

Wydział	Dzień                      poniedziałek 17 <sup>15</sup> – 19 <sup>30</sup>		Nr zespołu
Matematyki i Nauk Informatycznych	Data		18
Nazwisko i Imię: 1. Jasiński Bartosz 2. Sadłocha Adrian 3. Wódkiewicz Andrzej	Ocena z przygotowania	Ocena ze sprawozdania	Ocena Końcowa
Prowadzący dr hab. Katarzyna Grebieszko		Podpis prowadzącego	

## Sprawozdanie nr 7

### 1. Opis ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest weryfikacja hipotezy de Broglie’a. Hipoteza ta głosi, że wszelka materia ma dwojaką naturę: cząsteczkową oraz falową.

#### 1.1. Wstęp teoretyczny

##### Fale de Broglie’a

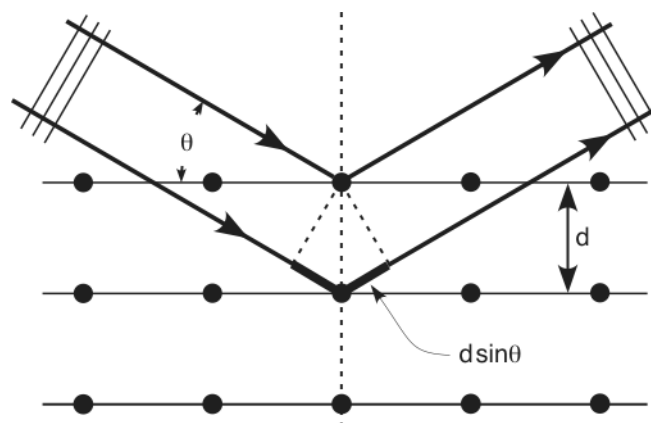
Zgodnie z hipotezą przedstawioną przez de Broglie’a, każdej cząstce można przypisać falę o pewnej długości. Jeśli przez  $h$  oznaczymy stałą Plancka, zaś przez  $p$  pęd cząstki, to długość fali de Broglie’a (ozn.  $\lambda$ ) jest definiowana jako:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Aby potwierdzić eksperymentalnie naturę falową materii, dążyliśmy w ćwiczeniu do zaobserwowania zjawiska interferencji dla cząstek materii. Ponieważ wytworzenie siatki dyfrakcyjnej o odpowiednio małej odległości między szczelinami (rzędu długości szukanej fali) jest praktycznie niemożliwe, dlatego do dyfrakcji hipotetycznej fali wykorzystana została struktura krystaliczna grafitu.

##### Dyfrakcja na sieci krystalicznej, prawo Bragga i doświadczenie Thomsona

Fala padająca na sieć krystaliczną zderza się z atomami tworzącymi tę sieć. Pobudzone atomy są (zgodnie z zasadą Huygensa) nowymi źródłami fali kulistej, a w szczególności wiele takich źródeł tworzy czoło nowej fali płaskiej. W rezultacie uzyskujemy efekt odbicia fali od sieci krystalicznej. Ponieważ sieć składa się z atomów ułożonych warstwami, promienie fali mogą pokonywać różne odległości, jeśli zostaną odbite od dwu różnych warstw. W zależności od tej odległości



Rysunek 1: Prawo Bragga

jesteśmy w stanie uzyskać interferencję konstruktywną oraz destruktywną. Zgodnie ze wzorem na siatkę dyfrakcyjną, największe wzmocnienia fali występują dla:

$$d \sin(\theta) = n\lambda$$

gdzie  $\theta$  to kąt padania fali o długości  $\lambda$ ,  $n$  to rząd widma, a  $d$  to stała siatki dyfrakcyjnej.

Dla naszego układu stałą siatki dyfrakcyjnej jest odległość między warstwami w sieci krystalicznej, natomiast  $\theta$  jest kątem poślizgu (lub *odbłyску*), definiowanym jako kąt między wiązką padającą a płaszczyzną kryształu.

Dalej, należy zauważyć, że  $d \sin(\theta)$  (w ujęciu ogólnym dla siatki dyfrakcyjnej ze szczelinami) to różnica pokonywanych odległości przez promienie przechodzące przez kolejne szczeliny siatki dyfrakcyjnej. Dla układu w naszym ćwiczeniu różnica ta jest **2 razy większa**, ponieważ fala pokonuje tę powiększoną odległość dwukrotnie – raz przed ugięciem i drugi raz po ugięciu. Odcinki te zostały przedstawione na rysunku 1 pogrubioną linią.

