

Wydział	Dzień                      poniedziałek 17 <sup>15</sup> – 19 <sup>30</sup>		Nr zespołu
Matematyki i Nauk Informatycznych	Data		18
Nazwisko i Imię: 1. Jasiński Bartosz 2. Sadłocha Adrian 3. Wódkiewicz Andrzej	Ocena z przygotowania	Ocena ze sprawozdania	Ocena Końcowa
Prowadzący  dr inż. Jarosław Judyk		Podpis prowadzącego	

## Sprawozdanie nr 2

### 1. Opis ćwiczenia

Ćwiczenie złożone było z dwóch części:

1. Badanie anharmoniczności drgań wahadła matematycznego
2. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła różnicowego

#### 1.1. Wstęp teoretyczny

**Wahadłem matematycznym płaskim** nazywamy punkt materialny, poruszający się po fragmencie okręgu w jednorodnym polu grawitacyjnym. Praktyczną realizacją tego pojęcia jest obciążnik (najczęściej kulka) o małych rozmiarach, zamocowany na nierozciągliwej nici o bardzo małej, pomijalnej masie (Rysunek 1).

Siłę ciężkości  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  działającą na ciężarek możemy rozłożyć na składową radialną  $F_g \cos \theta$  oraz styczną do toru ruchu wahadła  $F_g \sin \theta$ . Składowa styczna wpływa na zmianę wektora prędkości ciężarka, gdyż działa ona zawsze przeciwnie do jego wychylenia. Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy więc:

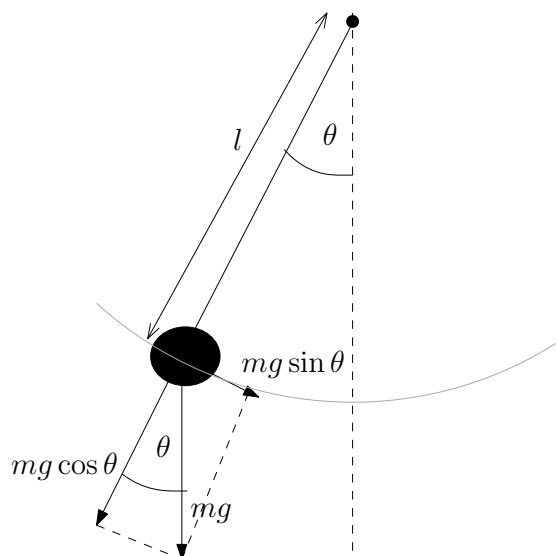
$$ma = -mg \sin \theta$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Ponieważ  $S = l \cdot \theta$ :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Nie istnieje analityczne rozwiązanie tego równania różniczkowego. Dla małych kątów można uprościć powyższy wzór, zakładając, że  $\sin \theta \approx \theta$  – wtedy równanie różniczkowe daje się



Rysunek 1: Wahadło matematyczne

rozwiązać analitycznie. W rezultacie otrzymujemy, że **dla wahadła matematycznego poruszającego się w zakresie małych kątów** (przy założeniu  $\theta(0) = \theta_{max}$ ):

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right),$$

czyli ruch **jest harmoniczny**, a okres tego ruchu wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

W ogólności (bez założenia małych wychyleń), korzystając z rozwinięcia funkcji  $\sin$  w szereg, możemy finalnie otrzymać zależność okresu drgań wahadła  $T$  od kąta maksymalnego wychYLENIA  $\theta_{max}$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} f(\theta_{max}), \quad (1)$$

$$\text{gdzie } f(\theta_{max}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right]^2 \sin^{2n} \left( \frac{\theta_{max}}{2} \right) \quad (2)$$

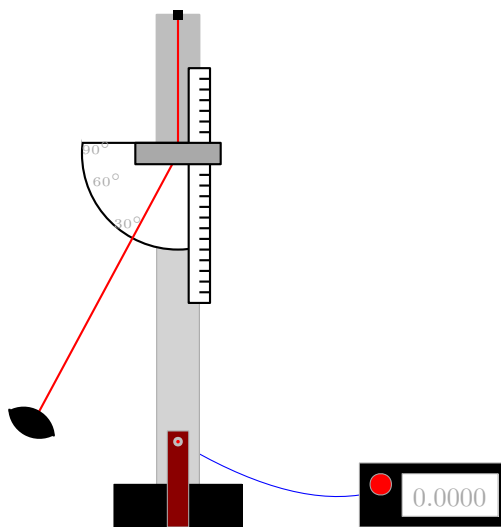
Ruch wahadła matematycznego jest więc w ogólności **anharmoniczny** – okres jest zależny od amplitudy.

