^{(2)} \Leftrightarrow \tag{9}$$

$$\boxed{\omega^{(2)} = -\frac{21A^4}{256}} \tag{10}$$

## Поправки к амплитудам

Как уже отмечалось выше: при подстановке первого приближения в $x^3$ будут получаться гармоники равные суммам и разностям исходных, а это значит, что и следующая поправка будет содержать больше гармоник с ненулевыми амплитудами. Для вычисления поправок обратимся к формуле (3) из прошлого пункта.

$$\alpha_3 = \frac{A^3}{4} + \frac{3A^5}{128}\epsilon \tag{11}$$

$$\alpha_5 = \frac{3A^5}{128}\epsilon \tag{12}$$

Остальные коэффициенты либо равны нулю (четные) либо содержат величины из $O(\epsilon)$.

Запишем аналоги формулы (6) для гармоник $n = 3, 5$

$$\begin{cases}(1-9\omega^2)A_3\cos(3\omega t) = -\epsilon\alpha_3\cos(3\omega t)\\(1-25\omega^2)A_5\cos(5\omega t) = -\epsilon\alpha_3\cos(5\omega t)\end{cases} \text{, где амплитуды } \begin{cases}A_3 = \epsilon\frac{A^3}{32} + \epsilon^2 A_3^{(2)}\\A_5 = \epsilon^2 A_5^{(2)}\end{cases} \tag{13}$$

Собираем все слагаемые при $\epsilon^2$:

$$\begin{cases} -\frac{3A^5}{16} = 8A_3^{(2)} \\ \frac{3A^5}{128} = 24A_5^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3^{(2)} = -\frac{3}{128}A^5 \\ A_5^{(2)} = \frac{1}{1024}A^5 \end{cases} \tag{14}$$

Для получения амплитуды $A_1^{(2)}$ нужно воспользоваться начальными условиями, т.е. мы должны получить, что сумма всех амплитуд $A_1, A_3, A_5$ дает нам $A$. Такое может быть только в том случае, если:

$$A_1^{(2)} = -(A_3^{(2)} + A_5^{(2)}) = \frac{23}{1024}A^5 \tag{15}$$

Таким образом мы получили окончательный ответ для второго приближения:

$$x(t) = \left(A - \epsilon\frac{A^3}{32} + \epsilon^2\frac{23A^5}{1024}\right)\cos(\omega t) + \left(\epsilon\frac{A^3}{32} - \epsilon^2\frac{3A^5}{128}\right)\cos(3\omega t) + \epsilon^2\frac{A^5}{1024}\cos(5\omega t) \tag{16}$$

$$\omega = 1 + \epsilon\frac{3A}{8} - \epsilon^2\frac{21A^4}{256} \tag{17}$$

## Разложение в ряд

Разложим[3] уравнение (16) в ряд по малому параметру $\epsilon$ до $O(\epsilon^2)$:

$$x(t) = A\cos(t) + \frac{A^3\epsilon}{32}\Big(-\cos(t) + \cos(3t) - 12t\sin(t)\Big) +$$

$$+\frac{A^5\epsilon^2}{1024}(23\cos(t) - 72t^2\cos(t) - 24\cos(3t) + \cos(5t) + 96t\sin(t) - 36t\sin(3t)) \tag{18}$$

Сравним это с выражениями (3),(8) из первого упражнения:

$$\begin{cases} x_0(t) = a\cos(t) \\ x_1(t) = -\frac{a^3}{16}\Big(6t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t\Big) \end{cases} \tag{$3_1$}$$

$$x_2(t) = \frac{a^5}{1024}\Big(-72t^2\cos t + 96t\sin t - 36t\sin 3t + 23\cos t - 24\cos 3t + \cos 5t\Big) \tag{$8_1$}$$

Получаем, что разложение по гармоникам при малых временах совпадает с ответом, который был получен наивной теорией возмущений.

[3] Попросим вольфрам посчитать это

## Интегральное представление частоты

Существует однако и другой способ найти частоту колебаний, для этого нам потребудется вычислить значение периода, который можно получить непосредственно из уравнения движения.

