2 Динамика

2.1 Законы Ньютона

2.1.1. По достоверным сведениям, однажды барон Мюнхгаузен, увязнув в болоте, вытащил из болота сам себя и свою лошадь за волосы. Какие законы физики сумел нарушить барон?

Решение:

1 В данной задаче идёт речь о механической системе в которую следует включить лошадь барона и его самого, включая руку, тянущую его же за знаменитую косичку.

2 Как известно, все силы, действующие в механических системах принято разделять на внешние и внутренние. Внешние силы своим происхождением обязаны взаимодействием с телами, не входящими в данную систему, а внутренние силы вызваны взаимодействием исключительно между телами анализируемой механической системы.

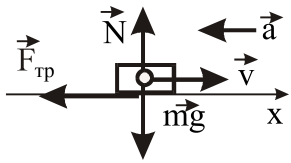
3 В соответствии с третьим законом Ньютона каждая из внутренних сил будет встречаться попарно, причём двойки сил будут равны по модулю и противоположны по направлению. Геометрическая сумма (главный вектор) внутренних сил и моментов (главный момент) относительно некоторого неподвижного центра в любой системе равны нулю, т.е.

$$\vec{\Re}^{i} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k^{i} = 0, \quad \vec{M}_O^{i} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{m}_O^{i}\left(\vec{F}_k^{i}\right) = 0. \qquad (1)$$

4 У равнения (1), в частности, показывают, что внутренние силы не могут изменить механического состояния системы. В этой связи, все старания барона Мюнхаузенна по вытягиванию себя совместно с лошадью из болота не увенчаются успехом, так как третий закон Ньютона и уравнения (1) неумолимы.

2.1.2 Шайба, скользившая по льду, остановилась через время t = 5c после удара о клюшку на расстоянии L = 20 м от места удара. Масса шайбы m = 100 г. Определите среднюю величину действовавшей на шайбу силы трения.

Решение:



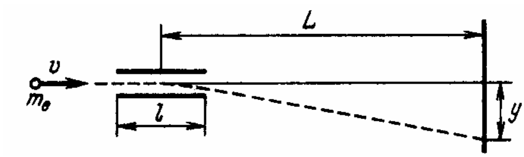
1 Движение шайбы происходит под действием трёх сил, две из которых mg и N, перпендикулярны направлению движения, поэтому их работа на перемещении вдоль оси OX равна нулю. Движение вдоль горизонтальной оси будет равнозамедленным

$$x = at^2/2, \quad \Rightarrow \quad a = 2x/t_2 \,. \qquad (1)$$

2 В соответствии со вторым законом Ньютона

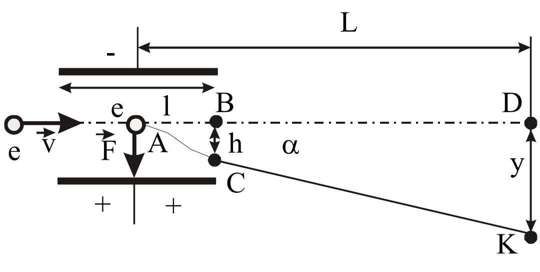
$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = m\vec{a}, \quad \Rightarrow \quad \langle F_{тр} \rangle = \frac{2mx}{t^2} = 0{,}16Н \,. \qquad (2)$$

2.1.3 В электронно-лучевой трубке электроны с начальной горизонтальной скоростью v_0 влетают в область электрического поля протяженности ℓ, где на них действует вертикальная сила со стороны заряженных отклоняющих пластин. Чему равна эта сила, если электроны, попадая на экран, смешаются на расстояние y по сравнению со случаем незаряженных пластин? Экран находится на расстоянии L от центра области действия электрической силы. Масса электрона m_e.



Решение:

1 В горизонтальном направлении электрон будет двигаться с постоянной начальной скоростью, т.к. в этом направлении действует тол ько сила тяжести, которой ввиду малости массы элек-



трона ($m_e \cong 1 \cdot 10^{-30}$ кг) можно пренебречь. В вертикальном направлении, перпендикулярно нижней, положительно заряженной пластине действует кулоновская сила, которая обеспечивает ускоренное движение электрона по вертикальному направлению.

2 Определим смещение электрона на выходе отклоняющих пластин h, для чего рассмотрим два подобных треугольника ABC и ADK

$$\mathrm{tg}\alpha = y/L; \quad \mathrm{tg}\alpha = 2h/l, \quad \Rightarrow \quad h = yl/2L. \tag{1}$$

3 Для движения в пространстве между пластинами кинематические уравнения примут вид

$$h = at^2/2; \qquad l = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = l/v_0. \tag{2}$$

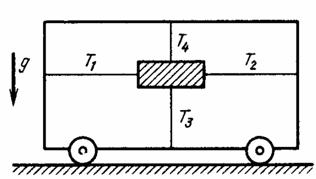
4 Объединяя уравнения (1) и (2) определим величину ускорения, действующего на электрон

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2yl}{2L}\frac{v_0^2}{l^2} = \frac{v_0^2 y}{Ll}. \tag{3}$$

5 Зная ускорение и массу электрона можно найти действующую силу

$$F = m_e a = \frac{m_e v_0^2 y}{Ll}. \tag{4}$$

2.1.4. Четырьмя натянутыми нитями груз закреплен на тележке. Сила натяжения горизонтальных нитей соответственно T_1 и T_2, а вертикальных – T_3 и T_4. С каким ускорением тележка движется по горизонтальной плоскости?

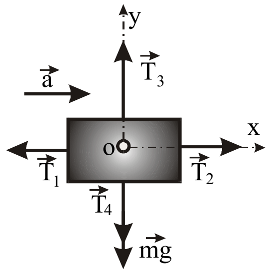


Решение:

1 Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на оси координат

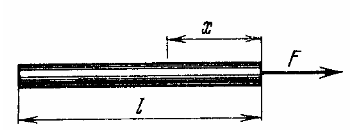
$$\left.\begin{aligned} T_2 - T_1 &= ma, \\ T_3 - T_4 - mg &= 0 \end{aligned}\right\},$$

откуда несложно определить ускорение



$$a = g\frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}.$$

2.1.5 Какая сила действует в поперечном сечении однородного стержня длины ℓ на расстоянии x от того конца, к которому вдоль стержня приложена сила F?



Решение:

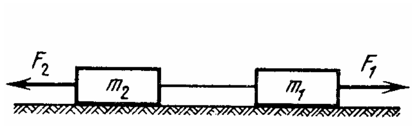
1 Сила, действующая на единицу длины стержня

$$f = F/\ell, \ [Н/м].$$

2 Натяжение в указанном сечении обусловлено действием части стержня длины $(\ell - x)$, другими словами,

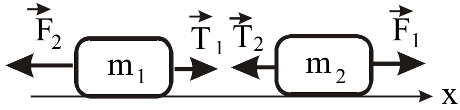
$$T = \frac{F}{\ell}(\ell - x) = F\left(1 - \frac{x}{\ell}\right).$$

2.1.6 Два тела массы m_1 и m_2 связаны нитью, выдерживающей силу натяжения T. К телам приложены силы $F_1 = \alpha t$ и $F_2 = 2\alpha t$, где α - постоянный коэффициент, имеющий размерность, t - время действия силы. Определите, в какой момент времени нить порвется.



