

| | | | |
|--|---|-----------------------|---------------|
| Wydział | Dzień poniedziałek 17 ¹⁵ – 19 ³⁰ | | Nr zespołu |
| Matematyki i Nauk Informatycznych | Data | | 18 |
| Nazwisko i Imię: 1. Jasiński Bartosz 2. Sadłocha Adrian 3. Wódkiewicz Andrzej | Ocena z przygotowania | Ocena ze sprawozdania | Ocena Końcowa |
| Prowadzący dr inż. Mateusz Szelaąg | | Podpis prowadzącego | |

Sprawozdanie nr 3

1. Opis ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zbadanie współczynnika lepkości gliceryny oraz oleju silnikowego. W tym celu posłużyliśmy się pionowymi cylindrami wypełnionymi powyższymi cieczami. Za pomocą pomiaru czasu spadania małych kulek w cieczach byliśmy w stanie oszacować współczynniki lepkości.

1.1. Wstęp teoretyczny

Lepkość

Lepkość to zdolność płynów (czyli cieczy i gazów) do stawiania oporu przy wzajemnym przemieszczaniu się elementów płynu względem siebie. Podczas ruchu ciała w płynie pojawia się siła oporu, która jest zwrócona przeciwnie do zwrotu prędkości ciała.

Jednostką lepkości jest Pa·s.

Liczba Reynoldsa

Parametrem pozwalającym na przybliżone przewidywanie zachowania się ruchu płynu jest liczba Reynoldsa, Re. Definiujemy ją jako:

$$\text{Re} = \frac{u\rho l}{\eta}$$

gdzie:

- u – prędkość charakterystyczna płynu (m/s),
- ρ – gęstość płynu (kg/m³),
- l – parametr liniowy charakterystyczny dla zagadnienia (m),

- η – lepkość dynamiczna płynu ($\text{Pa} \cdot \text{s}$),

Dla małej prędkości u , małej gęstości płynu ρ i dużej jego lepkości η , $\text{Re} \ll 1$ a wtedy ruch płynu nazywamy laminarnym (bezwirowym). Gdy prędkość przepływu płynu lub prędkość ruchu ciała w nim zanurzonego przekroczy wartość krytyczną, kształt i rozmieszczenie przestrzenne rurek płynu zmienia się w układ wirów. Ruch płynu nazywamy wtedy turbulentnym.

Prawo Stokesa

Na kulę o promieniu r spadającą swobodnie w cieczy o gęstości ρ z prędkością v przy zachowaniu warunków przepływu laminarnego, działa siła oporu równa:

$$F_S = -6\pi\eta vr$$

1.2. Układ pomiarowy

Do wykonania ćwiczenia użyliśmy:

- 10 małych kulek;
- wagi analitycznej do wyznaczenia masy kulek;
- śruby mikrometrycznej do wyznaczenia średnicy kulek;
- cyfrowego stopera;
- dwóch cylindrów wypełnionych gliceryną oraz olejem silnikowym.

2. Pomiary i obliczenia

2.1. Wyznaczenie objętości kulek

W celu wyznaczenia objętości kulek dokonaliśmy 10 pomiarów średnicy za pomocą śruby mikrometrycznej. Wyniki przedstawiliśmy w tabeli 1.

| L.p. | średnica (mm) | promień (mm) |
|-------------------------|---------------|--------------|
| 1 | 2.77 | 1.385 |
| 2 | 2.78 | 1.390 |
| 3 | 2.78 | 1.390 |
| 4 | 2.77 | 1.385 |
| 5 | 2.77 | 1.385 |
| 6 | 2.76 | 1.380 |
| 7 | 2.77 | 1.385 |
| 8 | 2.78 | 1.390 |
| 9 | 2.78 | 1.390 |
| 10 | 2.77 | 1.385 |
| Średnia: | 2.773 | 1.3865 |
| Odchylenie standardowe: | 0.006749 | 0.003375 |

Tabela 1: Wyniki 10 pomiarów średnicy kulek

Średnia wartość średnicy wynosi $d = 2.773$ mm, zaś średnia wartość promienia $r = \frac{1}{2} \cdot 2.773 = 1.3865$ mm.

