Лекция 8, 9. «Элементы релятивистской механики».

Преобразования Галилея. Инвариантность уравнений механики относительно преобразований Галилея. Специальная теория относительности. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Кинематические следствия из преобразований Лоренца. Релятивистский закон сложения скоростей. Интервал. Элементы релятивистской динамики. Взаимосвязь массы и энергии. Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы. Основное уравнение релятивистской динамики.

Математическое отступление.

Понадобится формула разложения в ряд Тейлора для малых x

$$\left(1-x\right)^{\alpha} \approx 1-\alpha x$$

Принцип относительности Галилея

Законы классической механики не зависят от выбора инерциальной системы отсчеты. Время абсолютно, не зависит от систем отсчета, везде течет вперед с одинаковой скоростью. (Может меняться только начальный момент времени.)

Принцип относительности Галилея: Если в двух замкнутых лабораториях, одна из которых движется равномерно прямолинейно (и поступательно) относительно другой, провести одинаковый механический эксперимент, то результат будет одинаковым.

Это приводит к требованию инвариантности уравнений механики относительно преобразований Галилея.

При переходе от одной системы отсчета к другой радиус-векторы точек связаны соотношением

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R}_{21},$$

где $\vec{R}_{21}$ - вектор, задающий положение одной системы отсчета относительно другой. Промежутки времени одинаковые $\Delta t_1 = \Delta t_2$. Учитывая, что масштаб времени не меняется, получаем уравнения связи для скоростей и ускорений

$$\vec{\mathrm{v}}_2 = \vec{\mathrm{v}}_1 + \vec{\mathrm{v}}_{21},$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{21},$$

где $\vec{\mathrm{v}}_{21} = \dfrac{d\vec{R}_{21}}{dt}$, $\vec{a}_{21} = \dfrac{d\vec{a}_{21}}{dt}$ - векторы скорости и ускорения второй системы отсчет относительно первой.

Выберем класс инерциальных систем отсчета. Эти системы отсчета могут двигаться с разными скоростями, но их относительные ускорения нулевые, поэтому при переходе от одной инерциальной системы к другой ускорения точек не меняется. Так как векторы сил тоже не зависят от системы отсчета, то второй закон Ньютона в них выглядит одинаково

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Специальная теория относительности.

СТО создана Эйнштейном в 1905 г.

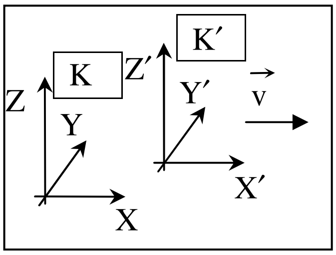
Сигнал - это процесс, с помощью которого можно передать из одной точки в другую силовое воздействие. Т.е. сигнал должен передавать импульс и энергию. В СТО сигналом является световой (электромагнитный) сигнал.

Постулаты СТО

1. <u>Принцип постоянства скорости света</u>: скорость света не зависит от движения источника и одинакова во всех инерциальных системах отсчета в вакууме и является предельной скоростью передачи сигнала. Величина скорости света в вакууме равна $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.
2. <u>Принцип относительности</u>. Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета – уравнения выражающие законы природы инвариантны при переходе от одной системы отсчета к другой.

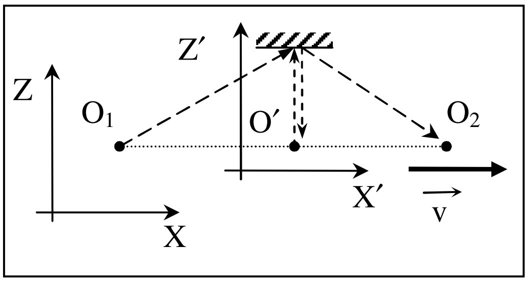
Скорости точек, величина которых сравнима со скоростью света (и, конечно, обязательно меньше!) называются *релятивистскими*.

С помощью сигнала можно производить синхронизацию часов (согласование показаний), расположенных в различных точках пространства – из одной точки в момент времени t по собственным часам отсылается сигнал во вторую точку, находящуюся на расстоянии L. Во второй точке на собственных часах выставляется время $t+\frac{L}{c}$.



