§ 64. Гармонический осциллятор

Систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{64.1}$$

где ω_0^2 — постоянная положительная величина [см. (62.6)], называют **гармоническим осциллятором** (или гармоническим вибратором). Как мы уже знаем, решение уравнения (64.1) имеет вид:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{64.2}$$

Следовательно, гармонический осциллятор представляет собой систему, которая совершает гармонические колебания около положения равновесия.

Все результаты, полученные в предыдущих параграфах для гармонического колебания, справедливы, разумеется, и для гармонического осциллятора. Рассмотрим дополнительно еще два вопроса.

Найдем импульс гармонического осциллятора. Продифференцировав (64.2) по времени и умножив полученный результат на массу осциллятора m, получим

$$p = m\dot{x} = -ma\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{64.3}$$

В каждом положении, характеризуемом отклонением x, осциллятор имеет некоторое значение импульса p. Чтобы найти p как функцию x, нужно исключить время t из уравнений (64.2) и (64.3). Для этого представим указанные уравнения в виде

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\frac{p}{ma\omega_0} = -\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Возведя эти выражения в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2 a^2 \omega_0^2} = 1. \tag{64.4}$$

На рис. 167 изображен график, показывающий зависимость импульса p гармонического осциллятора от отклонения x. Координатную плоскость p, x принято называть **фазовой плоскостью**, а соответствующий график — фазовой траекторией. В соответствии с (64.4) фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс с полуосями a и $ma\omega_0$. Каждая точка фазовой траектории изображает отклонение x и импульс p, т. е. состояние осциллятора для некоторого момента времени. С течением времени точка, изображающая состояние (ее называют кратко изобразительной точкой), перемещается по фазовой траектории, совершая за период колебания полный обход. Легко убедиться в том, что перемещение изобразительной точки совершается по часовой стрелке. В самом деле, возьмем такой момент времени t', что $\omega_0 t' + \alpha = 2\pi n$ (n — целое число). Этому моменту времени соответствует $x = a$ и $p = 0$ (см. точку *1* на рис. 167). В последующие моменты времени x будет убывать, а p принимает все возрастающие по модулю отрицательные значения. Следовательно, изобразительная точка движется так, как показано стрелкой на рис. 167, т. е. по часовой стрелке.

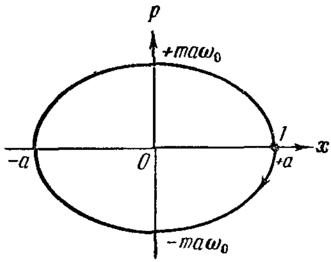

Рис. 167.

Найдем площадь эллипса. Как известно, она равна произведению полуосей эллипса, умноженному на π:

$$S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{m a^2 \omega_0^2}{2}.$$

В соответствии с (63.5) $ma^2\omega_0^2/2$ есть полная энергия осциллятора; величина $2\pi/\omega_0$ равна $1/\nu_0$, где ν_0 — собственная частота осциллятора, являющаяся для данного осциллятора величиной постоянной. Следовательно, площадь эллипса может быть представлена в виде

$$S = \frac{1}{\nu_0} E,$$

откуда

$$E = \nu_0 S. \tag{64.5}$$

Таким образом, полная энергия гармонического осциллятора пропорциональна площади эллипса, причем коэффициентом пропорциональности служит собственная частота осциллятора.

Площадь эллипса может быть вычислена как интеграл $\oint p\,dx$. Поэтому формуле (64.5) можно придать следующий вид:

$$E = \nu_0 \oint p\,dx.$$

Последнее соотношение сыграло большую роль при создании основ квантовой механики.

Теперь рассмотрим вопрос о вероятности, с которой осциллятор может быть обнаружен в различных положениях. Скорость осциллятора достигает наибольшего значения в те моменты, когда он проходит через положение равновесия. В моменты же наибольшего отклонения от положения равновесия скорость обращается в нуль. Отсюда следует, что вероятность обнаружить осциллятор вблизи одного из крайних положений будет больше, чем вероятность обнаружить его вблизи положения равновесия. Это поясняется рис. 168, на котором изображена кривая, определяющая так называемую плотность вероятности $\frac{dw}{dx}$ [1]). Для того чтобы найти вероятность dw нахождения осциллятора в пределах данного dx, нужно ординату кривой в соответствующем месте умножить на dx. Например, площадь заштрихованной полоски на рис. 168 численно равна вероятности dw того, что осциллятор будет обнаружен в пределах данного интервала dx. Вся площадь под кривой плотности вероятности дает вероятность того, что осциллятор будет обнаружен в одном из положений в пределах от $-a$ до $+a$, и, следовательно, как вероятность

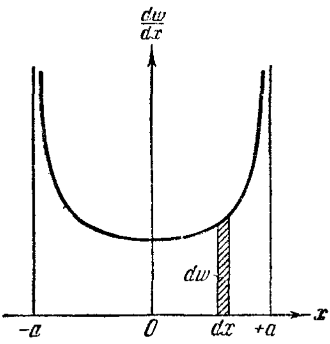

Рис. 168.

[1]) Эта кривая описывается уравнением

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

всякого достоверного события, должна быть равна единице.

Отметим, что квантовая механика дает для вероятности различных положений гармонического осциллятора существенно отличный результат.

§ 65. Малые колебания системы вблизи положения равновесия

Рассмотрим произвольную механическую систему, положение которой может быть задано с помощью одной величины, которую мы обозначим через x. В таких случаях говорят, что система имеет одну степень свободы. Величиной x, определяющей положение системы, может быть угол, отсчитываемый от некоторой плоскости, или расстояние, отсчитываемое вдоль заданной кривой, в частности прямой, линии и т. п. Потенциальная энергия системы будет функцией одной переменной x: $E_p = E_p(x)$. Выберем начало отсчета x таким образом, чтобы в положении равновесия системы x был равен нулю. Тогда функция $E_p(x)$ будет иметь минимум при $x = 0$. Разложим $E_p(x)$ в ряд по степеням x, причем ограничимся рассмотрением малых колебаний, так что высшими степенями x можно будет пренебречь. По формуле Маклорена

$$E_p(x) = E_p(0) + E_p'(0)\,x + \frac{1}{2}E_p''(0)\,x^2$$

(ввиду малости x остальными членами пренебрегаем).

Поскольку $E_p(x)$ при $x = 0$ имеет минимум, $E_p'(0)$ равна нулю, а $E_p''(0)$ положительна. Введем обозначения: $E_p(0) = b$, $E_p''(0) = k$ $(k > 0)$. Тогда

$$E_p(x) = b + \frac{1}{2}kx^2. \tag{65.1}$$

Выражение (65.1) идентично с выражением (62.3) для потенциальной энергии системы, в которой действует квазиупругая сила (константу b можно положить равной нулю).

Используя соотношение (28.5), можно найти силу, действующую на систему:

$$f = f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -kx.$$