Перепишем соотношение (2) еще раз:

$$\ddot{x} = -\epsilon x^3 - x \tag{2}$$

Домножим данное соотношение на $\dot{x}$ и проинтегрируем:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{E}{2} - \frac{x^2}{2} - \epsilon\frac{x^4}{4} \Leftrightarrow \dot{x}^2 = E - x^2 - \frac{\epsilon x^4}{2} \tag{19}$$

Тут константа[4] $E = A^2 - \epsilon A^4/2$, где $A$ — амплитуда колебаний.

Выражаем из ЗСЭ $\dot{x}$, разделяем переменные и интегрируем выражение для получения периода колебаний.

$$\frac{T}{2} = \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} = 2\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} \Leftrightarrow$$

$$T = 4\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} \tag{20}$$

Возьмем инетеграл в соотношении (20), для этого подставим в него значение $E$:

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 - \epsilon x^4/2}} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{(A^2 - x^2) + \epsilon(A^4 - x^4)/2}} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon(A^2 + x^2)/2}} \approx$$

$$\approx \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \Big(1 - \frac{\epsilon}{4}(A^2 + x^2) + \frac{3\epsilon^2}{32}(A^2 + x^2)^2\Big) \tag{21}$$

Вычисляем интегралы:

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{A}\right)\Big|_0^A = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^A \frac{(A^2 + x^2)dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \{x = A\sin t\} = \int_0^{\pi/2} \frac{A^2 + A^2\sin t}{A\cos t} A\cos t dt = A^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2(t))dt = \frac{3\pi A^2}{4}$$

$$\int_0^A \frac{(A^2 + x^2)^2 dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \{x = A\sin t\} = A^4 \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 t)^2 dt = \frac{19\pi A^4}{16}$$

[4] По сути это энергия системы, причем её значение можно определить из начальных условий

Подставляем все в соотношение (21):

$$\frac{T}{4} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{3\pi A^2}{4} + \frac{3\epsilon^2}{32} \cdot \frac{19\pi A^4}{16} \tag{22}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi - \epsilon\frac{3\pi A^2}{4} + \frac{3\epsilon^2}{8} \cdot \frac{19\pi A^4}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\omega} = 1 - \epsilon\frac{3A^2}{8} + \frac{3\epsilon^2}{16} \cdot \frac{19A^4}{16} \tag{23}$$

Теперь разложим функцию $\omega$ по малому параметру:

$$\omega = \left(1 - \epsilon\frac{3A^2}{8} + \frac{3\epsilon^2}{16} \cdot \frac{19A^4}{16}\right)^{-1} \approx 1 + \epsilon\frac{3A^2}{8} - \frac{3\epsilon^2}{16} \cdot \frac{19A^4}{16} + \frac{9\epsilon^2 A^4}{64} = 1 + \frac{3\epsilon A^2}{8} - \frac{21\epsilon^2 A^4}{256} \tag{24}$$

Окончательно получаем:

$$\boxed{\omega = 1 + \frac{3\epsilon A^2}{8} - \frac{21\epsilon^2 A^4}{256}} \tag{25}$$

# Упражнение 3

Необходимо найти сдвиг частоты и амплитуды неосновынх гармоник из-за малого кубического ангармонизма вида:

$$\delta U = \frac{\epsilon x^3}{3},\ \epsilon \ll 1 \tag{1}$$

Составим уравнение движения:

$$\ddot{x} + x = -\epsilon x^2 \tag{2}$$

Нулевое приближение имеет вид: $x_0(t) = A\cos(\omega t)$, тогда для рассчета первого приближения подставим в правую часть $x_0$:

$$\ddot{x} + x = -\epsilon A^2 \cos^2(\omega t) \tag{3}$$

Разложим функцию $x(t)$ в ряд фурье, причем данный ряд будет содержать только косинусы[5]:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) \tag{4}$$

Для производной:

$$\ddot{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\omega^2 A_n \cos(n\omega t) \tag{5}$$

[5]Такой конфигурации мы добиваемся начальными условиями: $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$.

