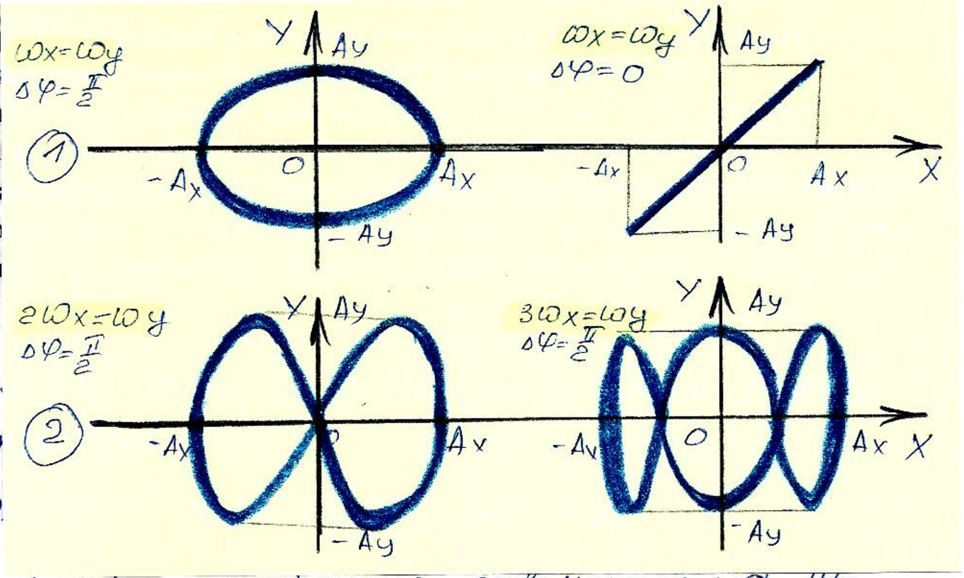
БИЛЕТ 16

1. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот

Колебания – движения или состояния, пар
мере встречаются во всех явлениях природ
внутриклеточных процессов или колебани
механические и электромагнитные колеба
колебаний является **осциллятор** – матери
движение около положения устойчивого р
если описывающие ее величины периодич
грузик на пружине, маятник.



Рассмотрим колебани
перпендикулярным на

$X = A_x \cos(\omega$

Отметим, что при $\alpha_x=\alpha_y$ колебания сдвинуты на $\pi/2$

1) Пусть $\omega_x=\omega_y=\omega$. Обозначим $\alpha_y=\alpha_x+\delta$. Получим ур-ие траектории:

$$\frac{x}{A_x}=\cos(\omega t+\alpha_x),\quad \frac{y}{A_y}=\sin(\omega t+\alpha_x+\delta)=\underbrace{\sin(\omega t+\alpha_x)}_{=\sqrt{1-\cos^2(\omega t+\alpha_x)}}\cos\delta+\underbrace{\cos(\omega t+\alpha_x)}_{=\frac{x}{A_x}}\sin\delta$$

$$\frac{y}{A_y}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\cos\delta+\frac{x}{A_x}\sin\delta;$$ // Уединяем корень

$$\left(\frac{y}{A_y}-\frac{x}{A_x}\sin\delta\right)=\sqrt{1-\left(\frac{x}{A_y}\right)^2}\cos\delta;$$ // возводим в квадрат

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2-2\frac{y}{A_y}\frac{x}{A_x}\sin\delta+\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\sin^2\delta-\left(1-\left(\frac{x}{A_y}\right)^2\right)\cos^2\delta=0$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2-2\frac{y}{A_y}\frac{x}{A_x}\sin\delta+\underbrace{\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\sin^2\delta+\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\cos^2\delta}_{=1}=\cos^2\delta$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2-2\frac{y}{A_y}\cdot\frac{x}{A_x}\sin\delta+\left(\frac{x}{A_x}\right)^2=\cos^2\delta$$ – ур-ие второго порядка на пл-ти

Если $\delta=0$ ($\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$), то получим эллипс $\left(\frac{y}{A_y}\right)^2+\left(\frac{x}{A_x}\right)^2=1$

$\delta=\pm\frac{\pi}{2}$ $\left(\begin{matrix}\Delta\varphi=0\\ \Delta\varphi=\pi\end{matrix}\right)$; то получится отрезок прямой.

