Лекция 2. «Закон сохранения импульса».

Силы. Инерциальная система отсчета. Динамика материальной точки. Механическая система и ее центр масс. Уравнение изменения импульса механической системы. Закон сохранения импульса.

Определение. *Вектором импульса материальной точки* называется вектор $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$. Единица измерения кг·м/с. Вектор импульса направлен также как и вектор скорости – по касательной к траектории. Иногда импульс называют *количеством движения*.

Если импульс точки изменился, то говорят, что на материальную точку было оказано воздействие со стороны внешних тел. Это воздействие называется *импульсом силы*.

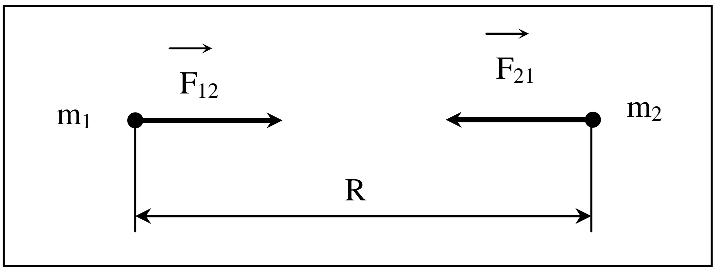
Силы в механике.

Сила – величина являющаяся мерой механического действия на данное материальное тело других тел. Это действие вызывает изменение импульсов точек тела или его деформацию и может иметь место, как при непосредственном контакте, так и через посредство создаваемых телами *полей*. Сила – векторная величина, характеризуемая величиной, направлением и точкой приложения. Действия с силами, приложенными в одной точке производятся в соответствие с правилами действий с векторами. *В классической механике силы не меняются при переходе от одной системы отсчета к другой.*

Основные примеры сил в механике.

1.Сила всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения Ньютона: *две* <u>*материальные точки*</u>*, массы которых m_1 и m_2, находящиеся друг от друга на расстоянии R, взаимно притягиваются с силой, прямо зависящий от произведения масс точек и обратно зависящей от квадрата расстояния между ними*. Силы



притяжения точек лежат на линии, соединяющей эти точки.

Величина силы притяжения определяется по формуле:

$$F_{ГР} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Константа $G=6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 называется *гравитационной постоянной*.

Для двух сфер или шаров (однородных) сила гравитационного взаимодействия определяется также, только в этом случае берется *расстояние между их центрами*.

2. Сила тяжести.

Рассмотрим какое-нибудь тело массы *m*, находящееся *вблизи* поверхности Земли. Если тело имеет размеры соизмеримые с размерами человека (автомобиль, дом, мост и т.д.), то оно может быть представлено как материальная точка по сравнению с Землей (планетой). Планету Земля можно считать однородным шаром. Следовательно, для взаимодействия тела с Землей можно применить закон всемирного тяготения. При этом перепишем его немного в другом виде

$$F_{ГР} = mG\frac{M_{ЗЕМЛИ}}{\left(R_{ЗЕМЛИ}+h\right)^2}.$$

Здесь $M_{ЗЕМЛИ}$ – масса планеты Земля, $R_{ЗЕМЛИ}\approx 6400$ км = 6 400 000 м – средний радиус планеты Земля, h- высота, на которой находится тело над Землей. Введем обозначение

$$g = G\frac{M_{ЗЕМЛИ}}{\left(R_{ЗЕМЛИ}+h\right)^2}.$$

Если тело находится на сравнительно *небольшой* высоте (по отношению к радиусу Земли) над поверхностью Земли, то в знаменателе можно считать, что $R_{ЗЕМЛИ}+h\approx R_{ЗЕМЛИ}$, поэтому для тела, находящегося вблизи поверхности Земли величина $g=G\frac{M_{ЗЕМЛИ}}{\left(R_{ЗЕМЛИ}\right)^2}$ остается практически постоянной и равной $g\approx 9{,}81$ м/с^2. Следовательно, силу гравитации, действующую на тело массы m вблизи поверхности Земли можно считать равной $F_{ГР}=mg$ и направленной к <u>центру</u> Земли. В этом случае силу гравитации называют *силой тяжести*. Она является частным случаем силы гравитации. В задачах, где поверхность Земли можно считать плоской, вектор силы тяжести *всегда* направлен *вниз к земле*.

