Лекция 5. «Колебания»

Гармонические колебания. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления равных и близких частот. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот. Свободные незатухающие колебания. Энергия и импульс гармонического осциллятора. Фазовая траектория. Физический маятник. Квазиупругая сила.

Положение равновесия и квазиупругая сила.

Рассмотрим одномерное движение тела под действием консервативной силы вдоль оси X. Для потенциальной энергии тела вблизи некоторой точки x_0 можно записать выражение

$$W(x)=W_0+\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0}\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}\cdot(x-x_0)^2+...$$

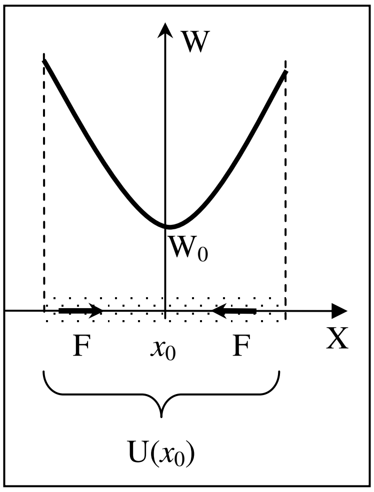
Потенциальная энергия и вектор консервативной силы связаны соотношением

$$\vec{F}=-gradW$$

откуда для проекции силы на ось X $F_x=-\frac{dW}{dx}$, т.е.

$$F_x=-\frac{\partial W}{\partial x}=\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0}+\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}\cdot(x-x_0)+...$$

Если точка x_0 является положением равновесия, то должно выполняться условие



$F_x=-\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0}=0$, поэтому для изменения потенциальной энергии вблизи точки x_0

$$\Delta W=W(x)-W_0\approx\frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}\cdot(x-x_0)^2$$

и для проекции силы $F_x\approx\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}\cdot(x-x_0)$.

Рассмотрим случай, когда в точке x_0 наблюдается локальный минимум потенциальной энергии. Тогда $\frac{d^2W}{dx^2}>0$ и существует некоторая окрестность точки U(x_0), для всех точек из которой выполняется $W(x)>W_0$ и $F_x>0$ при $x<x_0$, $F_x<0$ при $x>x_0$, то есть в точках этой окрестности вектор силы, действующей на тело, будет направлен к точке x_0, а это значит, что при малых смещения тела из положения равновесия, сила будет стремиться вернуть тело обратно. Такое положение равновесия называется *устойчивым*.

Положение равновесия называется *неустойчивым*, если при малом отклонении от этого положения возникает сила, стремящаяся увести тело от положения равновесия. Очевидно, в этом случае в точке наблюдается локальный максимум потенциальной энергии и $\frac{d^2W}{dx^2}<0$.

В случае, когда $\frac{d^2W}{dx^2}=0$ требуется дополнительное исследование.

Выражение для консервативной силы вблизи положения равно можно записать в векторной форме $\vec{F}=-k_0\Delta\vec{x}$, а величину потенциальной энергии $W=\frac{1}{2}k_0\Delta x^2$ + const, где $k_0=\frac{d^2W}{dx^2}$. Такая форма записи для консервативной силы вблизи точки равновесия называется *квазиупругой силой*.

Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося под действием квазиупругой силы вблизи точки устойчивого положения равновесия $ma_x = F_x$, где $F_x = -k_0(x - x_0)$

Введем ось X так, чтобы $x_0 = 0$, тогда уравнение движения примет вид $ma_x = -k_0 x$. С учетом зависимости $a_x = \ddot{x}$ это уравнение примет вид $m\ddot{x} = -k_0 x$ или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m} > 0$.

Это *линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка*.

Решением этого уравнения являются гармонические функциями от времени t

$$x = A\,cos(\omega_0 t + \alpha) \text{ или } x = A\,sin(\omega_0 t + \beta),$$

описывающие смещением от равновесного значения. (Обе формы записи равноправны. Например, одна переходит в другую при $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$).

Так как гармонические функции синус и конус имеют период 2π, то параметры процесса будут повторяться через минимальный промежуток времени T, называемый *периодом*, определяемый соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Таким образом, уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

описывает *колебательный процесс*, параметры которого не изменяются с течением времени. Этот процесс принято называть *свободными незатухающими колебаниями*.