Преобразуем уравнение (3):

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1-n^2\omega^2)A_n\cos(n\omega t)=-\epsilon\frac{A^2}{2}\Big(1+\cos(2\omega t)\Big) \tag{6}$$

Соотношение (6) дает систему из 3х уравнений, которые определяют поправки на частоту и амплитуды нулевой и второй гармоник.

$$\begin{cases}(1-1^2\omega^2)A\cos(\omega t)=0\\ A_0^{(1)}=-\frac{A^2}{2}\\ (1-2^2\omega^2)A_2^{(1)}=-\frac{A^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega^{(1)}=0\\ A_0^{(1)}=-\frac{A^2}{2}\\ A_2^{(1)}=\frac{A^2}{6}\end{cases} \tag{7}$$

Для определения поправки к амплитуде основной гармонике обратимся к начальным условиям: $x(0)=A,\dot{x}(0)=0$, т.е. первый порядок дает нам решение:

$$x(t)=-\epsilon\frac{A^2}{2}+\Big(A+\epsilon\frac{A^2}{3}\Big)\cos\omega t+\epsilon\frac{A^2}{6}\cos 2\omega t \tag{8}$$

Для нахождения второй поправки проводим аналогичную процедуру: подставляем в соотношение (2) выражение для первой поправки, оставляя члены, степень которых не больше 1:

$$x^2(t)=A^2\cos^2\omega t+\frac{A^3}{3}\cos\omega t\Big(-3+3\cos\omega t+\cos 2\omega t\Big)\epsilon+O(\epsilon) \tag{9}$$

$$x^2(t)=\frac{A^2}{2}(1+\cos(2\omega t))+\frac{\epsilon A^3}{2}-\frac{\epsilon 5A^3}{6}\cos\omega t+\frac{\epsilon A^3}{3}\cos 2\omega t+\frac{\epsilon A^3}{6}\cos 3\omega t$$

После подстановки в уравнение (2) и учета формул (4),(5) собираем все члены при одинковых гармониках содержащие $\epsilon^2$:

$$\begin{cases}(1-3^2\omega^2)A_3\cos(3\omega t)=-\epsilon^2\frac{A^3}{6}\cos(3\omega t)\\ (1-2^2\omega^2)A_2\cos(2\omega t)=-\epsilon^2\frac{A^3}{3}\cos(2\omega t)\\ (1-1^2\omega^2)A_1\cos(\omega t)=\epsilon^2\frac{5A^3}{6}\cos(\omega t)\\ (1-0^2\omega^2)A_0=\epsilon^2\frac{A^3}{2}\end{cases} \tag{10}$$

С последним уравнением системы все понятно:

$$\boxed{A_0^{(2)}=\frac{A^3}{2}} \tag{11}$$

Посмотрим теперь на уравнение для первой гармоники:

$$\omega=1+\epsilon\omega^{(1)}+\epsilon^2\omega^{(2)}$$

$$A_1 = A + \epsilon A_1^{(1)} + \epsilon^2 A_1^{(2)}$$

Подставляем разложение во второе уравнение системы (10), откидывая слагаемые порядок малоскти которых больше $\epsilon^2$:

$$(1-\omega^2)A_1 = (1-\omega)(1+\omega)(A+\epsilon A_1^{(1)}+\epsilon^2 A_1^{(2)}) = -(\epsilon\omega^{(1)}+\epsilon^2\omega^{(2)})(2+\epsilon\omega^{(1)}+\epsilon^2\omega^{(2)})(A+\epsilon A_1^{(1)}+\epsilon^2 A_1^{(2)}) =$$

$$= -(2\epsilon\omega^{(1)} + 2\epsilon^2\omega^{(2)} + \epsilon^2(\omega^{(1)})^2)(A + \epsilon A_1^{(1)} + \epsilon^2 A_1^{(2)}) = -(2\epsilon A\omega^{(1)} + 2\epsilon^2 A\omega^{(2)} + \epsilon^2 A(\omega^{(1)})^2 + 2\epsilon^2 A_1^{(1)}\omega^{(1)})$$

Тогда группировка слагаемых при $\epsilon^2$ и второе уравнение системы (10) дает соотношение:

$$-\Big(2A\omega^{(2)} + A(\omega^{(1)})^2 + 2A_1^{(1)}\omega^{(1)}\Big) = \frac{5A^3}{6} \tag{12}$$