Рассматриваем две инерциальные системы отсчета K и K′. Пусть система K′ движется вдоль оси X системы K со скоростью v так, что соответствующие оси обеих систем остаются параллельными друг другу. Так как при малых скоростях поперечные координаты тел во всех инерциальных системах отсчета одинаковы, то это должно выполняться и при релятивистских скоростях. Действительно, если рассмотреть последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся в одном направлении, значение скоростей которых возрастает на небольшую величину при переходе от одной системы к другой, то получим, что при любых попарных сравнениях всегда поперечные размеры не меняются.

В системе K′ рассмотрим сигнал, пущенный вдоль оси Z′ из точки O′. Пусть этот сигнал отразившись от покоящегося в этой системе отсчета зеркала вернется обратно в точку O′. Если расстояние между точкой O′ и зеркалом равно S, то по собственным часам системы K′ пройдет промежуток времени $\Delta t' = \frac{2S}{c}$. Расстояние вдоль вертикальной оси в обеих системах одинаковое. Скорость светового сигнала тоже одинаковая.



Так как точка O′ движется относительно системы K, то в этой системе отсчета сигнал будет испущен в точке O_1 и принят в точке O_2. Поэтому по собственным часам системы K промежуток времени надо определить из равенства $\Delta t = \frac{2\sqrt{S^2+\left(\mathrm{v}\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)^2}}{c}$.

Откуда $\Delta t = \frac{2S}{\sqrt{(c)^2-(\mathrm{v})^2}}$. Поэтому $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{2S}{c}\frac{\sqrt{c^2-\mathrm{v}^2}}{2S} = \sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$. Таким образом, промежутки времени связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}.$$

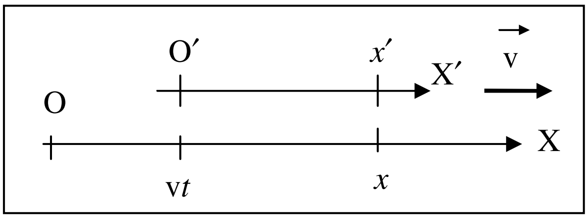
Пусть в подвижной системе отсчета K′ параллельно оси X′ расположен стержень длиной L_0. При движении этого стержня со скоростью V вдоль оси X неподвижной системы K он пройдет неподвижные часы за время $\Delta t_0 = \frac{L}{\mathrm{V}}$. В системе K′ эти же часы пролетят стержень за время $\Delta t = \frac{L_0}{\mathrm{V}}$. Так как часы движутся со скоростью V, то их показания в неподвижной системе отсчета связаны с показаниями в подвижной системе $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$

Откуда получаем $\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$ или

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\,.$$

Таким образом, понятие длины – относительное. Уменьшение длины – это кинематический эффект – в теле не возникает никаких деформаций.

Закон преобразования координат



Так как координата – это расстояние вдоль оси от нулевой точки, то координате x' в движущейся системе К′ соответствует отрезок О′x', длина которого $|x'|$. Поэтому в системе К ему соответствует длина $|x'|\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$. В системе К координата точки О′ равна vt, поэтому $|x'|\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}=|x-\mathrm{v}t|$. В координатной записи справедливо равенство

$x = x'\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}+\mathrm{v}t$ или

$$x' = \frac{x-\mathrm{v}t}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,.$$

Но системы отсчета К и К′ равноправны. Поэтому можно считать, что система К движется относительно К′ в противоположном направлении оси X′ со скоростью -v.

Поэтому можно записать $x = \frac{x'+\mathrm{v}t'}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$.