Учитывая, что величина $\nu = \frac{1}{T}$ называется *частотой колебаний* (единица измерения Гц - Герц), то величину

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

называют *круговой* или *циклической частотой* колебаний (единица измерения $с^{-1}$.)

Величина A – амплитуда колебаний - модуль максимального смещения. По определению A>0 – всегда положительная величина. Аргумент гармонической функции $(\omega t + \alpha)$ называется фазой колебания, а величина α называется *начальной фазой* колебаний (Это фаза колебаний в момент времени *t*=0, который обычно называют *начальным моментом времени*).

В этом колебательном процессе с течением времени сохраняется величина механической энергии $W_{MEX} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2} = const$. Действительно:

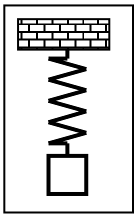
$$\frac{dW_{MEX}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2}\right) = 2m\frac{\dot{x}}{2}\ddot{x} + 2k_0\frac{x}{2}\dot{x} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \omega_0^2 x\right) = 0.$$

Свободные незатухающие колебания.

Колебания – движения или состояния, параметры которых повторяются во времени. Колебания в той или иной мере встречаются во всех явлениях природы: от пульсации излучения звезд, движения планет до внутриклеточных процессов или колебаний атомов и молекул, колебаний полей.

В физике особо выделяют механические и электромагнитные колебания (и их комбинации).

Моделью для изучения механических колебаний является *осциллятор* – материальная точка или система, совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия. (Более того, термин осциллятор применим к любой системе, если описывающие ее величины периодически меняются во времени.) Простейшие примеры осцилляторов – грузик на пружине, маятник.



Пример. *Груз массы m подвешен на невесомой пружине жесткости k в поле сил тяжести (пружинный маятник). Найти период его колебаний. Сопротивлением воздуха пренебречь.*
Решение. Запишем уравнение его движения в проекции на вертикальное направление Y

$$ma = -F_{УПР} + mg = -k \cdot y + mg \text{ или } a = -\frac{k}{m}y + g .$$

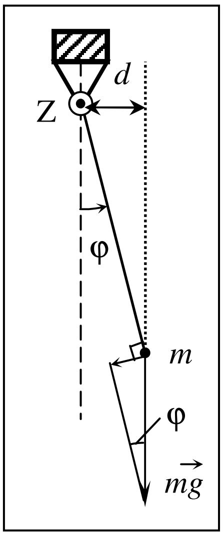
где y – величина растяжения пружины. Положение равновесия груза на пружине $y_0 = \frac{mg}{k}$. Введем смещение груза от положения равновесия $x = y - y_0$, тогда $y = x + y_0$, $a = \ddot{y} = \ddot{x}$.

Получаем уравнение $\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x + y_0) + g = -\frac{k}{m}x - \frac{k}{m}y_0 + g = -\frac{k}{m}x$, $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$

Здесь $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$ и период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Механическая энергия груза на пружине $W_{МЕХ} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$.♣

Пример. Найдем период колебаний *математического маятника* - материальной точки массы m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длины *l*.



Решение. Рассмотрим движение маятника в тот момент, когда он поднимается. Отклонение нити от вертикали зададим угловой координатой φ. При этом если угол φ увеличивается (против часовой стрелки), то касательное ускорение точки направлено против направления движения. Поэтому уравнение движения имеет вид:

$$ma_\tau = -mg \cdot sin\varphi .$$

Вблизи положения равновесия проекция сила тяжести должна быть представлена как квазиупругая сила. Если выполняется *условие малости колебаний*, то $sin\varphi \approx \varphi$, поэтому длина дуги окружности $x = l\varphi$, следовательно, проекция силы тяжести $mg \cdot sin\varphi \approx \frac{mg}{l} \cdot l\varphi = \frac{mg}{l} \cdot x$. Поэтому коэффициент в выражении для квазиупругой силы $k_0 = \frac{mg}{l}$. Касательное ускорение связано с угловым ускорением соотношением $a_\tau = \varepsilon \cdot l$ (где $\varepsilon = \ddot{\varphi}$), поэтому, после сокращения массы *m* получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 .$$