Подставляем в (12) $\omega^{(1)} = 0$ из системы (7), тогда вторая поправка к частоте примет вид:

$$\boxed{\omega^{(2)} = -\frac{5A^2}{12}} \tag{13}$$

Разбираемся теперь с амлитудами 2 гармоники:

$$(1 - 2^2\omega^2) = (1 - 2\omega)(1 + 2\omega) = -(1 + 2\epsilon^2\omega^{(2)})(3 + 2\epsilon^2\omega^{(2)}) = -(3 + 8\epsilon^2\omega^{(2)}) \tag{14}$$

$$(1 - 2^2\omega^{(2)})A_2 = -(3 + 8\epsilon^2\omega^{(2)})(\epsilon A_2^{(2)} + \epsilon^2 A_2^{(2)}) = -3\epsilon A_2^{(2)} - 3\epsilon^2 A_2^{(2)} \tag{15}$$

Тогда из системы (10) следует:

$$\boxed{A_2^{(2)} = \frac{A^3}{9}} \tag{16}$$

Для третьей гармоники:

$$(1 - 3^2\omega^2)\epsilon^2 A_3^{(2)} = -\epsilon^2\frac{A^3}{6} \tag{17}$$

$$8A_3^{(2)} = \frac{A^3}{6} \tag{18}$$

$$\boxed{A_3^{(2)} = \frac{A^3}{48}} \tag{19}$$

Из граничных условий находим поправку к первой грамонике[6]:

$$\boxed{A_1^{(2)} = -\frac{91A^3}{144}} \tag{20}$$

[6]Сумма всех вторых поправок к амплитудам должна быть нулевой.

Окончательный ответ:

$$x(t) = \Big(-\epsilon\frac{A^2}{2} + \epsilon^2\frac{A^3}{2}\Big) + \Big(A + \epsilon\frac{A^2}{3} - \epsilon^2\frac{91A^3}{144}\Big)\cos\omega t + \Big(\epsilon\frac{A^2}{6} + \epsilon^2\frac{A^3}{9}\Big)\cos 2\omega t + \epsilon^2\frac{A^3}{48}\cos 3\omega t$$

$$\omega = 1 - \epsilon^2\frac{5A^2}{12}$$

# Задача 1

Частица массой $m$ движется в потенциале:

$$U(x) = U_0(\cos x - Ax) \tag{1}$$

На частицу также действует малая сила трения с коэффициентом $\gamma$. Требуется определить при каком значении $A$ возможна ненулевая средняя скорость движения частицы, найти поведение средней скорости вблизи границы диапазона.

## Поиск критического значения

Запишем уравнение движения частицы:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = U_0 A + U_0\sin x \tag{2}$$

Можно заменить, что подобным уравнением описывается маятник с трением, который может вращаться в вертикальной плоскости.

Рассмотрим предельный случай движения такого маятника (нет внешней постоянной силы и нет трения), когда маятник совершает полный оборот, стартуя из вертикального положения с нулевой начальной скоростью. Понятно, что т.к. трения нет, то в конечном итоге маятник придет в конечную точку с нулевой скоростью. Запишем уравнение движения такого маятника:

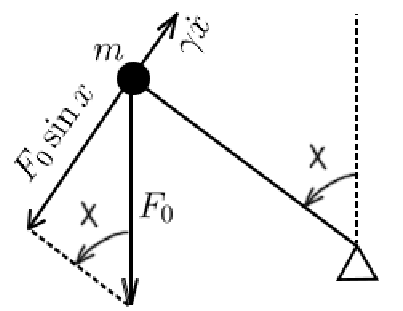
$$\ddot{x} = U_0\sin x \tag{3}$$

Домножим его на $\dot{x}$ и проинтегрируем, учитывая, что $E_0 = U_0$, получим:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U_0\cos(x) = U_0 \tag{4}$$

Выберем отсчет времени таким образом, чтобы в $t = 0$ маятник находится в положении $x = \pi$. Пусть $x_1 := x - \pi$. Тогда $x_1(0) = 0$ и ЗСЭ принимает вид:

$$\frac{\dot{x_1}^2}{2} - U_0\cos(x_1) = U_0 \tag{5}$$




Выражаем $\dot{x_1}$, заделяем переменные и интегрируем:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_1(t)} \frac{dx}{\sqrt{U_0 + U_0 \cos(x)}} = \frac{1}{\sqrt{4U_0}} \int_0^{x_1(t)} \frac{dx}{\cos(x/2)} = \{\sin(x/2) = \tanh(z)\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{U_0}} \int_0^{\operatorname{arctanh} \sin \frac{x_1}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{U_0}} \operatorname{arctanh} \sin \frac{x_1}{2} \tag{6}$$

$$\boxed{x = \pi + 2 \arcsin \tanh \sqrt{U_0} t} \tag{7}$$

$$\dot{x} = 2\sqrt{U_0} \frac{1}{\cosh^2(t\sqrt{U_0})\sqrt{1 - \tanh^2(t\sqrt{U_0})}} = \frac{2\sqrt{U_0}}{\cosh(t\sqrt{U_0})} \tag{8}$$