Решение:

1 Нить, связывающая тела, является в данном случае связью, которую можно заменить соответствующими реакциями в виде сил натяжения. Тела при этом можно рассматривать как свободные и записать для каждого в отдельности второй закон Ньютона в проекции на направление возможного движения



$$\left.\begin{aligned}-F_1+T_1&=m_2a,\\ T_1-F_2&=m_1a.\end{aligned}\right\}\quad T_1=T_2=t\quad\Rightarrow\quad\frac{T-F_2}{F_1-T}=\frac{m_2}{m_1}\quad.\qquad(1)$$

2 Подставив заданные значения действующих сил, получим следующее уравнение

$$T(m_1+m_2)=\alpha tm_2+2\alpha tm_1,\qquad(2)$$

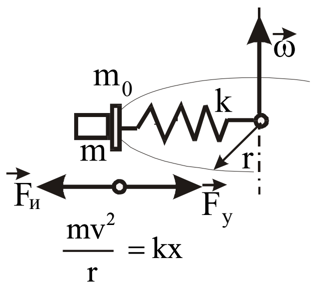
откуда

$$t=\frac{T(m_1+m_2)}{\alpha(2m_1+m_2)}.\qquad(3)$$

2.1.7 Для измерения массы космонавта на орбитальной станции используется подвижное сиденье известной массы m_0, прикрепленное к пружине. При одной и той же начальной деформации (сжатии) пружины пустое сиденье возвращается в исходное положение через время t_0, если же на сиденье находится космонавт - через время $t > t_0$. Какова масса космонавта?

Решение:

1 Предполагается, очевидно, что на орбитальной станции создаётся искусственное тяготение, путём вращения станции вокруг собственной оси с некоторой угловой скоростью ω. Если испытательное кресло соединено с пружиной, то по её деформации можно судить о исследуемой массе. При фиксированных значениях массы и частоты вращения станции состояние равновесия наступит при равенстве силы упругости силе инерции. В этом случае второй закон Ньютона для пустого кресла и кресла с космонавтом можно записать так:



$$\left.\begin{aligned}kx_1&=k\frac{a_1t_0^2}{2}=m_0a_1,\\ kx_2&=k\frac{a_2t^2}{2}=(m_0+m)a_2\end{aligned}\right\}.\qquad(1)$$

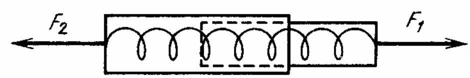
2 После очевидных сокращений получим:

$$k\frac{t_0^2}{2} = m_0, \quad k\frac{t^2}{2} = (m_0 + m). \tag{2}$$

3 Деля уравнения друг на друга, и разрешая полученный результат относительно массы космонавта, придём к окончательному соотношению

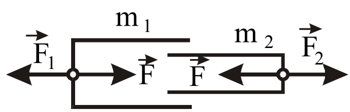
$$m = m_0\left[\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - 1\right]. \tag{3}$$

2.1.8 Динамометр состоит из двух цилиндров, соединенных легкой пружиной. Найдите отношение масс этих цилиндров, если при приложенных к ним силам F_1 и F_2 динамометр показывает силу F.



Решение:

1 Пружину в динамометре можно рассматривать как связь, которую можно заменить реакциями, приложив к цилиндрам соответствующую силу упругости.

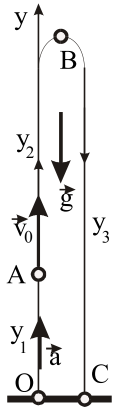


2 Уравнения основного закона динамики в проекции на горизонтальную ось примут вид

$$\left.\begin{aligned} -F_1 + F &= m_1 a, \\ F_2 - F &= m_2 a \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{F_2 - F}{F - F_1}.$$

2.1.9 Для испытания оборудования в условиях невесомости контейнер подбрасывается вверх пневматическим поршневым устройством, находящимся на дне вакуумированной шахты. Поршень действует на контейнер в течение времени Δt = 0,04с с силой F = nmg, где m - масса контейнера с оборудованием, n=125 - постоянный коэффициент. Через какое время контейнер упадет на дно шахты? В течение какого времени длится для оборудования состояние невесомости?

Решение:



1 Движение контейнера можно разделить на три участка: на разгонном участке OA, со стороны поршня действует сила F = nmg, которая разгоняет контейнер до скорости v_0; на втором участке AB контейнер движется как тело, брошенное вертикально вверх; на третьем участке, после остановки, контейнер с аппаратурой совершит свободное падение на дно шахты.

2 Запишем для разгонного участка уравнение основного закона динамики, что в сочетании с кинематическими условиями равноускоренного движения позволяет определить величины y_1, t_1 и v_0

$$nmg - mg = ma, \Rightarrow a = g(n-1) \cong 1240 м/c^2 . \qquad (1)$$

$$v_0 = a\Delta t = g(n-1)\Delta t \cong 50 м/c;$$

$$y_1 = \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{g(n-1)\Delta t^2}{2} \cong 2м . \qquad (2)$$

3 Определим время подъёма контейнера из точки A в точку B и величину y_2

$$t_2 = \frac{v_0}{g} = (n-1)\Delta t \cong 5c , \qquad (3)$$

$$y_2 = v_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = g(n-1)^2 \Delta t^2 - \frac{g}{2}(n-1)^2 \Delta t^2 = \frac{g(n-1)^2 \Delta t^2}{2};$$

$$y_2 \cong 123м . \qquad (4)$$

4 Таким образом, контейнер остановится достигнув высоты

$$y_3 = y_1 + y_2 = \frac{g(n-1)\Delta t^2}{2} + \frac{g(n-1)^2 \Delta t^2}{2},$$

$$y_3 = \frac{g(n-1)\Delta t^2}{2}[1 + (n-1)] = \frac{ng(n-1)\Delta t^2}{2} . \qquad (5)$$

5 Время падения контейнера с высоты y_3

$$t_3 = \sqrt{\frac{2y_3}{g}} = \Delta t\sqrt{n(n-1)} \cong 5c . \qquad (6)$$

6 Время пребывания контейнера с аппаратурой в «безвоздушном» пространстве

$$t_{пол} = \Delta t + t_2 + t_3 = \Delta t + (n-1)\Delta t + \Delta t\sqrt{n(n-1)},$$

$$t_{пол} = \Delta t\left[1 + (n-1) + \sqrt{n(n-1)}\right] = \Delta t\left[n + \sqrt{n(n-1)}\right] \cong 10c.$$

7 Состояние невесомости аппаратура в контейнере будет испытывать в течение времени

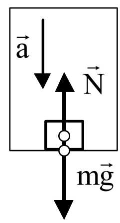
$$t_{н} = t_{пол} - \Delta t \cong 9{,}979 - 0{,}04 = 9{,}939 \cong 10c$$

2.1.10. Для подготовки к работе в условиях невесомости одетые в скафандры космонавты тренируются в воде. При этом сила тяжести, действующая на них, уравновешивается выталкивающей силой. В чем отличие такой "невесомости" от настоящей?

Решение:

1 Вес тела – это сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес. Таким образом, вес тела приложен к опоре или подвесу со стороны тела и по третьему закону Ньютона численно равен реакции связи со стороны опоры или нити подвеса. Сила тяжести приложена к телу.