Po przeprowadzeniu rozważań, otrzymujemy wzór Bragga na maksymalne wzmocnienie fali ugiętej przez przepuszczenie jej przez kryształ:

$$2d \sin(\theta) = n\lambda$$

gdzie  $d$  to odległość między płaszczyznami atomów,  $\theta$  to kąt poślizgu, a  $n$  i  $\lambda$  to odpowiednio rząd ugięcia i długość fali (jak w przypadku wzoru na siatkę dyfrakcyjną).

Ponieważ kąt między wiązką ugiętą a wiązką przepuszczoną przez sieć krystaliczną wynosi  $2\theta$ , dlatego podczas obrotu kryształu względem osi utworzonej przez wiązkę padającą (i tym samym przepuszczoną), zakreślane będą stożki o kącie rozwarcia  $4\pi$ .

Przechodząc do wykonania ćwiczenia, wzorowanego na doświadczeniu Thomsona, przed lampą oscyloskopową, na drodze wiązki elektronowej umieszczono cienką folię z materiału o budowie polikrystalicznej. W pewnej odległości  $r$  od folii umieszczony został ekran, na którym dokonywane zostały pomiary średnicy  $D$  utworzonych prążków. Zakładając, że kąt  $\theta$  jest bardzo mały (gdyż średnice okręgów interferencyjnych są o wiele mniejsze niż odległość od ekranu), otrzymujemy przybliżenie:

$$\sin(4\theta) \approx 4\theta \approx \frac{D}{r} \quad \text{i dalej}$$

$$\sin(\theta) \approx \theta \approx \frac{D}{4r}$$

Podstawiając to przybliżenie do wzoru Bragga, otrzymujemy:

$$\frac{dD}{2r} = n\lambda$$

Korzystając z hipotezy de Broglie'a:

$$\frac{dD}{2r} = n \frac{h}{p}$$

Korzystając ze związku między energią elektronu a jego pędem (i zaniedbując efekty relatywistyczne):

$$\frac{dD}{2r} = n \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Ostatecznie, rozpatrując tylko prążki rzędu 1. ( $n = 1$ ) otrzymujemy wzór na średnicę okręgu interferencyjnego:

$$D = \frac{2rh}{d\sqrt{2meU}}$$

gdzie:

- $r$  – odległość między folią a ekranem
- $h$  – stała Plancka
- $d$  – odległość między płaszczyznami atomowymi wewnątrz folii
- $m$  – masa elektronu
- $e$  – ładunek elementarny
- $U$  – napięcie przyspieszające elektrony

Przy wykonywaniu doświadczenia szukano zależności liniowej między  $D$  a  $\frac{1}{\sqrt{U}}$

## 1.2. Układ pomiarowy

Do weryfikacji hipotezy de Broglie'a użyta została lampa oscyloskopowa oraz cienka folia grafitowa. W celu przyspieszania elektronów przykładane było regulowane napięcie. Do odczytu napięcia służył cyfrowy wyświetlacz o rozdzielczości wynoszącej 0.01 kV.

Odległość pomiędzy folią grafitową a ekranem wynosiła – zgodnie z instrukcją – 127 (3) mm.

## 2. Pomiary i wstępne obliczenia

Dokonaliśmy dwóch serii pomiarów, kolejno  $A$  oraz  $B$ . W obu seriach napięcie (ozn.  $U$ ) ustalane było między ok. 3.50 kV a ok. 11.10 kV, z różnicą ok. 0.40 kV pomiędzy pomiarami. Podczas serii  $A$  napięcie rosło wraz z każdym pomiarem, podczas serii  $B$  – malało.

Ponieważ stan podczas odczytu napięcia nie był stabilny (największy zauważony przez nas skok wartości wyniósł 0.09 kV), za niepewność całkowitą pomiaru  $U$  przyjęliśmy:

$$u(U) = \frac{0.09 \text{ kV}}{\sqrt{3}}$$

W dalszej części będziemy sprawdzać zależność liniową pomiędzy średnicą pierścieni a odwrotnością pierwiastka napięcia. Wprowadzmy oznaczenie  $X = \frac{1}{\sqrt{U}}$  oraz wyliczmy – korzystając z prawa propagacji niepewności – niepewność całkowitą:

$$u(X) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 \cdot u^2(U)} = \left| -\frac{1}{2\sqrt{U^3}} \cdot u(U) \right| = \frac{0.09 \text{ kV}}{2\sqrt{3}\sqrt{U^3}}$$

Dla ustalonego napięcia interesowała nas średnica najbardziej wewnętrznego pierścienia, ozn.  $D$ . W celu wyznaczenia tej wartości, mierzona była średnica wewnętrzna oraz zewnętrzna pierścienia, oznaczane kolejno  $D_w$  oraz  $D_z$ . Za średnicę właściwą przyjęliśmy średnią arytmetyczną z powyższych wartości, tj.  $D = \frac{D_w + D_z}{2}$ .

Użyty przyrząd pomiarowy miał podziałkę wynoszącą  $\Delta D_w = 1 \text{ mm}$ . Ze względu na rozmycie pierścieni, za niepewność eksperymentatora przyjęliśmy dwukrotność podziałki:  $\Delta D_{wE} = 2 \cdot \Delta D_w = 2 \text{ mm}$ . Zatem niepewność całkowita pomiaru średnicy wewnętrznej (a także zewnętrznej, którą oznaczamy przez  $u(D_z)$ ) wynosi:

$$u(D_w) = \sqrt{\frac{\Delta D_w^2}{3} + \frac{\Delta D_{wE}^2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \Delta D_w = \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ mm}$$

Nas jednak interesuje niepewność średnicy właściwej. Skoro  $D = \frac{D_w + D_z}{2}$ , to – ponownie korzystając z prawa propagacji niepewności – niepewność całkowita pomiaru średnicy wynosi:

$$u(D) = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial D_w}\right)^2 \cdot u^2(D_w) + \left(\frac{\partial D}{\partial D_z}\right)^2 \cdot u^2(D_z)} = \sqrt{\frac{1}{4}u^2(D_w) + \frac{1}{4}u^2(D_z)} = \frac{u(D_w)}{\sqrt{2}}$$

Po podstawieniu wyliczonej wcześniej niepewności otrzymujemy:

$$u(D) = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ mm} \approx 0.912870929175 \text{ mm} \approx 1 \text{ mm}$$

Wyniki pomiarów oraz wstępnych obliczeń zostały przedstawione w Tablicy 1 oraz w Tablicy 2. Dla  $X$  prezentujemy odpowiednio zaokrąglone wartości z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku, zaś obliczenia przeprowadzamy z pełną dostępną precyzją.

## 3. Opracowanie wyników

Korzystając z pythonowej biblioteki SciPy<sup>1</sup> wyliczyliśmy prostą regresję liniowej postaci  $D = aX + b$ . Użyta metoda uwzględniała niepewności pomiarowe zarówno zmiennych  $D$ , jak i  $X$ . Dla serii  $A$  otrzymaliśmy następujące współczynniki (przez  $\sigma$  oznaczamy błąd standardowy):

<sup>1</sup><https://www.scipy.org/>

L.p.	$D_w$ (mm)	$D_z$ (mm)	$U$ (kV)	$D$ (mm)	$X$ ( $\frac{1}{\sqrt{kV}}$ )
1	22	28	3.51	25.0	0.53376
2	20	28	3.90	24.0	0.50637
3	17	27	4.30	22.0	0.48224
4	19	25	4.71	22.0	0.46078
5	17	20	5.09	18.5	0.44324
6	17	23	5.50	20.0	0.42640
7	16	22	5.94	19.0	0.41031
8	16	21	6.30	18.5	0.39841
9	14	20	6.70	17.0	0.38633
10	13	19	7.11	16.0	0.37503
11	14	18	7.50	16.0	0.36515
12	13	18	7.92	15.5	0.35534
13	14	18	8.29	16.0	0.34731
14	13	18	8.69	15.5	0.33923
15	14	18	9.10	16.0	0.33150
16	13	18	9.50	15.5	0.32444
17	13	17	9.90	15.0	0.31782
18	12	17	10.30	14.5	0.31159
19	12	17	10.69	14.5	0.30585
20	12	17	11.10	14.5	0.30015

Tablica 1: Wyniki pomiarów serii  $A$  wraz z wyliczonymi wartościami  $D$  oraz  $X$ .