3. Сила (нормальной) реакции опоры.

Если два тела находятся в соприкосновении, то между ними, вообще говоря, действуют силы взаимной реакции, вызванные этим соприкосновением. При прекращении соприкосновения эти силы исчезают. Эти силы называют силами *реакции опоры*. Сила, действующая перпендикулярно поверхности соприкасающихся тел приложенная в точке соприкосновения тел называется силой *нормальной реакции опоры*.

Весом тела называется сила, с которой тело давит на *горизонтальную* поверхность.

4. Сила натяжения нити.

При попытке сжать нить с ее концов она начнет провисать, т.к. она не сопротивляется сжатию. Однако при растяжении она натягивается, т.е. она сопротивляется растяжению. Точно так же при попытке изогнуть нить она начнет прогибаться – т.е. нить не сопротивляется изгибу. Следовательно, сила, возникающая в нити при ее растяжении должна быть *растягивающей* и *направленной вдоль нити*. Эту силу называют *силой натяжения нити*.

5. Сила трения.

Сила трения возникает между *соприкасающимися* телами при попытке сдвинуть их друг относительно друга. Одной из причин возникновения силы трения является неровность поверхностей тел, взаимная деформация точек поверхностей и т.д. Сила трения всегда направлена так, чтобы *препятствовать относительному движению* соприкасающихся тел.
Сила трения бывает двух видов – сила трения покоя и сила трения скольжения.
Сила трения покоя действует на покоящееся тело при попытке сдвинуть его.
Сила трения скольжения действует на тело, скользящее по поверхности другого тела. Величина силы трения скольжения *не зависит* от площади поверхности соприкасающихся тел, а определяется силой реакции опоры N между телами и коэффициентом трения μ: $\mathbf{F_{ТР}=\mu N}$.

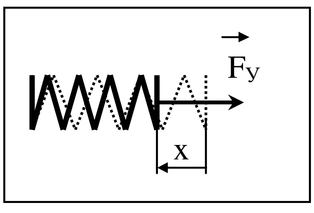
6. Сила сопротивления движению тела в жидкости или газе.

При движении тела в вязкой среде на него действует сила сопротивления. Сила сопротивления всегда направлена против *относительного* движения тела в жидкости или газе. Для сферических тел можно считать, что она приложена к центру сферы. Величина силы зависит от величины площади поперечного сечения тела S, а также от скорости тела V. В общем случае величину силы сопротивления можно представить в виде

$$F_{СОПР}=\alpha\cdot S\cdot v^N,$$

где α - коэффициент, зависящий от свойств жидкости и формы тела, показатель степени N определяется параметрами движения. При малых скоростях движения N=1.

7. Сила упругости.



Деформацией тела называется изменение размеров тела под действием действующей на него силы. Величину деформации определяют как разность между размером тела при действующей на него силе L_1 и размером в свободном (ненагруженном состоянии) $x=L_1-L$. *Направлением деформации* называется направление смещения точек тела. ***Закон Гука***: Сила упругости, возникающая в теле при *малой* деформации величиной x, прямо пропорциональна величине деформации и направлена противоположно ее направлению.

$$\vec{F}_{УПР}=-k\cdot\vec{x}.$$

Коэффициент k называется *коэффициентом упругости* (жесткости) и измеряется в Н/м.
Пример. Найдем общий коэффициент упругости для двух невесомых пружин *одинаковой* длины, жесткости которых равны k_1 и k_2, при параллельном и последовательном соединениях.
При параллельном соединении:общая сила деформации равна сумме сил в каждой из пружин:

$$F = F_1 + F_2.$$

При параллельном соединении деформации пружин одинаковые: $\boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{x_2}=\boldsymbol{x}$.
Тогда: $k_{ОБЩ}\boldsymbol{x}= k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$. Поэтому: $k_{ОБЩ}= k_1 + k_2$. *При параллельном соединении жесткости пружин складываются.*
При последовательном соединении: в этом случае сила упругости *в любом* сечении пружин одинаковая! Действительно, если бы в двух рядом находящихся сечениях силы были бы разными, то часть пружины между этими двумя сечениями согласно второму закону Ньютона двигалась бы под действием разности этих сил, т.е. пружина продолжала бы деформироваться до тех пор, пока силы не станут равными.
Общая деформация пружин равна сумме деформаций каждой из них: $x_1+x_2=x_{ОБЩ}$
Отсюда:

$$\frac{F}{k_{ОБЩ}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

или $\dfrac{1}{k_{ОБЩ}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$. *При последовательном соединении жесткости складываются по закону обратных величин.*

Обобщенный закон Гука.

Рассмотрим силу упругости в стержне, площадь сечения которого *S*, а коэффициент жесткости k. Пусть L_0 – начальная длина стержня. Если стержень деформировался на величину ΔL, то величина силы упругости равна $F = k \cdot \Delta L$.
Определение. *Напряжением* σ в сечении называется отношение величины силы к площади поперечного сечения $\sigma = \dfrac{F}{S}$. Напряжение измеряется в Па (Паскалях.)
С учетом этого определения силу упругости можно представить в виде
$F = \sigma \cdot S = k \cdot \Delta L = k \cdot L_0 \cdot \dfrac{\Delta L}{L_0}$, откуда $\sigma = \dfrac{k \cdot L_0}{S} \cdot \dfrac{\Delta L}{L_0}$.
Введем обозначения: пусть $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0}$ - относительная деформация (безразмерная величина), а
$E = \dfrac{k \cdot L_0}{S}$. Коэффициент E называется *коэффициентом упругост*и материала или *модулем Юнга* (измеряется в Па).
Тогда обобщенный закон Гука будет иметь вид: Напряжение и относительная деформация прямо пропорциональны друг другу $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Коэффициентом пропорциональности является модуль Юнга.

Законы Ньютона.

1-Й ЗАКОН НЬЮТОНА.

Формулировка закона: Существуют такие системы отсчета, в которых материальная точка либо покоится, либо движется по прямой с постоянной скоростью, если на нее не действуют внешние силы или (векторная) сумма внешних сил равно нулю. Такие системы отсчет называются *инерциальными*. (То есть в *инерциальной* системе вектор ускорения точки равен нулю при нулевой силе).

Определения.

Свойство тела не изменять вектора своей скорости в отсутствие внешних сил называется *инертностью* тела (движение тела в такой системе отсчета называется *движением по инерции*).

Масса тела – это мера инертности тела. В классической физике масса тела равна сумме масс частей этого тела (говорят, что масса *аддитивная – т.е. суммируемая* величина). *В классической физике масса тела не зависит от системы отсчета*.

Замечание. Эксперимент показывает, что *инертная* масса равна *гравитационной*.

Замечание. Система отсчета, связанная с *неподвижной* Землей является неинерциальной ввиду вращения Земли (как планеты) вокруг оси, вокруг Солнца и т.д.

Хотя система отсчета, связанная с Землей и не является инерциальной, в большом количестве задач ее можно считать инерциальной и это не приводит к большим относительным погрешностям.

2-Й ЗАКОН НЬЮТОНА.

Формулировка закона**:** в *инерциальной* системе отсчета вектор ускорения материальной точки *сонаправлен* с вектором суммы внешних сил, его величина прямо пропорциональна величине равнодействующей всех сил и обратно пропорциональна массе этого тела: $\vec{a} = \dfrac{\sum \vec{F}}{m}$. (Чаще используют запись $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$.)

Это три числовых уравнения в координатах:

$$\begin{cases} m \cdot a_X = \sum F_X \\ m \cdot a_Y = \sum F_Y \\ m \cdot a_Z = \sum F_Z \end{cases}$$

Второй закон Ньютона можно записать и *импульсном* виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- производная от вектора импульса в инерциальной системе отсчета равна вектору силы.

