

| | | | |
|--|---|-----------------------|---------------|
| Wydział | Dzień poniedziałek 17 ¹⁵ – 19 ³⁰ | | Nr zespołu |
| Matematyki i Nauk Informatycznych | Data | | 18 |
| Nazwisko i Imię: 1. Jasiński Bartosz 2. Sadłocha Adrian 3. Wódkiewicz Andrzej | Ocena z przygotowania | Ocena ze sprawozdania | Ocena Końcowa |
| Prowadzący dr inż. Jarosław Judyk | | Podpis prowadzącego | |

Sprawozdanie nr 2

1. Opis ćwiczenia

Ćwiczenie złożone było z dwóch części:

1. Badanie anharmoniczności drgań wahadła matematycznego
2. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła różnicowego

1.1. Wstęp teoretyczny

Wahadłem matematycznym płaskim nazywamy punkt materialny, poruszający się po fragmencie okręgu w jednorodnym polu grawitacyjnym. Praktyczną realizacją tego pojęcia jest obciążnik (najczęściej kulka) o małych rozmiarach, zamocowany na nierozciągliwej nici o bardzo małej, pomijalnej masie (Rysunek 1).

Siłę ciężkości $\vec{F}_g = m\vec{g}$ działającą na ciężarek możemy rozłożyć na składową radialną $F_g \cos \theta$ oraz styczną do toru ruchu wahadła $F_g \sin \theta$. Składowa styczna wpływa na zmianę wektora prędkości ciężarka, gdyż działa ona zawsze przeciwnie do jego wychylenia. Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy więc:

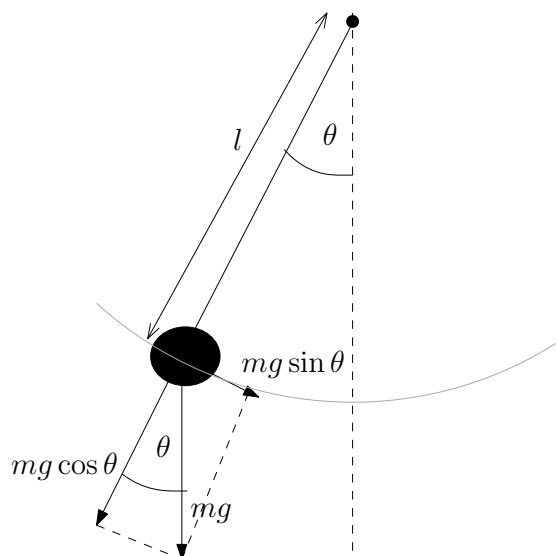
$$ma = -mg \sin \theta$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Ponieważ $S = l \cdot \theta$:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Nie istnieje analityczne rozwiązanie tego równania różniczkowego. Dla małych kątów można uprościć powyższy wzór, zakładając, że $\sin \theta \approx \theta$ – wtedy równanie różniczkowe daje się



Rysunek 1: Wahadło matematyczne

rozwiązać analitycznie. W rezultacie otrzymujemy, że **dla wahadła matematycznego poruszającego się w zakresie małych kątów** (przy założeniu $\theta(0) = \theta_{max}$):

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right),$$

czyli ruch **jest harmoniczny**, a okres tego ruchu wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

W ogólności (bez założenia małych wychyleń), korzystając z rozwinięcia funkcji \sin w szereg, możemy finalnie otrzymać zależność okresu drgań wahadła T od kąta maksymalnego wychYLENIA θ_{max} :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} f(\theta_{max}), \quad (1)$$

$$\text{gdzie } f(\theta_{max}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right]^2 \sin^{2n} \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) \quad (2)$$

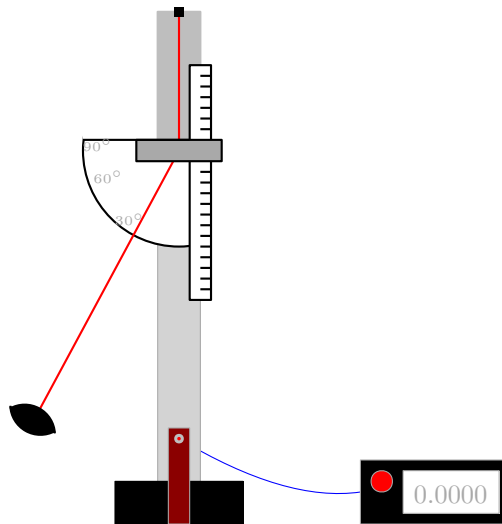
Ruch wahadła matematycznego jest więc w ogólności **anharmoniczny** – okres jest zależny od amplitudy.