2) Фигуры для некоторых других соотношений частот можно узнать из соотношения $\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{n_x}{n_y}}$, где $n_{y,x}$ – количество пересечений фигуры и прямой // Oy/Ox. Траектория точки, совершающей одновременно два взаимно ⊥ колебания при рац. отношении частот наз. фигурой Лиссажу. Если $\frac{\omega_x}{\omega_y}\in R$, то траектория замкнута, а если $\frac{\omega_x}{\omega_y}\notin R$, то – разомкнута.

БИЛЕТ 16

1. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот

Колебания – движения или состояния, параметры которых повторяются во времени. Колебания в той или иной мере встречаются во всех явлениях природы: от пульсации излучения звезд, движения планет до внутриклеточных процессов или колебаний атомов и молекул, колебаний полей. В физике особо выделяют механические и электромагнитные колебания (и их комбинации). Моделью для изучения механических колебаний является **осциллятор** – материальная точка или система, совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия. (Более того, термин осциллятор применим к любой системе, если описывающие ее величины периодически меняются во времени.) Простейшие примеры осцилляторов – грузик на пружине, маятник.

Рассмотрим колебание точки одновременно по двум взаимно перпендикулярным направлениям:

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \alpha_x) \text{ и } y = A_y \cos(\omega_y t + \alpha_y)$$

Отметим, что при $\alpha_x = \alpha_y$ колебания сдвинуты на $\pi/2$

1) Пусть $\omega_x = \omega_y = \omega$. Обозначим $\alpha_y = \alpha_x + \delta$. Получим ур-ие траектории:

$$\frac{x}{A_x} = \cos(\omega t + \alpha_x), \quad \frac{y}{A_y} = \sin(\omega t + \alpha_x + \delta) = \underbrace{\sin(\omega t + \alpha_x)}_{= \sqrt{1-\cos^2(\omega t+\alpha_x)}}\cos\delta + \underbrace{\cos(\omega t + \alpha_x)}_{= \frac{x}{A_x}}\sin\delta$$

$$\frac{y}{A_y} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\cos\delta + \frac{x}{A_x}\sin\delta; \quad \text{// Уединяем корень}$$

$$\left(\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A_x}\sin\delta\right) = \sqrt{1-\left(\frac{x}{A_y}\right)^2}\cos\delta; \quad \text{// возводим в квадрат}$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{y}{A_y}\frac{x}{A_x}\sin\delta + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\sin^2\delta - \left(1-\left(\frac{x}{A_y}\right)^2\right)\cos^2\delta = 0$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{y}{A_y}\frac{x}{A_x}\sin\delta + \underbrace{\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\sin^2\delta + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\cos^2\delta}_{=1} = \cos^2\delta$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{y}{A_y}\cdot\frac{x}{A_x}\sin\delta + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = \cos^2\delta$$ – ур-ие второго порядка на пл-ти

Если $\delta = 0$ ($\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$), то получим эллипс $\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = 1$

$\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ $\left(\begin{matrix}\Delta\varphi = 0\\ \Delta\varphi = \pi\end{matrix}\right)$, то получится отрезок прямой.

2) Фигуры для некоторых других соотношений частот можно узнать из соотношения $\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_x}{n_y}}$, где $n_{y,x}$ – количество пересечений фигуры и прямой // Oy/Ox. Траектория точки, совершающей одновременно два взаимно⊥ колебания при рац. отношении частот наз. фигурой Лиссажу. Если $\frac{\omega_x}{\omega_y} \in R$, то траектория замкнута, а если $\frac{\omega_x}{\omega_y} \notin R$, то – разомкнута.

2. Теплоёмкость газа при изопроцессах

df Теплоёмкостью тела наз. коэффициент пропорциональности между изменением его температуры и количеством подведённой теплоты.