Oznaczmy przez Δd – niepewność wynikającą z wykorzystania śruby mikrometrycznej, zaś przez Δd_e – niepewność eksperymentatora.

W przypadku użytej przez nas śruby mikrometrycznej $\Delta d = 0.01$ mm. Za niepewność eksperymentatora przyjęliśmy połowę najmniejszej podziałki, tj. $\Delta d_e = 0.005$ mm.

Zatem niepewność pomiarowa typu B wynosi:

$$\begin{aligned} u_b(d) &= \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d_e}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.01}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.005}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{ mm} \\ &\approx 0.006454972243679028 \text{ mm} \\ &\approx 0.0065 \text{ mm} \end{aligned}$$

Ponadto należy uwzględnić niepewność pomiarową typu A. Oznaczmy przed d_1, \dots, d_{10} kolejne promienie kulek. Wtedy:

$$\begin{aligned} u_a(d) &= \sqrt{S_d^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (d_i - d)^2} \\ &\approx 0.0021343747458109344 \text{ mm} \\ &\approx 0.0022 \text{ mm} \end{aligned}$$

Ostatecznie, całkowita niepewność standardowa pomiaru średnicy (uwzględniająca zarówno niepewności typu B, jak i odchylenie standardowe) wynosi:

$$\begin{aligned} u(d) &= \sqrt{u_a^2(d) + u_b^2(d)} \\ &\approx \sqrt{0.0022^2 + 0.0065^2} \text{ mm} \\ &\approx 0.006862215385719105 \text{ mm} \\ &\approx 0.007 \text{ mm} \end{aligned}$$

W celu wyliczenia objętości posłużymy się wzorem $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 1.3865^3 \text{ mm}^3 \approx 11.1647301 \text{ mm}^3 \approx 11.165 \text{ mm}^3$. Odpowiadającą niepewność wyliczymy za pomocą wzoru $u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \cdot u^2(r)}$.

Ponieważ $\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi r^2$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
u(V) &= \sqrt{(4\pi r^2)^2 \cdot u^2(r)} \\
&= 4\pi r^2 \cdot u(r) \\
&= 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2}u(d) \\
&= 2\pi r^2 \cdot u(d) \\
&\approx 2\pi r^2 \cdot 0.007 \text{ mm} \\
&\approx 0.0609814549988 \text{ mm}^3 \\
&\approx 0.061 \text{ mm}^3
\end{aligned}$$

Zatem objętość pojedynczej kulki wynosi $V = 11.165(61) \text{ mm}^3$.

2.2. Wyznaczenie gęstości kulki

Do wyznaczenia gęstości kulki, oprócz wyżej obliczonej objętości, potrzebna jest masa pojedynczej kulki. W tym celu posłużyliśmy się wagą analityczną, na której zważyliśmy najpierw bibułkę, a następnie 10 kulek na tej samej bibułce.

Podziałka wagi wynosiła 0.1 mg. Za niepewność eksperymentatora przyjęliśmy połowę podziałki. Niepewność wyznaczenia masy przy tych warunkach wynosi:

$$\begin{aligned}
u(m) &= \sqrt{\left(\frac{0.1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{ mg} \\
&\approx 0.064549722436790 \text{ mg} \\
&\approx 0.0646 \text{ mg} \\
&\approx 0.1 \text{ mg}
\end{aligned}$$

Uzyskaliśmy masę bibułki $m_b = 543.9(1) \text{ mg}$ oraz masę 10 kulek wraz z bibułką $M = 1431.2(1) \text{ mg}$. Masa pojedynczej (uśrednionej) kulki wynosi $m_k = \frac{M-m_b}{10} = 88.73 \text{ mg}$ z niepewnością:

$$\begin{aligned}
u(m_k) &= \sqrt{\left(\frac{\partial m_k}{\partial M}\right)^2 \cdot u^2(m) + \left(\frac{\partial m_k}{\partial m_b}\right)^2 \cdot u^2(m)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{100}u^2(m) + \frac{1}{100}u^2(m)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{10}u(m) \\
&\approx 0.0141421356237 \text{ mg} \\
&\approx 0.02 \text{ mg}
\end{aligned}$$