С учетом выражения для циклической частоты $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ период колебаний имеет вид

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Механическая энергия математического маятника

$$W_{МЕХ} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0x^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2} .$$

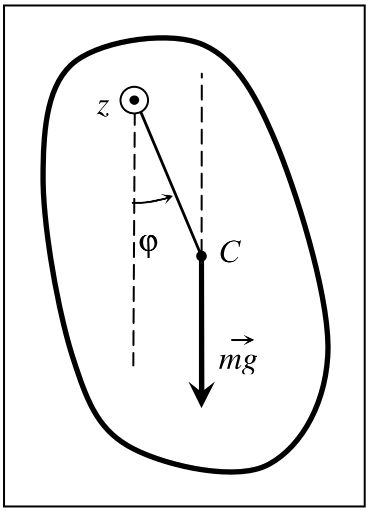
При движении по окружности $x = l\varphi$, $\dot{x} = l\dot{\varphi}$, поэтому

$$W_{МЕХ}=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{mg}{l}\frac{l^2\varphi^2}{2}=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

Уравнение колебаний для математического маятника можно вывести, используя уравнение динамики вращательного движения.

Проведем ось Z через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний маятника, тогда момент инерции материальной точки относительно оси Z $I_z=ml^2$, момент импульса точки $\vec{L}=I_z\vec{\dot{\varphi}}$ направлен вдоль оси Z, а момент силы тяжести $M_z=-mgl\,sin\varphi\approx-mgl\varphi$ (плечо силы тяжести относительно оси $d=l\,sin\varphi\approx l\varphi$) направлен против оси Z.

Закон вращательного движения точки вокруг оси Z: $\frac{dL_z}{dt}=M_z$ или $ml^2\ddot{\varphi}=-mgl\varphi$.♣



Пример. Найдем период колебаний *физического маятника* - тела массы m, которое может совершать колебания под действием силы тяжести (инерции) вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Решение. Проведем из центра масс тела C перпендикуляр к оси вращения z. Пусть длина этого перпендикуляра равна *l*.

Положение тела зададим углом отклонения от вертикали этого перпендикуляра φ.

При этом если угол φ увеличивается (тело поворачивается против часовой стрелки), то вектор момента импульса $\vec{L}$ направлен вдоль горизонтальной оси z на нас. Момент внешней силы тяжести относительно оси z направлен против от нас. Рассмотрим проекции на ось z: $L_z=I_z\omega=I_z\dot{\varphi}$, $M_z\left(m\vec{g}\right)=-mgl\,sin\varphi$.

Уравнение вращения вокруг оси z: $\frac{dL_z}{dt}=M_z^{ВНЕШ}$ или $I_z\ddot{\varphi}=-mgl\,sin\varphi$

Если выполняется условие малости колебаний: $sin\varphi\approx\varphi$, то уравнение колебаний примет вид

$$\ddot{\varphi}=-\frac{mgl}{I_z}\varphi.$$

С учетом выражения для циклической частоты $\omega=\sqrt{\frac{mgl}{I_z}}$ получаем выражение для периода колебаний физического маятника $T=2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}$.

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника с таким же периодом.

$$T_{МАТ}=T_{ФИЗ},\ 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l_{ПР}}{g}},\ l_{ПР}=\frac{I_z}{ml}.♣$$

Замечание. Как показано в последних двух примерах, уравнения колебаний можно получить, вводя обобщенную координату - угол и обобщенную квазиупругую силу – момент силы тяжести.

Энергия и импульс гармонического осциллятора

Пусть закон движения осциллятора $x=A\cos\left(\omega t+\alpha\right)$.

Среднее значение (по времени) некоторой величины $u(t)$ за интервал времени (t_1, t_2) – это такое постоянное значение <*u*>, для которого выполняется равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}u(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\langle u\rangle\,dt=\langle u\rangle\cdot(t_2-t_1),\ \text{поэтому}\ \langle u\rangle=\frac{1}{(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}u(t)\,dt.$$

Так как колебания незатухающие, то они продолжаются бесконечно долго, поэтому средние значения надо искать на бесконечном интервале.