L.p.	$D_w$ (mm)	$D_z$ (mm)	$U$ (kV)	$D$ (mm)	$X$ ( $\frac{1}{\sqrt{kV}}$ )
1	14	16	11.10	15.0	0.30015
2	14	17	10.69	15.5	0.30585
3	14	16	10.30	15.0	0.31159
4	14	18	9.89	16.0	0.31798
5	14	18	9.50	16.0	0.32444
6	15	18	9.10	16.5	0.33150
7	14	18	8.70	16.0	0.33903
8	15	18	8.30	16.5	0.34711
9	15	19	7.89	17.0	0.35601
10	15	19	7.50	17.0	0.36515
11	16	19	7.10	17.5	0.37529
12	16	19	6.71	17.5	0.38605
13	17	20	6.33	18.5	0.39746
14	18	23	5.90	20.5	0.41169
15	20	24	5.50	22.0	0.42640
16	19	25	5.12	22.0	0.44194
17	19	25	4.71	22.0	0.46078
18	21	27	4.31	24.0	0.48168
19	20	27	3.89	23.5	0.50702
20	22	29	3.49	25.5	0.53529

Tablica 2: Wyniki pomiarów serii  $B$  wraz z wyliczonymi wartościami  $D$  oraz  $X$ .

$$\begin{aligned}a^{(A)} &= 45.5 & \sigma_a^{(A)} &= 2.5 \\b^{(A)} &= 0.18 & \sigma_b^{(A)} &= 0.98\end{aligned}$$

Dla serii  $B$ :

$$\begin{aligned}a^{(B)} &= 46.7 & \sigma_a^{(B)} &= 2.3 \\b^{(B)} &= 0.66 & \sigma_b^{(B)} &= 0.90\end{aligned}$$

Pomiary wraz z wyżej pokazanymi współczynnikami prostej regresji liniowej przedstawione zostały na Rysunku 2 oraz na Rysunku 3.

Ponieważ:

$$\frac{|a^{(A)} - a^{(B)}|}{\sqrt{(\sigma_a^{(A)})^2 + (\sigma_a^{(B)})^2}} \approx 0.34 < 3$$

oraz

$$\frac{|b^{(A)} - b^{(B)}|}{\sqrt{(\sigma_b^{(A)})^2 + (\sigma_b^{(B)})^2}} \approx 0.37 < 3$$

to nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, że w obu seriach mierzona była ta sama wielkość.

### 3.1. Odległości między płaszczyznami atomowymi

Ustalmy  $a = \frac{a^{(A)} + a^{(B)}}{2} = 46.1 \text{ mm}\sqrt{\text{kV}}$  oraz:

$$u(a) = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial a^{(A)}}\right)^2 \cdot (\sigma_a^{(A)})^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial a^{(B)}}\right)^2 \cdot (\sigma_a^{(B)})^2} \approx 1.7 \text{ mm}\sqrt{\text{kV}}$$

Przekształcając wzór  $a = \frac{rh}{d} \sqrt{\frac{2}{me}}$  w celu wyliczenia  $d$ , uzyskujemy:

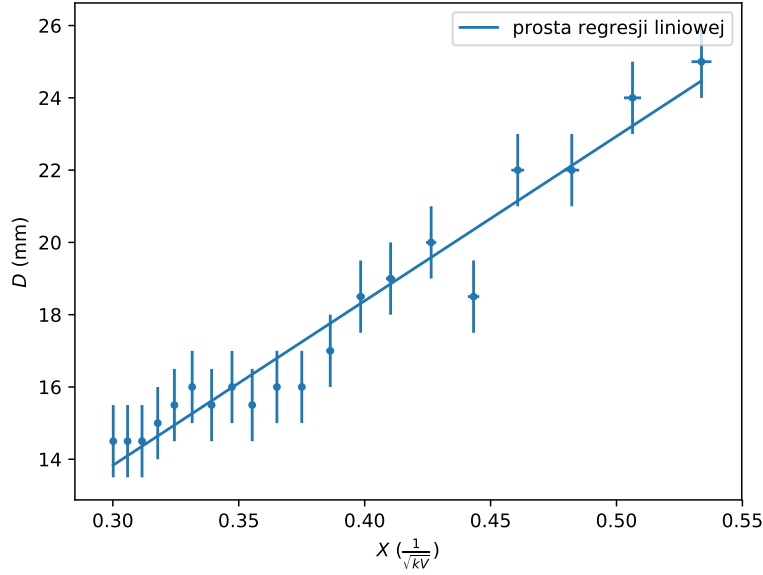
$$d = \frac{rh}{a} \sqrt{\frac{2}{me}}$$

W celu wyliczenia tej wartości, posłużymy się następującymi wartościami i stałymi wraz z niepewnościami<sup>2</sup>:

- odległość folia-ekran<sup>3</sup>:  $r = 127 \text{ (3) mm}$ ;
- stała Plancka:  $h = 6.626070040 \text{ (0.000000081)} \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ;
- masa elektronu:  $m = 9.10938356 \text{ (0.00000011)} \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;

<sup>2</sup>wartości – o ile nie zaznaczono inaczej – pochodzą z National Institute of Standards and Technology (<https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>); dostęp 2018-05-04

<sup>3</sup>wartość z instrukcji do laboratorium



Rysunek 2: Wyliczona prosta regresji liniowej zestawiona wraz ze zmierzonymi wartościami dla serii A.

