Задачи к 3 лекции

Нечитаев Дмитрий

20 октября 2019 г.

Задача 1

Первый интеграл

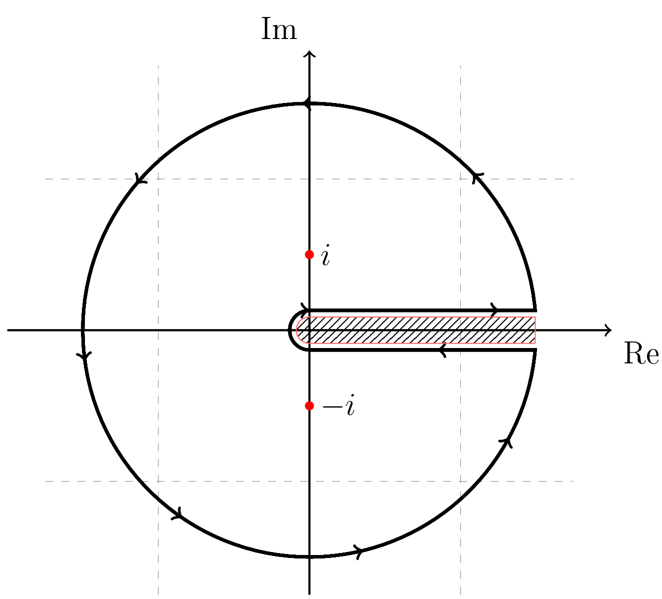
Необходимо вычислить интеграл:

$$I_1(n, \alpha) = \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^2)^n} \text{ при } n = 1, 2, 3$$

$I_1(1, \alpha)$ сходится при $\alpha \in (-1; 1)$ причем, интегрирование по частям дает нам тождества.

$$\int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} = \frac{2}{\alpha+1} \int_0^\infty \frac{z^{\alpha+2} dz}{(1+z^2)^2} \text{ и } \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^2)^2} = \frac{2}{\alpha+1} \int_0^\infty \frac{z^{\alpha+2} dz}{(1+z^2)^3} \tag{1.1}$$

Для вычисления интеграла $I_1(1, \alpha)$. Построим контур C на комплексной плоскости с разрезом.



Разбиваем интеграл по контуру на три части: $I_+ + I_- + I_R$.

$$\int_C \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} = \int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} + \int_{+\infty-0i}^{0-0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} + \int_{C_R} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} \text{ где } C_R \text{ - дуга окружности}$$

Последний интеграл стремится к нулю, при устремлении R в бесконечность. Осталось только разобраться со вторым слагаемым. Для этого рассмотрим как связаны $(x+0i)^\alpha$ и $(x-0i)^\alpha$ $(x \in \mathbb{R})$. Тут необходимо воспользоваться представлением $z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$. В таком случае становится понятно, что т.к. $ln(x-0i) = ln(x+0i) + 2i\pi$, то $(x-0i)^\alpha = (x+i0)^\alpha e^{2i\pi}$. Получаем:

$$(1-e^{2i\pi\alpha}) \int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} = 2i\pi\Big(\underset{z=i}{Res}\frac{z^\alpha}{1+z^2} + \underset{z=i}{Res}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\Big) = i\pi(i^{\alpha-1} + (-i)^{\alpha-1}) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \beta = \alpha - 1 \\ i^\beta = e^{\beta \ln(i) = e^{\beta i \frac{\pi}{2}}} \\ (-i)^\beta = e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{array} \right\} = i\pi(e^{\beta i \frac{\pi}{2}} + e^{\beta i \frac{3\pi}{2}}) = \left\{ \ \gamma = \beta\tfrac{\pi}{2} \ \right\} = i\pi(e^\gamma + e^{3\gamma}) \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha dz}{1+z^2} = \frac{i\pi e^{2\gamma}(e^{-\gamma}+e^\gamma)}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha})} = \frac{i\pi e^{i\pi(\alpha-1)}(e^{i\gamma}+e^{-i\gamma})}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha})} = \frac{\pi\cos(\gamma)}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

С учетом формул (1.1) получаем окончательно:

$$\boxed{I_1(1,\alpha) = \frac{\pi}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}}$$

$$\boxed{I_1(2,\alpha) = \frac{\pi(1-\alpha)}{4\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}}$$

$$\boxed{I_1(3,\alpha) = \frac{\pi(3-\alpha)(1-\alpha)}{8\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}}$$