Если опора или подвес неподвижны относительно планеты либо движутся равномерно и прямолинейно, то вес тела численно равен силе тяжести. Во всех прочих случаях эти силы различны. Так, например, для тела движущегося в лифте второй закон Ньютона, в общем случае, выглядит так



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \qquad (1)$$

или в проекции на вертикальную ось

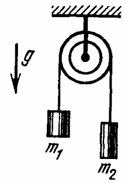
$$-ma = -mg + N? \qquad (2)$$

откуда N = m(g-a). Очевидно, что если ускорение лифта по модулю будет рано нулю, то N = 0. Такая ситуация называется состоянием невесомости. В случае погружения тел в воду, уравнение основного закона динамики примет вид

$$-mg + \rho_{ж}gV_{т} = 0,$$

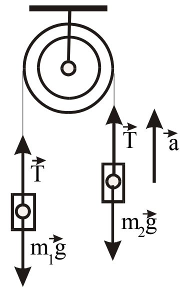
Сила Архимеда и сила тяжести приложены к телу, в случае их равенства по модулю наступает состояние безразличного равновесия.

2.1.11 Найдите ускорение грузов и силы натяжения нитей в системе, изображенной на рисунке. Блок и нити невесомы, трения нет.



Решение:

1 Поскольку нить нерастяжима и невесома, то её натяжение во всех точках будет одинаковым, т.е. $T_1 = T_2 = T$, кроме того, грузы за одинаковое время проходят одинаковые расстояния



$$y_1 = \frac{a_1 t^2}{2} = y_2 = \frac{a_2 t^2}{2}, \qquad (1)$$

т.е. движутся с одинаковыми ускорениями $a_1 = a_2$.

2 Второй закон Ньютона для движущихся тел запишется следующим образом

$$\left.\begin{aligned} m_1 g - T &= m_1 a, \\ m_2 g - T &= m_2 a. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

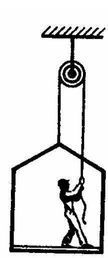
3 Поделив уравнения системы (2) одно на другое, получим

$$m_1 g - m_1 a = m_2 g - m_2 a, \quad \Rightarrow \quad a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

4 Подставим далее значение ускорения из уравнения (3) в первое уравнение системы (1) и разрешим его относительно натяжения T

$$T = g\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

2.1.12 Маляр работает в подвесной люльке. Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за веревку с такой силой, что сила его давления на пол люльки уменьшилась до 400 Н. Масса люльки 12 кг, масса маляра 72 кг. Чему равно ускорение люльки? Чему равна сила натяжения троса, на котором подвешен легкий блок?



Решение:

1 Пусть масса моляра будет m_1, а масса люльки m_2, реакция опорной плоскости N. Уравнения второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось для маляра и люльки примут вид

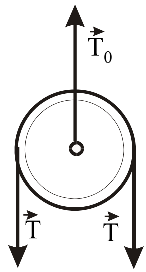
$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= T - m_1 g + N, \\ m_2 a &= T - m_2 g - N \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

2 Ускорение из (1) проще всего найти, вычитая второе уравнение из первого

$$m_1 a - m_2 a = T - m_1 g + N - T + m_2 g + N,$$

$$a(m_1 - m_2) = 2N - (m_1 - m_2)g,$$

$$a = \frac{2N - (m_1 - m_2)g}{(m_1 - m_2)} = 3{,}3 \text{ м/с}^2. \qquad (2)$$



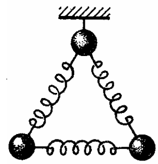
3 Натяжение троса, на котором подвешена люлька, определим из первого уравнения системы (1)

$$T = m_1 (a + g) - N = 560 \text{ Н}. \qquad (3)$$

4 Сила натяжения троса, на котором подвешен блок, будет равна удвоенному натяжению T

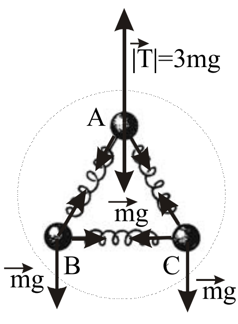
$$T_0 = 2T = 1120 \text{ Н}. \qquad (4)$$

2.1.13 Система из трех одинаковых шаров, связанных одинаковыми пружинами, подвешена на нити. Нить пережигают. Найдите ускорения шаров сразу после пережигания нити.



Решение:

1 Три шара, соединённые пружинами можно рассматривать как материальную систему, в которой силы взаимодействия пружин и тел являются внутренними. Они встречаются попарно, причём равны по модулю и противоположны по направлению, другими словами

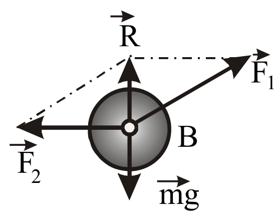


$$\sum_{k=1}^{k=6} \vec{F}_k^i = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=6} M_0(\vec{F}_k^i) = 0. \qquad (1)$$

Уравнения (1) показывают, что внутренние силы не могут изменить движение системы, т.к. из главный вектор и главный момент равны нулю. При внезапном обрыве нити под действием внешних сил окажется только верхний шар.

2 Внешней, в данном случае является только сила натяжения нити подвеса T = 3mg, приложенная к шару A. Запишем для него уравнение второго закона ньютона

$$T = ma_A, \quad 3mg = ma_A, \quad \Rightarrow \quad a_A = 3g. \qquad (2)$$

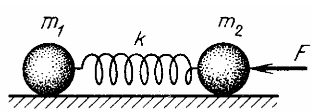


3 Два остальных шара в первый момент после обрыва нити окажутся под действием системы сил, равнодействующая которых равна нулю. Рассмотрим шар B, силы реакции связи со стороны пружин $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ при их геометрическом суммировании дадут силу $\vec{R}$, которая по модулю будет равна $m\vec{g}$ и противоположна по направлению, другими словами

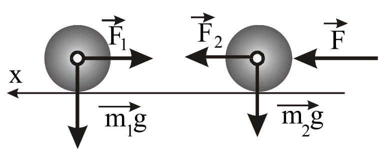
$$\sum_{k=1}^{k=3} \vec{F}_{Bk} = 0, \quad \Rightarrow \quad a_B = 0. \qquad (3)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для шара C – $a_C = 0$.

2.1.14 Тела массы m_1 и m_2 соединены пружиной жесткости k. На тело массы m_2 действует постоянная сила F, направленная вдоль пружины к телу массы m_1. Найдите, на сколько сжата пружина, если никаких других внешних сил нет, а колебания уже прекратились. Каким будет ускорение тел сразу же после прекращения действия силы F?



Решение:



1 Пружина в данной задаче является связью, которую можно заменить соответствующими реакциями связи F_1 и F_2, причём, эти силы, вызванные упругостью

пружины, будут равны по модулю и противоположны по направлению.