Wahadło różnicowe to wahadło w którym mamy możliwość zmiany długości nici na której jest zawieszony ciężarek, pozwalające mierzyć w precyzyjny sposób zmianę jej długości, nie znając długości bezwzględnej. Wykonując dwa pomiary T_1, T_2 dla różnych długości wahadła l_1, l_2 otrzymujemy:

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l_1 - l_2) f(\theta_{max})$$

1.2. Układ pomiarowy

Do przeprowadzenia obu części ćwiczenia posłużono się układem pomiarowym, przedstawionym na rysunku 2. Do ruchomego elementu połączonego z nieruchomym statywem przymocowana była długa, nierozciągliwa nitka, o znikomo małej masie, z zamocowanym na jej końcu metalowym obciążnikiem. Statyw pozwalał na modyfikowanie długości wahadła. Do statywu przytwierdzony był również kątomierz oraz linijka, służące do pomiaru kolejno: kąta maksymalnego wychylenia wahadła oraz zmiany długości wahadła różnicowego. Pod statywem znajdował się elektroniczny układ pomiarowy, złożony z fotokomórki oraz modułu sterowania, za pomocą którego mierzony był okres wahadła.



Rysunek 2: Schemat układu pomiarowego

2. Pomiary i obliczenia

2.1. Badanie zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia

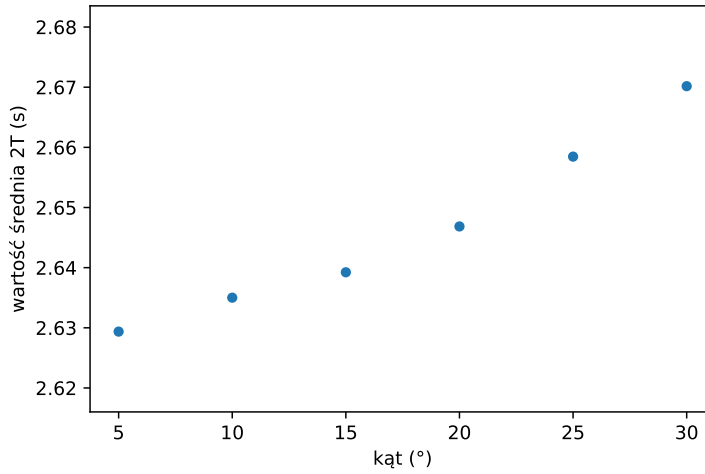
Dokonano po 10 pomiarów dwóch okresów wahadła dla sześciu różnych kątów maksymalnego wychylenia wahadła. Wartości kątów wynosiły kolejno: 5° , 10° , 15° , 20° , 25° i 30° . Wyniki pomiarów znajdują się w tabeli 1. Sporządzono również dwa wykresy: wartości średniej dwóch okresów wahadła względem kąta maksymalnego wychylenia oraz odchylenia standardowego pomiaru dla danego kąta (kolejno rysunki 3, 4).

Długość wahadła nie była znana eksperymentatorom – linijka używana w układzie pomiarowym nie wskazywała bezwzględnej długości nici (służyła do odczytywania zmian długości nici wahadła różnicowego). Dlatego też w tym doświadczeniu nie można było wykorzystać zmierzonej wartości okresu wahadła do wyliczenia przyspieszenia ziemskiego.