Второй интеграл

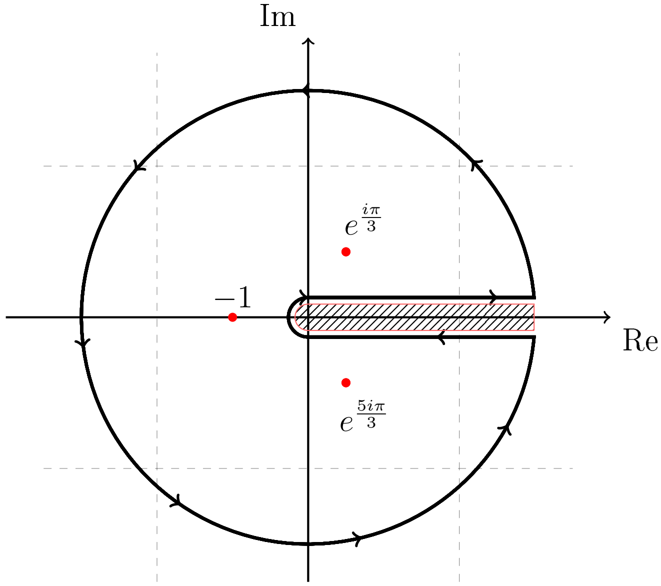
Необходимо вычислить интеграл:

$$I_2(n,\alpha) = \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^3)^n} \text{ при } n = 1,2,3$$

$I_2(1,\alpha)$ сходится при $\alpha \in (-1;2)$ причем, интегрирование по частям дает нам тождества.

$$\int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} = \frac{3}{\alpha+1}\int_0^\infty \frac{z^{\alpha+3}dz}{(1+z^3)^2} \text{ и } \int_0^\infty \frac{z^\alpha dz}{(1+z^3)^2} = \frac{3}{\alpha+1}\int_0^\infty \frac{z^{\alpha+3}dz}{(1+z^3)^3} \tag{2.1}$$

Для вычисления интеграла $I_2(1,\alpha)$. Построим контур C на комплексной плоскости с разрезом.



Разбиваем интеграл по контуру на три части: $I_+ + I_- + I_R$.

$$\int_C \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} = \int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} + \int_{+\infty-0i}^{0-0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} + \int_{C_R} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} \text{ где } C_R \text{ - дуга окружности}$$

Последний интеграл стремится к нулю, при устремлении R в бесконечность. Осталось только разобраться со вторым слагаемым. Для этого рассмотрим как связаны $(x+0i)^\alpha$ и $(x-0i)^\alpha$ $(x \in \mathbb{R})$. Тут необходимо воспользоваться представлением $z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$. В таком случае становится понятно, что т.к. $ln(x-0i) = ln(x+0i) + 2i\pi$, то $(x-0i)^\alpha = (x+i0)^\alpha e^{2i\pi}$. Получаем:

$$(1-e^{2i\pi\alpha})\int_{0+0i}^{+\infty+0i} \frac{z^\alpha dz}{1+z^3} = 2i\pi\Big(\frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{3}}}{3e^{\frac{2i\pi}{3}}} + \frac{e^{i\pi\alpha}}{3e^{2i\pi}} + \frac{e^{\frac{5i\pi\alpha}{3}}}{3e^{\frac{10i\pi}{3}}}\Big) = \{\ \gamma = \tfrac{\alpha\pi}{3}\ \} = \frac{i\pi}{3}\Big(e^{i\gamma}(-1-i\sqrt{3}) + 2e^{3i\gamma} + e^{5i\gamma}(-1+i\sqrt{3})\Big)$$

$$= \frac{2i\pi e^{3i\gamma}}{3}\Big(-\cos(2\gamma) - \sqrt{3}\sin(2\gamma) + 1\Big) = \frac{2i\pi e^{3i\gamma}}{3}\Big(1 - 2cos\Big(2\gamma - \frac{\pi}{3}\Big)\Big) \Rightarrow$$

$$I_2(1,\alpha) = \frac{2i\pi e^{i\pi\alpha}}{3e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})}\Big(1 - 2cos\Big(2\gamma - \frac{\pi}{3}\Big)\Big) = \frac{\pi(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{3\sin(\pi\alpha)}$$

С учетом формул (2.1) получаем окончательно:

$$\boxed{I_2(1,\alpha) = \frac{\pi(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{3\sin(\pi\alpha)}}$$

$$\boxed{I_2(2,\alpha) = \frac{\pi(2-\alpha)(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{9\sin(\pi\alpha)}}$$

$$\boxed{I_2(3,\alpha) = \frac{(5-\alpha)(2-\alpha)(2\cos(\frac{2}{3}\pi\alpha - \frac{\pi}{3}) - 1)}{27\sin(\pi\alpha)}}$$

