

Wydział	Dzień                      poniedziałek 17 <sup>15</sup> – 19 <sup>30</sup>		Nr zespołu
Matematyki i Nauk Informatycznych	Data		18
Nazwisko i Imię: 1. Jasiński Bartosz 2. Sadłocha Adrian 3. Wódkiewicz Andrzej	Ocena z przygotowania	Ocena ze sprawozdania	Ocena Końcowa
Prowadzący		Podpis prowadzącego	

## Sprawozdanie nr 5

### 1. Opis ćwiczenia

Ćwiczenie złożone było z następujących części:

1. Badanie prawa Malusa
2. Badanie prawa Snella
3. Wyznaczenie kąta granicznego
4. Wyznaczenie kąta Brewstera

#### 1.1. Wstęp teoretyczny

**Polaryzacja fali** to właściwość fali poprzecznej (m.in. elektromagnetycznej), polegająca na uporządkowaniu relacji między kierunkiem oscylacji zaburzenia a kierunkiem rozchodzenia się fali. Wyróżniamy m.in. **polaryzację liniową**, przy której oscylacje fali zachodzą tylko w jednej płaszczyźnie, zawierającej kierunek rozchodzenia się fali

**Prawo Malusa** głosi, że gdy idealny polaryzator jest umiejscowiony na drodze spolaryzowanej wiązki światła, natężenie światła  $I$  przechodzące przez ten polaryzator jest równe:

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

gdzie  $I_0$  to natężenie początkowe, a  $\theta$  to kąt między kierunkiem polaryzacji światła a osią polaryzatora.

**Prawo Snella** głosi, że stosunek sinusów kątów padania i załamania jest wprost proporcjonalny do stosunku prędkości fazowych w tych ośrodkach oraz odwrotnie proporcjonalny do stosunku współczynników załamania tych ośrodków:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

**Kąt graniczny** jest to maksymalny kąt, pod jakim światło może padać na granicę danych ośrodków, aby wciąż ulec załamaniu. Występuje on tylko w przypadku padania światła **z ośrodka o większym współczynniku załamania do ośrodka o mniejszym współczynniku**. Podstawiając do wzoru Snella maksymalny kąt załamania o mierze  $90^\circ$  otrzymujemy:

$$\frac{\sin \alpha_{gr}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_{gr} = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

**Kąt Brewstera** jest to kąt padania, przy którym wiązka światła odbitego jest całkowicie spolaryzowana liniowo. Zjawisko to zachodzi w przypadku, gdy promień odbity i załamany tworzą kąt prosty. Oscylacje wektora elektrycznego odbywają się zawsze prostopadle do kierunku ruchu fali – fala nie może poruszać się w kierunku własnych drgań. Kierunek ruchu światła odbitego jest prostopadły do kierunku ruchu światła załamane. Dlatego światło odbite nie może zawierać światła o drganiach w płaszczyźnie odbicia, ponieważ są one równoległe do kierunku ruchu światła załamane.

Mamy więc:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Z prawa Snella:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Ponieważ kąt padania = kąt odbicia:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin(90^\circ - \alpha_B)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin \alpha_B}{\cos(\alpha_B)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_B = \operatorname{arctg} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

## 1.2. Układ pomiarowy

Układ pomiarowy składał się z 2 polaryzatorów (nazywanych dalej *polaryzatorem* i *analizatorem*), lasera, fotodetektora z amperomierzem, stolika goniometrycznego oraz płytki z pleksiglasu o przekroju półkola w płaszczyźnie poziomej.

## 2. Pomiary i obliczenia

### 2.1. Badanie prawa Malusa

Przy pomocy obu polaryzatorów oraz fotodetektora została zmierzona wartość natężenia światła spolaryzowanego. Wpierw odnaleziony został taki kąt obrotu analizatora, przy którym mierzona wartość natężenia światła była maksymalna ( $\alpha_0 = 176^\circ$ ). Następnie, siedmiokrotnie dokonano obrotu analizatora o  $15^\circ$  i pomiaru wartości natężenia. Wyniki zostały przedstawione w tabeli 1. Na rysunku 1 przedstawione zostały 2 próby jak najlepszego dopasowania wykresu funkcji  $\cos^2$  uwzględniając wszystkie niepewności standardowe, przy założeniach:

- kąt  $\alpha_0$  jest kątem, dla którego natężenie jest maksymalne – kolor czerwony, linia ciągła
- kąty obrotu analizatora zostały odczytane z przesunięciem  $10^\circ$ , pomiar  $k = 1$  jest błędem grubym, a kąt  $\alpha_0$  **nie** jest kątem maksymalnego natężenia – kolor zielony, linia przerywana

Biorąc pod uwagę trudności podczas przeprowadzania ćwiczenia, pomimo większej ilości założeń prawdziwy zdaje się być przypadek drugi (linia przerywana na wykresie).