Z wykresu na rysunku 3 można wywnioskować, że po pierwsze: **istnieje nie stała** funkcja długości okresu wahadła od kąta maksymalnego wychylenia (wartość średnia nie jest stała dla kolejnych kątów) oraz po drugie: funkcja ta jest **nieliniowa**. Uzyskane wyniki są zgodne z rozważaniami teoretycznymi (patrz wzór (1)).

| | $2T(\alpha = 5^\circ)$ | $2T(10^\circ)$ | $2T(15^\circ)$ | $2T(20^\circ)$ | $2T(25^\circ)$ | $2T(30^\circ)$ |
|-----------------|------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 2.6285 | 2.6343 | 2.6368 | 2.6454 | 2.6585 | 2.6701 |
| 2 | 2.6295 | 2.6346 | 2.6359 | 2.6463 | 2.6589 | 2.6711 |
| 3 | 2.6295 | 2.6344 | 2.6402 | 2.6467 | 2.6582 | 2.6714 |
| 4 | 2.6307 | 2.6366 | 2.6394 | 2.6470 | 2.6590 | 2.6709 |
| 5 | 2.6296 | 2.6358 | 2.6408 | 2.6467 | 2.6578 | 2.6701 |
| 6 | 2.6286 | 2.6350 | 2.6404 | 2.6463 | 2.6593 | 2.6685 |
| 7 | 2.6285 | 2.6342 | 2.6396 | 2.6463 | 2.6574 | 2.6698 |
| 8 | 2.6303 | 2.6350 | 2.6401 | 2.6477 | 2.6588 | 2.6696 |
| 9 | 2.6287 | 2.6352 | 2.6395 | 2.6476 | 2.6583 | 2.6694 |
| 10 | 2.6298 | 2.6350 | 2.6396 | 2.6485 | 2.6584 | 2.6708 |
| $\overline{2T}$ | 2.62937 | 2.63501 | 2.63923 | 2.64685 | 2.64685 | 2.67017 |
| $s(2T)$ | 0.00078 | 0.00074 | 0.00160 | 0.00089 | 0.00057 | 0.00089 |

Tabela 1: Seria pomiarów czasu trwania 2 okresów wahadła w zależności od kąta wychylenia



Rysunek 3: Wartość średnia 2 okresów wahadła w zależności od maksymalnego kąta wychylenia

Nie zaobserwowano natomiast żadnej zależności między odchyleniem standardowym pomiarów a kątem maksymalnego wychylenia (rysunek 4).

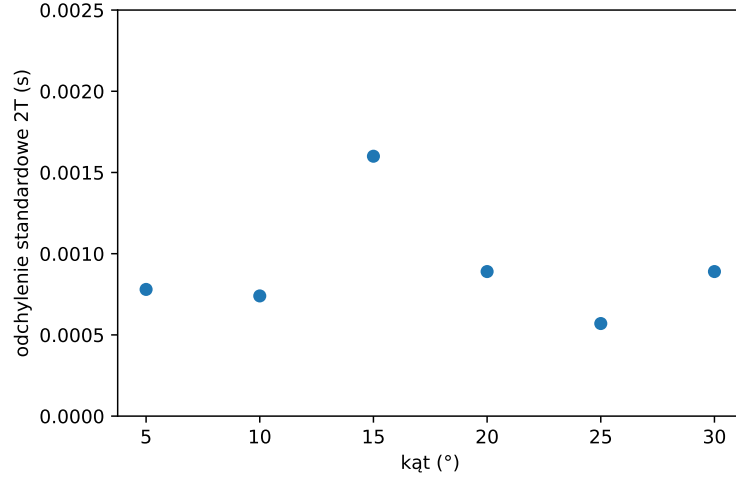
2.2. Badanie zależności okresu drgań od zmian długości wahadła

Przekształcając wzór (1) otrzymujemy zależność:

$$l = g \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{f^2(\theta_{max})}$$

Dalej, korzystając z podstawienia

$$g' = \frac{g}{f^2(\theta_{max})}$$



Rysunek 4: Odchylenie standardowe 2 okresów wahadła w zależności od maksymalnego kąta wychylenia

oraz z faktu, że mierzona długość wahadła nie jest jego rzeczywistą długością – wartości na linijce zmieniają się **odwrotnie proporcjonalnie** do długości wahadła i są jedynie wartościami względnymi – otrzymujemy finalnie:

$$l_{wzg} = -g' \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (3)$$

W ten sposób po dokonaniu pomiarów okresu przy zmiennej długości wahadła można skorzystać z regresji liniowej i wyznaczyć nachylenie prostej, a w rezultacie wartość g .