Среднее значение проекции импульса

$p_x = m\mathrm{v}_x = m\dot{x} = -m\omega A\,sin(\omega t+\alpha)$

$$\langle p_x\rangle = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t p_x dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\left(-m\omega A\,sin(\omega t+\alpha)\right)dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}mA\left(cos(\omega t+\alpha)-cos(\alpha)\right)\right) = 0\,.$$

гармонического осциллятора равно нулю (так $-1\le cos\,\varphi\le -1$ для любых φ).

Среднее значение кинетической энергии $W_k = \frac{m\mathrm{v}_x^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m}$

$$\langle W_K\rangle = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\frac{p_x^2}{2m}dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\frac{m\omega^2A^2\,sin^2(\omega t+\alpha)}{2}dt\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{m\omega^2A^2}{2}\int_0^t\frac{1-cos\left[2(\omega t+\alpha)\right]}{2}dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{m\omega^2A^2}{4}\left(t-\frac{1}{2\omega}\left(sin\left[2(\omega t+\alpha)\right]-sin[2\alpha]\right)\right)\right)$$

Так как $-1\le sin\,\varphi\le 1$ для любых φ, то $\langle W_K\rangle = \frac{m\omega^2A^2}{4}$.

Среднее значение потенциальной энергии $W_П = \frac{kx^2}{2}$

$$\langle W_П\rangle = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\frac{kx^2}{2}dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t\frac{kA^2\,cos^2(\omega t+\alpha)}{2}dt\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{k^2A^2}{2}\int_0^t\frac{1+cos\left[2(\omega t+\alpha)\right]}{2}dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{k^2A^2}{4}\left(t+\frac{1}{2\omega}\left(sin\left[2(\omega t+\alpha)\right]-sin[2\alpha]\right)\right)\right)$$

$$\langle W_П\rangle = \frac{k^2A^2}{4}\,.$$

С учетом соотношения $\omega^2 = \frac{k}{m}$ получаем, что $\langle W_K\rangle = \langle W_П\rangle = \frac{k^2A^2}{4}$.

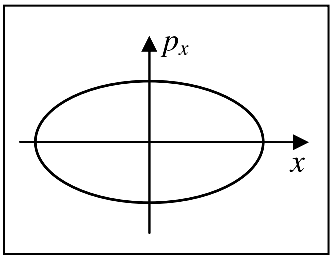
Среднее значение механической энергии осциллятора

$$\langle W_{МЕХ}\rangle = \langle W_K + W_П\rangle = \langle W_K\rangle + \langle W_П\rangle = \frac{k^2A^2}{2}\,.$$

Как и следовало ожидать, полная механическая энергия осциллятора остается постоянной.

Фазовая плоскость.

Фазовой плоскостью называется двумерное пространство, координатами в котором является координата точки и проекция импульса (соответственно, обобщенная координата и обобщенный импульс).



Для пружинного маятника из закона сохранения энергии

$$W_{МЕХ} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{kx^2}{2} = const$$

следует, что *фазовая траектория* точки, совершающей свободные незатухающие колебания – это эллипс

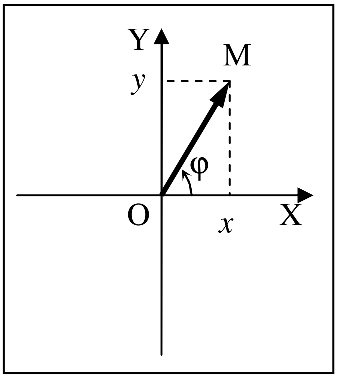
$\frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$, $\left(\frac{p_x}{\sqrt{mk}A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1$,

полуоси которого $a = \sqrt{mk}A = m\omega A = m\mathrm{v}_{max} = p_{max}$, $b = A$.

Замечание. В случае если система состоит из N осцилляторов, то фазовое пространство имеет размерность 2N.

Векторная диаграмма.

Рассмотрим радиус-вектор точки М, вращающейся вокруг начала координат с угловой скоростью ω. Тогда угол между радиус-вектором и осью X меняется с течением времени по закону $\varphi = \omega t + \varphi_0$, где φ_0 – его начальное значение. Пусть длина радиус-вектора $|OM| = A$



Координаты точки М:

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

описывают колебания осциллятора вдоль осей.