**Wahadło różnicowe** to wahadło w którym mamy możliwość zmiany długości nici na której jest zawieszony ciężarek, pozwalające mierzyć w precyzyjny sposób zmianę jej długości, nie znając długości bezwzględnej. Wykonując dwa pomiary  $T_1, T_2$  dla różnych długości wahadła  $l_1, l_2$  otrzymujemy:

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l_1 - l_2) f(\theta_{max})$$

## 1.2. Układ pomiarowy

Do przeprowadzenia obu części ćwiczenia posłużono się układem pomiarowym, przedstawionym na rysunku 2. Do ruchomego elementu połączonego z nieruchomym statywem przymocowana była długa, nierozciągliwa nitka, o znikomą masę, z zamocowanym na jej końcu metalowym obciążnikiem. Statyw pozwalał na modyfikowanie długości wahadła. Do statywu przytwierdzony był również kątomierz oraz linijka, służące do pomiaru kolejno: kąta maksymalnego wychylenia wahadła oraz zmiany długości wahadła różnicowego. Pod statywem znajdował się elektroniczny układ pomiarowy, złożony z fotokomórki oraz modułu sterowania, za pomocą którego mierzony był okres wahadła.



Rysunek 2: Schemat układu pomiarowego

## 2. Pomiary i obliczenia

### 2.1. Badanie zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia

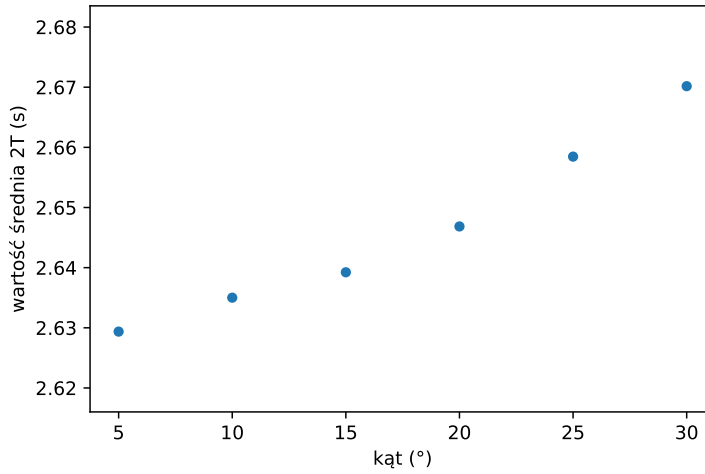
Dokonano po 10 pomiarów dwóch okresów wahadła dla sześciu różnych kątów maksymalnego wychylenia wahadła. Wartości kątów wynosiły kolejno:  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$  i  $30^\circ$ . Wyniki pomiarów znajdują się w tabeli 1. Sporządzono również dwa wykresy: wartości średniej dwóch okresów wahadła względem kąta maksymalnego wychylenia oraz odchylenia standardowego pomiaru dla danego kąta (kolejno rysunki 3, 4).

Długość wahadła nie była znana eksperymentatorom – linijka używana w układzie pomiarowym nie wskazywała bezwzględnej długości nici (służyła do odczytywania zmian długości nici wahadła różnicowego). Dlatego też w tym doświadczeniu nie można było wykorzystać zmierzonej wartości okresu wahadła do wyliczenia przyspieszenia ziemskiego.

Z wykresu na rysunku 3 można wywnioskować, że po pierwsze: **istnieje nie stała** funkcja długości okresu wahadła od kąta maksymalnego wychylenia (wartość średnia nie jest stała dla kolejnych kątów) oraz po drugie: funkcja ta jest **nieliniowa**. Uzyskane wyniki są zgodne z rozważaniami teoretycznymi (patrz wzór (1)).

	$2T(\alpha = 5^\circ)$	$2T(10^\circ)$	$2T(15^\circ)$	$2T(20^\circ)$	$2T(25^\circ)$	$2T(30^\circ)$
1	2.6285	2.6343	2.6368	2.6454	2.6585	2.6701
2	2.6295	2.6346	2.6359	2.6463	2.6589	2.6711
3	2.6295	2.6344	2.6402	2.6467	2.6582	2.6714
4	2.6307	2.6366	2.6394	2.6470	2.6590	2.6709
5	2.6296	2.6358	2.6408	2.6467	2.6578	2.6701
6	2.6286	2.6350	2.6404	2.6463	2.6593	2.6685
7	2.6285	2.6342	2.6396	2.6463	2.6574	2.6698
8	2.6303	2.6350	2.6401	2.6477	2.6588	2.6696
9	2.6287	2.6352	2.6395	2.6476	2.6583	2.6694
10	2.6298	2.6350	2.6396	2.6485	2.6584	2.6708
$\overline{2T}$	2.62937	2.63501	2.63923	2.64685	2.64685	2.67017
$s(2T)$	0.00078	0.00074	0.00160	0.00089	0.00057	0.00089

Tabela 1: Seria pomiarów czasu trwania 2 okresów wahadła w zależności od kąta wychylenia



Rysunek 3: Wartość średnia 2 okresów wahadła w zależności od maksymalnego kąta wychylenia

Nie zaobserwowano natomiast żadnej zależności między odchyleniem standardowym pomiarów a kątem maksymalnego wychylenia (rysunek 4).