W celu wyznaczenia gęstości kulki posłużymy się wzorem $\rho_k = \frac{m_k}{V}$. Oszacowanie niepewności uzyskamy poprzez zastosowanie poniższych obliczeń:

$$\begin{aligned}
u(\rho_k) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_k}{\partial m_k}\right)^2 \cdot u^2(m_k) + \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial V}\right)^2 \cdot u^2(V)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 u^2(m_k) + \left(\frac{-m_k}{V^2}\right)^2 u^2(V)} \\
&\approx 0.04345624000 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3} \\
&\approx 0.044 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}
\end{aligned}$$

Zatem gęstość wynosi $\rho_k = \frac{m_k}{V} = 7.947(44) \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$.

2.3. Badanie współczynnika lepkości cieczy

Wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

- g – przyspieszenie ziemskie, $g = 9.8123 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (wartość dla Warszawy);
- r – promień kulki, $r = 1.3865 \text{ mm}$;
- v_{gr} – prędkość graniczna poruszania się kulki w cieczy;
- ρ_k – gęstość kulki, $\rho_k = 7.947 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$;
- ρ_c – gęstość cieczy;
- R – promień cylindra, w którym znajdowała się ciecz, $R = 2.00 \text{ cm}$;
- h – wysokość słupa cieczy, $h = 100.0 \text{ cm}$.

Wtedy współczynnik lepkości cieczy można wyznaczyć używając poniższego wzoru:

$$\eta = \frac{2gr^2}{9v_{\text{gr}}}(\rho_k - \rho_c) \left[\left(1 + 2.4 \frac{r}{R}\right) \left(1 + 3.1 \frac{r}{h}\right) \right]^{-1} \quad (1)$$

Ponadto przyjęliśmy następujące niepewności:

- $u(r) = \frac{1}{2}u(d) = 0.0035 \text{ mm}$;
- $u(R) = 0.15 \text{ mm}$;
- $u(h) = 0.6 \text{ cm}$;

Ponadto, niepewność pomiarowa drogi przebytej przez kulkę wynosi – dla miarki z podziałką co 1 mm i niepewnością wynikającą z dokładności odczytu równą 0.5 mm – $u(S) = \sqrt{\left(\frac{0.1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{ cm} \approx 0.07 \text{ cm}$.

| L.p. | #1 | #2 | #3 | #4 | #5 | #6 | #7 | #8 | #9 | #10 | suma (s) |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| 1 | 1.79 | 2.12 | 1.71 | 2.07 | 1.96 | 1.92 | 2.00 | 2.03 | 2.05 | 2.11 | 19.76 |
| 2 | 1.81 | 1.94 | 1.77 | 1.99 | 2.06 | 1.99 | 1.91 | 1.98 | 2.24 | 2.11 | 19.80 |
| 3 | 1.75 | 2.02 | 1.83 | 1.95 | 1.90 | 1.98 | 2.12 | 1.90 | 1.96 | 2.33 | 19.74 |
| 4 | 1.79 | 1.91 | 1.87 | 1.95 | 1.91 | 1.93 | 1.90 | 2.15 | 2.10 | 2.05 | 19.56 |
| 5 | 1.78 | 1.91 | 1.90 | 1.99 | 1.66 | 1.98 | 2.10 | 2.12 | 2.08 | 1.89 | 19.41 |

Tabela 2: Międzyczasy (s) pięciokrotnego pomiaru spadku kulki w glicerynie.

