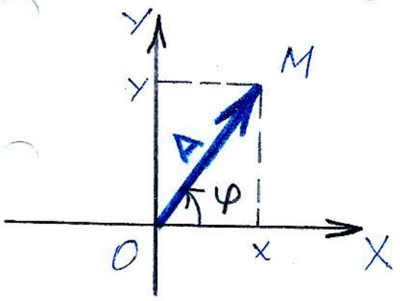
БИЛЕТ 18

1. *Гармонические колебания. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления равных частот.*

Колебания – движения или состояния, параметры которых повторяются во времени. Колебания в той или иной мере встречаются во всех явлениях природы: от пульсации излучения звезд, движения планет до внутриклеточных процессов или колебаний атомов и молекул, колебаний полей. В физике особо выделяют механические и электромагнитные колебания (и их комбинации). Моделью для изучения механических колебаний является **осциллятор** – материальная точка или система, совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия. (Более того, термин осциллятор применим к любой системе, если описывающие ее величины периодически меняются во времени.) Простейшие примеры осцилляторов – грузик на пружине, маятник.

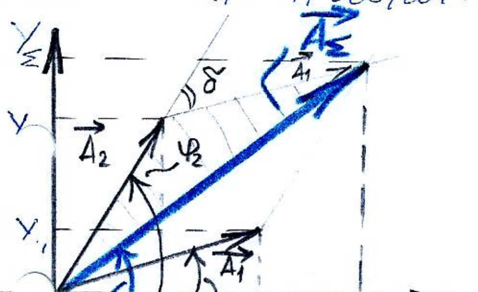
Рассмотрим радиус-вектор $\vec{OM}$, вращающейся вокруг начала координат с угл. скоростью ω. Тогда угол между радиус-вектором и осью X меняется с течением времени по з-ну $\varphi = \omega t + \varphi_0$, где φ_0 – начальное значение.



$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi_0) \\ y = A\sin(\omega t+\varphi_0) \end{cases} (*)$$ – описание колебаний осциллятора вдоль осей

Данная форма (*) представление колебаний наз. амплитудной (векторной) диаграммой.

Рассмотрим сложение двух колебаний одного направления: $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$



Результирующему колебанию $x_\Sigma = x_1 + x_2$ сопоставим в-р $\vec{A}_\Sigma = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ ($\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma$) Тогда по теор. cos-ов для заштрих. Δ:

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\underbrace{\cos(\pi-\delta)}_{=-\cos\delta,\ \delta=\varphi_2-\varphi_1=(\omega_2-\omega_1)t+\alpha_2-\alpha_1}$$

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos((\omega_2-\omega_1)t+\alpha_2-\alpha_1)$$

$$tg\varphi_\Sigma = \frac{y_\Sigma}{x_\Sigma} = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = tg(\omega_\Sigma t+\alpha_\Sigma) = \frac{A_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)}{A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)}$$

Соответственно $tg(\alpha_\Sigma) = \dfrac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$

$A_1 = A_2 = A,\ \omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда $A_\Sigma^2 = 2A^2 + 2A^2\cos(\alpha_2-\alpha_1) = 2A^2(1+\cos(\alpha_2-\alpha_1))$

Если $\alpha_2-\alpha_1 = 2\pi n$, то $A_\Sigma = 2A$, а если $\alpha_2-\alpha_1 = \pi+2\pi n$, то $A_\Sigma = 0$, ($n\in\mathbb{Z}$)

По ф-ле из тригонометрии ($\cos\beta_1+\cos\beta_2 = 2\cos\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\right)$) найдём результирующее колебание: $x_\Sigma = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)$

Т.к. амплитуда не зависит от времени и (>0), то $A_\Sigma = 2A\left|\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right|$

$$x_\Sigma = \underbrace{2A\left|\cos\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)\right|}_{A_\Sigma}\cos\left(\omega t+\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}+\theta\right)$$, если $\cos\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right) > 0$, то $\theta = 0$

< 0, то $\theta = \pi$

2. *Объемная плотность энергии акустической волны. Вектор плотности потока энергии волны (Вектор Умова).*