2 Рассматривая далее тела как свободные, можно записать следующие уравнения

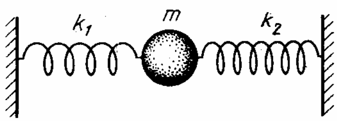
$$\left.\begin{aligned} -k\Delta x &= m_1 a, \\ k\Delta x + F &= m_2 a \end{aligned}\right\}, \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{Fm_1}{k(m_1 + m_2)}. \qquad (1)$$

3 Для тел в отсутствии силы F уравнения второго закона Ньютона примут вид

$$-k\Delta x = m_1 a_1, \quad a_1 = -F/(m_1 + m_2), \qquad (2)$$

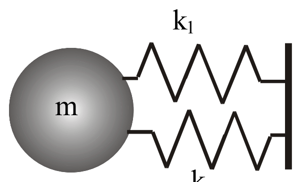
$$k\Delta x = m_2 a_2, \quad a_2 = Fm_1/m_2(m_1 + m_2). \qquad (3)$$

2.1.15 Тело массы т соединено двумя пружинами жесткости k_1 и k_2 с неподвижными стенками, пружины первоначально не деформированы. При возникших колебаниях наибольшее ускорение тела равно а. Найдите максимальное отклонение тела от положения равновесия и максимальные силы, с которыми пружины действуют на стенки.



Решение:

1 Пружины в данной задаче соединены параллельно, их деформация одинакова



$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x. \qquad (1)$$

2 Сила, действующая на массу со стороны пружин, определится в виде суммы

$$F = F_1 + F_2, \quad \text{или} \quad k_0\Delta x = k_1\Delta x + k_2\Delta x, \qquad (2)$$

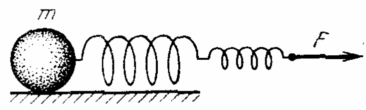
3 Запишем уравнение движения массы под действием эквивалентной пружины жёсткостью k_o, что позволит определить максимальное смещение

$$ma = (k_1 + k_2)\Delta x_{max}, \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{max} = ma/(k_1 + k_2). \qquad (3)$$

4 Максимальные значения сил, действующих на массу

$$F_{1max} = k_1\Delta x_{max}, \quad F_{2max} = k_2\Delta x_{max}. \qquad (4)$$

2.1.16 Тело массы m прикреплено к двум соединенным последовательно пружинам жесткости k_1 и k_2. К свободному концу цепочки пружин приложена постоянная сила F. Каково суммарное удлинение пружин, если колебания уже прекратились?



Решение:

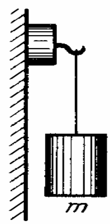
1 При последовательном соединении пружин их деформация будет разной при одинаковой действующей силе, это обстоятельство позволяет определить общую жёсткость пружин следующим образом

$$\Delta x_o = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_o}, \quad \Rightarrow \quad k_o = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \qquad (1)$$

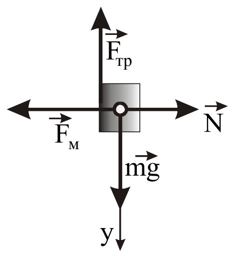
2 Совместное действие на массу пружин при покоящейся массе будет равно приложенной силе F

$$k_o \Delta x_o = F, \quad \Rightarrow \quad \Delta x_0 = \frac{F(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}. \qquad (2)$$

2.1.17 Легкий магнит с крюком на стальной вертикальной плите остается неподвижным, пока подвешенный к нему груз не превосходит по массе m_0. Чему равна магнитная сила, если коэффициент трения магнита по стали равен μ. С каким ускорением скользит магнитная подвеска, если масса груза $m > m_0$?



Решение:



1 Тело можно рассматривать как свободное, если связи заменить их реакциями. Сила трения в данном случае вызывается действием магнитной силы, т.е.

$$F_{тр} = \mu F_м. \qquad (1)$$

2 Условие равновесия массы в этом случае будет иметь место при равенстве модулей силы тяжести и силы трения

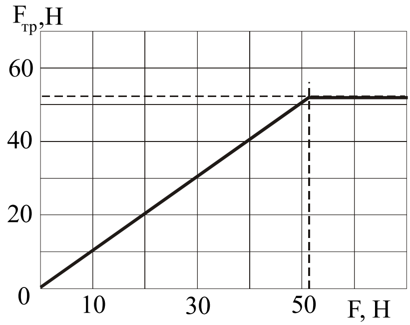
$$m_0g = \mu F_м, \quad \Rightarrow \quad F_м = gm_0/\mu \ . \qquad (2)$$

3 Когда тело станет двигаться при $m > m_0$, то станет справедливо уравнение второго закона Ньютона, которое в проекции на ось y запишется следующим образом

$$mg - m_0g = ma, \quad \Rightarrow \quad a = g\frac{m - m_0}{m}. \qquad (3)$$

2.1.18 Тело, находящееся на горизонтальной плоскости, тянут за нить, в горизонтальном направлении. Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на тело со стороны плоскости, от силы натяжения нити. Первоначально тело неподвижно. Масса тела 10 кг, коэффициент трения 0,51.

Решение:

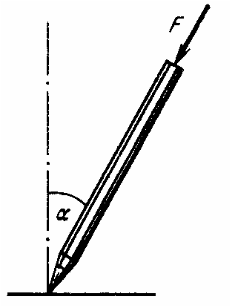


1 Если к телу прикладывают горизонтальную силу, а они вопреки стараниям не движется, то естественно предположить, что этому, что – то препятствует. И этим «что-то» является сила трения покоя, равная по величине прикладываемой силе. Величина силы трения покоя может меняться в зависимости от величины приложенной силы. Наибольшее значение силы трения, при котором ещё не наступает скольжение, определится как

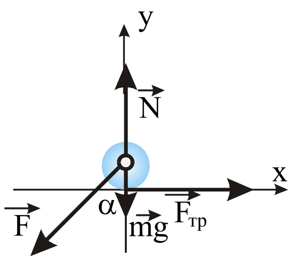
$$F_{тр(max)} = \mu N = \mu mg = 51Н \ .$$

2 Сила трения покоя, как и всякая приличная сила, имеет направление, она направлена в сторону возможного (виртуального) перемещения, причём при нулевой внешней силе, сила трения тоже будет равна нулю. Таким образом, сила трения покоя линейно меняется от нуля до максимального значения, оставаясь далее постоянной. Внешняя сила начинает сообщать телу ускорение.

2.1.19 Если нажимать пальцем на шариковую ручку, опирающуюся на твердую поверхность, одновременно наклоняя ее, то, пока ручка образует малый угол с перпендикуляром к поверхности, она будет послушно следовать за пальцем руки. Как только угол наклона ручки превысит некоторое максимальное значение α_{max}? она выскользнет из-под пальца, как бы сильно или слабо ни нажимать на нее. Проведите эксперимент со своей ручкой и оцените коэффициент трения между шариком ручки и поверхностью, на которую она опирается.



Решение:



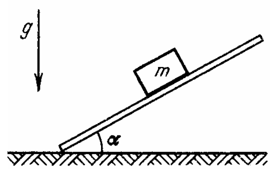
1 Для анализа условий равновесия шариковой ручки рассмотрим шарик, к которому приложены все действующие силы и реакции связи. Будем полагать далее, что F >> mg, это позволит силу тяжести в дальнейших расчётах не учитывать. Сила трения в данном случае определится как $F_{тр} = \mu mg + \mu F\cos\alpha$, или $F_{тр} \cong \mu F\cos\alpha$.