Используя эти формулы найдем преобразования для времени

$$x' = \frac{x-\mathrm{v}t}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{x'+\mathrm{v}t'}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}-\mathrm{v}t}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \frac{x'+\mathrm{v}t'-\mathrm{v}t\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}},\quad x'\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) = x'+\mathrm{v}t'-\mathrm{v}t\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\,,$$

$$\mathrm{v}t\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} = x'\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}+\mathrm{v}t'\,,$$

$$t = \frac{\frac{\mathrm{v}}{c^2}x'+t'}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,.$$

Аналогично, получаем

$$t' = \frac{t-\frac{\mathrm{v}}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$$

Окончательно формулы перехода от одной системы отсчета к другой в данном случае движения имеют вид:

$$t'=\frac{t-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}},\quad x'=\frac{x-\mathrm{v}t}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}},$$

$$y'=y,\qquad z'=z.$$

В СТО время является координатой. Т.е. положение точки задается 4мя координатами (t,x,y,z). Это 4х мерное пространство называется *мировым пространством*. Каждая точка мирового пространства называется *мировой точкой*. Траектория точки в мировом пространстве называется *мировой линией*. Например, если точка покоится в обычном 3х мерном пространстве, то её мировой линией является прямая, параллельная оси *t*.

Интервалом между двумя событиями (мировыми точками) в СТО называется величина, квадрат которой определяется как

$$s^2=c^2\left(t_2-t_1\right)^2-\left[\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2\right].$$

Найдем квадрат интервал между двумя событиями в системе К′:

$$s'^2=c^2\left(t_2'-t_1'\right)^2-\left[\left(x_2'-x_1'\right)^2+\left(y_2'-y_1'\right)^2+\left(z_2'-z_1'\right)^2\right]$$

$$s'^2=c^2\left(\frac{t_2-t_1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)\left(x_2-x_1\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}\right)^2-\left[\left(\frac{x_2-x_1-\mathrm{v}\left(t_2-t_1\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2\right]$$

$$s'^2=\left(\frac{\left(c+\mathrm{v}\right)\left(t_2-t_1\right)-\left(1+\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\right)\left(x_2-x_1\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}\right)\left(\frac{\left(c-\mathrm{v}\right)\left(t_2-t_1\right)+\left(1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\right)\left(x_2-x_1\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}\right)-\left(y_2-y_1\right)^2-\left(z_2-z_1\right)^2$$

$$s'^2=c^2\left(t_2-t_1\right)^2-\left[\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2\right]=s^2$$

Получается, что величина интервала не зависит от системы отсчета. Как принято говорить, интервал является *инвариантной* величиной

$$s'^2=inv.$$

При преобразованиях Галилея время абсолютно, поэтому инвариантность интервала эквивалентна сохранению расстояния между двумя точками в обычном трехмерном пространстве при переходе от одной системы отсчета. *Поэтому интервал в СТО является аналогом расстояния между двумя мировыми точками*.

Интервал называется *времениподобным*, если $s^2>0$ и *пространственноподобным*, если $s^2<0$. Для светового луча всегда $s^2=0$. Это эквивалентно уравнению

$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2-\left[\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2\right]=0,$$

которое задает в обычном трехмерном пространстве расширяющуюся с течением времени сферу $\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2=R^2$, где $R^2=c^2\left(t_2-t_1\right)^2$.

Поверхность в мировом пространстве, для которой $s^2=0$ называется *световым конусом*. Световой конус можно задать для любой точки. Если два события как две мировые точки связаны времениподобным интервалом, то одна из этих точек лежит внутри светового конуса другой точки и существует такая трехмерная система отсчета, в которой эти два события произошли в одном месте, но в разное время.

И наоборот, если два события как две мировые точки связаны пространственноподобным интервалом, то ни одна из этих точек не лежит внутри светового конуса другой точки и существует такая трехмерная система отсчета, в которой эти два события произошли в одно время, но в разных точках.

Если между двумя событиями можно установить причинно-следственную связь, то есть сказать, что одно событие является причиной другого, то эти события должны быть связаны времениподобным интервалом.

Преобразование скорости.

Пусть точка движется в системе отсчета К вдоль оси X со скоростью v_x, найдем ее скорость в системе К′:

$$dt'=\frac{dt-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}},\quad dx'=\frac{dx-\mathrm{v}dt}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}.$$

$$v_x'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}\left(dx-\mathrm{v}dt\right)}{\left(dt-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)dx\right)\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}=\frac{\frac{dx}{dt}-\mathrm{v}}{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)\frac{dx}{dt}}=\frac{v_x-\mathrm{v}}{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)v_x}$$

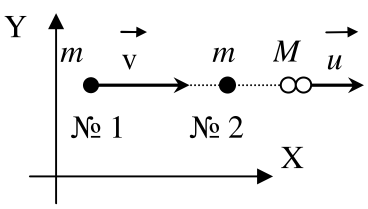
$$v_x'=\frac{v_x-\mathrm{v}}{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)v_x}$$

Пусть точка движется в системе отсчета К вдоль оси Y со скоростью v_y, найдем ее скорость в системе К′ $v_y'=\frac{dy'}{dt'}=\frac{dy\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}{\left(dt-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)dx\right)}=\frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}{\left(1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)\frac{dx}{dt}\right)}=v_y\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}$

$$v_y'=v_y\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}$$

Релятивистский импульс.