Волна – это процесс распространения возмущений некоторой физической величины в пространстве с течением времени. Если возмущения описываются как механическое движение среды, то волна называется механической. Например, возмущения могут представлять собой отклонения точек среды от своих положений равновесия. Если эти отклонения направлены перпендикулярно движению волны, то волна называется поперечной, если параллельны - то продольной. Примером **поперечных волн** являются волны на поверхности жидкости или колебания гитарной струны. В глубине жидкости или в газе могут распространяться только **продольные волны**. Примером является звуковая волна – колебания давления (плотности) в газе или жидкости. Важное свойство волновых движений состоит в локальной связи между возмущениями в близких точках среды. То есть отклонение от положения одной точки вызывает отклонения соседних близких точек. Локальная связь между точками является причинно-следственной связью, поэтому процесс распространения возмущения в таких средах имеет конечную скорость. **Монохроматическая волна** – это идеализация волнового процесса – это бесконечная волна, при которой состояние среды описывается с помощью гармонической функции постоянной частоты.

С учетом равенства $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, после сокращений, получаем дифференциальное уравнение, описывающее распространение волны (вдоль одного направления – оси X):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \text{ или } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Здесь, ξ - параметр, описывающий колебания (величина смещения точек при деформации), $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость волны.♣

Рассмотрим выделенный участок стержня длиной Δx. При колебаниях скорость этого участка $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и величина деформации $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Соответственно, кинетическая и потенциальные энергии выделенного участка равны $W_K = \frac{1}{2}\rho S\Delta x\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$ и $W_П = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 S\Delta x$. Объем участка $V = S\Delta x$. Объемная плотность механической энергии $w = \frac{W_K + W_П}{V} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$.

Если уравнение движения волны записать в виде $\xi = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$, то с учетом соотношений для скорости $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A\sin(\omega t - kx + \alpha)$ и деформации $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -kA\sin(\omega t - kx + \alpha)$ получается

$$w = \frac{1}{2}\rho\cdot\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + \frac{1}{2}E\cdot k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha),$$

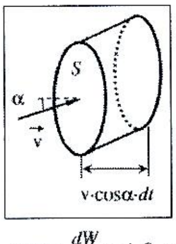
$$w = \left(\rho\cdot\omega^2 + E\cdot k^2\right)\frac{1}{2}A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha).$$

Используем выражение для скорости волны $v^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{\omega^2}{k^2}$:

$$w = \rho\cdot\omega^2\left(1 + \frac{E}{\rho}\cdot\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{1}{2}A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) = \rho\cdot\omega^2 2\frac{1}{2}A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

$$w = \frac{\rho\cdot\omega^2 A^2}{2}\left(1 - \cos\left(2[\omega t - kx + \alpha]\right)\right).$$

Вектор Умова



Пусть энергия переносится со скоростью $\vec{v}$ в направлении под углом α к нормали некоторой малой площадки S. Тогда вся энергия, прошедшая через эту площадку за малое время dt окажется в области, объем которой $dV = S\cdot v\cdot\cos\alpha\cdot dt$ (на рисунке эта область является косым цилиндром). Если объемная плотность энергии равна w, то энергия этого объема

$$W = w\cdot dV = w\cdot S\cdot v\cdot\cos\alpha\cdot dt$$

Мощность переноса энергии через площадку S: $\frac{dW}{dt} = w\cdot dV = w\cdot S\cdot v\cdot\cos\alpha$.

Введем вектор плотности потока энергии (Вектор Умова)

$$\vec{j} = w\cdot\vec{v},$$

тогда $\frac{dW}{dt} = j\cdot S\cdot\cos\alpha$. Если ввести вектор $\vec{S} = \vec{n}\cdot S$, направленный по нормали к площадке, и скалярное произведение $j\cdot S\cdot\cos\alpha = (\vec{j},\vec{S})$ определить как поток вектора Умова через площадку S, то *мощность переноса энергии через площадку определяется потоком вектора Умова через эту площадку* $\frac{dW}{dt} = (\vec{j},\vec{S})$.