2 Условие равновесия, в проекции на горизонтальную ось, примет вид

$$\mu F\cos\alpha \geq F\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad \mu = tg\alpha_{max}. \qquad (1)$$

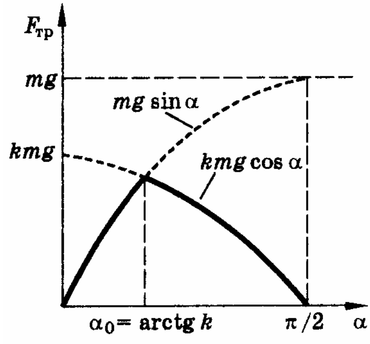
3 Как видно из уравнения (1), скольжение шарика по бумаге, зависит от угла наклона ручки и коэффициента трения. Если лист бумаги положить на ровную горизонтальную поверхность, то скольжение начинается при $\alpha \cong 20^0$, коэффициент трения при этом равен $\mu \cong 0,36$.

2.1.20 На горизонтальной доске лежит брусок массы m. Доску медленно наклоняют. Определите зависимость силы трения, действующей на брусок, от угла наклона доски a. Коэффициент трения k.



Решение:

1 Сила трения по модулю не может превышать значения $F_{тр(max)} = kN$, где N – сумма проекций всех сил на направление перпендикулярное возможному перемещению. При равновесии же тела сила трения равна сумме проекций сил на направление движения. Таким образом, в состоянии покоя



$$F_{тр} = mg\sin\alpha .$$

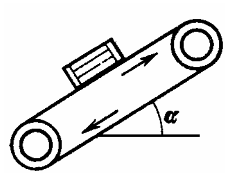
3 В противном случае, при $k \geq tg\alpha$

$$F_{тр} = kmg\cos\alpha .$$

4 Максимальное значение силы трения будет иметь место при угле α_0

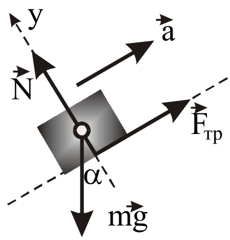
$$\alpha_0 = arctgk .$$

2.1.21 Ленточный подъемник образует угол α с горизонтом. С каким максимальным ускорением может подниматься ящик на таком подъемнике, если коэффициент трения равен μ? Лента не прогибается.



Решение:

1 Отбросив наложенные на ящик связи и заменив их реакциями, можно рассматривать его как свободное тело, способное перемещаться вдоль оси ОХ. Сила трения в данном случае направлена в сторону ускорения, т.е. против возможного перемещения ящика.



2 Уравнение второго закона Ньютона позволяет определить максимальное значение ускорения

$$\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha \leq ma,$$

$$a \leq g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) .$$

2.1.22 Через какое время скорость тела, которому сообщили вверх по наклонной плоскости скорость v_0, снова будет равна $\mathbf{v_0}$? Коэффициент трения μ, угол между плоскостью и горизонтом α, $tg\alpha > \mu$.

Решение:

1 Уравнение второго закона Ньютона при движении тела вверх

$$\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma, \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \quad (1)$$

2 Время движения тела вверх t_1 определится из условия равенства нулю скорости в конце подъёма

$$v = v_0 - at, \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \quad (2)$$

3 Движению тела вниз соответствует уравнение

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma, \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \quad (3)$$

4 Скорость станет равной v_0 только в конце спуска, потому как закона сохранения энергии никто не отменял, поэтому

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha), \quad \int_0^{v_0} dv = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_0^{t_2} dt,$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \quad (4)$$

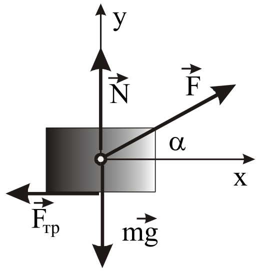
5 Искомое время определится в виде суммы $t = t_1 + t_2$

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha)}. \quad (5)$$

2.1.23 На тело массы m, лежащее на горизонтальной плоскости, действует сила F под углом α к горизонту. Коэффициент трения μ. Найдите ускорение тела, если оно не отрывается от плоскости.

Решение:

1 Нормальная реакция связи в данном случае будет определяться как силой тяжести $m\vec{g}$, так и проекцией на ось OY приложенной силы



$$N = mg - F\sin\alpha . \qquad (1)$$

Сила трения с учётом (1) определится как

$$F_{тр} = \mu\left(mg - F\sin\alpha\right). \qquad (2)$$

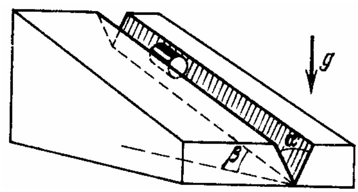
2 Основной закон динамики, таким образом, запишется следующим образом

$$F\cos\alpha - \mu\left(mg - F\sin\alpha\right) = ma . \qquad (3)$$

3 Из уравнения (3) легко определить искомое ускорение

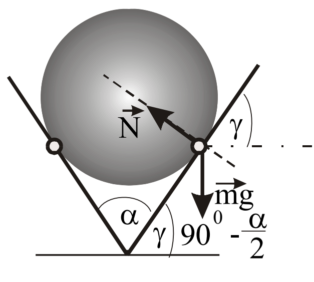
$$a = \frac{1}{m}\left(F\cos\alpha - \mu mg + F\sin\alpha\right),$$

$$a = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - \mu g . \qquad (4)$$



2.1.24 Цилиндр скользит по желобу, имеющему вид двугранного угла с раствором α. Ребро двугранного угла наклонено под углом β к горизонту. Плоскости двугранного угла образуют одинаковые углы с горизонтом. Определите ускорение цилиндра. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба μ.

Решение:



1 Определим нормальную реакцию связи цилиндра на ось, совпадающую с направлением движения. При вычислении N необходимо для каждой линии касания цилиндра и угла брать половинное значение массы

$$N_1 = \frac{m}{2} g\cos\gamma = \frac{m}{2} g\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (1)$$

а затем эти величины сложить, т.е.

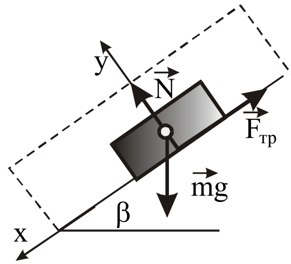
$$N = N_1 + N_2 = mg\sin\frac{\alpha}{2} . \qquad (2)$$

2 Определим силу трения, возникающую при скольжении цилиндра по жёлобу

$$F_{тр} = \mu mg \sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta . \qquad (3)$$

3 Проекция силы тяжести на направление движения (ось OX)

$$(mg)_x = mg\sin\frac{\alpha}{2}\text{sim}\beta . \qquad (4)$$



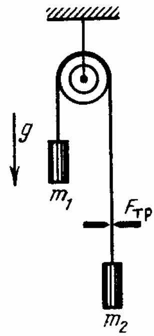
4 Уравнение второго закона Ньютона в проекции на направление перемещения цилиндра примет вид

$$mg\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta - \mu mg\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta = ma ,$$

откуда

$$a = g\left(\sin\beta - \frac{\mu\cos\beta}{\sin(\alpha/2)}\right). \qquad (5)$$

2.1.25 Нить, перекинутая через блок с неподвижной осью, пропущена через щель. На концах нити подвешены грузы, масса которых m_1 и m_2. Определите ускорения грузов и натяжение нити, если при движении нити на нее со стороны щели действует постоянная сила трения $F_{тр}$.