Рассмотрим абсолютно неупругое столкновение двух одинаковых частиц в системе отсчета К. При этом будем считать, что частица №1 массы m налетает на покоящуюся частицу № 2 массы M со скоростью v, двигаясь вдоль оси X. Из закона сохранения импульса вдоль оси X в системе отсчета К следует



$$m\mathrm{v}=Mu.$$

В классическом приближении $M=2m$, $u=\frac{\mathrm{v}}{2}$.

В релятивистском случае массы могут зависеть от величины скорости частиц

$$m(\mathrm{v})\mathrm{v}=M(u)u.$$

Перейдем в систему отсчета К′, которая движется вдоль оси X со скоростью v. В этой системе частица № 1 покоится, а № 2 движется со скоростью –v. Закон сохранения импульса вдоль оси X′ имеет вид

$$-m(\mathrm{v})\mathrm{v}=-M(u)u.$$

Но по формуле преобразования скорости при переходе от системы К к системе К′:

$$-u=\frac{u-\text{v}}{1-\left(\frac{\text{v}}{c^2}\right)u}.$$

Откуда

$$\text{v}=\frac{2u}{1+\left(\frac{u^2}{c^2}\right)}.$$

Рассмотрим сохранение импульса вдоль оси Y – для этого перейдем в систему отсчета К″, которая движется против оси Y с некоторой скоростью v_0. В этой системе отсчета

- скорость налетающей частицы $v''=\sqrt{v_x''^2+v_y''^2}$, где $v_y''=v_0$, $v_x''=v\sqrt{1-\left(\frac{\text{v}_0}{c}\right)^2}$,
- скорость покоящейся частицы равна v_0,
- скорость образовавшейся частицы $u''=\sqrt{u_x''^2+u_y''^2}$, где $u_y''=v_0$, $u_x''=u\sqrt{1-\left(\frac{\text{v}_0}{c}\right)^2}$.

Закон сохранения импульса вдоль оси Y:

$$m\left(\text{v}''\right)\text{v}_y''+m\left(\text{v}_y''\right)\text{v}_y''=M\left(u''\right)u_y''$$

С учетом того, что скорости всех частиц вдоль оси Y одинаковые получаем

$$m\left(\text{v}''\right)+m\left(\text{v}_y''\right)=M\left(u''\right).$$

Это равенство выполняется при любых скоростях вдоль оси X. В частности, при $v_y''=v_0=0$ это соотношение переходит в равенство:

$$m\left(\text{v}\right)+m\left(0\right)=M\left(u\right).$$

Подставим его в уравнение для импульса вдоль оси X: $m\left(\text{v}\right)\text{v}=M\left(u\right)u$ и получим

$$m\left(\text{v}\right)\text{v}=\left[m\left(\text{v}\right)+m\left(0\right)\right]u,$$

откуда $m\left(\text{v}\right)=m\left(0\right)\frac{u}{\text{v}-u}$.

Выразим скорость u из равенства $\text{v}=\frac{2u}{1+\left(\frac{u^2}{c^2}\right)}$:

$$\text{v}u^2-2uc^2+c^2\text{v}=0,\ D=4c^4-4c^2\text{v}^2=4c^4\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right),\ u_{1,2}=\frac{c^2\pm c^2\sqrt{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}}{\text{v}}.$$

Решение $\frac{u_1}{c}=\frac{c+c\sqrt{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}}{\text{v}}=\frac{c}{\text{v}}\left(1+\sqrt{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}\right)>1$ надо отбросить как противоречащее постулату о максимальности скорости света.

