

Wydział	Dzień poniedziałek 17 ¹⁵ – 19 ³⁰		Nr zespołu
Matematyki i Nauk Informatycznych	Data		18
Nazwisko i Imię: 1. Jasiński Bartosz 2. Sadłocha Adrian 3. Wódkiewicz Andrzej	Ocena z przygotowania	Ocena ze sprawozdania	Ocena Końcowa
Prowadzący		Podpis prowadzącego	

Sprawozdanie nr 5

1. Opis ćwiczenia

Ćwiczenie złożone było z następujących części:

1. Badanie prawa Malusa
2. Badanie prawa Snella
3. Wyznaczenie kąta granicznego
4. Wyznaczenie kąta Brewstera

1.1. Wstęp teoretyczny

Polaryzacja fali to właściwość fali poprzecznej (m.in. elektromagnetycznej), polegająca na uporządkowaniu relacji między kierunkiem oscylacji zaburzenia a kierunkiem rozchodzenia się fali. [1] Wyróżniamy m.in. **polaryzację liniową**, przy której oscylacje fali zachodzą tylko w jednej płaszczyźnie, zawierającej kierunek rozchodzenia się fali

Prawo Malusa głosi, że gdy idealny polaryzator jest umiejscowiony na drodze spolaryzowanej wiązki światła, natężenie światła I przechodzące przez ten polaryzator jest równe:

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

gdzie I_0 to natężenie początkowe, a θ to kąt między kierunkiem polaryzacji światła a osią polaryzatora.

Prawo Snella głosi, że stosunek sinusów kątów padania i załamania jest wprost proporcjonalny do stosunku prędkości fazowych w tych ośrodkach oraz odwrotnie proporcjonalny do stosunku współczynników załamania tych ośrodków:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Kąt graniczny jest to maksymalny kąt, pod jakim światło może padać na granicę danych ośrodków, aby wciąż ulec załamaniu. Występuje on tylko w przypadku padania światła **z ośrodka o większym współczynniku załamania do ośrodka o mniejszym współczynniku**. Podstawiając do wzoru Snella maksymalny kąt załamania o mierze 90° otrzymujemy:

$$\frac{\sin \alpha_{gr}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_{gr} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Kąt Brewstera jest to kąt padania, przy którym wiązka światła odbitego jest całkowicie spolaryzowana liniowo. Zjawisko to zachodzi w przypadku, gdy promień odbity i załamany tworzą kąt prosty. Oscylacje wektora elektrycznego odbywają się zawsze prostopadle do kierunku ruchu fali – fala nie może poruszać się w kierunku własnych drgań. Kierunek ruchu światła odbitego jest prostopadły do kierunku ruchu światła załamane. Dlatego światło odbite nie może zawierać światła o drganiach w płaszczyźnie odbicia, ponieważ są one równoległe do kierunku ruchu światła załamane.

Mamy więc:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Z prawa Snella:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Ponieważ kąt padania = kąt odbicia:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin(90^\circ - \alpha_B)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin \alpha_B}{\cos(\alpha_B)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

1.2. Układ pomiarowy

Układ pomiarowy składał się z 2 polaryzatorów (nazywanych dalej *polaryzatorem* i *analizatorem*), lasera, fotodetektora z amperomierzem, stolika goniometrycznego oraz płytki z pleksiglasu o przekroju półkola w płaszczyźnie poziomej.

2. Pomiary i obliczenia

2.1. Badanie prawa Malusa

Przy pomocy obu polaryzatorów oraz fotodetektora została zmierzona wartość natężenia światła spolaryzowanego. Wpierw odnaleziony został taki kąt obrotu analizatora, przy którym mierzona wartość natężenia światła była maksymalna ($\alpha_0 = 176^\circ$). Następnie, siedmiokrotnie dokonano obrotu analizatora o 15° i pomiaru wartości natężenia. Wyniki zostały przedstawione w tabelicy 1. Na rysunku 1 przedstawione zostały 2 próby jak najlepszego dopasowania wykresu funkcji \cos^2 uwzględniając wszystkie niepewności standardowe, przy założeniach:

- kąt α_0 jest kątem, dla którego natężenie jest maksymalne – kolor czerwony, linia ciągła
- kąty obrotu analizatora zostały odczytane z przesunięciem 10° , pomiar $k = 1$ jest błędem grubym, a kąt α_0 **nie** jest kątem maksymalnego natężenia – kolor zielony, linia przerywana

Biorąc pod uwagę trudności podczas przeprowadzania ćwiczenia, pomimo większej ilości założeń prawdziwy zdaje się być przypadek drugi (linia przerywana na wykresie).

k	α_k ($^\circ$)	I (μA)	u_I (μA)
0	176	260.0	3.662877
1	161	240.0	3.662877
2	146	225.0	3.662877
3	131	160.0	3.662877
4	116	94.0	1.414214
5	101	32.0	1.414214
6	86	2.2	0.036629
7	71	13.0	0.366288

Tabela 1: Pomiary natężenia światła spolaryzowanego

Wykres funkcji $266 \cdot \cos^2(\alpha + 9)$ (gdzie argument funkcji cosinus: $(\alpha + 9)$ jest podany w stopniach) zdaje się dobrze odzwierciedlać uzyskane wyniki pomiarów, potwierdzając tym samym, że natężenie światła spolaryzowanego liniowo jest proporcjonalne do kwadratu cosinusa kąta między płaszczyzną polaryzacji światła padającego a płaszczyzną polaryzacji światła po przejściu przez polaryzator.

2.2. Badanie prawa Snella

Następnie, wykonano pomiary prowadzące do wyznaczenia współczynnika załamania światła dla płytki z pleksiglasu. W tym celu zmierzono kąty padania światła, jak i kąty odbicia. Wyniki zostały przedstawione w tabeli 2. Standardowa niepewność pomiarowa pomiaru kąta padania jak i kąta odbicia, została oszacowana na:

$$u(x) = \sqrt{\left(\frac{0.0175}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0009}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0.0114 \text{ rad}$$

Korzystając z metody propagacji błędów dla pomiarów pośrednich, jakimi są sinusy mierzonych kątów, otrzymujemy, że:

$$u(\sin(x)) = \sqrt{\left(\frac{\partial \sin(x)}{\partial x} u(x)\right)^2} = |\cos(x) u(x)|$$

Pomiary wraz z niepewnościami na iksach i igrekach zostały naniesione na wykresie (rysunek 2). Następnie, korzystając z metody najmniejszych kwadratów, zostało odnalezione najlepsze dopasowanie funkcji liniowej, przedstawione na wykresie kolorem czerwonym. W tym celu skorzystano z biblioteki `numpy` w języku Python, która pozwoliła obliczyć automatycznie a i b wraz

z niepewnościami wg poniższych wzorów:

$$a = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X\Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$b = \frac{1}{n}(\Sigma Y - a\Sigma X)$$

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\Sigma Y^2 - a\Sigma XY - b\Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}}$$

$$u(b) = u(a) \cdot \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}}$$

gdzie $X = \sin \alpha$, $Y = \sin \beta$, $n = 7$.

Współczynnik nachylenia prostej wyniósł $a = 0.66688$, a wyraz wolny: $b = 0.00415$. Niepewności uzyskanych wartości to odpowiednio: $u_a = 0.00591$, $u_b = 0.00411$

Zatem, korzystając z prawa Snella:

$$\frac{n_{\text{plytka}}}{n_{\text{powietrze}}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{n_{\text{plytka}}}{n_{\text{powietrze}}} = \frac{\sin \alpha}{a \cdot \sin \alpha + b}$$

Zakładając, że $n_{\text{powietrze}} \approx 1$, $b \approx 0$ otrzymujemy:

$$n_{\text{plytka}} = \frac{1}{a}$$

Stąd: $n_{\text{plytka}} = \frac{1}{0.66688} \approx 1.49952$

Niepewność standardową otrzymanego wyniku otrzymamy ponownie ze wzoru na propagację błędów:

$$u(n_{\text{plytka}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial n_{\text{plytka}}(a)}{\partial a} u_a\right)^2} = \left|\frac{1}{a^2} u_a\right| = \frac{1}{0.66688^2} \cdot 0.00591 \approx 0.01329$$

Zatem uwzględniając niepewność standardową, współczynnik załamania światła płytki wykorzystanej w ćwiczeniu (obliczony przy użyciu metody wykorzystującej prawo Snella) wynosi

$$n_{\text{plytka}} = 1.500(13)$$

2.3. Wyznaczenie kąta granicznego

Kolejnym ćwiczeniem było wyznaczenie kąta granicznego zadanej przezroczystej płytki. Obserwując załamaną wiązkę światła, przechodzącą przez granicę "szkło/powietrze", szukany był kąt α_{gr} , powyżej którego wiązka światła zanikała. Wartość tego kąta została wyznaczona eksperymentalnie na:

$$\alpha_{gr} = 43^\circ \approx 0.7504916 \text{ rad}$$

Standardowa niepewność pomiaru została oszacowana na

$$u(\alpha_{gr}) = \sqrt{\left(\frac{0.0349}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0175}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0.02254 \text{ rad}$$

l.p.	α (°)	β (°)	α (rad)	β (rad)	$\sin(\alpha)$	$\sin(\beta)$	$u(\sin(\alpha))$	$u(\sin(\beta))$
0	5	3.5	0.087266	0.061087	0.087156	0.061049	0.011317	0.011339
1	15	10.5	0.261799	0.183260	0.258819	0.182236	0.010973	0.011170
2	30	19.5	0.523599	0.340339	0.500000	0.333807	0.009838	0.010708
3	45	28.0	0.785398	0.488692	0.707107	0.469472	0.008033	0.010030
4	60	36.0	1.047198	0.628319	0.866025	0.587785	0.005680	0.009190
5	70	39.0	1.221730	0.680678	0.939693	0.629320	0.003885	0.008828
6	75	40.5	1.308997	0.706858	0.965926	0.649448	0.002940	0.008638

Tabela 2: Pomiary zależności kąta odbicia (β) od kąta padania (α)

Ponieważ z definicji kąta granicznego mamy:

$$\frac{\sin \alpha_{gr}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_{powietrze}}{n_{plytka}},$$

a zakładamy, że

$$n_{powietrze} = 1,$$

stąd:

$$n_{plytka} = \frac{1}{\sin \alpha_{gr}} \approx 1.4662792$$

Propagacja niepewności:

$$u(n_{plytka}) = \sqrt{\left(\frac{\partial n_{plytka}}{\partial \alpha_{gr}} u(\alpha_{gr})\right)^2} = \left| \frac{2 \cos(\alpha_{gr})}{\cos(2\alpha_{gr}) - 1} u(\alpha_{gr}) \right| \approx 0.03544$$

Zatem współczynnik załamania światła obliczony za pomocą wyznaczenia kąta granicznego wynosi:

$$n_{plytka} = 1.466(35)$$

2.4. Wyznaczenie kąta Brewstera

Ostatnim ćwiczeniem było wyznaczenie kąta Brewstera. W tym celu szukano takiego kąta padania światła, dla którego wiązka odbita będzie tworzyła wraz z wiązką załamaną kąt 90° . Kąt ten został wyznaczony eksperymentalnie na 56° stopni, a niepewność standardowa została oszacowana na

$$u(\alpha_B) = \sqrt{\left(\frac{0.0175}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0175}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.009}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0.015 \text{ rad}$$

Korzystając z zależności:

$$\tan \alpha_B = \frac{n_{plytka}}{n_{powietrze}}$$

i ponownie stosując podstawienie $n_{powietrze} = 1$, otrzymujemy:

$$n_{plytka} = \tan 56^\circ \approx 1.483$$

Propagacja niepewności:

$$u(n_{\text{plytka}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial n_{\text{plytka}}}{\partial \alpha_B} u(\alpha_B)\right)^2} = \left|\frac{1}{\cos^2 \alpha_B} u(\alpha_B)\right| \approx 0.048$$

Zatem współczynnik załamania światła obliczony za pomocą wyznaczenia kąta Brewstera wynosi:

$$n_{\text{plytka}} = 1.483(48)$$

2.5. Wnioski

Pierwsza część ćwiczenia pozwoliła nam pokazać, że zgodnie z prawem Malusa, natężenie światła spolaryzowanego liniowo, przechodzącego przez analizator jest wprost proporcjonalne do kwadratu cosinusa kąta między płaszczyzną polaryzacji światła wpadającego a płaszczyzną polaryzacji światła wychodzącego z analizatora.

Kolejne trzy części ćwiczenia miały na celu wyznaczenie współczynnika liniowego płytki z pleksiglasu na 3 różne sposoby. Wyniki zostały przedstawione w tabeli 3.

