

Wydział	Dzień Data		Nr zespołu
Nazwisko i Imię: 1. 2. 3.	Ocena z przygotowania	Ocena ze sprawozdania	Ocena Końcowa
Prowadzący		Podpis prowadzącego	

Sprawozdanie nr 4

1. Interferencja fal

1.1. Opis ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest pomiar długości fal elektromagnetycznych metodami interferencyjnymi. Wykorzystujemy do tego następujące przyrządy:

- interferometr Michelsona
- interferometr Fabry-Perotaa
- siatkę dyfrakcyjną

W eksperymentach zostały wykorzystane mikrofałe oraz światło widzialne w postaci lasera o kolorze czerwonym.

1.2. Wstęp teoretyczny

Interferencja

Interferencja jest efektem nakładania się fal. W wyniku nałożenia może nastąpić wzmocnienie fali wypadkowej lub jej osłabienie. Warunkiem trwałej interferencji fal jest ich spójność, czyli korelacja faz i równość częstotliwości. W przeciwnym wypadku może dojść np. do dudnienia. Fale powinny też posiadać identyczną częstość kołową ω i mieć taką samą polaryzację. Natężenia nakładających się fal opisane są wzorami

$$E_1 = E_{01} \sin(\omega t - kx)$$

$$E_2 = E_{02} \sin(\omega t - k(x + \Delta))$$

gdzie dla fali drugiej przebywa ona dodatkową drogę Δ która powoduje różnicę w fazach pomiędzy falami.

Podczas interferencji czyli dodaniu się fal otrzymujemy następującą zależność

$$E = E_1 + E_2 = E_{01}\sin(\omega t - kx) + E_{02}\sin(\omega t - kx - \phi)$$

gdzie $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ - opisuje zmianę fazy spowodowaną przebyciem dodatkowej drogi optycznej.

Używane przez nas detektory reagują na średnią ilość energii padającej na jednostkę powierzchni w jednostce czasu. Energia fali jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola elektrycznego, zależność tą możemy otrzymać z poprzedniego wzoru wynosi ona:

$$E^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_{01}^2\sin^2(\omega t - kx) + E_{02}^2\sin^2(\omega t - kx - \phi) + 2E_{01}E_{02}\sin(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx - \phi)$$

Z czego po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$E^2 = E_{01}^2\sin^2(\omega t - kx) + E_{02}^2\sin^2(\omega t - kx - \phi) + E_{01}E_{02}[\cos\phi - \cos[2(\omega t - kx) - \phi]]$$

Mając powyższą zależność możemy wyznaczyć wcześniej wspomnianą średnią ilość energii na jednostkę powierzchni

$$I = E^2 = \frac{E_{01}}{2} \frac{E_{02}}{2} + E_{01}E_{02}\cos\phi$$

Ostatecznie otrzymując

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\phi$$

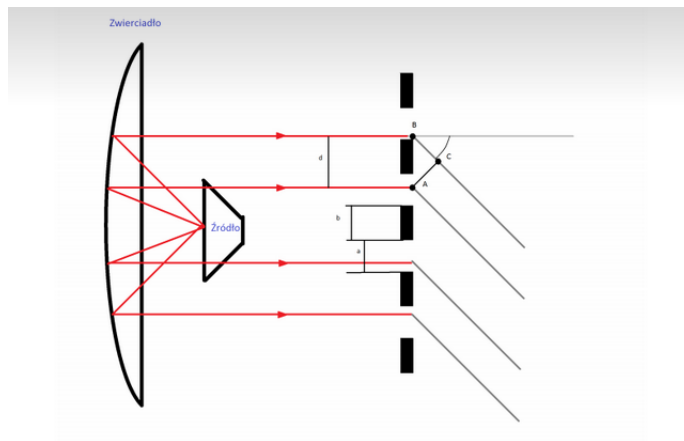
co dla przypadku przez nas badanego $I_1 = I_2$ sprowadza się do związku