Подстановка второго решения $u=\frac{c^2-c^2\sqrt{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}}{\text{v}}$, приводит к зависимости

$$m(\mathrm{v})=m(0)\frac{\dfrac{c^2-c^2\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}-\dfrac{c^2-c^2\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}{\mathrm{v}}},\ m(\mathrm{v})=m(0)\frac{c^2-c^2\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}\left\{c^2-c^2\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}\right\}}=m(0)\frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}},$$

$$m(\mathrm{v})=\frac{m(0)}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}.$$

Величину массы в системе отсчета, где тело покоится, будем обозначать $m_0=m(0)$ и называть *массой покоя*. Соответственно, величину $m(\mathrm{v})=\dfrac{m_0}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}$ называют *релятивистской массой.*

Выражение для *релятивистского импульса* $\vec{p}=\dfrac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=m\vec{\mathrm{v}}$.

В классической механике при абсолютно неупругом ударе механическая энергия не сохраняется. Но из закона сохранения импульса следуют выражения для масс $M=2m$ и для скоростей $u=\dfrac{\mathrm{v}}{2}$.

В релятивистском случае $u=\dfrac{c^2-c^2\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}{\mathrm{v}}$. При $\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}<<1$ $\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}\approx 1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}$ получаем $u\approx\dfrac{c^2-c^2\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}{\mathrm{v}}=\dfrac{\mathrm{v}}{2}$, т.е. равенство выполняется только при $\mathrm{v}\to 0$.

Рассмотрим соотношение для масс $m(\mathrm{v})+m(0)=M(u)$, которое выполняется при любых скоростях. Если перейти в систему отсчета, где М покоится после удара, то в ней тела 1 и 2 будут двигаться до удара с одинаковыми скоростями $\dfrac{u}{2}$, но направленными навстречу друг другу. Следовательно, будет справедливо равенство

$$m\left(\frac{u}{2}\right)+m\left(-\frac{u}{2}\right)=M(0)$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{4c^2}\right)}}+\frac{m_0}{2\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{4c^2}\right)}}=M_0$$

При $\dfrac{u^2}{c^2}<<1$ $\left(1-\dfrac{u^2}{4c^2}\right)^{-1/2}\approx 1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{u^2}{4c^2}$, $\dfrac{2m_0}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{4c^2}\right)}}\approx 2m_0\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{u^2}{4c^2}\right)$

В системе отсчета, где составная частица покоится, обе движущиеся частицы имели суммарную классическую кинетическую энергию $W=\frac{m_0\left(\frac{u}{2}\right)^2}{2}+\frac{m_0\left(\frac{u}{2}\right)^2}{2}=\frac{m_0u^2}{4}$, поэтому равенство

$$2m_0+\frac{m_0u^2}{4c^2}=M_0$$

показывает, что масса образовавшейся частицы больше суммарной массы покоя частиц за счет *наличия кинетической энергии*. Если покоящемуся телу массы m_0 приписать энергию покоя $W_0=m_0c^2$,то это равенство для масс можно трактовать как закон сохранения энергии

$$M_0c^2=2m_0c^2+W_{КИН}\,.$$

Основное уравнение релятивистской динамики.

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

Это выражение можно записать в виде $\frac{d}{dt}\vec{p}=\frac{d}{dt}\left(m\vec{\text{v}}\right)=\vec{\text{v}}\frac{dm}{dt}+m\frac{d\vec{\text{v}}}{dt}=\vec{F}$

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}}\right)=m_0\left(-\frac{1}{2}\frac{-2\frac{\left(\vec{\text{v}},\vec{a}\right)}{c^2}}{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right)=\frac{m_0\left(\vec{\text{v}},\vec{a}\right)}{c^2\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{m_0\left(\vec{\text{v}},\vec{a}\right)\vec{\text{v}}}{c^2\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m\vec{a}=\vec{F}$$

Отсюда видно, что вектор ускорения и вектор силы не совпадают по направлению.