$k$	$\alpha_k$ ( $^\circ$ )	$I$ ( $\mu\text{A}$ )	$u_I$ ( $\mu\text{A}$ )
0	176	260.0	3.662877
1	161	240.0	3.662877
2	146	225.0	3.662877
3	131	160.0	3.662877
4	116	94.0	1.414214
5	101	32.0	1.414214
6	86	2.2	0.036629
7	71	13.0	0.366288

Tabela 1: Pomiary natężenia światła spolaryzowanego

Wykres funkcji  $266 \cdot \cos^2(\alpha + 9)$  (gdzie argument funkcji cosinus:  $(\alpha + 9)$  jest podany w stopniach) zdaje się dobrze odzwierciedlać uzyskane wyniki pomiarów, potwierdzając tym samym, że natężenie światła spolaryzowanego liniowo jest proporcjonalne do kwadratu cosinusa kąta między płaszczyzną polaryzacji światła padającego a płaszczyzną polaryzacji światła po przejściu przez polaryzator.

## 2.2. Badanie prawa Snella

Następnie, wykonano pomiary prowadzące do wyznaczenia współczynnika załamania światła dla płytki z pleksiglasu. W tym celu zmierzono kąty padania światła, jak i kąty odbicia. Wyniki zostały przedstawione w tabeli 2. Standardowa niepewność pomiarowa, została oszacowana na

$$u_x = \frac{1.5 \cdot 2\pi}{360 \cdot \sqrt{3}} = 0.015115$$

Korzystając z metody propagacji błędów dla pomiarów pośrednich, jakimi są sinusy mierzonych kątów, otrzymujemy, że:

$$u(\sin(x)) = \sqrt{\left(\frac{\partial \sin(x)}{\partial x} u(x)\right)^2} = |\cos(x) u(x)|$$

Pomiary wraz z niepewnościami na x-ach i y-ach zostały naniesione na wykresie (rysunek 2). Następnie, korzystając z metody najmniejszych kwadratów, zostało odnalezione najlepsze dopasowanie funkcji liniowej, przedstawione na wykresie kolorem czerwonym. Skorzystano z po-

niższych wzorów:

$$a = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X\Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$b = \frac{1}{n}(\Sigma Y - a\Sigma X)$$

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\Sigma Y^2 - a\Sigma XY - b\Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}}$$

$$u(b) = u(a) \cdot \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}}$$

gdzie  $X = \sin \alpha$ ,  $Y = \sin \beta$ ,  $n = 7$ .

Współczynnik nachylenia prostej wyniósł  $a = 0.66688$ , a wyraz wolny:  $b = 0.00415$ . Niepewności uzyskanych wartości to odpowiednio:  $u_a = 0.00591$ ,  $u_b = 0.00411$

Zatem, korzystając z prawa Snella:

$$\frac{n_{\text{płytki}}}{n_{\text{powietrze}}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{n_{\text{płytki}}}{n_{\text{powietrze}}} = \frac{\sin \alpha}{a \cdot \sin \alpha + b}$$

Zakładając, że  $n_{\text{powietrze}} \approx 1$ ,  $b \approx 0$  otrzymujemy:

$$n_{\text{płytki}} = \frac{1}{a}$$

Stąd:  $n_{\text{płytki}} = \frac{1}{0.66688} \approx 1.49952$

Niepewność standardową otrzymanego wyniku otrzymamy ponownie ze wzoru na propagację błędów:

$$u(n_{\text{płytki}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial n_{\text{płytki}}(a)}{\partial a} u_a\right)^2} = \left|\frac{1}{a^2} u_a\right| = \frac{1}{0.66688^2} \cdot 0.00591 \approx 0.01329$$