$$I = 2I_0 + 2I_0\cos\phi$$

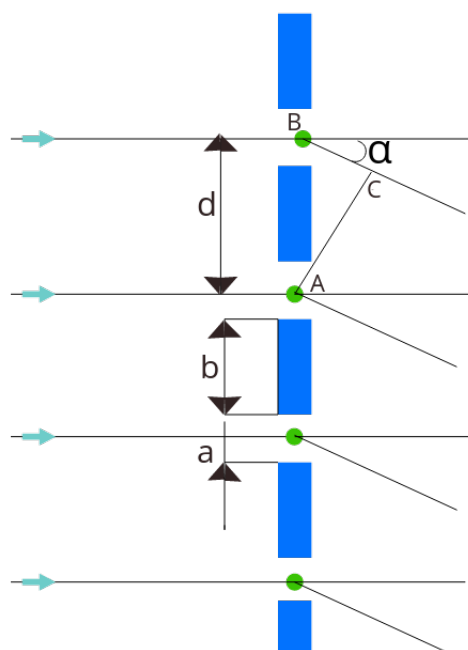
w zależności od kąta przesunięcia fazowego $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ otrzymujemy 0 lub $4I_0$ bo $\cos\phi$ odpowiednio osiąga wartości -1 lub 1 . Z powyższych rozważań wynika ostatecznie, że $\lambda = 2\frac{\Delta}{2m+1}$ dla osłabienia oraz $\lambda = \frac{\Delta}{m}$ dla wzmocnienia.

2. Pomiary i obliczenia

2.1. Siatka dyfrakcyjna



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego dla siatki dyfrakcyjnej



Rysunek 2: Schemat układu pomiarowego dla siatki dyfrakcyjnej

Do przeprowadzenia eksperymentu z siatką dyfrakcyjną posłużono się układem widocznym na rysunku 1. Źródło mikrofal, które znajdowało się w odległości $\frac{1}{2}$ promienia krzywizny zwierciadła, wysyłało fale elektromagnetyczne, które odbijały się od zwierciadła. Dzięki temu osią-

galiśmy równoległe fale elektromagnetyczne. Następnie przechodziły one przez szczeliny siatki dyfrakcyjnej i zgodnie z zasadą Huyghensa były one wtórnymi źródłami fal kulistych, które ze sobą interferowały. W rezultacie otrzymywaliśmy minima oraz maksima sygnału obserwowanego na woltomierzu przy konkretnym (ze względu na kąt) umiejscowieniu odbiornika fal względem siatki dyfrakcyjnej. Na siatce dyfrakcyjnej dochodzi do powstania fal rozchodzących się kuliście, jeśli różnica dróg (wyznaczona przez długość pomiędzy punktami BC) widoczna na rysunku 2 wynosi

$$d \sin \alpha_m = m \lambda$$

Wówczas dochodzi do maksymalnego wzmocnienia fali wynikowej. Nasze pomiary polegały na wyznaczeniu kąta dla którego zachodzą te wzmocnienia, dzięki temu możemy określić długość fali. Podziałka na kątomierzu określającym położenie maksimum wynosiła $\Delta \alpha = 1^\circ = 0.01745329 \text{ rad}$ przyjmujemy niepewność eksperymentatora jako $\Delta \alpha_e = 0.5^\circ = 0.008726646 \text{ rad}$ stąd mamy, że niepewność pomiarowa typu B wynosi

$$u_\alpha(\text{typ B}) = \sqrt{\frac{(\Delta \alpha)^2}{3} + \frac{(\Delta \alpha_e)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(0.01745329)^2}{3} + \frac{(0.008726646)^2}{3}} \text{ rad} \approx 0,011 \text{ rad}$$

Otrzymano następujące wyniki:

Lp.	α prawe ($^\circ$)	α lewe ($^\circ$)
1	0	0
2	26	26
3	53	55

Tablica 1: Pomiary kątów dla maksimów wskazań woltomierza w eksperymencie z siatką dyfrakcyjną

Dokonaliśmy również pomiaru stałej siatki potrzebnej do wyznaczenia długości fali. Metrówka którą wykonywaliśmy pomiar stałej siatki miała podziałkę $\Delta d = 0.1 \text{ cm}$ przyjmujemy niepewność eksperymentatora jako $\Delta d_e = 0.05 \text{ cm}$ skąd otrzymujemy niepewność typu B:

$$u_d(\text{typ B}) = \sqrt{\frac{(\Delta d)^2}{3} + \frac{(\Delta d_e)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(0.1)^2}{3} + \frac{(0.05)^2}{3}} \approx 0.065 \text{ cm}$$

Stała siatki wynosiła $d = \frac{89.1 \text{ cm}}{12} = 7.425 \text{ cm}$ by wyznaczyć ją z większą dokładnością należało określić łączną szerokość wielu szczelin i podzielić je przez ilość szczelin, dzięki temu niepewności polegające na niedokładnym przyłożeniu metrówki oraz niedokładnym odczytaniu końca ostatniej szczeliny możemy znacząco zmniejszyć. Czyli uwzględniając niepewność otrzymujemy $d = 7.425(0.065) \text{ cm}$

Mając dwie powyższe niepewności przystępujemy do wyznaczenia niepewności dla pomiaru długości fali, obliczamy ją zgodnie ze wzorem

$$u_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)^2 \cdot u_d^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot u_\alpha^2} = \sqrt{\sin^2 \alpha \cdot u_d^2 + d^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot u_\alpha^2}$$

Kąty poszczególnych maksimów obliczamy jako średnia arytmetyczna z pomiaru lewego i prawego maksimum

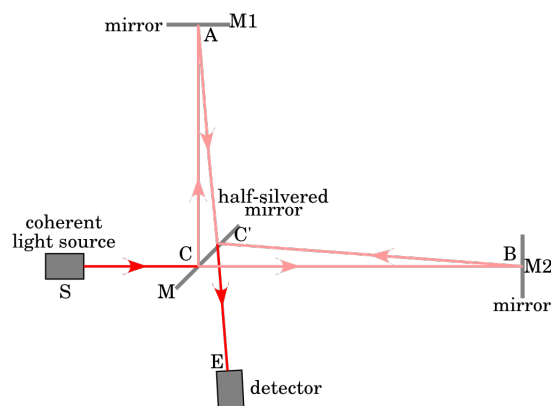
$$\alpha_n = \frac{\alpha_n^L + \alpha_n^R}{2}$$

Ostateczne wyniki długości fali przedstawia tabela

Lp	kąt średni	długość fali [m]	niepewność pomiarowa
1	0	0	0
2	26	0.03137	0.00079
3	54	0.03003	0.00071

Tablica 2: Długości fali w eksperymencie z siatką dyfrakcyjną

2.2. Interferometr Michelsona - mikrofałe

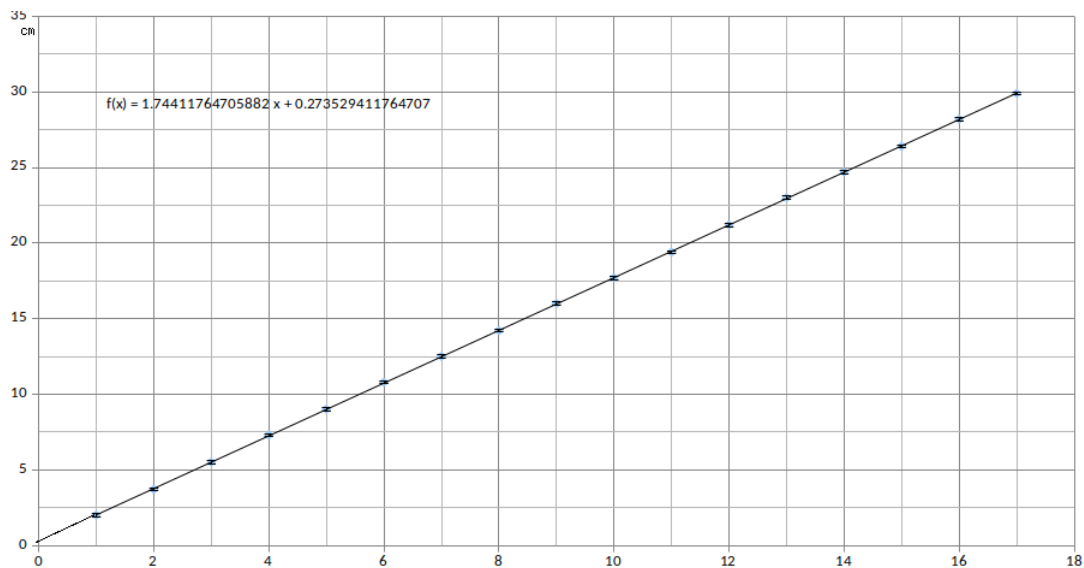


Rysunek 3: Schemat układu pomiarowego dla interferometru Michelsona
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Michelson_interferometer_with_labels.svg/1024px-Michelson_interferometer_with_labels.svg.png