1) Если вектор скорости и ускорения перпендикулярны друг другу, то $m\vec{a}=\vec{F}$

2) Если вектор скорости и ускорения параллельны друг другу, то в случае, если они сонаправлены $\left(\vec{\text{v}},\vec{a}\right)\vec{\text{v}}=\text{v}a\vec{\text{v}}=\text{v}\vec{a}\text{v}=\vec{a}\text{v}^2$ и

$$\frac{m_0\vec{a}\text{v}^2}{c^2\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m\vec{a}=\vec{F}\,,\quad \left(\frac{m_0\text{v}^2}{c^2\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m\right)\vec{a}=\vec{F}$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}}\left(\frac{\text{v}^2}{c^2\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}+1\right)\vec{a}=\vec{F}\,,\quad \frac{m_0}{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}\vec{a}=\vec{F}$$

Но если они направлены противоположно $\left(\vec{\text{v}},\vec{a}\right)\vec{\text{v}}=-\text{v}a\vec{\text{v}}=-\text{v}\vec{a}\text{v}=-\vec{a}\text{v}^2$, то

$$\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}\right)\vec{a}=\vec{F}\,,\quad m_0\vec{a}\frac{\left(1-2\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\text{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\vec{F}$$

В общем случае для мощности силы $\dfrac{m_0(\vec{\mathrm{v}},\vec{a})(\vec{\mathrm{v}},\vec{\mathrm{v}})}{c^2\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m(\vec{\mathrm{v}},\vec{a})=(\vec{F},\vec{\mathrm{v}})$

$$\frac{m_0(\vec{\mathrm{v}},\vec{a})(\vec{\mathrm{v}},\vec{\mathrm{v}})}{c^2\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}+\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}(\vec{\mathrm{v}},\vec{a})=(\vec{F},\vec{\mathrm{v}}),\quad \left(\frac{\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}+1\right)\frac{m_0(\vec{\mathrm{v}},\vec{a})}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}=(\vec{F},\vec{\mathrm{v}}),$$

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}\frac{m_0(\vec{\mathrm{v}},\vec{a})}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}=(\vec{F},\vec{\mathrm{v}}),\quad \frac{m_0(\vec{\mathrm{v}},\vec{a})}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}=(\vec{F},\vec{\mathrm{v}}),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right)=(\vec{F},\vec{\mathrm{v}})$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$W_{КИН\_2}-W_{КИН\_1}=A$$

Следовательно, можно принять в качестве кинетической энергии $W_{КИН}=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}+C$.

Значения постоянной С определим из условия равенства нулю кинетической энергии при нулевой скорости $0=m_0c^2+C$, откуда $C=-m_0c^2$.

$$W_{КИН}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}-m_0c^2.$$

С учетом выражения $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$, $W_{КИН}=(m-m_0)c^2$.

При малых скоростях $\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}<<1$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}$, поэтому получаем классическую формулу для кинетической энергии.

$$W_{КИН}\approx m_0c^2\left[1+\frac{\mathrm{v}^2}{2c^2}\right]-m_0c^2=\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2}$$

Рассмотрим выражения $\left(W_{КИН}+m_0c^2\right)^2=\dfrac{{m_0}^2c^4}{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$ и $p^2c^2=\dfrac{{m_0}^2\mathrm{v}^2}{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$.

Они связаны соотношением $\left(W_{КИН}+m_0c^2\right)^2-p^2c^2=\dfrac{{m_0}^2c^4}{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}-\dfrac{{m_0}^2\mathrm{v}^2}{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}={m_0}^2c^4$

Если ввести энергию покоя тела $W_0=m_0c^2$, то полная энергия тела будет определяться формулой

$$W = W_{КИН} + W_0 = \left(m - m_0\right)c^2 + m_0 c^2 = mc^2,$$

или

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$$

Так как правая часть выражения

$$W^2 - p^2 c^2 = m_0{}^2 c^4,$$

не зависит от системы отсчета, то соотношение между полной энергией и импульсом – является инвариантом при любых преобразованиях инерциальных систем отсчета

$$W^2 - p^2 c^2 = inv.$$

Преобразование импульса и энергии

Пусть в системе отсчета К импульс тела направлен вдоль оси X: $p = p_x = \dfrac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$. Полная энергия $W = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$. В системе отсчета К′, которая движется вдоль оси X со скоростью v, импульс тела соответственно равен $p' = p'_x = \dfrac{m_0 u'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$, $W = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$.