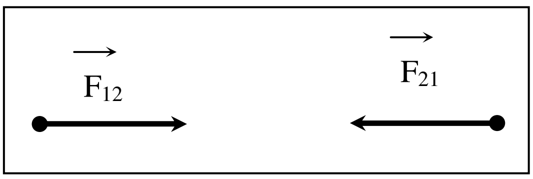
Замечание. Требование инерциальности системы отсчета весьма существенно. Первый закон выделяет инерциальные системы отсчета как такие системы, в которых материальная точка, на которое не действуют внешние силы, движется без ускорения. При переходе от одной системы отсчета к другой, ускорение преобразуется по правилу $\vec{a}_1 = \vec{a}_{21} + \vec{a}_1$ (см. выше), и если новая система движется относительно старой без ускорения $\vec{a}_{21} = \vec{0}$, то ускорения тела в них *одинаковые*. Поэтому во всех *инерциальных* системах отсчета второй закон Ньютона выглядит одинаково:

$$m\vec{a}_A = m\vec{a}_{1A} = \sum \vec{F}.$$

Это равенство выражает собой принцип относительности Галилея для классической механики.

3-Й ЗАКОН НЬЮТОНА.

Две материальные точки действуют друг на друга с силами одинаковыми по величине, природе этих сил, и противоположными по направлению. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.



Три закона Ньютона дают рецепт для решения задач динамики.

Шаг 1. Выбираем инерциальную систему отсчета.

Шаг 2. Используя третий закон Ньютона, расставляем силы, действующие на материальную точку.

Шаг 3. Вводим систему координат. Находим векторную сумму этих сил либо явно, либо в проекциях на оси системы координат. Применяя второй закон Ньютона либо в векторной форме $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$, либо в проекциях

$$\begin{cases} ma_X = \sum F_X \\ ma_Y = \sum F_Y \\ ma_Z = \sum F_Z \end{cases}$$

Находим ускорение точки. (Как правило, систему координат надо вводить таким образом, чтобы можно было *проще* решить систему уравнений для нахождения проекций ускорения.)
Шаг 4. По найденному ускорению определяем параметры движения, используя кинематические соотношения.

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.

При движении тела относительно инерциальной системы второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F},$$

где $\vec{a}$ - ускорение тела относительно инерциальной системы. Формально второй закон Ньютона связывает *вектор ускорения в* <u>*данной*</u> *системе отсчета* и вектор суммы всех сил, действующих на тело.

Пусть есть еще одна система отсчета, которая движется относительно инерциальной с ускорением $\vec{a}_C$, следовательно, она уже *не является инерциальной*. Тогда ускорение тела в этой системе можно найти как разность ускорений $\vec{a}_1 = \vec{a} - \vec{a}_C$ или $\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_1$.
Подставим это выражение в уравнение движения $m(\vec{a}_C + \vec{a}_1) = \sum \vec{F}$.
Поэтому если последнее равенство переписать в виде

$$m\vec{a}_1 = \sum \vec{F} - m\vec{a}_C,$$

то это выражение ФОРМАЛЬНО совпадает со вторым законом Ньютона, только в правой части появилось дополнительное слагаемое $\vec{F}_{ИН} = -m\vec{a}_C$, которое называется *силой инерции*. Знак минус показывает, что вектор этой силы направлен *против вектора ускорения системы отсчета*. Это *фиктивная* сила, в том смысле, что нет тел, которые создают эту силу и она пропадает при переходе к инерциальной системе отсчета. Иногда говорят, что инерциальные системы отсчета – это такие системы, в которых силы инерции равны нулю. (По современным представлениям силы инерции создаются всеми телами в нашей Вселенной.)

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК.

Во многих задачах тело нельзя рассматривать как материальную точку, поэтому приходится рассматривать его как систему материальных точек, взаимодействующих друг с другом. При описании движения такой системы, состоящей, например, из N точек, необходимо описать движение каждой точки с учетом всех сил, действующих на нее. Так как для любой точки имеется три уравнения движения (вдоль каждой из осей), то количество уравнений равно 3N. При увеличении N трудоемкость описания движения возрастает многократно. При этом необходимо учитывать также силы между точками. Иногда *априори* такие силы даже неизвестны. Но известны внешние силы, действующие на систему. Оказывается, что для каждой системы существует *особая* точка, ускорение которой определяется только внешними силами – эта точка называется *центром масс системы.*

Центр масс.

Рассмотрим, для простоты, систему из двух материальных точек. Запишем уравнения движения для каждой из них (второй закон Ньютона)

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 \end{cases}$$

Силы, действующие на точку можно разделить на две группы:

1. силы, действующие со стороны другой точки (их называют *внутренними* по отношению к системе)

2. силы, действующие со стороны тел, не входящих в систему (их называют *внешними*).

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^{\text{ВНЕШ}} + \vec{F}_1^{\text{ВНУТР}} \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^{\text{ВНЕШ}} + \vec{F}_2^{\text{ВНУТР}} \end{cases}$$

Теперь сложим эти уравнения. Тогда *внутренние* силы, по третьему закону Ньютона, взаимно компенсируются, останутся только *внешние*. Векторную сумму внешних сил обозначим как $\vec{F}^{\text{ВНЕШ}}$. В итоге, получаем:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}^{\text{ВНЕШ}}.$$

Введем новый радиус-вектор, который называется ***радиус-вектором центра масс системы***:

$$\vec{R}_C = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2},$$

Этот радиус-вектор определяет некоторую точку, которая называется центром масс системы. Здесь m_1, m_2 – массы точек системы, $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ - их радиус-векторы. В знаменателе этого выражения стоит суммарная масса всех точек системы – ее называют ***массой системы***

$$m_C = m_1 + m_2.$$

Продифференцируем по времени (помним, что производная от радиус-вектора по времени равна вектору скорости) и получим вектор скорости центра масс:

$$\vec{V}_C = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_C},$$

а ускорение центра масс:

$$\vec{a}_C = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_C}.$$

Поэтому уравнение движения системы точек будет иметь вид:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = m_C\vec{a}_C = \vec{F}^{\text{ВНЕШ}} \quad \text{или}$$

$$\vec{a}_C = \frac{\vec{F}^{\text{ВНЕШ}}}{m_C}$$

Центр масс системы (тела) – это точка, масса которой равна массе всей системы (или тела), а вектор ускорения центра масс (в инерциальной системе отсчета) определяется только внешними силами, действующими на систему (тело). Поэтому при нахождении закона движения системы точек можно считать, что *вектор равнодействующей внешних сил приложен к центру масс системы.*

Выводы

1) Радиус-вектор центра масс системы точек $\vec{R}_C = \dfrac{\sum_i m_i\vec{R}_i}{m_C}$.

2) Скорость центра масс $\vec{V}_C = \dfrac{\sum_i m_i\vec{V}_i}{m_C}$.

3) Ускорение центра масс $\vec{a}_C = \dfrac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{m_C}$.

4) Правила для нахождения центра масс системы.

- Если у системы есть ось симметрии, то центр масс находится на этой оси. Если осей симметрии несколько, то центр масс лежит на их пересечении. При этом центр масс тела может не принадлежать телу (пример - кольцо).
- Если систему разбить на части, для каждой из них найти центр масс, то центр масс системы можно найти по центрам масс частей.

5) Вектор импульса центра масс $\vec{p}_C = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i$ равен суммарному импульсу точек системы.

Откуда $\vec{p}_C{}'(t) = \sum_i \vec{p}_i'(t) = \sum_i m_i \vec{V}_i'(t) = \sum_i m_i \vec{a}_i = m_C \vec{a}_C = \vec{F}^{ВНЕШ}$, т.е.

$$\vec{p}_C'(t) = \vec{F}^{ВНЕШ}$$

Производная от импульса центра масс системы равна векторной сумме внешних сил действующих на все точки системы (в инерциальной системе отсчета).

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА.