Wiązka mikrofal wychodzi ze źródła i pada na płytkę półprzepuszczalną. Połowa wiązki odbija się od płytki pada na jedno ze zwierciadeł, odbija się i wraca tą samą drogą, przechodzi przez płytkę i pada na detektor. Druga połowa wiązki przechodzi przez płytkę odbija się od drugiego zwierciadła i wraca tą samą drogą, odbija się od płytki, spotyka się z wiązką pierwszą w detektorze. Przesuwając jedno ze zwierciadeł zbadaliśmy ilość maksymalnych wzmocnień obserwowanych w detektorze oraz odległość na jakiej miało miejsce dane wzmocnienie. By wyznaczyć długość fali posłużyliśmy się następującym wzorem $\lambda = \frac{2\sigma}{m}$ Wyniki zestawiliśmy w poniższej tabeli.

Lp.	odległość (cm)	różnica pomiędzy maksimami [m]	długość fali [m]
1	2	—	—
2	3.7	0.017	0.034
3	5.5	0.018	0.036
4	7.3	0.018	0.036
5	9.0	0.017	0.034
6	10.8	0.018	0.036
7	12.5	0.017	0.034
8	14.2	0.017	0.034
9	16.0	0.018	0.036
10	17.7	0.017	0.034
11	19.4	0.017	0.034
12	21.2	0.018	0.036
13	23.0	0.018	0.036
14	24.7	0.017	0.034
15	26.4	0.017	0.034
16	28.2	0.018	0.036
17	29.9	0.017	0.034

Tablica 3: Pomiary dla interferometru Michelsona



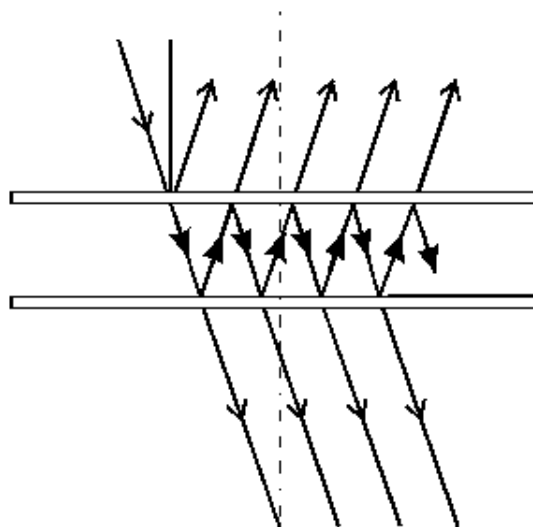
Rysunek 4: Wykres różnicy dróg optycznych w zależności od numeru wzmocnienia

Obliczenia długości fali przeprowadzamy z użyciem metody najmniejszych kwadratów. Otrzymujemy współczynnik $a = 1.7441$ współczynnik b powinien być bliski 0 i tak jest w rzeczywistości, w naszych pomiarach wynosi on $b = 0.2735$. Długość fali wynosi $\lambda = 3.49(0.02)cm$

2.3. Interferometr Fabry’ego-Perotaa

Interferometr Fabry – Perota składa się z dwóch płytek, jedna z nich przepuszcza część promieniowania, a druga ma zdolność do odbijania. Płytki ustawiamy tak aby, powietrze pomiędzy płytkami tworzyło płaskorównoległą warstwę. Fale, które przez górną płytkę przedostają się do warstwy powietrza, ulegają wielokrotnym odbiciom od ścianek płytek. Jeśli na pierwszą płytkę pada wiązka fal, to z drugiej płytki wychodzi szereg równoległych wiązek.

Do pomiaru długości fal elektromagnetycznych wykorzystaliśmy drugi typ interferometru Fabry – Perotaa, gdzie jedna z płytek jest nieruchoma a druga jest zastąpiona zwierciadłem. Zmieniając położenie zwierciadła bada się różnicę dróg optycznych fal przy maksymalnych wzmocnieniach. Wyniki przedstawiliśmy w tabeli obok.



Rysunek 5: Schemat układu pomiarowego dla interferometru Fabry’ego-Perota
<http://www.lodd.p.lodz.pl/~konrad/wyklad8/wyklad8/wyklad2.gif>

Wyniki zestawiliśmy w poniższej tabeli.