Задача 2

Вычислим интеграл:

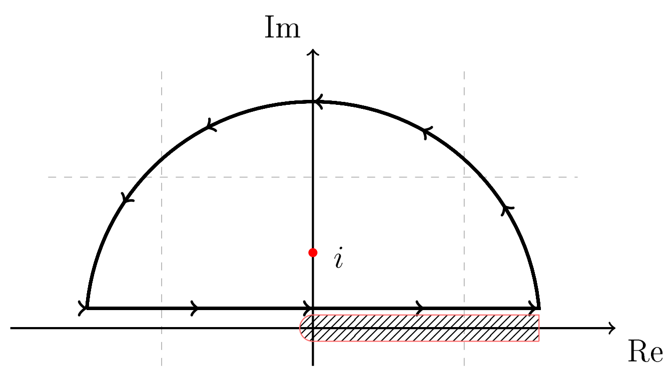
$$I_3(\alpha, n) = \int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha \ln^n(z) dz}{1+z^2} \text{при } n = 1, 2$$

Можно заметить, что дифференцирование по параметру α интеграла $I_1(1, \alpha)$ даст нам ответ.

$$I_3(\alpha, 1) = \frac{\partial I_1(1, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\pi^2 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{4\cos^2(\frac{\pi\alpha}{4})}$$

$$I_3(\alpha, 2) = \frac{\partial^2 I_1(1, \alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{\pi^3}{8\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}\Big(2\tan^2\Big(\frac{\pi\alpha}{2}\Big) + 1\Big)$$

Теперь прямыми вычислениями найдем первый интеграл, а затем сравним ответы. Для подсчета $I_3(\alpha, 1)$ проведем в комплексной плоскости контур, представленный на рисунке.



$$\int_C \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz + \int_0^{+\infty} \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2} dz \text{ где } C_R \text{ - дуга окружности} \quad (1)$$

При устремлении R в бесконечность, последний интеграл стремится к нулю (это следует из сходимости интеграла при $|\alpha| < 1$). Осталось только разобраться с интегралом по отрицательной полуоси. Для этого воспользуемся тождествами.

$$\ln(-x) = \ln(x) + i(arg(-x) - arg(1)) = \ln(x) + i\pi, \text{ где } x > 0$$

$$(-x)^\alpha = e^{i\pi\alpha} x^\alpha, \text{ где } x > 0$$

Тогда интеграл по отрицательной полуоси преобразуется следующим оразом:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{z^\alpha \ln(z)}{1+z^2}dz = -e^{i\pi\alpha}\int_{+\infty}^{0} \frac{z^\alpha(\ln(z)+i\pi)}{1+z^2}dz = e^{i\pi\alpha}\int_{0}^{+\infty} \frac{z^\alpha(\ln(z)+i\pi)}{1+z^2}dz = e^{i\pi\alpha}I_3(1,\alpha)+e^{i\pi\alpha}i\pi I_1(\alpha,1)$$

Подставляем все в выражение (1) и применяем теорему о вычетах.

$$(1+e^{i\pi\alpha})I_3(1,\alpha) + e^{i\pi\alpha}\frac{i\pi^2}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} = 2i\pi\frac{i^\alpha \ln(i)}{2i} = \pi e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\frac{i\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$(1+e^{i\pi\alpha})I_3(1,\alpha) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\frac{i\pi^2}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}\Big(\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - e^{\frac{\pi\alpha}{2}}\Big) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\frac{i\pi^2}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}\Big(\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - i\sin(\frac{\pi\alpha}{2})\Big) \Leftrightarrow$$

$$e^{i\pi\alpha/2}(e^{-i\pi\alpha/2}+e^{i\pi\alpha/2})I_3(1,\alpha) = e^{i\pi\alpha/2}\frac{\pi^2\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \Leftrightarrow$$

$$I_3(1,\alpha) = \frac{\pi^2\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{4\cos^2(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

При стремелении $\alpha \to 0$ получаем, что $I_3(1,\alpha) \to 0$, что согласуется с результатом, который был получен на лекции.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(z)}{a^2+z^2}dz = \frac{\pi\ln(a)}{2a}, \text{ где } a > 0$$

