Билет 1

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение линейного (векторного) пространства.
2. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Задачи

3. Найти базис и рамерность линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2, -1, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (-3, -4, 9)^T$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, -5, 6)^T$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.
5. Найти матрицу линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если A переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (3, 11)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 4)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (0, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 0)^T$ соответственно.
6. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $3x^2 + 6y^2 - 4xy$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.

Задача

8. В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B} = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ к базису $\mathcal{B}' = \{1, t+2, (t+2)^2, (t+2)^3\}$.

ЛА, РК1; для ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ; 2013-2014 уч. год

Билет 2

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
2. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.

Задачи

3. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0, 0)^T$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение стандартное).
4. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 5)^T$ к базису $\boldsymbol{b}_1 = (-1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (2, -1)^T$ пространства $\mathbb{R}^2$.
5. Линейный оператор A, действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.
6. Привести квадратичную форму $4x_1x_3 + x_3^2 + 2x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

Задача

8. Привести кривую $-3x^2 + 3y^2 + 8xy - 8\sqrt{5}x - 6\sqrt{5}y + 15 = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Посторить кривую в исходной системе координат.

Билет 3

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение базиса и размерности линейного пространства.
2. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

Задачи

3. Вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(1,-1)^T$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^T$. Найти его координаты в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = (2,1)^T$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1,1)^T$.
4. Базис $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворотом на $90°$ против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{i}$. Базис $\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$ получается из базиса $\mathcal{B}'$ поворотом на $90°$ по часовой стрелке вокруг вектора $\boldsymbol{k}'$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}''$.
5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$.
6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 5x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Задача

8. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $2x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-8yz$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат.

Билет 4

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.
2. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Задачи

3. Принадлежит ли вектор $\boldsymbol{c} = (-9, 11, 7, 7)^T \in \mathbb{R}^4$ линейной оболочке векторов $\boldsymbol{a} = (3,2,1,1)^T$ и $\boldsymbol{b} = (-7,1,1,1)^T$? Если да, то разложить его по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.
4. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1,x_2) = -x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1,y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$.
5. Найти матрицу линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если A переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (3,-2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-4,3)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (-1,-1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,1)^T$ соответственно.
6. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $4xy - 4x^2 - y^2$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Задача

8. В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B} = \{1, t+1, (t+1)^2, (t+1)^3\}$ к базису $\mathcal{B}' = \{1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3\}$.

Билет 5

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.
2. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Задачи

3. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (0,1,1,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,1,1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,0,0)^T$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение стандартное).
4. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1 = (-1,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (4,-2)^T$ к базису $\boldsymbol{b}_1 = (1,1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (3,5)^T$ пространства $\mathbb{R}^2$.
5. Линейный оператор A, действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = -2\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$.
6. Привести квадратичную форму $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

Задача

8. Привести кривую $9x^2 + y^2 + 6xy + 12\sqrt{10}x + 4\sqrt{10}y + 30 = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.

Билет 6

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
2. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

Задачи

3. Вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(-1,1)^T$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (1,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1)^T$. Найти его координаты в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (2,5)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,2)^T$.
4. Базис $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{j}$. Базис $\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$ получается из базиса $\mathcal{B}'$ поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{k}'$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}''$.
5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} -9 & -25 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.
6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $-x_1^2 + 6x_1x_4 - 3x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Задача

8. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $-x^2 - y^2 - 7z^2 + 16xy - 8xz - 8yz$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат.

Билет 7

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.
2. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.

Задачи

3. Найти базис и рамерность линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (3,-2,-3)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,3)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,-6,-9)^T$, $\boldsymbol{a}_4 = (-5,6,9)^T$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1,y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}_1' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$.
5. Найти матрицу линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если A переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1,2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,4)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 = (2,2)^T$ соответственно.
6. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $7x^2 - y^2 + 6xy$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

Задача

8. В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B} = \{1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3\}$ к базису $\mathcal{B}' = \{1, t+2, (t+2)^2, (t+2)^3\}$.

Билет 8

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.
2. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

Задачи

3. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,1,1,0)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (-2,4,6,1)^T$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение стандартное).
4. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1 = (7,3)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (6,2)^T$ к базису $\boldsymbol{b}_1 = (5,3)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,2)^T$ пространства $\mathbb{R}^2$.
5. Линейный оператор A, действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1' = -3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.
6. Привести квадратичную форму $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3 - x_2^2$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.

Задача

8. Привести кривую $32x^2 + 7y^2 + 60xy + 20\sqrt{13}x + 22\sqrt{13}y + 39 = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.

Билет 9

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.
2. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

Задачи

3. Вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(2,5)^T$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^T$. Найти его координаты в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = (7,4)^T$, $\boldsymbol{e}'_2 = (2,1)^T$.
4. Базис $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{k}$. Базис $\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$ получается из базиса $\mathcal{B}'$ поворотом на 45° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{i}'$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}''$.
5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $-2x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 2x_3x_4 - 2x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Задача

8. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $5x^2 + 37y^2 + 10z^2 - 24xy - 12xz + 36yz$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат.

Билет 10

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.
2. Записать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.

Задачи

3. Принадлежит ли вектор $\boldsymbol{c} = (1,2,3,4)^T \in \mathbb{R}^4$ линейной оболочке векторов $\boldsymbol{a} = (1,-1,1,-1)^T$ и $\boldsymbol{b} = (3,3,-2,-2)^T$? Если да, то разложить его по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.
4. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1,y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.
5. Найти матрицу линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если A переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (3,2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,3)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (1,3)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,2)^T$ соответственно.
6. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $4xy - 5x^2 - 8y^2$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Задача

8. В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B} = \{1, t+2, (t+2)^2, (t+2)^3\}$ к базису $\mathcal{B}' = \{1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3\}$.

Билет 11

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.
2. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.

Задачи

3. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (2,-1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1,2,-1,0)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1,-1,2,-1)^T$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение стандартное).
4. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1 = (7,3)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1)^T$ к базису $\boldsymbol{b}_1 = (3,2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,3)^T$ пространства $\mathbb{R}^2$.
5. Линейный оператор A, действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -11 & -30 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1' = -3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = 5\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$.
6. Привести квадратичную форму $-4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

Задача

8. Привести кривую $15x^2 - 16xy - 15y^2 + 2\sqrt{17}x + 2\sqrt{17}y + 16 = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.

Билет 12

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.
2. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Задачи

3. Вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(1,1)^T$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (3,-2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2,-3)^T$. Найти его координаты в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (7,-2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (-4,1)^T$.
4. Базис $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворотом на 60° по часовой стрелке вокруг вектора $\boldsymbol{k}$. Базис $\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$ получается из базиса $\mathcal{B}'$ поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{j}'$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}''$.
5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$.
6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $x_1^2 + 6x_1x_4 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Задача

8. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат.