Лекция 7. «Механические волны».

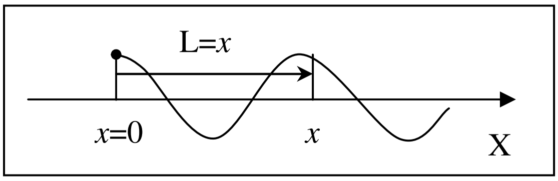
Виды механических волн. Упругие волны в стержнях. Волновое уравнение. Плоская гармоническая волна, длина волны, фазовая скорость. Сферические волны. Объемная плотность энергии волны. Вектор Умова – вектор плотности потока энергии. Когерентные волны. Интерференция волн. Стоячая волна.

Волна – это процесс распространения возмущений некоторой физической величины в пространстве с течением времени. Если возмущения описываются как механическое движение среды, то волна называется *механической*. Например, возмущения могут представлять собой отклонения точек среды от своих положений равновесия. Если эти отклонения направлены перпендикулярно движению волны, то волна называется *поперечной*, если параллельны - то *продольной*. Примером поперечных волн являются волны на поверхности жидкости или колебания гитарной струны. В глубине жидкости или в газе могут распространяться только продольные волны. Примером является звуковая волна – колебания давления (плотности) в газе или жидкости.

Важное свойство волновых движений состоит в *локальной связи между возмущениями в близких точках среды*. То есть отклонение от положения одной точки вызывает отклонения соседних близких точек. Локальная связь между точками является причинно-следственной связью, поэтому процесс распространения возмущения в таких средах имеет конечную скорость.

Монохроматическая волна – это идеализация волнового процесса – это бесконечная волна, при которой состояние среды описывается с помощью гармонической функции постоянной частоты.

Рассмотрим поперечную монохроматическую волну, испускаемую некоторым источником, находящимся в начале оси X (x=0) и совершающим колебания по гармоническому закону. Пусть его закон колебаний имеет вид $\xi = A\cos(\omega t+\alpha)$. Так как скорость движения волны конечная, то обозначим её через v.



Колебание, испущенное источником в момент времени t придет (без изменений) в точку, отстоящую от источника на расстоянии L, лишь спустя промежуток времени $\Delta t = \frac{L}{\mathrm{v}}$:

$$\xi = A\cos\left(\omega(t-\Delta t)+\alpha\right) = A\cos\left(\omega t - \omega\frac{L}{\mathrm{v}}+\alpha\right)$$

Поэтому колебания в координате x>0 будут иметь вид $\xi = A\cos(\omega t - kx+\alpha)$ - волна, бегущая в положительном направлении оси X, а если x<0, то $\xi = A\cos(\omega t + kx+\alpha)$ - волна, бегущая в отрицательном направлении оси X. Здесь величина $k=\frac{\omega}{\mathrm{v}}$ называется *волновым числом*.

Так как ω - циклическая частота, то временной период $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

k – циклическая частота колебаний по координате X, поэтому пространственный период $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ называется *длиной волны*. Из соотношения $k=\frac{\omega}{\mathrm{v}}$ получаем $\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{\mathrm{v}T}$, откуда получаем $\lambda = \mathrm{v}T$ - то есть длина волны – это расстояние, проходимое волной за время, равное периоду колебаний.

Для функции $\xi = A\cos(\omega t - kx+\alpha)$ выполняются соотношения

$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx+\alpha)$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(\omega t - kx+\alpha)$, $\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ откуда

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Это уравнение называется *волновым уравнением* для одномерного случая (Вдоль координаты X).

Рассмотрим свойства решений этого уравнения.

1. Геометрическое место точек среды, где наблюдаются колебания, называют *волновым полем*. Волновое уравнение – линейное, в том смысле, что сумма двух решений тоже является решением. Это так называемый принцип суперпозиции – *при наложении волновых полей получается поле волновое поле, являющееся их суммой*.

В общем случае решением одномерного волнового уравнения является сумма двух произвольных дважды непрерывно-дифференцируемых функций

$$\xi = f_1\left(x - \mathrm{v}t\right) + f_2\left(x + \mathrm{v}t\right),$$

одна из которых - $f_1\left(x-\mathrm{v}t\right)$ - описывает возмущение, распространяющееся в положительном направлении оси X – его называют *убегающей* волной, а вторая, $f_2\left(x+\mathrm{v}t\right)$ - в отрицательном направлениях оси X – её называют *набегающей* волной.

Действительно, подставим в волновое уравнение выражение

$$\xi = f_1\left(x - \mathrm{v}t\right) + f_2\left(x + \mathrm{v}t\right).$$

Тогда $\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(f_1\left(x-\mathrm{v}t\right) + f_2\left(x+\mathrm{v}t\right)\right) = -\mathrm{v}\cdot f_1'\left(x-\mathrm{v}t\right) + \mathrm{v}\cdot f_2'\left(x+\mathrm{v}t\right)$,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 f_1''\left(x-\mathrm{v}t\right) + \mathrm{v}^2 f_2''\left(x+\mathrm{v}t\right),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1\left(x-\mathrm{v}t\right) + f_2\left(x+\mathrm{v}t\right)\right) = f_1'\left(x-\mathrm{v}t\right) + f_2'\left(x+\mathrm{v}t\right),\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f_1''\left(x-\mathrm{v}t\right) + f_2''\left(x+\mathrm{v}t\right).$$

Штрихи означают производные от функций по аргументу.

При подстановке этих соотношений в волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$:

$$\mathrm{v}^2 f_1''\left(x-\mathrm{v}t\right) + \mathrm{v}^2 f_2''\left(x+\mathrm{v}t\right) = \mathrm{v}^2\left(f_1''\left(x-\mathrm{v}t\right) + f_2''\left(x+\mathrm{v}t\right)\right)$$

получаем тождество.

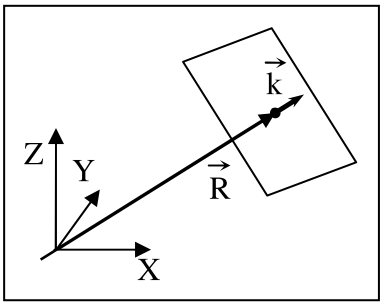
2. Геометрическое место точек в пространстве, для которых фаза волны одинаковая называют *волновой* или *фазовой поверхностью*. В одномерном случае волновая поверхность – это плоскость, которая движется вдоль оси с течением времени $\omega t + kx = const$ или $\omega t - kx = const$. Поэтому волна называется *плоской*. Если волновая поверхность – сфера, то волна называется *сферической*.

Скорость движения плоской фазовой поверхности можно найти дифференцированием по времени уравнений $\omega + k\dot{x} = 0$ или $\omega - k\dot{x} = 0$. Видно, что скорость вдоль оси $\mathrm{v} = \pm\dfrac{\omega}{k}$ по величине совпадает со скоростью волны, определяемой из уравнения. Таким образом, в волновом уравнении $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ присутствует квадрат скорости, которая называется *фазовой скоростью волны*.

Замечание. В общем случае, фазовая скорость может зависеть от параметров волны (амплитуды, частоты). Для случая, когда скорость зависит от частоты волны, имеется особое название – дисперсия волн.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении.

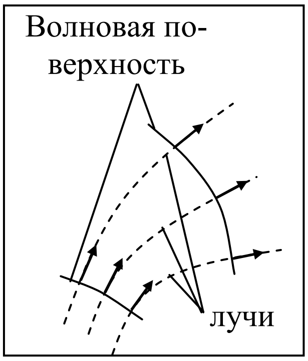
Пусть волна движется в направлении прямой линии, которая проходит через начало координат. Тогда радиус-вектор любой точки, лежащей на этой прямой, тоже лежит на этой прямой и длина этого вектора равна расстоянию R от начала координат. Поэтому уравнение волны, которая бежит вдоль этой прямой можно записать в виде $\xi = A\cos\left(\omega t - kR + \alpha\right)$. Фазовая поверхность перпендикулярна этой прямой. Введем *волновой вектор* $\vec{k}$, направленный перпенди-



кулярно фазовой (волновой) поверхности волны в сторону её движения. Длина вектора $\left|\vec{k}\right| = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ равна волновому числу. Так как волновой вектор параллелен прямой, то можно записать $kR = \left(\vec{k}, \vec{R}\right)$ и $\xi = A\sin\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{R}\right) + \alpha\right)$.

Но для *любой плоской волны* всегда есть прямая линия, перпендикулярная волновой поверхности и проходящая через начало координат, поэтому такая форма записи является общей.

В чем удобство введения волнового вектора? С его помощью можно определять положения любой волновой поверхности. При этом движение волновой поверхности можно описать с помощью лучей. *Луч* – это линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке направлена как волновой вектор.



Волновое уравнение для движения волны в 3х мерном пространстве в общем случае имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}/$$

Если ввести условное обозначение $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \Delta\xi$, то это уравнение можно записать в виде

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

где $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$ так называемый *оператор Лапласа* (**Пьер-Симо́н Лапла́с** – французский ученый).

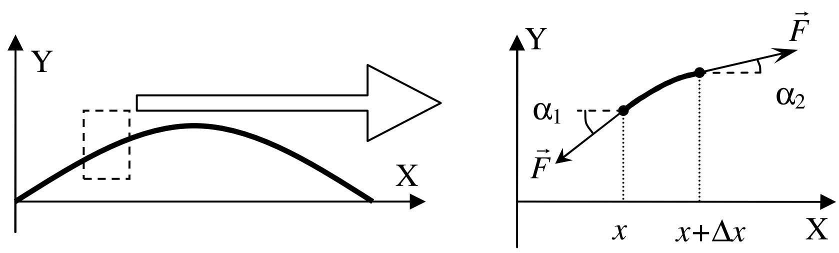
Сферическая волна описывается функцией

$$\xi = \frac{A_0}{R}\cdot cos\left(\omega t + \left(\vec{k}, \vec{R}\right) + \alpha\right) + \frac{A_0}{R}\cdot cos\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{R}\right) + \beta\right).$$

Амплитуда сферической волны обратно пропорциональна расстоянию от центра волны.

Примеры по выводу уравнений колебаний.

Рассмотрим малые поперечные колебания тонкой однородной струны длины L и массы



m, закрепленной с обоих концов. Пусть сила натяжения струны F постоянная по величине. Форма проволоки задается уравнением y(x). Выделим малый кусок проволоки, длина которого вдоль оси X равна Δx, а масса Δm. Так как колебания поперечные, то запишем второй закон Ньютона для куска Δm вдоль оси Y:

$$\Delta m a_y = F\cdot tg\alpha_2 - F\cdot tg\alpha_1$$

$$tg\alpha_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x,\ tg\alpha_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \approx \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_x\cdot\Delta x \text{ (разложение в ряд Тейлора).}$$

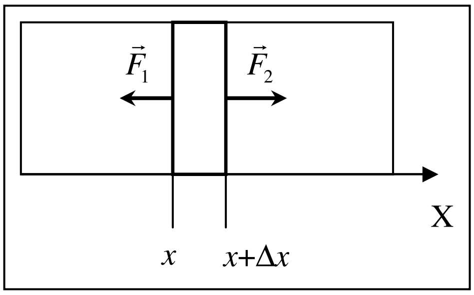
$$\Delta m a_y = F\cdot\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_x\cdot\Delta x\right) - F\cdot\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x = F\cdot\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_x\cdot\Delta x$$

$$\Delta m = \frac{m}{L}\Delta x \text{ и } a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\ \frac{m}{L}\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \cdot \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_x \cdot \Delta x .$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{LF}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} .$$

Поэтому скорость волны в струне $\text{v} = \sqrt{\frac{LF}{m}}$.♣

Если возвращающая сила пропорциональна смещению точки от положения равновесия, то волна называется *упругой*. Выведем волновое уравнение на примере продольных волн деформации в стержне.



Выделим часть стержня длиной Δx. Если площадь поперечного сечения стержня равна S, плотность материала ρ, то масса этой части $\Delta m = \rho S \Delta x$. При деформациях на эту часть стержня действую силы упругости. Запишем второй закон Ньютона – уравнение движения этой части стержня вдоль оси X:

$$\Delta m a_x = F_2 - F_1 .$$

Это уравнение записано в предположении <u>растяжения</u> этой части стержня. Силы с обеих сторон выделенной части вызваны деформацией стержня. При равновесии и отсутствии деформации положение точек в двух близко расположенных сечениях стержня можно задать координатами x и $x+\Delta x$. При деформировании стержня его точки сместятся от равновесных положений. Пусть $x_1(x)$ – задает положение точки стержня при деформации, если её равновесное положение задавалось координатой x. Тогда для близкого сечения новыми координатами будет $x_1+\Delta x_1$. Изменение линейного размера части стержня вызвано смещением точек стержня. Введем величину смещения $\xi = x_1 - x$. По определению, относительная деформация в данном сечении стержня – это отношение изменения длины части стержня к начальной длине этой части: $\varepsilon = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x}$. Если стержень сжимается, то его продольные размеры уменьшаются $\Delta x_1 < \Delta x$ и поэтому $\varepsilon<0$. Таким образом, при сжатии $\varepsilon<0$ и при растяжении $\varepsilon>0$.

Если все точки стержня смещаются на одинаковую величину, то изменения длины участка стержня не происходит. Поэтому деформация равна разности смещений соседних точек $\Delta x_1 - \Delta x = \Delta\xi$. Тогда можно записать $\varepsilon = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$. В пределе (при $\Delta x \to 0$) получаем $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$.

По обобщенному закону Гука $F_1 = \sigma_x S$, $F_2 = \sigma_{x+\Delta x} S$. Напряжения в сечениях стержня найдем по закону Гука: $\sigma_x = E\varepsilon_x$, $\sigma_{x+\Delta x} = E\varepsilon_{x+\Delta x}$, где E – модуль упругости материала (модуль Юнга).

Относительная деформация меняется вдоль стержня, поэтому можно считать, что $\varepsilon_{x+\Delta x} = \varepsilon_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Delta x + ...$ (разложение в ряд Тейлора). Ускорение точек выделенной части стержня $a_x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Последовательно подставим эти соотношения в уравнения движения:

$$\Delta m a_x = F_2 - F_1 :\ \rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma_{x+\Delta x} S - \sigma_x S ,\ \rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E\varepsilon_2 - E\varepsilon_1 ,\ \rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E\left(\varepsilon_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Delta x\right) - E\varepsilon_1 ,$$

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x .$$

С учетом равенства $\varepsilon=\frac{\partial\xi}{\partial x}$, после сокращений, получаем дифференциальное уравнение, описывающее распространение волны (вдоль одного направления – оси X):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} \text{ или } \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\mathrm{v}^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

Здесь, ξ - параметр, описывающий колебания (величина смещения точек при деформации), $\mathrm{v}=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость волны.♣

Рассмотрим выделенный участок стержня длиной Δx. При колебаниях скорость этого участка $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ и величина деформации $\frac{\partial\xi}{\partial x}$. Соответственно, кинетическая и потенциальные энергии выделенного участка равны $W_K=\frac{1}{2}\rho S\Delta x\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2$ и $W_П=\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 S\Delta x$. Объем участка $V=S\Delta x$. Объемная плотность механической энергии $w=\frac{W_K+W_П}{V}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$.

Если уравнение движения волны записать в виде $\xi=A\cos(\omega t-kx+\alpha)$, то с учетом соотношений для скорости $\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\omega A\sin(\omega t-kx+\alpha)$ и деформации $\frac{\partial\xi}{\partial x}=-kA\sin(\omega t-kx+\alpha)$ получается

$$w=\frac{1}{2}\rho\cdot\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\alpha)+\frac{1}{2}E\cdot k^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\alpha),$$

$$w=\left(\rho\cdot\omega^2+E\cdot k^2\right)\frac{1}{2}A^2\sin^2(\omega t-kx+\alpha).$$

Используем выражение для скорости волны $\mathrm{v}^2=\frac{E}{\rho}=\frac{\omega^2}{k^2}$:

$$w=\rho\cdot\omega^2\left(1+\frac{E}{\rho}\cdot\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{1}{2}A^2\sin^2(\omega t-kx+\alpha)=\rho\cdot\omega^2 2\frac{1}{2}A^2\sin^2(\omega t-kx+\alpha)$$

$$w=\frac{\rho\cdot\omega^2A^2}{2}\left(1-\cos\left(2[\omega t-kx+\alpha]\right)\right).$$

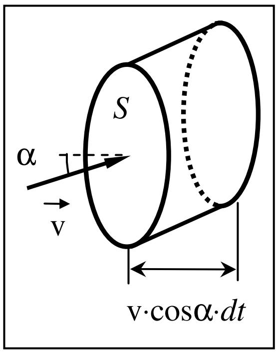
Среднее значение плотности потока энергии, переносимой волной

$$\langle w\rangle=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\rho\cdot\omega^2A^2}{2}\left(1-\cos\left(2[\omega t-kx+\alpha]\right)\right)dt\right]=\frac{\rho\cdot\omega^2A^2}{2}$$

Следствия

1) Величины скорости точек $\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\omega A\sin(\omega t-kx+\alpha)$ и деформации среды $\frac{\partial\xi}{\partial x}=-kA\sin(\omega t-kx+\alpha)$ колеблются синфазно друг другу.
2) Закон изменения плотности энергии описывается волновым уравнением и представляет волну плотности энергии. Скорость этой волны $\mathrm{v}_{ЭН}=\frac{2\omega}{2k}=\mathrm{v}$ в данном случае совпадает с фазовой скоростью волны. (В общем случае это не так.)

Вектор Умова



Пусть энергия переносится со скоростью $\vec{v}$ в направлении под углом α к нормали некоторой малой площадки *S*. Тогда вся энергия, прошедшая через эту площадку за малое время *dt* окажется в области, объем которой $dV = S\cdot v\cdot \cos\alpha\cdot dt$ (на рисунке эта область является косым цилиндром). Если объемная плотность энергии равна w, то энергия этого объема

$$W = w\cdot dV = w\cdot S\cdot v\cdot \cos\alpha\cdot dt$$

Мощность переноса энергии через площадку *S*: $\frac{dW}{dt} = w\cdot dV = w\cdot S\cdot v\cdot \cos\alpha$.

Введем вектор плотности потока энергии (Вектор Умова)

$$\vec{j} = w\cdot\vec{v},$$

тогда $\frac{dW}{dt} = j\cdot S\cdot \cos\alpha$. Если ввести вектор $\vec{S} = \vec{n}\cdot S$, направленный по нормали к площадке, и скалярное произведение $j\cdot S\cdot\cos\alpha = \left(\vec{j},\vec{S}\right)$ определить как поток вектора Умова через площадку S, то *мощность переноса энергии через площадку определяется потоком вектора Умова через эту площадку* $\frac{dW}{dt} = \left(\vec{j},\vec{S}\right)$.

Интенсивность волны – это средняя по времени энергия переносимая волной через площадку в направлении перпендикулярном к этой площадке.

Для плоской волны интенсивность $I = \frac{\rho\cdot\omega^2 A^2}{2}S$ не меняется при распространении волны

Для сферической волны интенсивность через любую сферу радиуса R с центром в источнике

$$I = \frac{\rho\cdot\omega^2 A^2}{2}S = \frac{\rho\cdot\omega^2}{2}\frac{A_0^{\,2}}{R^2}4\pi R^2 = 2\pi\rho\cdot\omega^2 A_0^{\,2}$$

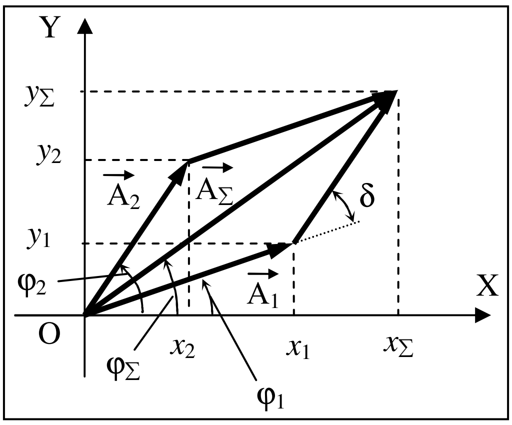
является постоянной величиной.

Если интенсивность волны уменьшается, то среда называется *диссипативной*.

Если интенсивность волны увеличивается, то среда называется *активной*.

Интерференция волн

Интерференция волн – взаимное усиление или ослабление волн при их наложении друг на друга (суперпозиции волн) при одновременном распространении в пространстве, что приводит к перераспределению энергии колебаний, устойчивому во времени. Интерференция волн наблюдается согласно принципу суперпозиции волн.



Рассмотрим суперпозицию двух волн одного направления $\xi_1 = A_1\cos\left(\omega_1 t - k_1x_1 + \alpha_1\right)$ и $\xi_2 = A_2\cos\left(\omega_2 t - k_2x_2 + \alpha_2\right)$.

Рассмотрим амплитудно-векторную диаграмму.

По теореме косинусов

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left(\pi-\delta\right)$$

Учтем, что $\cos\left(\pi-\delta\right) = -\cos\delta$,

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\omega_2-\omega_1\right)t - \left(k_2x_2 - k_1x_1\right) + \alpha_2 - \alpha_1,\text{ тогда}$$

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\left(\omega_2-\omega_1\right)t - \left(k_2x_2-k_1x_1\right) + \alpha_2-\alpha_1\right).$$

Если результирующая амплитуда не зависит от времени, то разность фаз волн должна быть постоянной во времени. Такие волны называются *когерентными*. В частности, получаем, что частоты когерентных волн совпадают $\omega_2 = \omega_1$.

Вообще говоря, волны могут двигаться к точке встречи в разных средах, поэтому их скорости могут быть там различными, а также расстояние до точки тоже могут быть разными.

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\left(k_2x_2 - k_1x_1\right) - \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right)$$

Поэтому в точке наблюдения может быть
либо усиление колебаний при $\cos\left(\left(k_2x_2 - k_1x_1\right) - \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right) = 1$,
либо ослабление колебаний при $\cos\left(\left(k_2x_2 - k_1x_1\right) - \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right) = -1$.

Стоячая волна.

Стоячая волна образуется при наложении двух волн одинаковой частоты, бегущих в противоположных направлениях:

$$\xi = A\cos\left(\omega t + kx + \alpha_1\right) + A\cos\left(\omega t - kx + \alpha_2\right)$$

Пусть $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, тогда $\xi = 2A\cos\left(kx\right)\cos\left(\omega t + \theta\right)$.

Величину $A_0 = 2A\left|\cos\left(kx\right)\right|$ можно назвать амплитудой стоячей волны. Так как амплитуда не может быть отрицательной, то необходимо брать модуль $\left|\cos\left(kx\right)\right|$. Тогда в тех точках, где $\cos\left(kx\right) > 0$ значение $\theta=0$, а в тех точках, где $\cos\left(kx\right) < 0$ надо, для учета знака минус, принять $\theta=\pi$. Точки, где амплитуда стоячей волны максимальная, называются *пучностями*. Эти точки можно найти из условия $\left|\cos\left(kx\right)\right| = 1$, откуда $kx = \pm\pi\cdot n$ (n – целое число). Следовательно, координаты пучностей $x^{ПУЧ}{}_n = \pm\dfrac{\pi\cdot n}{k} = \pm\dfrac{\pi\cdot n}{2\pi}\lambda = \pm n\dfrac{\lambda}{2}$. Соседние пучности находятся друг от друга на расстоянии $\dfrac{\lambda}{2}$ - половины длины волны. Точки, где амплитуда стоячей волны равна нулю, называются *узлами*. Эти точки можно найти из условия $\left|\cos\left(kx\right)\right| = 0$, откуда $kx = \dfrac{\pi}{2} \pm \pi\cdot n$ (n – целое число). Следовательно, координаты узлов $x_n^{УЗ} = \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \pi\cdot n\right)}{k} = \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \pi\cdot n\right)}{2\pi}\lambda = \left(\dfrac{1}{2} \pm n\right)\dfrac{\lambda}{2}$.

Соседние узлы находятся друг от друга на расстоянии $\dfrac{\lambda}{2}$ - половины длины волны.

Следовательно, расстояние между ближайшими соседними узлами и пучностями равно $\dfrac{\lambda}{4}$.

Найдем объемную плотность энергии стоячей волны $w = w_К + w_П = \dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \dfrac{1}{2}E\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$

$$w = \frac{1}{2}\rho\left(-\omega 2A\cos\left(kx\right)\sin\left(\omega t + \theta\right)\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(-k2A\sin\left(kx\right)\cos\left(\omega t + \theta\right)\right)^2$$

$$w = 2A^2\rho\omega^2\left(\cos^2\left(kx\right)\sin^2\left(\omega t + \theta\right) + \sin^2\left(kx\right)\cos^2\left(\omega t + \theta\right)\right)$$

$$w = 2A^2\rho\omega^2\left(\frac{1+\cos\left(2kx\right)}{2}\frac{1-\cos\left(2\left[\omega t + \theta\right]\right)}{2} + \frac{1-\cos\left(2kx\right)}{2}\frac{1+\cos\left(2\left[\omega t + \theta\right]\right)}{2}\right)$$

$$w = A^2\rho\omega^2\left(1 - \cos\left(2kx\right)\cos\left(2\left[\omega t + \theta\right]\right)\right)$$

Видно, что плотность энергии тоже является стоячей волной. Т.е. энергия стоячей волной не переносится.