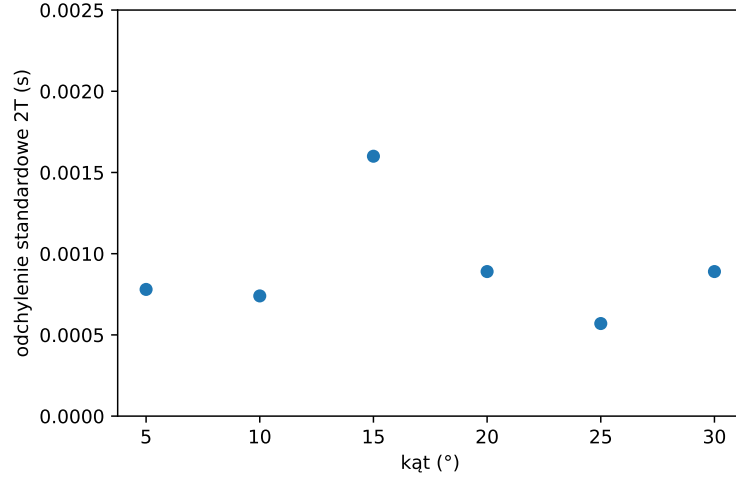
## 2.2. Badanie zależności okresu drgań od zmian długości wahadła

Przekształcając wzór (1) otrzymujemy zależność:

$$l = g \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{f^2(\theta_{max})}$$

Dalej, korzystając z podstawienia

$$g' = \frac{g}{f^2(\theta_{max})}$$



Rysunek 4: Odchylenie standardowe 2 okresów wahadła w zależności od maksymalnego kąta wychylenia

oraz z faktu, że odczytywana z linijki długość wahadła nie jest jego rzeczywistą długością – wartości na linijce zmieniają się **odwrotnie proporcjonalnie** do długości wahadła – otrzymujemy finalnie:

$$l_{odczyt} = -g' \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (3)$$

W ten sposób po dokonaniu pomiarów okresu przy zmiennej długości wahadła można skorzystać z regresji liniowej i wyznaczyć nachylenie prostej, a w rezultacie wartość  $g$ .

### Pomiary okresu dla małego kąta

Po przeprowadzeniu pomiarów dla kąta  $\theta_{max} = 10^\circ$  dokonano wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego przy użyciu metody najmniejszych kwadratów. Wyniki pomiarów wraz z obliczeniami cząstkowymi oraz oznaczenia  $X, Y$  znajdują się w tabeli 2. W celu wyznaczenia współczynników regresji liniowej, jak i ich niepewności pomiarowych skorzystano ze wzorów:

$$a = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$b = \frac{1}{n} (\sum Y - a \sum X)$$

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\sum Y^2 - a \sum XY - b \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}}$$

$$u(b) = u(a) \cdot \sqrt{\frac{\sum X^2}{n}}$$

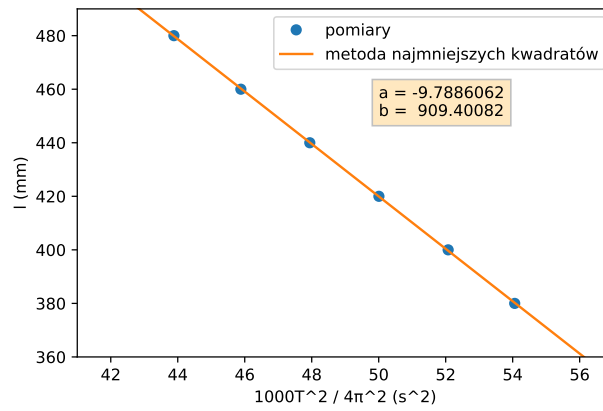
Uzyskane wartości wyniosły:  $a = -9.789(31)$  ,  $b = 909.4(1.5)$ , zatem przekształcając  $a$  zgodnie ze wzorem (3):

$$g' = 9.789(31) \frac{m}{s^2}$$

Ponieważ kąt maksymalnego wychylenia jest dostatecznie mały oraz z powodów dydaktycznych ćwiczenia, w tym kroku doświadczenia celowo pominięto korektę na anharmoniczność.