Интенсивность волны – это средняя по времени энергия переносимая волной через площадку в направлении перпендикулярном к этой площадке.

Для плоской волны интенсивность $I = \frac{\rho\cdot\omega^2 A^2}{2}S$ не меняется при распространении волны

Для сферической волны интенсивность через любую сферу радиуса R с центром в источнике

$$I = \frac{\rho\cdot\omega^2 A^2}{2}S = \frac{\rho\cdot\omega^2}{2}\frac{A_0^2}{R^2}4\pi R^2 = 2\pi\rho\cdot\omega^2 A_0^2$$

является постоянной величиной.

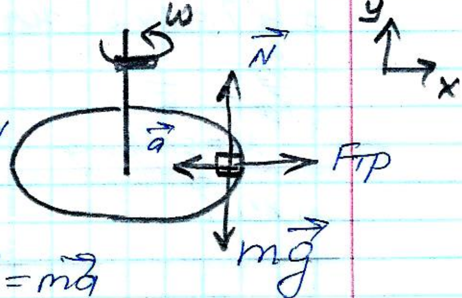
Если интенсивность волны уменьшается, то среда называется *диссипативной*.

Если интенсивность волны увеличивается, то среда называется *активной*.

18

③ На краю платформы диаметром $D=1,2$ м, кот. вращается вокруг верт. оси, проходящей через её центр, лежит брусок. Определить предельную угл. скорость вращения платформы, при кот. брусок не соскользнёт с платформы $\mu=0,4$.

Дано:	си	Решение
$D = 1,2$ м $\mu = 0,4$ ω_m ?		По II му з-ну Ньютона $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = m\vec{a}$



Ox: $F_{тр} = ma$

Oy: $N = mg$

По з-ну Амонтона-Кулона $F_{тр} = \mu N$

$\mu \cancel{m} g = \cancel{m} a$

$\mu g = a = \frac{v^2}{R}$, $v = \omega R \Rightarrow a = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$

$\mu g = \omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{R}} = \sqrt{\frac{\mu g}{D/2}}$

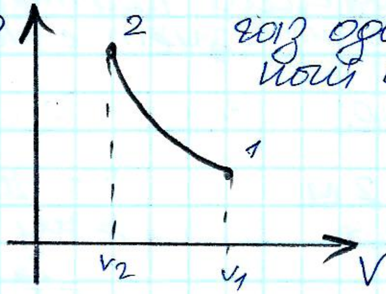
$[\omega] = \sqrt{\frac{\frac{м}{с^2}}{м}} = \sqrt{\frac{1}{с^2}} = \frac{1}{с}$

$\omega = \frac{0,4 \cdot 10}{1,2 \cdot 0,5} = 6,7\ \frac{1}{с} = 6,7$ Гц

Ответ: 6,7 Гц

④ При адиабатическом сжатии неона с нач. темп. $T_1 = 320K$ внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U = 14$ кДж, а его объём уменьшился в 6 раз. Определить массу неона m.

Дано:	СИ	Решение:
Ne		
$T_1 = 320 K$		
$\Delta U \uparrow = 14$ кДж		
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{6}$		
$M = 20$ г/моль		
m?		



газ одноатомный $i=3$

1. Из I по нач. термодинамики

$$A = -\Delta U \quad (Q = 0)$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$$

2. т.к. 1-2 адиабата, то $pV^{\gamma} = const$

$TV^{\gamma - 1} = const$

$$\frac{T_2}{T_1} = \underbrace{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}_{=n}^{\gamma - 1} \Rightarrow T_2 = n^{\gamma - 1} T_1$$

$$\gamma = \frac{i+2}{i}; \quad T_2 = n^{\frac{i+2}{i}} \cdot T_1$$

3. $$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) \Rightarrow m = \frac{2 \Delta U M}{i R (T_2 - T_1)} =$$

$$= \frac{2 \Delta U M}{i R (n^{\frac{i+2}{i}} T_1 - T_1)}$$