Numer maksimum	odległość (cm)
0	9.0
18	38.9

Tablica 4: Wyniki pomiaru na interferometrze Fabry’ego-Perota

Długość fali obliczamy ze wzoru

$$\lambda = \frac{2}{r} \cos \alpha (d_{m+r} - d_m)$$

dla parametrów $\alpha = 0, r = 18$ otrzymujemy $\lambda = 0.03322m$ niepewności liczymy analogicznie do przypadku z siatką dyfrakcyjną otrzymując taką samą niepewność typu B dla metrówki (z

powodu takich samych podziałek na obu liniijkach) czyli

$$u_d(\text{typ B}) \approx 0.00065 \text{ m}$$

Skąd możemy policzyć niepewność dla wyznaczenia długości fali.

$$u_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)^2 \cdot u_d^2} = \sqrt{\frac{2}{r} \cos \alpha u_d^2}$$

po podstawieniu do wzoru otrzymujemy niepewność

$$u_\lambda = 0,00021m$$

czyli ostatecznie długość fali

$$\lambda = 0.03322(0.00021)m$$

2.4. Interferometr Michelsona - laser

W ćwiczeniu interferometru Michelsona z laserem sam przyrząd został zbudowany w analogiczny sposób do wcześniej opisanego interferometru Michelsona. Wyjątkiem było sterowanie ruchami zwierciadła poprzez obroty śruby mikrometrycznej, której podziałka miała dokładność $0.01mm$ oraz zamiana detektora na biały ekran. Śruba była zamontowana dodatkowo na dźwigni, która umożliwiała 10-krotne zwiększenie dokładności ruchów. Jest to zbyt mała dokładność przy próbie bezpośredniego określenia długości fali, dlatego w naszym ćwiczeniu zastosowaliśmy metodę zliczania kolejnych maksimów i policzenia długości fali na podstawie różnicy wskazań na śrubie oraz ilości "miniętych" maksimów.

Mamy więc zależność

$$\lambda = \left(\left(\frac{d_k - d_p}{n}\right) : 10\right) \cdot 2$$

Wyniki przedstawiamy w tej tabeli:

Numer maksimum	odległość (mm)
0	10.00
100	10.33

Tablica 5: Wyniki pomiaru na interferometrze Michelsona z laserem

Czyli otrzymujemy $\lambda = 660nm$ co jest zgodne z oczekiwaniami (światło czerwone ma długość fali około $700nm$). By policzyć niepewność stosujemy wzór

$$u_d(\text{typ B}) = \sqrt{\frac{(\Delta d)^2}{3} + \frac{(\Delta d_e)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(0.01)^2}{3} + \frac{(0.005)^2}{3}} \approx 0.0065 \text{ cm}$$

Następnie ze wzoru na niepewność złożoną

$$u_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)^2 \cdot u_d^2} = \left(\frac{1}{n} : 10\right) \cdot 2u_d$$

mamy $u_\lambda = 13nm$ Czyli ostatecznie $\lambda = 660(13)nm$

	Metoda	Wynik	Niepewność	Niepewność względna
	Siatka dyfrakcyjna	3.07 cm	0.08 cm	0.026
	Interferometr Michelsona (mikrofale)	3.49 cm	0.02 cm	0.005
	Interferometr Fabry'ego-Perota	3.32 cm	0.02 cm	0.006
	Interferometr Michelsona (laser)	660 nm	13 nm	0.020

Tablica 6: Porównanie metod określania długości fal poprzez interferencję

3. Wnioski

Metodą o najmniejszej niepewności okazał się być interferometr Michelsona, a największej – pomiary z wykorzystaniem siatki dyfrakcyjnej, co ukazuje tablica 6. Wskazuje na to najmniejsza wartość niepewności względnej. Należy zaznaczyć, że porównujemy tu niepewności względne a nie wartości błędów (bezwzględnych bądź względnych), ponieważ w przeprowadzonych doświadczeniach nie zakładamy pomiaru fal tej samej długości oraz nie znamy ich rzeczywistej długości.

Oprócz niedokładności przyrządów pomiarowych oraz niepewności odczytu wskazań urządzeń przez eksperymentatora, niepewności pomiarowe w ćwiczeniu z siatką dyfrakcyjną mogły wynikać z odbicia fal od pobliskich przedmiotów. Dodatkowo, pomiary długości fali lasera wymagały nadzwyczaj dużej dokładności eksperymentatorów z powodu niskiego przełożenia śruby – zwiększenie przełożenia mogłoby pozwolić na osiągnięcie większej dokładności.