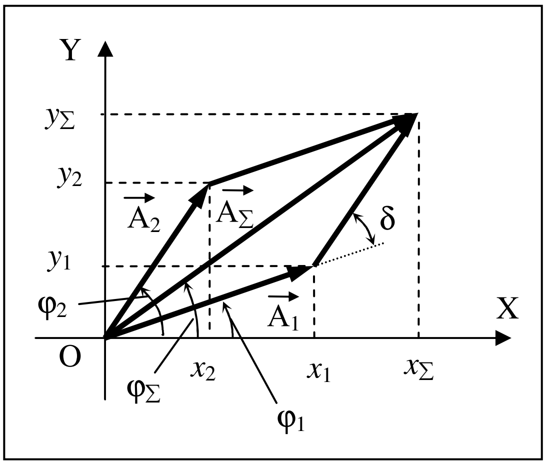
Данная форма представления колебаний называется амплитудной (векторной) диаграммой.

Рассмотрим сложение двух колебаний одного направления: два осциллятора совершают колебания вдоль оси X с циклическими частотами ω_1 и ω_2

$$x_1 = A_1\cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) \text{ и } x_2 = A_2\cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right).$$

Зададим эти колебания на векторной диаграмме с помощью векторов.

1-е колебание задаётся вектором $\vec{A}_1$, который вращается вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω_1, угол вращения меняется по закону $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$.



2-е колебание задаётся вектором $\vec{A}_2$, соответственно, угол $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$.

Тогда результирующему колебанию $x_\Sigma = x_1 + x_2$ сопоставим вектор $\vec{A}_\Sigma = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ с фазой $\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma$

По теореме косинусов

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left(\pi - \delta\right)$$

Учтем, что $\cos\left(\pi - \delta\right) = -\cos\delta$,

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\omega_2 - \omega_1\right)t + \alpha_2 - \alpha_1, \text{ тогда}$$

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\left(\omega_2 - \omega_1\right)t + \alpha_2 - \alpha_1\right)$$

$tg\varphi_\Sigma = \dfrac{y_\Sigma}{x_\Sigma} = \dfrac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$ или

$$tg\left(\omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma\right) = \frac{A_1\sin\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) + A_2\sin\left(\omega_2 t + \alpha_2\right)}{A_1\cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) + A_2\cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right)}.$$

Соответственно, $tg\left(\alpha_\Sigma\right) = \dfrac{A_1\sin\left(\alpha_1\right) + A_2\sin\left(\alpha_2\right)}{A_1\cos\left(\alpha_1\right) + A_2\cos\left(\alpha_2\right)}$.

Остановимся подробнее на двух частных случаях.

1) Пусть $A_1 = A_2 := A$, $\omega_1 = \omega_2 := \omega$. Тогда $A_\Sigma^2 = 2A^2 + 2A^2\cos\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = 2A^2\left(1 + \cos\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right)$.

Амплитуда результирующего колебания в этом случае не зависит от времени.

Если разность начальных фаз колебаний $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi n$, где n – целое число, то наблюдается усиление колебаний $A_\Sigma = 2A$.

Если разность начальных фаз колебаний $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi + 2\pi n$, где n – целое число, то колебания гасят друг друга $A_\Sigma = 0$.

Для вывода формулы результирующего колебания воспользуемся соотношением

$\cos\beta_1 + \cos\beta_2 = 2\cos\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_2 + \beta_1}{2}\right)$, поэтому, учитывая четность функции косинус:

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)$$

Амплитудой должно быть выражение не зависящее от времени, но амплитуда не может быть отрицательной величиной, следовательно

$$A_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right|,$$

Тогда

$$x_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right|\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} + \theta\right).$$

Если $\cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) > 0$, то $\theta = 0$, но если $\cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) < 0$ то $\theta = \pi$.