Скорости связаны соотношением $u = \dfrac{u' + \mathrm{v}}{1 + \frac{\mathrm{v} u'}{c^2}}$.

Тогда $p_x = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u' + \mathrm{v}}{1 + \frac{\mathrm{v}}{c^2} u'}\right)^2}} \dfrac{u' + \mathrm{v}}{1 + \frac{\mathrm{v}}{c^2} u'}$,

$$p_x = \frac{m_0\left(u' + \mathrm{v}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{v}u'}{c^2}\right)^2 - \frac{\left(u' + \mathrm{v}\right)^2}{c^2}}}, \quad p_x = \frac{m_0\left(u' + \mathrm{v}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}\sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}},$$

$$p_x = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} u' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \frac{\mathrm{v}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \frac{p_x{}' + \frac{W'}{c^2}\mathrm{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}, \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u' + \mathrm{v}}{1 + \left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)u'}\right)^2}},$$

$$W = \frac{m_0 c^2\left(1 + \frac{\mathrm{v}}{c^2} u'\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{v}}{c^2} u'\right)^2 - \frac{\left(u' + \mathrm{v}\right)^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2\left(1 + \frac{\mathrm{v}}{c^2} u'\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}\sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}},$$

$$W=\frac{\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u'^2}{c^2}\right)}}+\dfrac{m_0u'}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u'^2}{c^2}\right)}}\mathrm{v}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}=\frac{W'+p_x'\mathrm{v}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}.$$

Сравним формулы преобразования импульса, энергии и координат

$p_x=\dfrac{p_x'+\left(\dfrac{W'}{c^2}\right)\mathrm{v}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$	$\left(\dfrac{W}{c^2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{W'}{c^2}\right)+p_x'\dfrac{\mathrm{v}}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}}$
$x=\dfrac{x'+\mathrm{v}t'}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$	$t=\dfrac{\dfrac{\mathrm{v}}{c^2}x'+t'}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$

Если установить соответствие – энергия (деленная на c^2) и время, проекция импульса и координата, то можно увидеть, что их формулы преобразования идентичны.

Преобразование частоты.

Рассмотрим монохроматическую световую волну, распространяющуюся вдоль оси X. Фаза волны $\Phi=\omega t-kx+\alpha$. Количество длин волн, которое пройдет между двумя точками x_1 и x_2 за промежуток времени от t_1 до t_2 определяется как $N=\dfrac{\omega(t_2-t_1)-k(x_2-x_1)}{2\pi}$. Эта величина не меняется при переходе к другой системе отсчета. Следовательно, не должна меняться фаза волны – т.е. максимуму волны в одной системе отсчета должен соответствовать максимум в другой системе. Т.е. $\Phi=\omega t-kx+\alpha=const$ или $\Phi=2\pi\nu t-\dfrac{2\pi\nu}{c}x+\alpha=const$, откуда

$$2\pi\nu\left(t-\frac{1}{c}x\right)=2\pi\nu'\left(\frac{t-\dfrac{\mathrm{v}}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}-\frac{1}{c}\frac{x-\mathrm{v}t}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right),\quad \nu\left(t-\frac{1}{c}x\right)=\nu'\frac{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\left(t-\frac{1}{c}x\right)$$

$$\nu=\nu'\frac{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=\nu'\frac{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}{\sqrt{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)\left(1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}}=\nu'\sqrt{\frac{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}},$$

Таким образом, $\nu=\nu'\sqrt{\dfrac{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}}$ или $\omega=\omega'\sqrt{\dfrac{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}}{c}\right)}}$.

Если в системе отсчета К частота волны равна ν, то в системе К′, которая движется в направлении движения волны со скоростью v, частота будет меньше $\omega' = \omega\sqrt{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)}}$, а в системе К′′, которая движется в противоположном направлении частота будет больше $\omega'' = \omega\sqrt{\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}}$.

Зависимость частоты сигнала от скорости источника называется эффектом Доплера.
Именно эффектом Доплера объясняют смещения спектров излучения звезд в сторону коротких длин волн при удалении звезды от земного наблюдателя (ультрафиолетовое смещение) и в сторону длинных волн при приближении (красное смещение).