Metoda	n_{plytka}	$u(n_{\text{plytka}})$
Prawo Snella	1.500	0.013
Kąt graniczny	1.466	0.035
Kąt Brewstera	1.483	0.048

Tabela 3: Uzyskane wartości współczynnika załamania światła dla płytki z pleksiglasu

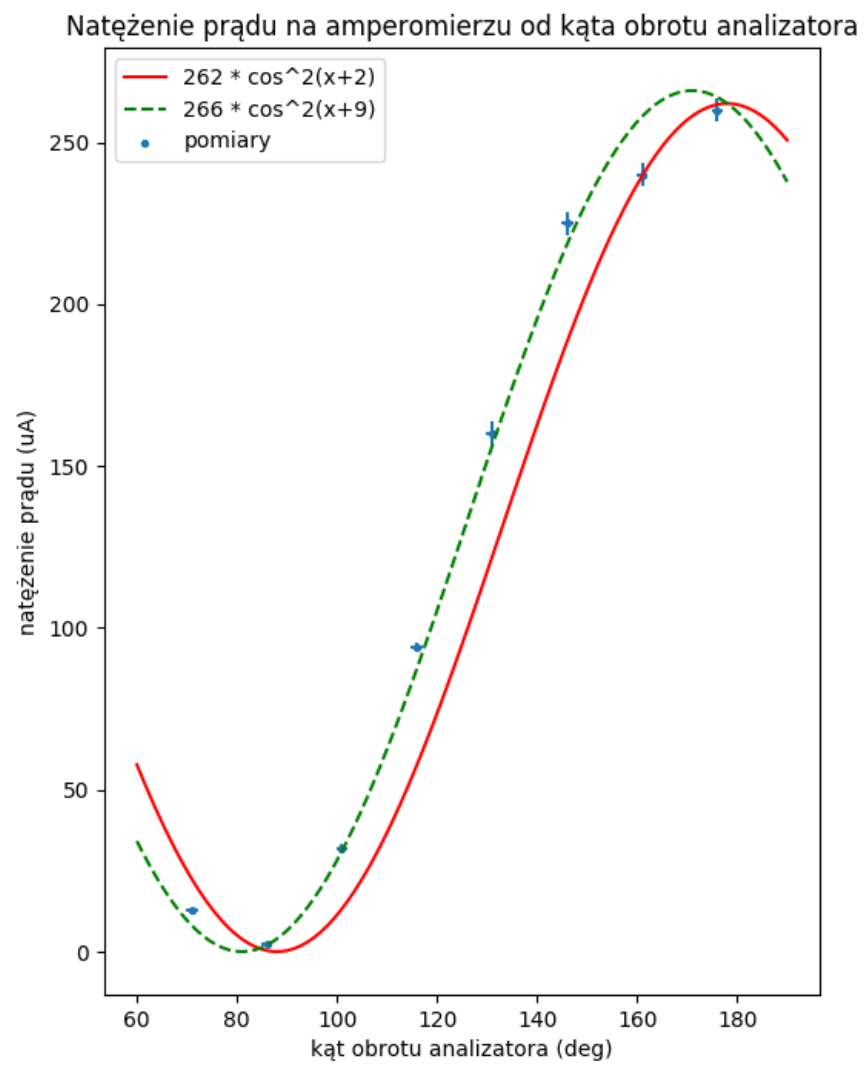
Korzystając z wartości współczynnika załamania światła dla pleksiglasu, wyznaczonej przez Cargille Labs [2], tj. $n = 1.4917$, możemy porównać uzyskane wyniki. Wykres uzyskanych wyników wraz z ich niepewnością rozszerzoną przy $k = 1$ przedstawiony został na rysunku 3.

Można zauważyć, że wszystkie metody pozwoliły na otrzymanie poprawnych wyników (w granicach ich niepewności). Metodą z najmniejszą niepewnością pomiarową okazała się metoda wykorzystująca prawo Snella. Przyczyną tego było wykonanie **kilku** pomiarów (w odróżnieniu do pozostałych metod) i wykorzystanie metody najmniejszych kwadratów.

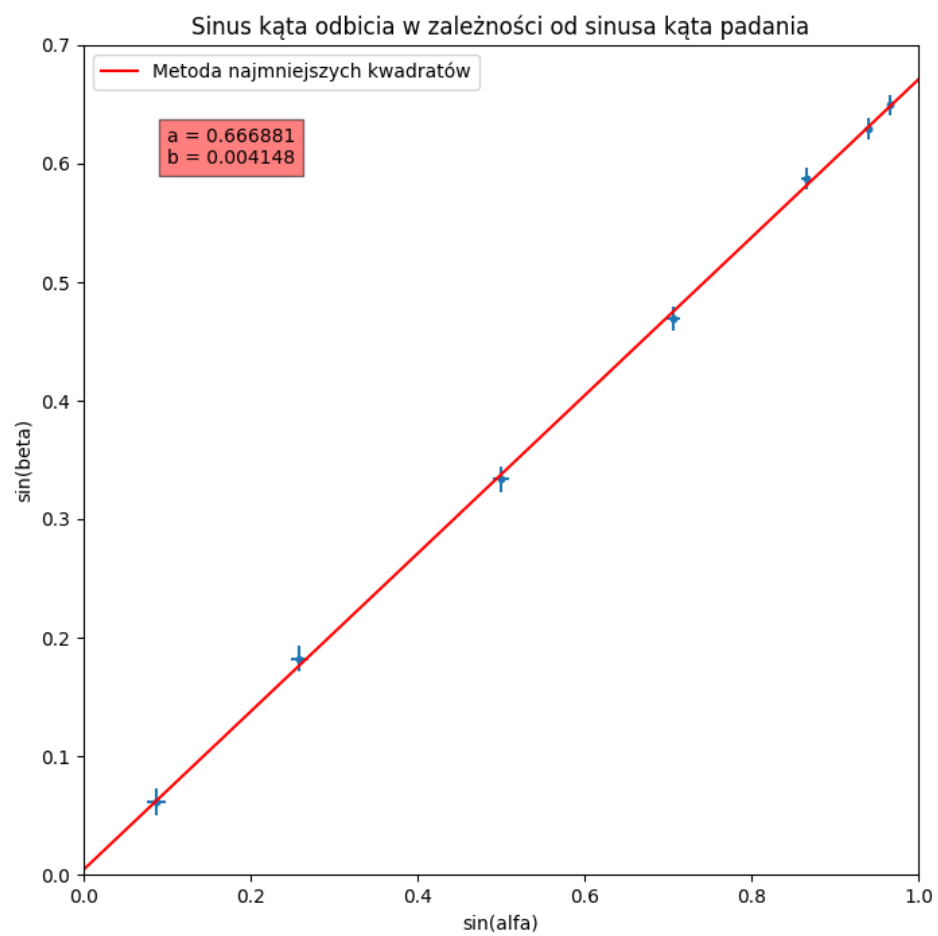
Aby jeszcze bardziej zminimalizować niepewność, należałoby wykonać więcej pomiarów dla metody wykorzystującej prawo Snella oraz dla wszystkich trzech metod postarać się o lepszą kalibrację stolika goniometrycznego, jak i zaproponować lepszy sposób na odczyt wartości kątów pod jakimi padają wiązki światła.

Literatura

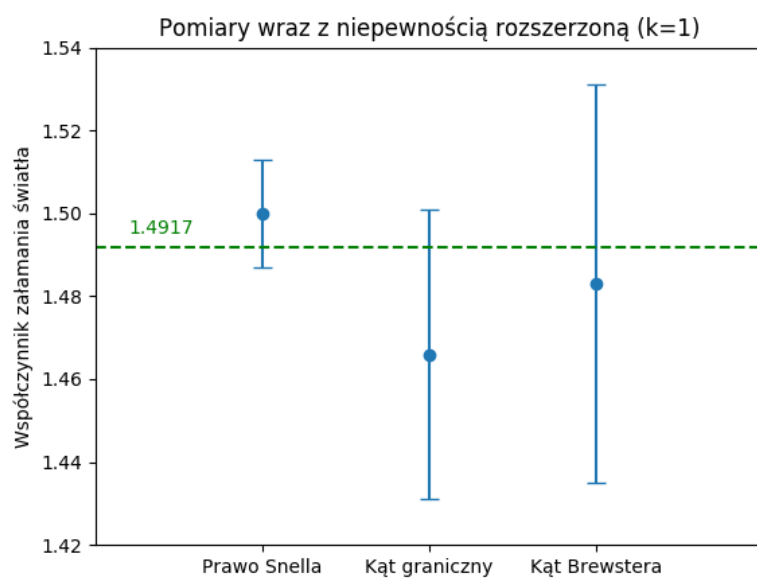
- [1] Polaryzacja fali – artykuł na Wikipedii
https://pl.wikipedia.org/wiki/Polaryzacja_fali
- [2] Strona internetowa firmy Cargille-Sacher Laboratories Inc,
<http://www.cargille.com/specimmerliq.shtml>



Rysunek 1: Prawo Malusa



Rysunek 2: Prawo Snella



Rysunek 3: Porównanie metod wyznaczania wsp. załamania światła