Zatem uwzględniając niepewność standardową, współczynnik załamania światła płytki wykorzystanej w ćwiczeniu (obliczony przy użyciu metody wykorzystującej prawo Snella) wynosi

$$n_{\text{płytki}} = 1.500(13)$$

### 2.3. Wyznaczenie kąta granicznego

Kolejnym ćwiczeniem było wyznaczenie kąta granicznego zadanej przezroczystej płytki. Obserwując załamaną wiązkę światła, przechodzącą przez granicę "szkło/powietrze", szukany był kąt  $\alpha_{gr}$ , powyżej którego wiązka światła zanikała. Wartość tego kąta została wyznaczona eksperymentalnie na:

$$\alpha_{gr} = 43^\circ \approx 0.7504916 \text{ rad}$$

Standardowa niepewność pomiaru została oszacowana na

$$u(\alpha_{gr}) = \sqrt{\left(\frac{0.0349}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0175}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0.02254 \text{ rad}$$

l.p.	$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad)	$\sin(\alpha)$	$\sin(\beta)$	$u_{\sin(\alpha)}$	$u_{\sin(\beta)}$
0	5	3.5	0.087266	0.061087	0.087156	0.061049	0.015057	0.015087
1	15	10.5	0.261799	0.183260	0.258819	0.182236	0.014600	0.014862
2	30	19.5	0.523599	0.340339	0.500000	0.333807	0.013090	0.014248
3	45	28.0	0.785398	0.488692	0.707107	0.469472	0.010688	0.013346
4	60	36.0	1.047198	0.628319	0.866025	0.587785	0.007557	0.012228
5	70	39.0	1.221730	0.680678	0.939693	0.629320	0.005170	0.011747
6	75	40.5	1.308997	0.706858	0.965926	0.649448	0.003912	0.011494

Tabela 2: Pomiary zależności kąta odbicia ( $\beta$ ) od kąta padania ( $\alpha$ )

Ponieważ z definicji kąta granicznego mamy:

$$\frac{\sin \alpha_{gr}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_{powietrze}}{n_{plytka}},$$

a zakładamy, że

$$n_{powietrze} = 1,$$

stąd:

$$n_{plytka} = \frac{1}{\sin \alpha_{gr}} \approx 1.4662792$$

Propagacja niepewności:

$$u(n_{plytka}) = \sqrt{\left(\frac{\partial n_{plytka}}{\partial \alpha_{gr}} u(\alpha_{gr})\right)^2} = \left| \frac{2 \cos(\alpha_{gr})}{\cos(2\alpha_{gr}) - 1} u(\alpha_{gr}) \right| \approx 0.03544$$

Zatem współczynnik załamania światła obliczony za pomocą wyznaczenia kąta granicznego wynosi:

$$n_{plytka} = 1.466(35)$$

## 2.4. Wyznaczenie kąta Brewstera

Ostatnim ćwiczeniem było wyznaczenie kąta Brewstera. W tym celu szukano takiego kąta padania światła, dla którego wiązka odbita będzie tworzyła wraz z wiązką załamaną kąt  $90^\circ$ . Kąt ten został wyznaczony eksperymentalnie na  $56^\circ$  stopni, a niepewność standardowa została oszacowana na

$$u(\alpha_B) = \sqrt{\left(\frac{0.0175}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0175}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.009}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0.015 \text{ rad}$$

Korzystając z zależności:

$$\tan \alpha_B = \frac{n_{plytka}}{n_{powietrze}}$$

i ponownie stosując podstawienie  $n_{powietrze} = 1$ , otrzymujemy:

$$n_{plytka} = \tan 56^\circ \approx 1.483$$

Propagacja niepewności:

$$u(n_{\text{płytki}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial n_{\text{płytki}}}{\partial \alpha_B} u(\alpha_B)\right)^2} = \left|\frac{1}{\cos^2 \alpha_B} u(\alpha_B)\right| \approx 0.048$$

Zatem współczynnik załamania światła obliczony za pomocą wyznaczenia kąta Brewstera wynosi:

$$n_{\text{płytki}} = 1.483(48)$$

## 2.5. Wnioski

Pierwsza część ćwiczenia pozwoliła nam pokazać, że zgodnie z prawem Malusa, natężenie światła spolaryzowanego liniowo, przechodzącego przez analizator jest wprost proporcjonalne do kwadratu cosinusa kąta między płaszczyzną polaryzacji światła wpadającego a płaszczyzną polaryzacji światła wychodzącego z analizatora.