Пусть теперь есть трение и внешняя сила. Записутим маятник из верхнего положения без начальной скорости, после совершения оборота скорость должна быть ненулевой. Рассмотрим приращение энергии в таком движении, считая, что сила трения и внешняя сила малы.

$$\frac{v^2_{\text{конечная}}}{2} - 0 = \int_0^{2\pi} U_0 A dx - \int_0^{2\pi} \gamma \dot{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 A \dot{x} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \dot{x}^2 dt =$$

$$= U_0 A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sqrt{U_0}}{\cosh(t\sqrt{U_0})} dt - 4\gamma U_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh^2(t\sqrt{U_0})} = 2U_0 A\pi - 8\gamma\sqrt{U_0} \geq 0 \tag{9}$$

Критическое значение параметра $A$:

$$\boxed{A = \frac{4\gamma}{\pi\sqrt{U_0}}} \tag{10}$$

Исходя из формулы (10) можно заключить, что наше предположение о малости $A$ было правильным, причем стоит заметить, что если поменять знак в выражении для $A$, то все рассуждения будут аналогичными, просто маятник будет двигаться в противоположную сторону.

## Исследование вблизи критического положения

Пусть теперь частица движется в потенциале:

$$U(x) = U_0\Big(\cos x - \frac{4\gamma}{\pi\sqrt{U_0}}x\Big) \tag{1}$$

В прошлом пункте задачи мы показали, что при в таком потенциале воможно инфинитное движение при наличии трения.

Рассмотрим движение системы вблизи положения $x = 0$, пренебрегая работой силы терения запишем ЗСЭ:

$$U_0 = \frac{\dot{x}^2}{2} + U_0\cos x - \frac{4\gamma\sqrt{U_0}}{\pi}x \approx \frac{\dot{x}^2}{2} + U_0\Big(1 - \frac{x^2}{2}\Big) - \frac{4\gamma\sqrt{U_0}}{\pi}x \tag{2}$$

Приближенное выражение будет иметь вид:

$$\dot{x} = \sqrt{U_0}\sqrt{x^2 + \frac{8\gamma\sqrt{U_0}}{\pi}x} \tag{3}$$

Введем параметр $\alpha = \frac{4\gamma\sqrt{U_0}}{\pi}$, тогда уравнение (3) перепишется в виде:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\alpha}} = \sqrt{U_0}dt$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(x+\alpha)^2-\alpha^2}} = \sqrt{U_0}dt$$

Если пренебречь слагаемым $\alpha^2$, то при интегрировании от 0 до величины[7] порядка 1,то получим, что существенную часть времени частица находится в окрестности максимума потенциала:

$$t_1 \approx \frac{1}{\sqrt{U_0}}\int_0^1 \frac{dx}{(x+\alpha)} \approx \frac{1}{\sqrt{U_0}}\ln\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha}\Big)$$

По аналогии находим $t_2$ — время нахождения частицы в окрестности максимума $x = 2\pi$.

$$t_2 = t_1 \Rightarrow T = t_1 + t_2 + t_3 \tag{4}$$

[7] Выбор конечного значчения в интеграле выбирается так, чтобы приближение $cos(x) \approx (1 - x^2/2)$, а с ним и сохранение энергии перестали работать

Тут $t_3$ — время прохождения частицы от положения $\epsilon$ до $2\pi - \epsilon$, $\epsilon \sim 1$

Тогда среднюю скорость движения частицы можно оценить соотношением:

$$< V >= \frac{2\pi}{2t_1} = \frac{\pi\sqrt{U}}{\ln\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)} \approx -\frac{\pi\sqrt{U}}{\ln(\alpha)} = -\pi\sqrt{U}\ln\left(\frac{4\gamma\sqrt{U_0}}{\pi}\right)^{-1}$$