Решение:

1 Ввиду невесомости и не растяжимости нити, а так же, идеальных свойств блока (отсутствие потерь и малый вес) задачу можно решать в следующем приближении)

$$a_1 = a_2 = a, \quad T_1 = T_2 = T . \qquad (1)$$

2 Уравнения движения грузов в проекции на вертикальную ось в данном случае записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T, \\ m_2 a &= T - m_{2g} - F_{тр}. \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

3 Совместное решение системы уравнений (2) даёт следующую величину ускорения

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g - F_{тр}}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

4 Подстановка (3) в первое уравнение (2) позволяет определить натяжение нити

$$T = m_1 \frac{2m_2 g + F_{тр}}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

2.1.26 На обледеневшем участке шоссе коэффициент трения между колесами и дорогой в десять раз меньше, чем на не обледеневшем. Во сколько раз нужно уменьшить скорость автомобиля, чтобы тормозной путь на обледеневшем участке шоссе остался прежним?

Решение:

1 Внешней силой при движении автомобиля является сила трения, поэтому без учёта сопротивления со стороны воздуха, динамическое уравнение движения имеет вид

$$\mu mg = ma, \quad \Rightarrow \quad a = \mu g. \qquad (1)$$

2 Кинематические уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - at, \\ x &= v_0 t - \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu g}. \qquad (2)$$

3 Тормозной путь автомобиля

$$x = \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g}, \qquad (3)$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2\mu g x}, \qquad (4)$$

4 Очевидно, что при неизменности x и уменьшении μ в десять раз, скорость необходимо уменьшить в $\sqrt{10}$ раз, т.е.

$$v_1 = v_0\big/\sqrt{10} \cong v_0/3{,}16 \cong 0{,}316 v_0 .$$

2.1.27 Автомобиль с мощным двигателем, трогаясь с места, за 5с набирает скорость 72 км/ч. Найдите коэффициент трения между колесами и дорогой. Каков наименьший тормозной путь автомобиля, набравшего эту скорость?

Решение:

1 Среднее ускорение и время движения автомобиля с учётом нулевого значения конечной скорости (см. зад. 2.1.26):

$$< a >= -\frac{v_0}{\Delta t} = -4\frac{м}{с}, \qquad \Delta t = \frac{v_0}{< a >} . \qquad (1)$$

2 Кинематическое уравнение движения позволяет определить тормозной путь

$$x = v_0\Delta t - \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a} = 50 м . \qquad (2)$$

3. Коэффициент трения колёс о дорогу

$$a = \mu g, \quad \Rightarrow \quad \mu = 0{,}4$$

2.1.28 Материальная точка массой m = 2кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x = A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где $C = 1 м/с^2$, $D = - 0{,}2 м/с^3$. Найдите значение силы для времени t_1 = 2с, и t_2 = 5с. В какой момент времени сила будет равна нулю?

Решение:

1 Задача относится к прямым задачам динамики, когда по заданной массе и уравнениям движения определяются силы, вызвавшие это движение. Двойное дифференцирование заданного уравнения прямолинейного движения позволит определить ускорение точки, которое, будучи умноженное на массу, определит величину силы

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2, \quad \ddot{x} \equiv a_x = 2C + 6Dt ,$$

$$F_x(t) = ma_x = m(2C + 6Dt). \qquad (1)$$

2 Значение силы в заданные моменты времени:

$$F_1 = -0{,}8Н, \quad F_2 = -8Н, \qquad (2)$$

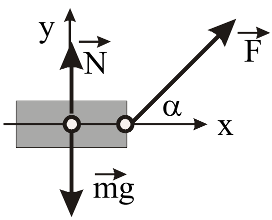
т.е. на исследуемую точку действует сила сопротивления, направленная в сторону противоположную перемещению.

3 Момент времени, когда сила станет равна нулю, определится при решении (1) при условии $F_x(t) = 0$

$$m(2C + 6Dt_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{2C}{6D} \cong 1{,}67с. \qquad (3)$$

2.1.29 Тело массы m, расположенное на гладкой горизонтальной плоскости. Начинает движение под действием силы, изменяющейся во времени F = kt, где k - постоянная величина. Направление силы составляет угол α с горизонтом. Определите скорость тела в момент его отрыва от плоскости.

Решение:



1 Тело оторвётся от плоскости в момент, когда проекция действующей силы на направление нормали станет равной силе тяжести, т.е.

$$kt\sin\alpha \geq mg, \qquad (1)$$

откуда время от начала движения до отрыва определится как

$$t_o = \frac{mg}{k\sin\alpha}. \qquad (2)$$

2 Уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось можно записать в виде:

$$kt\cos\alpha = m\frac{dv}{dt}, \qquad (3)$$

в дифференциальном уравнении (3) переменные делятся, что позволяет достаточно просто его проинтегрировать

$$\int_0^{v_0} dv = \frac{k\cos\alpha}{m}\int_0^{t_0} tdt, \qquad (4)$$

или, после интегрирования и подстановки значения t_0 из (2), для скорости получим

$$v = \frac{g^2 \cos\alpha}{2k \sin^2 \alpha}. \qquad (5)$$

3 Перемещение до момента отрыва найдём путём интегрирования уравнения скорости

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{k\cos\alpha}{2m} t^2. \qquad \int_0^{t_0} dx = \frac{k\cos\alpha}{2m}\int_0^{t_0} t^2 dt,$$

$$x = \frac{m^2 g^3}{6k^2 \sin^3 \alpha}. \qquad (6)$$

2.1.30 Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массы m при её движении в плоскости xy по закону:

$$x = A \sin\omega t, \qquad y = B \cos\omega t,$$

где A,B, и ω - постоянные величины.

Решение:

1 Проекции ускорения на оси координат определятся в виде вторых производных по времени от заданных уравнений движения

$$\ddot{x} \equiv a_x = -A\omega^2 \sin\omega t = -A\omega^2 x, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} \equiv a_y = -A\omega^2 \cos\omega t = -A\omega^2 y, \qquad (2)$$

2 Модуль полного ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = A\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3)$$

3 Модуль силы, приводящей к такому движению

$$|\vec{F}| = ma = mA\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mA\omega^2 |\vec{r}|, \qquad (4)$$

где $|\vec{r}|$ - радиус-вектор частицы.

4 Вектор силы: $\vec{F} = mA\omega^2 \vec{r}$.

2.1.31 В момент времени t = 0 частица массы m начинается двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin\omega t$, где $\vec{F}_0$, ω - постоянные величины. Определить зависимость пути, пройденного частицей от времени.