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \qquad [C] = \frac{Дж}{К}$$

df Удельной теплоёмкостью вещества наз. теплоёмкость единицы массы этого вещества

$$c_{уд} = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\Delta T} \qquad [c_{уд}] = \frac{Дж}{кг \cdot К}$$

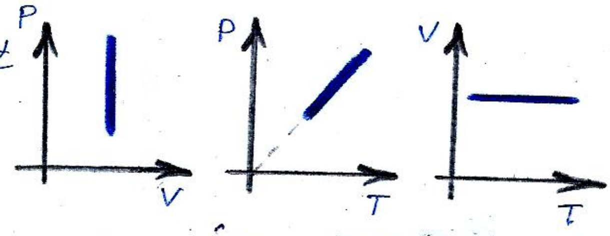
df Мольной (молярной) теплоёмкостью наз. теплоёмкость одного моля в-ва

$$C_M = \frac{C}{\nu} = \frac{Q}{\nu \Delta T} \qquad [C_M] = \frac{Дж}{моль \cdot К}$$

$\Rightarrow Q = m c_{уд}(T_к - T_н),\ Q = \nu C_M (T_к - T_н),\ Q = C\Delta T$

① Изохорный процесс

$V = const$ $\qquad \frac{P}{T} = const$



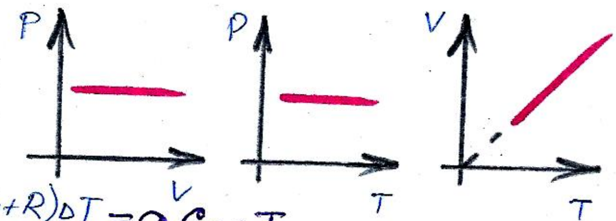
$\Rightarrow A = p\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta U = U_к - U_н = \nu \frac{i}{2} R (T_к - T_н) = \nu \frac{i}{2} R \Delta T$

I н.т. $Q = \nu C_V \Delta T \Rightarrow Q_{V=const} = \nu C_V \Delta T = \nu \frac{i}{2} R \Delta T \Rightarrow C_V = \frac{i}{2} R$

i	3	5	6
C_V	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$3R$

② Изобарный процесс

$p = const$ $\qquad \frac{V}{T} = const$



$\Rightarrow A = p\Delta V = p(V_к - V_н) \Rightarrow$ I н.т. $Q = \Delta U + A =$
$= \nu C_V \Delta T + p(V_к - V_н) \overset{М-К}{=} \nu C_V \Delta T + \nu R \Delta T = \nu (C_V + R)\Delta T = \nu C_p \Delta T$

$Q_{p=const} = \nu C_p \Delta T = \nu (C_V + R)\Delta T$ $\qquad$ //Соотношение Майера $\{C_p = C_V + R\}$

$\Rightarrow C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R$

i	3	5	6
C_p	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$4R$

③ Изотермический процесс

$T = const$ $\qquad pV = const$

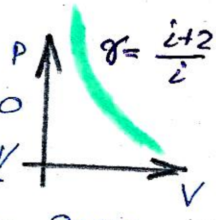
$\Rightarrow \Delta U = 0\ (\Delta T = 0) \Rightarrow$ I н.т. $Q = A_r$

$$A_r = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R T}{V} dV = \nu R T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$C \to \infty$

④ Адиабатический процесс

$Q = 0$ $\Rightarrow$ I н.т. $Q = \Delta U + A \Leftrightarrow -\Delta U = A \Rightarrow dU + pdV = 0$



$\gamma = \frac{i+2}{i}$

$dU = \nu C_V dT;\ d(pV) = d(\nu R T)$ или $Vdp + pdV = \nu R\, dT \Rightarrow dT = \frac{Vdp + pdV}{\nu R}$

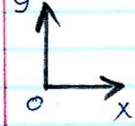
$\Rightarrow \nu C_V dT + pdV = 0,\ \nu C_V \frac{Vdp + pdV}{\nu R} + pdV = 0;\ C_V V dp + (C_V + R) p dV = 0$. делим на pV