Kolejne trzy części ćwiczenia miały na celu wyznaczenie współczynnika liniowego płytki z pleksiglasu na 3 różne sposoby. Wyniki zostały przedstawione w tabeli 3.

Metoda	$n_{\text{płytki}}$	$u(n_{\text{płytki}})$
Prawo Snella	1.500	0.013
Kąt graniczny	1.466	0.035
Kąt Brewstera	1.483	0.048

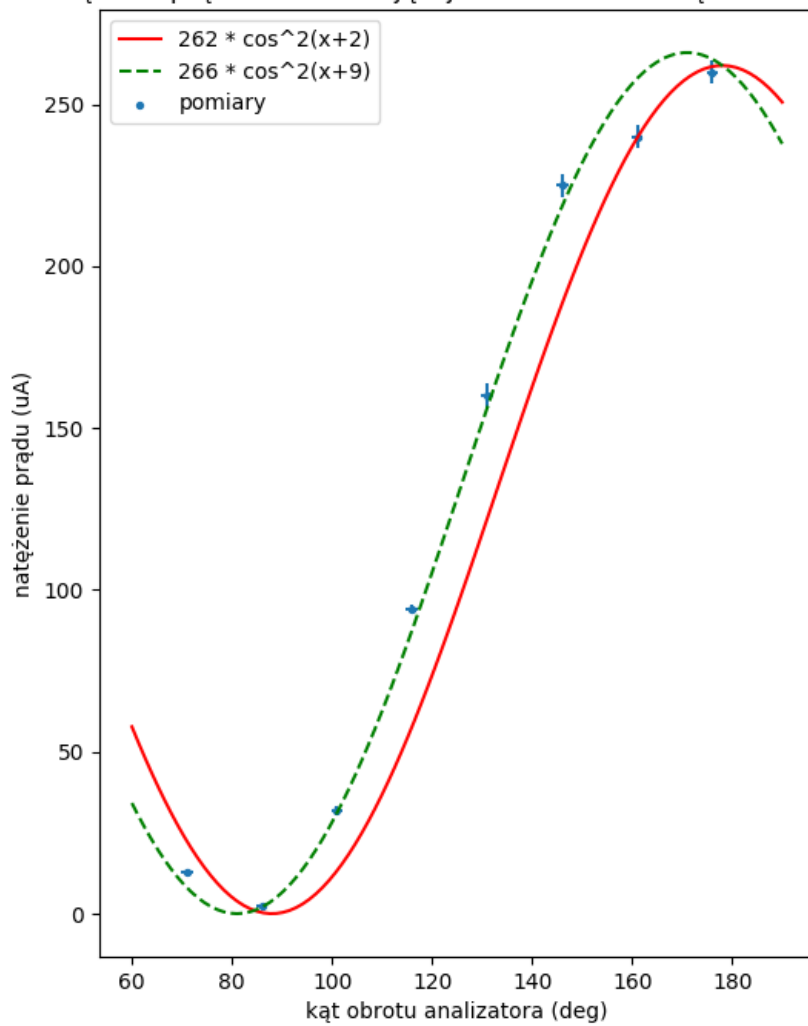
Tabela 3: Uzyskane wartości współczynnika załamania światła dla płytki z pleksiglasu

Korzystając z wartości współczynnika załamania światła, wyznaczonej przez Cargille Labs [1], tj.  $n = 1.4917$ , możemy porównać uzyskane wyniki. Wykres uzyskanych wyników wraz z ich niepewnością rozszerzoną przy  $k = 1$  przedstawiony został na rysunku 3.

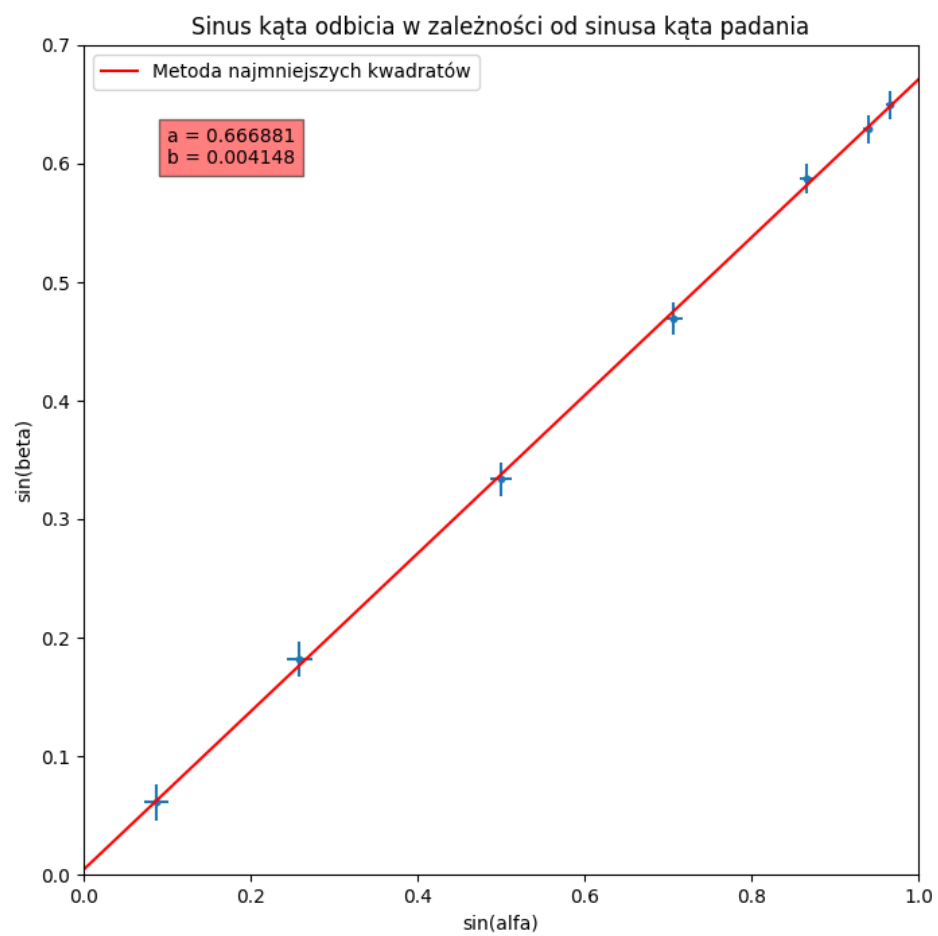
## Literatura

- [1] Strona internetowa firmy Cargille-Sacher Laboratories Inc,  
<http://www.cargille.com/specimmerliq.shtml>

Natężenie prądu fali docierającej do detektora od kąta analizatora

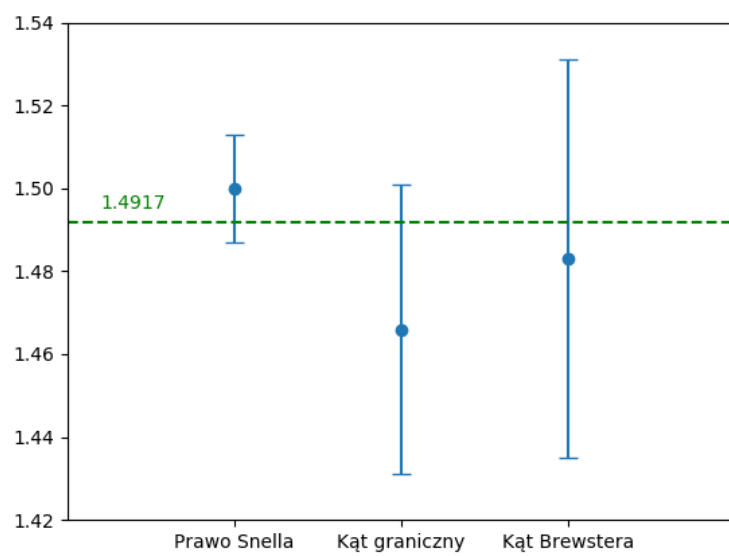


Rysunek 1: Prawo Malusa



Rysunek 2: Prawo Snella





Rysunek 3: Porównanie metod wyznaczania wsp. załamania światła