Решение:

1 Уравнение ускорение следует из второго закона Ньютона:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t\,. \qquad (1)$$

2 Интегрируя (1) дважды, получим зависимость координаты от времени

$$v = \frac{F_0}{m}\int \sin\omega t dt = -\frac{F_0}{m\omega}\cos\omega t + C_1\,, \qquad (2)$$

Определим постоянную интегрирования C_1, подставив в (2) $t = 0$, т.е. по начальным условиям: $v(0) = 0$, $\cos\omega t = 1$, поэтому

$$C_1 = \frac{F_0}{m\omega} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t)\,. \qquad (3)$$

Проинтегрируем далее уравнение (3)

$$x = \frac{F_0}{m\omega}\int (1 - \cos\omega t)dt = \frac{F_0 t}{m\omega} - \frac{F_0}{m\omega^2}\sin\omega t + C_2\,, \qquad (4)$$

Постоянная интегрирования $C_2 = 0$, другими словами,

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(\omega t - \sin\omega t)\,. \qquad (5)$$

2.1.32 В момент времени $t = 0$ частица начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0\cos\omega t$, где $\vec{F}_0$, ω - постоянные величины. Определите время, которое будет двигаться частица до первой остановки. Какой путь она при этом пройдёт? Какова максимальная скорость частицы на этом пути?

Решение:

1 Запишем основное уравнение динамики в виде проекции на направление перемещения

$$a_x \equiv \frac{dv_x}{dt} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t\,. \qquad (1)$$

2 Интегрируя (1), определим изменение скорости во времени

$$v_x \equiv v = \frac{F_0}{m}\int \cos\omega t dt = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + C_1 . \qquad (2)$$

Постоянная интегрирования $C_1 = 0$, т.к. $\sin\omega\cdot 0 = 0$, поэтому

$$v = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t . \qquad (3)$$

3 Первая остановка частицы произойдёт при v = 0, т.е. когда

$$\sin\omega t_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega t_0 = \pi, \quad \Rightarrow \quad t_0 = \pi/\omega . \qquad (4)$$

4 Пройденный до первой остановки путь определим интегрированием уравнения скорости (3)

$$x = \frac{F_0}{m\omega}\int \sin\omega t = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + C_2 . \qquad (5)$$

Постоянная интегрирования в данном случае ($\cos\omega\cdot 0 = 1$) равна

$$C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_0}{m\omega^2}\left(1 - \cos\omega t\right). \qquad (6)$$

5 Для определения пути, пройденного до первой остановки, необходимо время t_0 из (4) подставить в (6)

$$s = \frac{F_0}{m\omega^2}\left(1 - \cos\omega\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{2F_0}{m\omega^2} . \qquad (7)$$

6 Максимальное (амплитудное) значение скорости определится из уравнения (3)

$$v_{max} = \frac{F_0}{m\omega} . \qquad (8)$$

2.1.33 Катер массы m движется по озеру со скоростью v_0. В момент времени t = 0 выключили двигатель. Полагая силу сопротивления пропорциональной скорости в первой степени $\vec{F} = -r\vec{v}$, определите: а) закон изменения скорости в функции времени; б) время движения катера с выключенным двигателем.

Решение:

1 Скорость катера в функции времени определится из следующих соображений

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = -\frac{r}{m}v, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{r}{m}dt, \quad \int\frac{dv}{v} = -\frac{r}{m}\int dt .$$

$$\ln v = -\frac{r}{m}t + \ln C_1 \quad . \qquad (1)$$

Постоянная интегрирования C_1 имеет смысл начальной скорости, поэтому (1) можно преобразовать к виду:

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{rt}{m}, \quad \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{rt}{m}, \quad v = v_0 \exp\left(-\frac{rt}{m}\right), \qquad (2)$$

$$v = v_0 e^{-\frac{rt}{m}}. \qquad (2^*)$$

2 Время движения катера с выключенным двигателем, судя по уравнению (2) может продолжаться неограниченное время, асимптотически приближаясь к нулевому значению, т.е. $t \to \infty$.

2.1. 34 Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения бруска о плоскость зависит от пройденного им пути x по закону: $\mu = kx$, где k – постоянная. Найдите путь, пройденный бруском до остановки.

Решение:

1 Уравнение второго закона Ньютона на направление перемещения имеет вид

$$mg\sin\alpha - kxmg\cos\alpha = ma,$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - kxg\cos\alpha, \qquad (1)$$

для интегрирования (1) необходимо выполнить следующие преобразования:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{v}, \quad \Rightarrow \quad vdv = (g\sin\alpha - kxg\cos\alpha)dx,$$

$$\int vdv = \int g\sin\alpha dx - \int kxg\cos\alpha dx,$$

$$\frac{v^2}{2} = g\sin\alpha \cdot x - kg\cos\alpha\frac{x^2}{2}, \quad v^2 = 2g\sin\alpha x - kg\cos\alpha x^2,$$

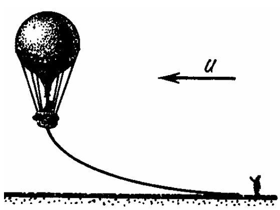
$$v = \sqrt{2g\sin\alpha x - kg\cos\alpha x^2}. \qquad (2)$$

2 Путь пройденный до остановки определится из условия равенства нулю скорости бруска, т.е.

$$v = 0, \quad \Rightarrow \quad 2g\sin\alpha x - kg\cos\alpha x^2 = 0,$$

$$x_{max} = \frac{2tg\alpha}{k}. \qquad (3)$$

2.1. 35 Масса воздушного шара вместе с канатом, волочащимся по земле, равна m; выталкивающая сила, действующая на шар, равна F; коэффициент трения каната о землю равен μ. Сила сопротивления воздуха, действующая на шар, пропорциональна квадрату скорости шара относительно воздуха: $f = kv^2$. Найдите скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью u.



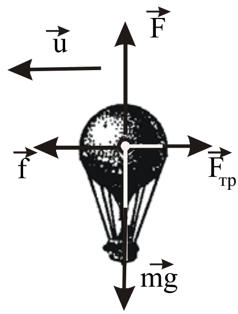
Решение:

1 Отбрасывая наложенные связи и заменяя их реакциями, будем рассматривать шар в виде свободной материальной точки. Нормальная реакция связи в этом случае определится как:

$$N = mg - F, \qquad (1)$$

сила трения каната о поверхность земли будет равна

$$F_{тр} = \mu(mg - F). \qquad (2)$$



2 Поскольку шар движется равномерно, то сумма проекций сил на направление перемещения должна быть равной нулю

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{ix} = 0, \quad \mu(mg - F) = \alpha v^2, \qquad (3)$$

откуда, относительная скорость шара v_r (относительно воздуха)

$$v_r = \sqrt{\mu/\alpha(mg - F)}. \qquad (4)$$

Абсолютная скорость (относительно земли) запишется в виде разности

$$v = u - \sqrt{\mu/\alpha(mg - F)}. \qquad (5)$$

2.1.36 Скорость тела массы m в вязкой жидкости убывает с пройденным расстоянием x по закону $v = v_0 - \beta x$, где v_0 – начальная скорость, β - постоянный коэффициент. Как зависит, действующая на тело, сила сопротивления со стороны жидкости от скорости?

Решение:

1 Уравнение второго закона Ньютона на направление движения:

$$ma = F_c, \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_c}{m}. \tag{1}$$

2 Производная скорости по времени

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 - \beta x) = \frac{dv_0}{dt} - \beta\frac{dx}{dt} = -\beta v. \tag{2}$$

Знак минус показывает, что вектор ускорения направлен в сторону, противоположную вектору скорости.