	$l$ (mm) = $Y$	$2T$ (s)	$1000T^2/4\pi^2 = X(s^2)$	$X^2$	$Y^2$	$XY$
1	480	2.6325	43.885094	1925.9015	230400	21064.845
2	460	2.6918	45.884484	2105.3859	211600	21106.863
3	440	2.7515	47.942349	2298.4688	193600	21094.634
4	420	2.8101	50.006196	2500.6196	176400	21002.602
5	400	2.8676	52.073578	2711.6575	160000	20829.431
6	380	2.9218	54.060647	2922.5536	144400	20543.046
$\Sigma$	2580	16.6753	293.852348	14464.5869	1116400	125641.421

Tabela 2: Pomiary 2 okresów wahadła dla maksymalnego kąta wychylenia  $\theta_{max} = 10^\circ$  w zależności od  $l$  wraz z obliczeniami do wyznaczenia regresji liniowej



Rysunek 5: Regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów dla  $\theta_{max} = 10^\circ$

### Pomiary okresu dla dużego kąta

Następnie dokonano pomiarów dla kąta  $\theta_{max} = 25^\circ$ . Dokonano analogicznych obliczeń (patrz Tabela 3). Uzyskane wartości parametrów prostej to:  $a = -9.658(23)$ ,  $b = 911.6(1.1)$ , zatem

$$g' = 9.658(23) \frac{m}{s^2}$$

Korzystając z korekty na anharmoniczność drgań dla pierwszych 3 wyrazów szeregu ze wzoru (2)

$$K(\theta_{max}) = \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_{max}^2 + \frac{11}{3072} \theta_{max}^4 + \dots \right)$$

uzyskujemy:

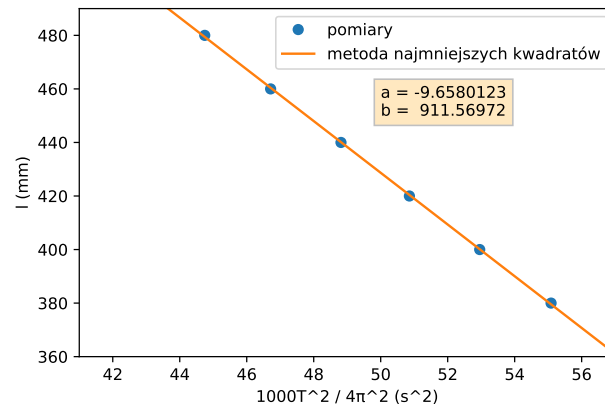
$$g = g' \cdot 1.0120289 \approx 9.773(23) \frac{m}{s^2}$$

### 2.3. Wnioski

Po wykonaniu obu ćwiczeń potwierdzono anharmoniczność ruchu wahadła matematycznego oraz uzyskano 2 wartości przyspieszenia ziemskiego:  $9.789(31) \frac{m}{s^2}$  oraz  $9.773(23) \frac{m}{s^2}$ .

	$l$ (mm) = $Y$	$2T$ (s)	$1000T^2/4\pi^2 = X(s^2)$	$X^2$	$Y^2$	$XY$
1	480	2.6582	44.74614	2002.2170	230400	21478.147
2	460	2.7160	46.71322	2182.1249	211600	21488.081
3	440	2.7764	48.81399	2382.8056	193600	21478.136
4	420	2.8339	50.85683	2586.4132	176400	21359.869
5	400	2.8918	52.95620	2804.3591	160000	21182.480
6	380	2.9494	55.08681	3034.5566	144400	20932.988
$\Sigma$	2580	16.8257	299.17319	14992.4764	1116400	127919.701

Tabela 3: Pomiary 2 okresów wahadła dla maksymalnego kąta wychylenia  $\theta_{max} = 25^\circ$  w zależności od  $l$  wraz z obliczeniami do wyznaczenia regresji liniowej



Rysunek 6: Regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów dla  $\theta_{max} = 25^\circ$

Znając wartość przyspieszenia ziemskiego w Warszawie ( $g \approx 9,8123 \frac{m}{s^2}$ ) można zauważyć, że w drugim ćwiczeniu pomimo zastosowania korekty na anharmoniczność drgań przy serii pomiarów dla dużego kąta ( $\theta_{max} = 25^\circ$ ), uzyskana wartość przyspieszenia ziemskiego była mniej dokładna niż wartość uzyskana bez zastosowania korekty przy serii pomiarów dla kąta mniejszego ( $\theta_{max} = 10^\circ$ ). Oznacza to, że niedoskonałości sprzętu pomiarowego i błędy eksperymentatorów znacznie wpłynęły na wyniki pomiarów. To przypuszczenie dodatkowo potwierdza kształt wykresu odchylenia standardowego z pierwszego ćwiczenia (rysunek 4).

Aby zmniejszyć niedoskonałości pomiarów należałoby zadbać o dokładniejszy sposób odczytu kąta maksymalnego wychylenia wahadła (wyeliminować zjawisko paralaksy) oraz dodać do układu pomiarowego możliwość mechanicznego zwalniania obciążnika wahadła, eliminując tym samym przypadki zarówno wprawienia wahadła w ruch w 2 płaszczyznach jak i nadawania mu prędkości początkowej.