Pomiary okresu dla małego kąta

Po przeprowadzeniu pomiarów dla kąta $\theta_{max} = 10^\circ$ dokonano wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego przy użyciu metody najmniejszych kwadratów. Wyniki pomiarów wraz z obliczeniami cząstkowymi oraz oznaczenia X , Y znajdują się w tabeli 2. W celu wyznaczenia współczynników regresji liniowej, jak i ich niepewności pomiarowych skorzystano ze wzorów:

$$a = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$b = \frac{1}{n} (\Sigma Y - a\Sigma X)$$

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\Sigma Y^2 - a\Sigma XY - b\Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}}$$

$$u(b) = u(a) \cdot \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}}$$

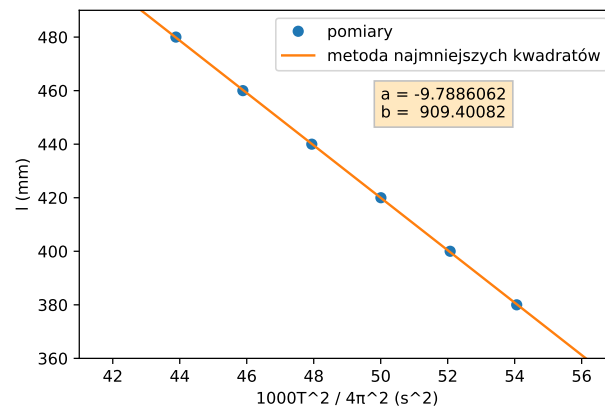
Uzyskane wartości wyniosły: $a = -9.789(31)$, $b = 909.4(1.5)$, zatem przekształcając a zgodnie ze wzorem (3):

$$g' = 9.789(31) \frac{m}{s^2}$$

Ponieważ kąt maksymalnego wychylenia jest dostatecznie mały oraz z powodów dydaktycznych ćwiczenia, w tym kroku doświadczenia celowo pominięto korektę na anharmoniczność.

| | l (mm) = Y | $2T$ (s) | $1000T^2/4\pi^2 = X(s^2)$ | X^2 | Y^2 | XY |
|----------|----------------|----------|---------------------------|------------|---------|------------|
| 1 | 480 | 2.6325 | 43.885094 | 1925.9015 | 230400 | 21064.845 |
| 2 | 460 | 2.6918 | 45.884484 | 2105.3859 | 211600 | 21106.863 |
| 3 | 440 | 2.7515 | 47.942349 | 2298.4688 | 193600 | 21094.634 |
| 4 | 420 | 2.8101 | 50.006196 | 2500.6196 | 176400 | 21002.602 |
| 5 | 400 | 2.8676 | 52.073578 | 2711.6575 | 160000 | 20829.431 |
| 6 | 380 | 2.9218 | 54.060647 | 2922.5536 | 144400 | 20543.046 |
| Σ | 2580 | 16.6753 | 293.852348 | 14464.5869 | 1116400 | 125641.421 |

Tabela 2: Pomiary 2 okresów wahadła dla maksymalnego kąta wychylenia $\theta_{max} = 10^\circ$ w zależności od l wraz z obliczeniami do wyznaczenia regresji liniowej



Rysunek 5: Regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów dla $\theta_{max} = 10^\circ$

Pomiary okresu dla dużego kąta

Następnie dokonano pomiarów dla kąta $\theta_{max} = 25^\circ$. Dokonano analogicznych obliczeń (patrz Tabela 3). Uzyskane wartości parametrów prostej to: $a = -9.658(23)$, $b = 911.6(1.1)$, zatem

$$g' = 9.658(23) \frac{m}{s^2}$$

Korzystając z korekty na anharmoniczność drgań dla pierwszych 3 wyrazów szeregu ze wzoru (2)