Wyznaczenie współczynnika lepkości gliceryny

Za gęstość gliceryny w warunkach laboratoryjnych przyjęliśmy wartość $\rho_{\text{gliceryna}} = 1.261 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Dokonaliśmy pięciokrotnego pomiaru czasu spadku kulki w cylindrze z gliceryną. Do mierzenia czasu zastosowaliśmy cyfrowy stoper z dokładnością wynoszącą 0.01 s.

W tabeli 2 przedstawione zostały sumaryczne czasy wraz z międzyczasami.

Ze względu na trudność w dokładnym odczycie pozycji kulki podczas spadania, do wyliczenia niepewności pomiarowej przyjęliśmy niepewność eksperymentatora równą 0.6 s. Przy tak dużej niepewności eksperymentatora, dokładność stopera możemy zaniechać. Zatem niepewność standardowa typu B pomiaru czasu wynosi:

$$\begin{aligned}
 u_b(t) &= \sqrt{\left(\frac{0.6}{\sqrt{5}}\right)^2} \text{ s} \\
 &\approx 0.346410161 \text{ s} \\
 &\approx 0.35 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Przez t_1, \dots, t_5 oznaczmy kolejne sumaryczne czasy spadku. Średni sumaryczny czas spadku wynosi $t = \frac{1}{5}(t_1 + \dots + t_5) = 19.654 \text{ s}$. Ponadto, niepewność typu A pomiaru czasu wynosi:

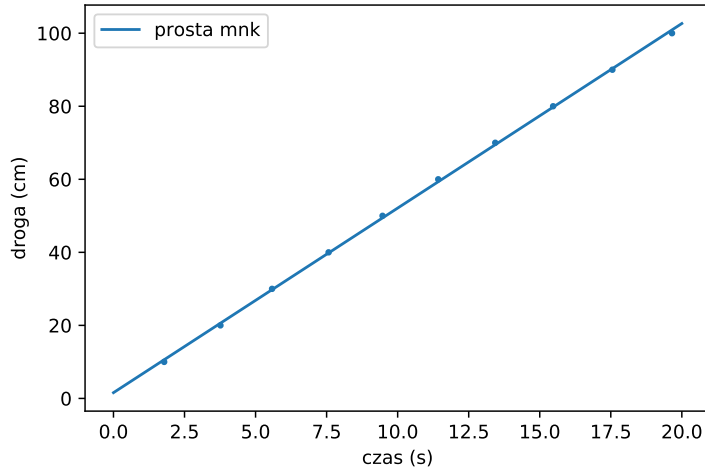
$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= \sqrt{S_t^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} \cdot \sum_{i=1}^5 (t_i - t)^2} \\
 &\approx 0.0735934779 \text{ s} \\
 &\approx 0.08 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie niepewność czasu spadku wynosi $u(t) = \sqrt{u_a^2(t) + u_b^2(t)} = \sqrt{0.08^2 + 0.35^2} \text{ s} \approx 0.3590264 \text{ s} \approx 0.36 \text{ s}$.

Spadek był liczony na fragmencie słupa cieczy o wysokości równej 100.00 cm. Ponieważ na linijce podziałka wynosiła 0.1 cm, to niepewność tej wartości wynosi 0.07 cm.

Ponadto przyjęliśmy, że przed wkroczeniem na odcinek pomiarowy kulka osiągnęła prędkość graniczną. Używając metody najmniejszych kwadratów, wyznaczyliśmy prostą regresji. Dane zostały zaprezentowane na wykresie 1. Wartość współczynnika kierunkowego jest wartością graniczną prędkości, tzn. $v_{\text{gr}} \approx 5.053795 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 5.05 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Niepewność tej wartości:



Rysunek 1: Wyliczona prosta regresji liniowej zestawiona wraz z uśrednioną drogą przebytą w czasie przez kulkę w glicerynie.

$$\begin{aligned}
 u(v_{\text{gr}}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial v_{\text{gr}}}{\partial h}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{\partial v_{\text{gr}}}{\partial t}\right)^2 u^2(t)} \\
 &= \sqrt{\frac{u^2(h)}{t^2} + \frac{h^2 u^2(t)}{t^4}} \\
 &\approx 0.305392770313 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\
 &\approx 0.31 \frac{\text{cm}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Do wyliczenia niepewności do równania 1 potrzebne jeszcze będą następujące pochodne cząstkowe:

- $\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{2g(\rho_k - \rho_c)}{9v_{\text{gr}}} \frac{2r(1+2.4\frac{r}{R})(1+3.1\frac{r}{h}) - r^2(\frac{2.4}{R}(1+3.1\frac{r}{h}) + \frac{3.1}{h}(1+2.4\frac{r}{R}))}{((1+2.4\frac{r}{R})(1+3.1\frac{r}{h}))^2};$
- $\frac{\partial \eta}{\partial v_{\text{gr}}} = \frac{-2gr^2}{9v_{\text{gr}}^2}(\rho_k - \rho_c)((1+2.4\frac{r}{R})(1+3.1\frac{r}{h}))^{-1};$
- $\frac{\partial \eta}{\partial R} = \frac{2gr^2}{9v_{\text{gr}}}(\rho_k - \rho_c) \frac{1}{1+3.1\frac{r}{h}} \frac{2.4r}{(R+2.4r)^2};$
- $\frac{\partial \eta}{\partial h} = \frac{2gr^2}{9v_{\text{gr}}}(\rho_k - \rho_c) \frac{1}{1+2.4\frac{r}{R}} \frac{3.1r}{(h+3.1r)^2}.$

Zatem, dla gliceryny:

$$\begin{aligned}
 u(\eta) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial r}\right)^2 u^2(r) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v_{\text{gr}}}\right)^2 u^2(v_{\text{gr}}) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial R}\right)^2 u^2(R) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial h}\right)^2 u^2(h)} \\
 &\approx 0.029171820 \text{ Pa} \cdot \text{s} \\
 &\approx 0.03 \text{ Pa} \cdot \text{s}
 \end{aligned}$$

Korzystając z równania 1 mamy (dla gliceryny): $\eta \approx 0.47377301330 \text{ Pa} \cdot \text{s} \approx 0.47 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Wyznaczenie współczynnika lepkości oleju silnikowego

Wyznaczenie współczynnika lepkości oleju silnikowego przebiegało w sposób analogiczny. Należy do obliczeń użyć innej wartości prędkości granicznej poruszania się kulki w cieczy oraz gęstości cieczy. Wartości pozostałych parametrów są takie same.

Za gęstość oleju silnikowego w warunkach laboratoryjnych przyjęliśmy wartość $\rho_{\text{olej}} = 0.867 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. W tabeli 3 przedstawione zostały sumaryczne czasy wraz z międzyczasami.

| L.p. | #1 | #2 | #3 | #4 | #5 | #6 | #7 | #8 | #9 | #10 | suma (s) |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| 1 | 0.94 | 1.00 | 0.94 | 0.91 | 0.94 | 0.88 | 1.07 | 0.96 | 0.97 | 1.06 | 9.67 |
| 2 | 1.14 | 0.71 | 0.92 | 1.00 | 0.99 | 0.91 | 0.97 | 0.97 | 1.01 | 1.01 | 9.63 |
| 3 | 0.92 | 0.97 | 0.91 | 0.95 | 1.09 | 0.86 | 0.95 | 1.07 | 0.90 | 1.10 | 9.72 |
| 4 | 1.14 | 0.77 | 0.98 | 0.95 | 0.84 | 1.04 | 0.91 | 1.01 | 1.00 | 1.08 | 9.72 |
| 5 | 0.83 | 0.98 | 0.88 | 1.02 | 1.00 | 0.96 | 0.92 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 9.48 |

Tabela 3: Międzyczasy (s) pięciokrotnego pomiaru spadku kulki w oleju silnikowym.

Zatem niepewność standardowa typu B pozostaje taka sama, $u_b(t) = 0.35$.