Окончательно:

$$\boxed{I_3(\alpha,1) = \frac{\pi^2\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{4\cos^2(\frac{\pi\alpha}{4})}}$$

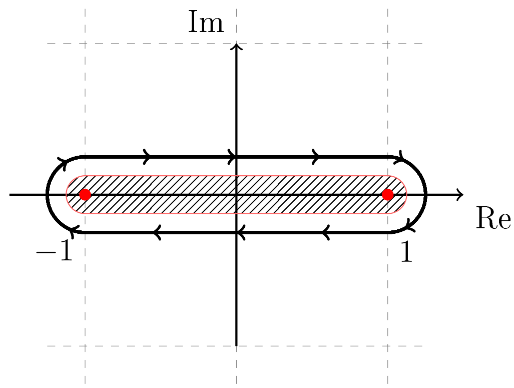
$$\boxed{I_3(\alpha,2) = \frac{\pi^3}{8\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}(2\tan^2(\frac{\pi\alpha}{2})+1)}$$

Задача 3

Вычислим интеграл:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(1+z)^{1/4}(1-z)^{3/4}}{1+z}dz = \int_{-1}^{1}\Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4}dz$$

Замена $t^4 = \frac{1-z}{1+z}$ позволяет вычислить интеграл классическими методами, но мы воспользуемся ТФКП. Для этого в комплексной плоскости с разрезом проведем контур, представленный на рисунке.



Теперь разберемся с подынтегральной функцией. Для этого определим $\ln(\frac{1-z}{1+z})$ в комплексной плоскости с разрезом:

$$f(z) = \ln\Big(\frac{1-z}{1+z}\Big) = \ln\Big(\frac{1-z_0}{1+z_0}\Big) + \int_{\Gamma(z_0\to z)} \frac{dz}{z-1} - \int_{\Gamma(z_0\to z)} \frac{dz}{z+1} \tag{1}$$

Пусть функция $f(z)$ на верхнем берегу разреза совпадает с функцией, определенной на $(-1;1)$, тогда если в определение (1) подставить $z_0 = x + i0$, то можно получить, что $f(x - i0) = f(x + i0) - 2i\pi$. Из этого следует, что интеграл по контуру можно переписать в следующем виде:

$$\int_C \Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} dz = \int_{-1+i0}^{1+i0} \Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} dz + \int_{1-i0}^{-1-i0} \Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} dz = \int_{-1+i0}^{1+i0} \Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} - e^{-\frac{6i\pi}{4}} \int_{-1+i0}^{1+i0} \Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} dz$$

$$\Leftrightarrow \int_C \Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} dz = I\cdot(1-i) \tag{2}$$

Для вычисление интеграла по контуру необходимо найти вычет функции на бесконечности. Получить этот вычет можно разложения подынтегральной функции по степеням $\frac{1}{z}$. Проще всего считать это разложение в том случае, когда $z \to +\infty + i0$. В определении (1) распишем 2 интеграла по аналогии с логарифмом от комплексной функции:

$$f(z) = \ln\Big(\frac{1-z_0}{1+z_0}\Big) + \ln(|z-1|) - \ln(|z+1|) + i\Big(\arg(z-1) - \arg(z_0-1)\Big) - i\Big(\arg(z+1) - \arg(z_0+1)\Big)$$

Пусть $z_0 = 0 + i0$, а $z \to +\infty + i0$ тогда:

$$f(z) = \ln\Big(\frac{z-1}{z+1}\Big) + i(0-\pi) - i(0-0) = \ln\Big(\frac{z-1}{z+1}\Big) - i\pi \Rightarrow$$

$$\Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} = e^{-i\pi\frac{3}{4}}(1-z^{-1})^{3/4}(1+z^{-1})^{-3/4} = e^{-i\pi\frac{3}{4}}(1 - \frac{3}{2z} + ...) \Rightarrow \underset{z=\infty}{Res}\Big(\frac{1-z}{1+z}\Big)^{3/4} = -\frac{3}{2}e^{-i\pi\frac{3}{4}}$$

Важно заметить, что изначальный контур ориентирован отрицательно, а это значит, что выражение (2) перепишется в виде:

$$2i\pi\frac{3}{2}e^{-i\pi\frac{3}{4}} = I\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})\sqrt{2} \Leftrightarrow 3i\pi e^{-i\pi\frac{3}{4}} = I\sqrt{2}e^{-i\pi\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 3e^{i\pi/2}\pi e^{-i\pi/2} = I\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

Окончательно:

$$\boxed{I = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}}$$