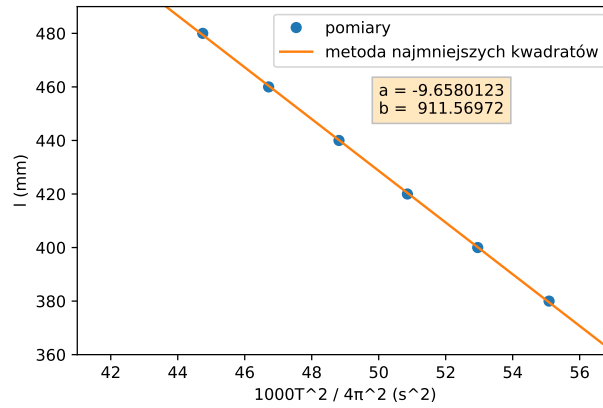
$$K(\theta_{max}) = \left(1 + \frac{1}{16} \theta_{max}^2 + \frac{11}{3072} \theta_{max}^4 + \dots \right)$$

uzyskujemy:

$$g = g' \cdot 1.0120289 \approx 9.773(23) \frac{m}{s^2}$$

| | l (mm) = Y | $2T$ (s) | $1000T^2/4\pi^2 = X(s^2)$ | X^2 | Y^2 | XY |
|----------|----------------|----------|---------------------------|------------|---------|------------|
| 1 | 480 | 2.6582 | 44.74614 | 2002.2170 | 230400 | 21478.147 |
| 2 | 460 | 2.7160 | 46.71322 | 2182.1249 | 211600 | 21488.081 |
| 3 | 440 | 2.7764 | 48.81399 | 2382.8056 | 193600 | 21478.136 |
| 4 | 420 | 2.8339 | 50.85683 | 2586.4132 | 176400 | 21359.869 |
| 5 | 400 | 2.8918 | 52.95620 | 2804.3591 | 160000 | 21182.480 |
| 6 | 380 | 2.9494 | 55.08681 | 3034.5566 | 144400 | 20932.988 |
| Σ | 2580 | 16.8257 | 299.17319 | 14992.4764 | 1116400 | 127919.701 |

Tabela 3: Pomiary 2 okresów wahadła dla maksymalnego kąta wychylenia $\theta_{max} = 25^\circ$ w zależności od l wraz z obliczeniami do wyznaczenia regresji liniowej



Rysunek 6: Regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów dla $\theta_{max} = 25^\circ$

2.3. Wnioski

Po wykonaniu obu ćwiczeń potwierdzono anharmoniczność ruchu wahadła matematycznego oraz uzyskano 2 wartości przyspieszenia ziemskiego: $9.789(31) \frac{m}{s^2}$ oraz $9.773(23) \frac{m}{s^2}$.

W drugim ćwiczeniu, pomimo zastosowania korekty na anharmoniczność drgań przy serii pomiarów dla dużego kąta ($\theta_{max} = 25^\circ$), uzyskana wartość przyspieszenia ziemskiego była mniej dokładna niż wartość uzyskana przy serii pomiarów dla kąta mniejszego ($\theta_{max} = 10^\circ$). Oznacza to, że niedoskonałości sprzętu pomiarowego i błędy eksperymentatorów znacznie wpłynęły na wyniki pomiarów. To przypuszczenie dodatkowo potwierdza kształt wykresu odchylenia standardowego z pierwszego ćwiczenia (rysunek 4).

Aby zmniejszyć niedoskonałości pomiarów należałoby zadbać o dokładniejszy sposób odczytu kąta maksymalnego wychylenia wahadła (wyeliminować zjawisko paralaksy) oraz dodać do układu pomiarowego możliwość mechanicznego zwalniania obciążnika wahadła, eliminując tym samym przypadki zarówno wprawienia wahadła w ruch w 2 płaszczyznach jak i nadawania mu prędkości początkowej.