Przez t_1, \dots, t_5 oznaczmy kolejne sumaryczne czasy spadku. Średni sumaryczny czas spadku wynosi $t = \frac{1}{5}(t_1 + \dots + t_5) = 9.644 \approx 9.64 \text{ s}$. Ponadto, niepewność typu A pomiaru czasu wynosi:

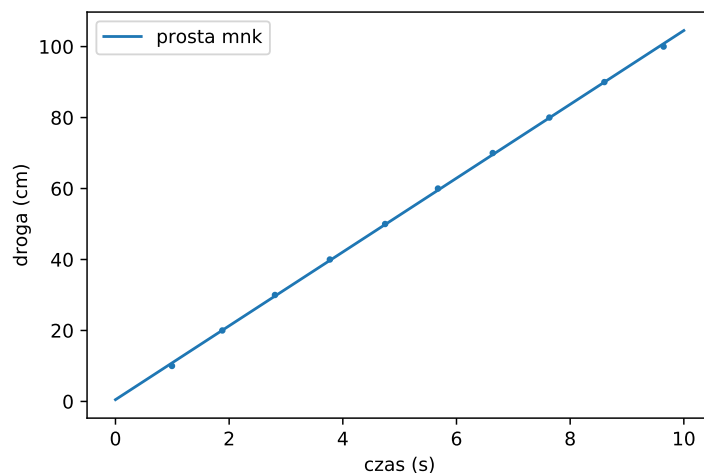
$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= \sqrt{S_t^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} \cdot \sum_{i=1}^5 (t_i - t)^2} \\
 &\approx 0.04433959 \text{ s} \\
 &\approx 0.05 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie niepewność czasu spadku wynosi $u(t) = \sqrt{u_a^2(t) + u_b^2(t)} = \sqrt{0.05^2 + 0.35^2} \text{ s} \approx 0.35355339 \text{ s} \approx 0.36 \text{ s}$.

Ponownie przyjęliśmy, że przed wkroczeniem na odcinek pomiarowy kulka osiągnęła prędkość graniczną. Używając metody najmniejszych kwadratów, wyznaczyliśmy prostą regresji. Dane zostały zaprezentowane na wykresie 2. Wartość współczynnika kierunkowego jest wartością graniczną prędkości, tzn. $v_{\text{gr}} \approx 10.4028361 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 10.40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Niepewność tej wartości:

$$\begin{aligned}
 u(v_{\text{gr}}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial v_{\text{gr}}}{\partial h}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{\partial v_{\text{gr}}}{\partial t}\right)^2 u^2(t)} \\
 &= \sqrt{\frac{u^2(h)}{t^2} + \frac{h^2 u^2(t)}{t^4}} \\
 &\approx 0.387458073 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\
 &\approx 0.39 \frac{\text{cm}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$



Rysunek 2: Wyliczona prosta regresji liniowej zestawiona wraz z uśrednioną drogą przebytą w czasie przez kulkę w oleju.

Licząc analogicznie współczynnik lepkości oraz jego niepewność – analogicznie jak w przypadku gliceryny – otrzymujemy:

$$\eta = 0.24(1) \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

3. Wnioski

Po dokonaniu pomiarów ustalono, że współczynnik lepkości gliceryny wynosi $0.47(3) \text{ Pa} \cdot \text{s}$, a współczynnik lepkości oleju silnikowego, znajdującego się w laboratorium: $0.24(1) \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Aby zminimalizować wpływ błędów na wyniki ćwiczenia, należałoby użyć automatycznego układu pomiarowego czasu, gdzie zatrzymanie stopera wykonywałoby się:

- z minimalnym opóźnieniem (mniejszym od czasu reakcji eksperymentatora)
- w wyniku pokonania przez spadającą kulkę drogi o tej samej długości przy każdym pomiarze.

Warto zaznaczyć, że lepkość cieczy w dużym stopniu zależy od jej temperatury. Aby wnioski z ćwiczenia były bardziej użyteczne, należałoby również wyznaczyć temperaturę cieczy podczas doświadczenia.