2) Рассмотрим случай, когда амплитуды одинаковые $A_1 = A_2 := A$, но частоты отличаются на небольшую величину $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, $\Delta\omega << \omega$. Для упрощения примем, что $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. Поступая как и в предыдущем случае, получаем

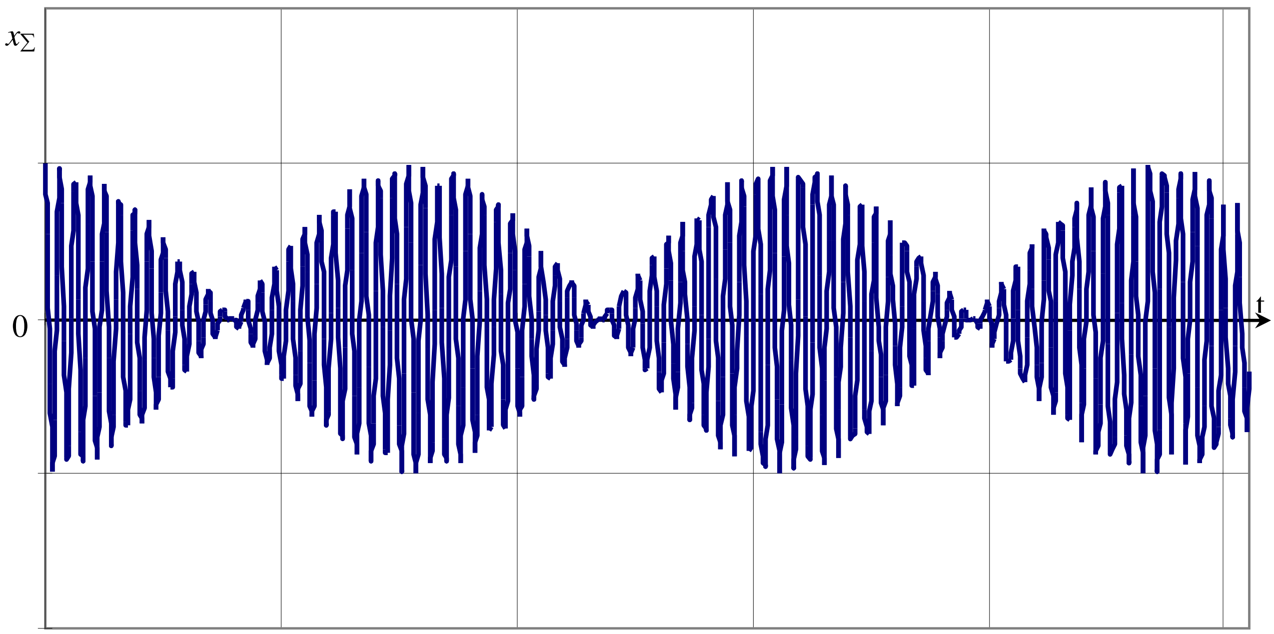
$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right).$$

Пренебрегая в выражении для фазы второго сомножителя величиной $\Delta\omega$ по сравнению с ω, получаем:

$$x_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|\cos(\omega t + \theta).$$

Если $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) > 0$, то $\theta = 0$, но если $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) < 0$ то $\theta = \pi$.

Таким образом, при сложении колебаний близких частот возникает периодическое изменение амплитуды и скачкообразное изменение фазы результирующего колебания – явление, которое называется *биением*.



Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот

Рассмотрим колебания точки одновременно по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

$$x = A_x\cos\left(\omega_x t+\alpha_x\right),\ \ y = A_y\sin\left(\omega_y t+\alpha_y\right).$$

Отметим, что при $\alpha_x=\alpha_y$ фазы колебаний сдвинуты на $\pi/2$.

1) Пусть частоты колебаний одинаковые $\omega_x=\omega_y:=\omega$

Обозначим $\alpha_y=\alpha_x+\delta$. Получим уравнение траектории

$$\frac{x}{A_x}=\cos\left(\omega t+\alpha_x\right),\ \frac{y}{A_y}=\sin\left(\omega t+\alpha_x+\delta\right)=\sin\left(\omega t+\alpha_x\right)\cos\delta+\cos\left(\omega t+\alpha_x\right)\sin\delta$$

$$\frac{y}{A_y}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\cos\delta+\frac{x}{A_x}\sin\delta,\ \left(\frac{y}{A_y}-\frac{x}{A_x}\sin\delta\right)^2=\left(1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\right)\cos^2\delta$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2-2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y}\sin\delta+\left(\frac{x}{A_x}\right)^2=\cos^2\delta.$$