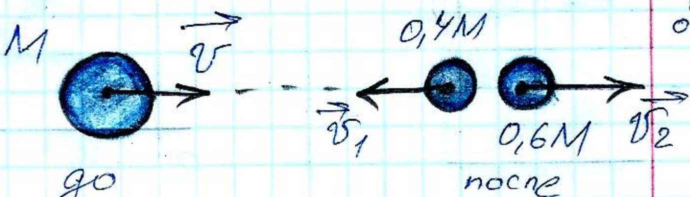
$C_V \frac{dp}{p} + C_p \frac{dV}{V} = 0.\ d(\ln p) + d(\ln V^{\frac{C_p}{C_V}}) = 0.\ d(\ln(pV^{\frac{C_p}{C_V}})) = 0.\ pV^{\gamma} = const$ ур-ие Пуассона

16

(3)
Снаряд в полёте разорвался на два осколка, кот. разлетаются в противоп. направлениях так, что первый осколок продолжает двигаться вдоль траектории. Определить скорость снаряда, если скорости осколков равны v_1, v_2, а масса первого осколка составляет 0,4 массы снаряда

Дано:	СИ	Решение
$v_1 = 1200$ м/с $v_2 = 600$ м/с $m_1 = 0{,}4M$		
v - ?		





Предположим, что вдоль траектории продолжает двигаться осколок 0,6M

По з-ну сохранения импульса для снаряда до взрыва и осколков после:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \;,\; \vec{p}_1 = M\vec{v} \;,\; \vec{p}_2 = 0{,}4M\vec{v}_1 + 0{,}6M\vec{v}_2$$

$$M\vec{v} = 0{,}4M\vec{v}_1 + 0{,}6M\vec{v}_2$$

$$Ox: \quad \cancel{M}v = 0{,}6\cancel{M}v_2 - 0{,}4\cancel{M}v_1$$

$$v = 0{,}6v_2 - 0{,}4v_1$$

$$[v] = м/с - м/с = м/с$$

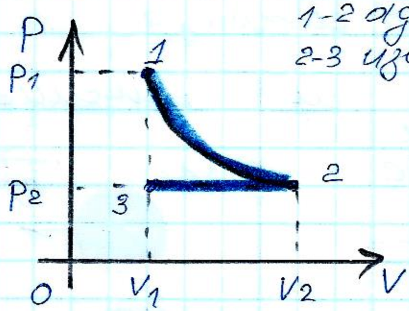
$$v = 0{,}6 \cdot 600 - 0{,}4 \cdot 1200 = 360 - 480 = -120 \text{ м/с}$$

$v < 0$, значит осколок 0,6M движется в противоп. напр. и $v = 120$ м/с

Ответ: 120 м/с

② Кислород массой $m = 80$ г адиабатически сжали в $n = 2$ раза, а затем изобарно расширили до начального объёма. Определить изменение энтропии газа при его переходе из нач. состояния в конечное состояние.

Дано:	СИ:	Решение:
O_2 $M = 32$ г/моль		
$m = 80$ г	0,08 кг	
$n = 2 = \frac{V_1}{V_2}$		
ΔS?		



1-2 адиабата ($Q = const$)
2-3 изобара ($p = const$)

1) $\Delta S = S_{12} + S_{23}$

2) $S_{12} = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{dQ_{12}}{T} = 0$, т.к. $Q = 0$

3) $S_{23} = \int\limits_{T_2}^{T_3} \frac{\nu C_p dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \int\limits_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} \underbrace{C_p}_{= \frac{i+2}{2} R = \frac{7}{2} R} \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$, $i = 5$, т.к. газ двухатомн.

4) По з-ну Гей-Люссака для пр-сса 2-3 ($p = const$)

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \iff \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = n$$

5) $\Delta S = \frac{m}{M} \cdot \frac{7}{2} R \ln n$; $[\Delta S] = \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot моль = \frac{Дж}{К}$

$\Delta S = \frac{80}{32} \cdot \frac{7}{2} \cdot 8{,}31 \ln 2 = 21 \frac{Дж}{К}$

Ответ: $21 \frac{Дж}{К}$