Запишем второй закон Ньютона в импульсном виде (для инерциальной системы отсчета):

$$\vec{p}_C'(t) = \vec{F}^{ВНЕШ}.$$

Это **векторное** равенство. В трехмерном пространстве - это три уравнения для проекций на оси координат. В декартовой системе координат эти уравнения выглядят так:

$$\begin{cases} p_{CX}'(t) = F_X^{ВНЕШ} \\ p_{CY}'(t) = F_Y^{ВНЕШ} \\ p_{CZ}'(t) = F_Z^{ВНЕШ} \end{cases}$$

1. Рассмотрим случай, когда на систему вообще не действуют внешние силы, (такая система называется *замкнутой*) или равнодействующая внешних сил равна нулю $\vec{F}^{ВНЕШ} = \vec{0}$.

Это означает, что производная от вектора импульса системы равна нулю $\vec{p}_C'(t) = \vec{0}$. Поэтому вектор суммарного импульса (замкнутой) системы остается постоянным.

$$\vec{p}_C = m_1\vec{v}_1 + ... + m_N\vec{v}_N = const.$$

В частности, в проекциях на оси это равенство выглядит так

$$\begin{cases} p_{CX}(t) = m_1 v_{1X} + ... + m_N v_{NX} = const \\ p_{CY}(t) = m_1 v_{1Y} + ... + m_N v_{NY} = const \\ p_{CZ}(t) = m_1 v_{1Z} + ... + m_N v_{NZ} = const \end{cases}$$

Итак, если равнодействующая всех сил, действующих на систему равна нулю, то вектор суммарного импульса системы сохраняется.

2. Рассмотрим такое направление в пространстве, на которое проекция силы $\vec{F}$ равна нулю. Введем систему координат так, чтобы ось X совпадала с этим направлением. Тогда уравнения движения выглядят:

$$\begin{cases} p_{CX}'(t) = 0 \\ p_{CY}'(t) = F_Y^{ВНЕШ} \\ p_{CZ}'(t) = F_Z^{ВНЕШ} \end{cases}$$

О сохранении *вектора* импульса в этом случае говорить НЕЛЬЗЯ - сохраняется только одна *координата* X вектора импульса системы. Но и это порой значительно помогает в решении задачи.

ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА.

Запишем второй закон Ньютона в импульсном виде (для инерциальной системы отсчета):

$$\vec{p}_C'(t) = \vec{F}^{ВНЕШ}.$$

Поэтому вектор изменения импульса системы за интервал времени Δt равен

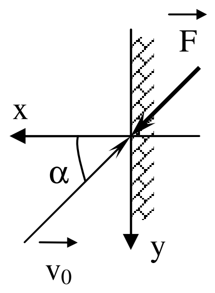
$$\Delta\vec{p}_C = \int_{t_{НАЧ}}^{t_{КОНЕЧ}} \vec{F}^{ВНЕШ} dt.$$

Выражение в правой части равенства носит название *импульса силы*.

Следовательно, *вектор изменения импульса системы за некоторый промежуток времени равен импульсу силы, действующей на тело в течение этого промежутка*.

Пример. Пуля массы m ударяется в массивную стену со скоростью v_0 и застревает в ней. Найти среднее значение силы при ударе, если время удара Δt.

Решение. Пусть пуля налетает под углом α к нормали. Так как стена массивная, то после удара скорость стены можно принять за ноль. Для пули можно записать закон изменения импульса



$$\Delta\vec{p} = \int\limits_{t_{НАЧ}}^{t_{КОНЕЧ}} \vec{F}\boldsymbol{dt},$$

где $\vec{F}$ - вектор силы, действующей на пулю при ударе.

Так мы ищем среднее значение силы, то вектор силы можно считать постоянным, поэтому

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

Левая часть этого равенства $\Delta\vec{p}(t) = \vec{p}_{КОН} - \vec{p}_{НАЧ} = -\vec{p}_{НАЧ}$, так как $\vec{p}_{КОН} = \vec{0}$.

Из этого равенства следует, что вектор силы $\vec{F} = -\dfrac{\vec{p}_{НАЧ}}{\Delta t} = -\dfrac{m\vec{v}_0}{\Delta t}$ направлен против вектора скорости при ударе.