- ładunek elementarny:  $e = 1.6021766208 (0.0000000098) 10^{-19}$  C.

Ponownie skorzystamy z prawa propagacji niepewności, oznaczając przez  $u(r), \dots, u(e)$  podane wyżej niepewności:

$$\begin{aligned}
 u(d) &= \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial r}\right)^2 \cdot u^2(r) + \left(\frac{\partial d}{\partial h}\right)^2 \cdot u^2(h) + \left(\frac{\partial d}{\partial a}\right)^2 \cdot u^2(a) + \left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \cdot u^2(m) + \left(\frac{\partial d}{\partial e}\right)^2 \cdot u^2(e)} \\
 &= \sqrt{\frac{2h^2}{mea^2} \cdot u^2(r) + \frac{2r^2}{mea^2} \cdot u^2(h) + \frac{2h^2r^2}{mea^4} \cdot u^2(a) + \frac{h^2r^2}{2ea^2m^3} \cdot u^2(m) + \frac{h^2r^2}{2ma^2e^3} \cdot u^2(e)} \\
 &\approx 1.3233817 \cdot 10^{-11} \text{ m} \\
 &\approx 0.14 \text{ \AA}
 \end{aligned}$$

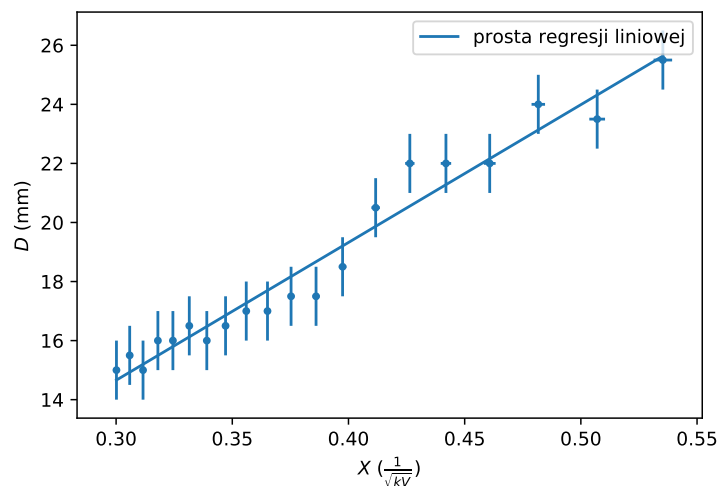
Ostatecznie odległość między płaszczyznami atomowymi wynosi:

$$d = 3.02 (0.14) \text{ \AA}$$

Porównując ten wynik z dostępnymi w internecie<sup>4</sup> (3.35 Å) i w publikacjach<sup>5</sup> (3.345 Å) – oraz biorąc pod uwagę, że dokładna wartość zależy od użytego grafitu – możemy przyjąć, że wyliczona wartość jest możliwa dla grafitu użytego w laboratorium.

<sup>4</sup><https://hypertextbook.com/facts/2001/AliceWarrenGregory.shtml>; dostęp 2018-05-04

<sup>5</sup>de Boer, J. H. (1940), Atomic distances in small graphite crystals and the nature of the bond. Recl. Trav. Chim. Pays-Bas, 59: 826-830. doi:10.1002/recl.19400590903



Rysunek 3: Wyliczona prosta regresji liniowej zestawiona wraz ze zmierzonymi wartościami dla serii  $B$ .

## 4. Wnioski

### 4.1. Prawdziwość hipotezy de Broglie'a

Rysunek 2 oraz na Rysunek 3 wskazują na liniową zależność między odwrotnością pierwiastka napięcia a średnicą widocznych promieni. Dodatkowo, biorąc pod uwagę wyliczone niepewności prostej regresji liniowej, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy de Broglie'a. Uzyskane rozbieżności niektórych pomiarów od wartości liniowej wynikają z trudności oceny średnicy okręgu, miał on niewyraźne granice i niezbyt duży kontrast z tłem. Pomimo tych trudności otrzymaliśmy w obu pomiarach podobne wyniki.