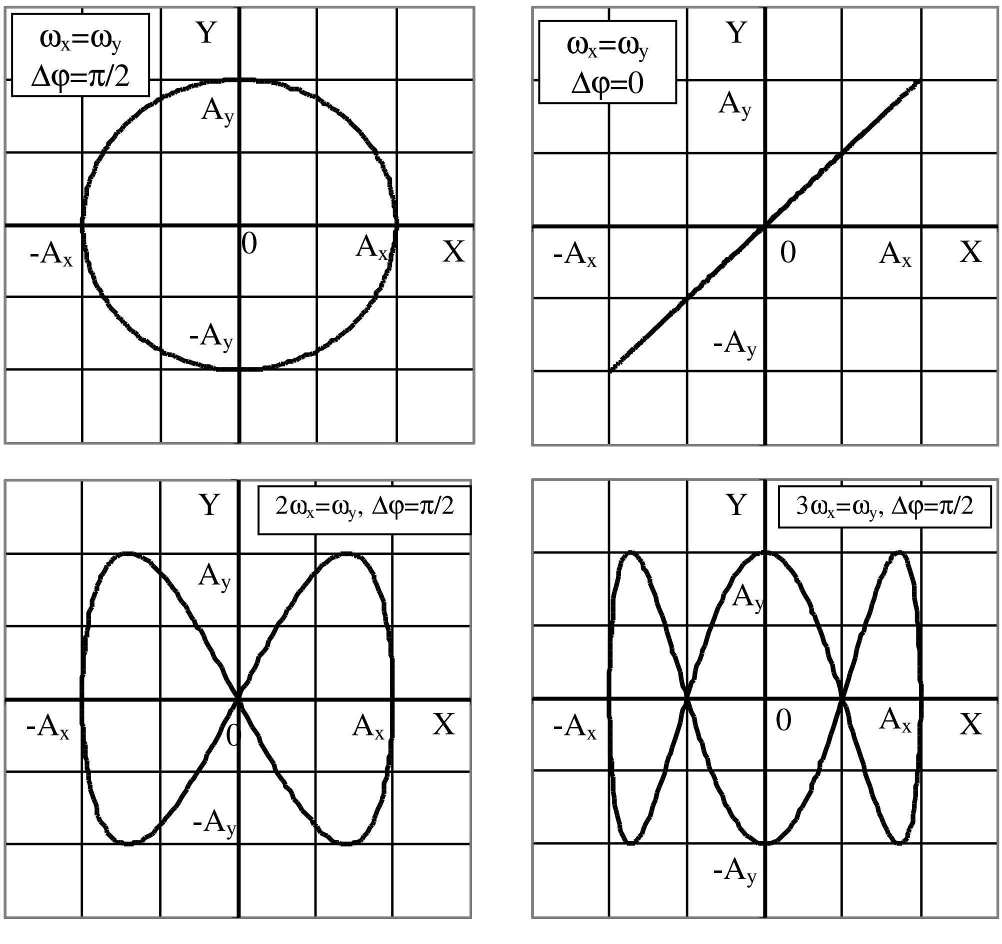
Это уравнение линии *второго порядка на плоскости.*

Если $\delta=0$ (фазы колебаний сдвинуты на $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$), то получаем эллипс $\left(\frac{y}{A_y}\right)^2+\left(\frac{x}{A_x}\right)^2=1$.

Если $\delta=\pm\frac{\pi}{2}$ (фазы колебаний сдвинуты на $\Delta\varphi=0$ или π), то получаем отрезок прямой.

2) Фигуры для некоторых других соотношений частот и разности фаз показаны на рис.

Соотношение частот колебаний по фигуре можно определить из соотношения



$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x},$$

где n – количество пересечений фигуры и прямой, параллельной соответствующей оси. Траектория точки, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, при рациональном отношении частот колебаний называется фигурой Лиссажу. Условие рационального частот отношения означает, что отношение частот можно записать в виде рационального числа. В этом случае траектория является замкнутой. Если отношение частот не является рациональным числом, то траектории незамкнутая линия.