3 Объединяя уравнения (1) и (2), получим значение силы сопротивления в функции скорости

$$\left|\vec{F}_c\right| = \beta m v. \tag{3}$$

2.1.37 Сила сопротивления воздуха, действующая на капли дождя, приближённо определяется уравнением: $f = C\rho_0 r^2 v^2$, где $\rho_0 \cong 1{,}3$кг/м^3 – плотность воздуха при нормальных условиях, r – радиус капли. Безразмерный коэффициент сопротивления C для крупных капель равен примерно $C \cong 1$. Какие капли, крупные или мелкие достигают земли с большей скоростью? Оцените скорость падения капли радиусом r с большой высоты.

Решение:

1 Падение капель с большой высоты будет характеризоваться двумя участками: участком разгона, когда сила тяжести превосходит силу сопротивления

$$mg > C\rho_0 r^2 v^2, \tag{1}$$

и участком равномерного прямолинейного движения при

$$mg \cong C\rho_0 r^2 v^2. \tag{2}$$

2 Выразим массу капли через её радиус и плотность воды ρ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = C\rho_0 r^2 v^2, \qquad (3)$$

откуда искомая скорость определится в виде зависимости

$$v = \sqrt{\frac{4\pi\rho r g}{C\rho_0}}. \qquad (4)$$

3 Скорость капли на участке установившегося движения, таким образом, пропорциональна корню квадратному из её радиуса

$$v \sim \sqrt{r},$$

другими словами, крупные капли, путешествующие с большой высоты, будут достигать земной поверхности с большей скорости.

4 Скорость капли $r_1 = 1\cdot 10^{-3}$ м составит всего $v_1 \cong 5{,}7$м/с $\cong$ 20км/час.

2.1.38 Сила сопротивления воздуха, действующая на капли тумана пропорциональна произведению радиуса на скорость:

$$f = \gamma r v.$$

Капли радиусом r = 0,1мм, падая с большой высоты, у земли имеют скорость около 1 м/с. Какую скорость будут иметь капли тумана, радиус которых в два раза меньше? В десять раз меньше?

Решение:

1 Движение капли происходит в данном случае с постоянной скоростью, т.е. без ускорения, основной закон динамики для капли примет вид

$$\gamma r v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{4\pi r_1^2 \rho g}{3\gamma}. \qquad (1)$$

2 Так как скорость капли пропорциональна квадрату радиуса, то величины искомых скоростей можно представить следующим образом

$$v_2 = (0{,}5)^2 v_1 = 0{,}25 \text{ м/с},$$

$$v_3 = (0{,}1)^2 v_1 = 0{,}01 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

2.1.39 Парашютист массой $m = 100$кг производит затяжной прыжок с нулевой начальной скоростью относительно самолёта. Определите закон изменения его скорости от начала прыжка и до раскрытия парашюта, считая, что сила сопротивления со стороны воздуха пропорциональна скорости в первой степени: $F_c = kv$, где $k \cong 20$ кг/с.

Решение:

1 На парашютиста, которого в данной задаче можно считать материальной точкой, действуют две вертикальные силы: сила тяжести и сила сопротивления, причём последняя зависит от скорости. Уравнение второго закона Ньютона на вертикальную ось представится следующим образом

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv\,. \qquad (1)$$

2 Преобразуем (2) к виду, более удобному для последующего интегрирования, т.е. разделим переменные

$$-\frac{dv}{(mg/k) - v} = -\frac{k}{m}dt\,,$$

или

$$\frac{d\left[(mg/k) - v\right]}{\left[(mg/k) - v\right]} = -\frac{k}{m}dt\,. \qquad (2)$$

3 После интегрирования

$$\int \frac{d\left[(mg/k) - v\right]}{\left[(mg/k) - v\right]} = -\frac{k}{m}\int dt\,,$$

получим,

$$\ln\left(\frac{mg}{k} - v\right) = -\frac{k}{m}t + C\,. \qquad (3)$$

4 Постоянная интегрирования C определяется начальными условиями, при $t = 0$, $v = 0$, т.е. $C = \ln(mg/k)$. Уравнение (3) перепишется в виде

$$\ln\left(\frac{mg}{k} - v\right) = -\frac{k}{m}t + \ln\frac{mg}{k}\,. \qquad (4)$$

5 Разрешая далее (4) относительно скорости, получим закон её изменения во времени

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \qquad (5)$$

6 Уравнение для скорости (5) показывает, что при длительном времени движения скорость стремится к своему максимальному значению. Действительно, полагая $t \to \infty$, получим

$$v_{max} = \frac{mg}{k} \cong 50\frac{м}{с}. \qquad (6)$$

2.1.40 Частица движется вдоль оси x по закону $x = \alpha t^2 - \beta t$, где α и β положительные постоянные величины. В момент времени $t = 0$ на частицу действует сила F_0. Определите значение силы F_x в точках поворота частицы и в момент прохождения ею начала системы отсчёта.

Решение:

1 Заданное уравнение движения при его двукратном дифференцировании по времени даёт возможность получить уравнение ускорения частицы

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t - 3\beta t^2, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\alpha - 6\beta t. \qquad (1)$$

2 В начальный момент времени, т.е. при $t = 0$, $a_x = 2\alpha$, это даёт основание с помощью второго закона ньютона определить массу частицы

$$F_0 = ma_x \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F_0}{a_x} = \frac{F_0}{2\alpha}. \qquad (2)$$

3 В точке поворота скорость частицы будет конкретно равна нулю

$$v_x = 0, \quad \Rightarrow \quad 2\alpha t - 3\beta t^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2\alpha/3\beta. \qquad (3)$$

Ускорение частицы в этой точке равно $a_{x1} = -2\alpha$, значение действующей силы, соответственно

$$F_{x1} = ma_{x1} = -F_0. \qquad (4)$$

4 При прохождении частицей начала системы отсчёта x = 0, т.е.

$$\alpha t^2 - \beta t^3 = 0, \quad \Rightarrow \quad t_2 = \alpha/\beta,$$

ускорение частицы при этом составит

$$a_{x2} = 2\alpha - 6\beta t = -4\alpha.$$

5 Действующая при x = 0 на частицу сила, определится по аналогии с (4)

$$F_{x2} = ma_{x2} = -2F_0. \qquad (5)$$

2.1.41 Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массы m при её движении в плоскости оxy в соответствии с уравнениями x = Asinωt, y = Bcosωt, где A, B и ω - постоянные величины.

Решение:

1 Дифференцируя дважды по времени заданные уравнения движения, определим проекции и модуль полного ускорения

$$a_x \equiv \ddot{x} = -\omega^2 x, \quad a_y \equiv \ddot{y} = -\omega^2 y.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1)$$

2 Модуль действующей на частицу силы определится как

$$|\vec{F}| = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (2)$$

2 Векторное уравнение силы определится из следующих соображений

$$\text{т.к.} \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{то} \quad \vec{F} = m\omega^2\vec{r}, \qquad (3)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор частицы.

2.1.42 Воздушный шар массой m = 250 кг начал опускаться с ускорением a = 0,2 м/с^2. Определить массу балласта, который нужно сбросить с борта шара, чтобы аэростат начал подниматься вверх с таким же ускорением вверх.

Решение:

1 Обозначим искомую массу балласта через Δm и запишем уравнения основного закона динамики для случая спуска и подъёма шара

$$mg - F_A = ma, \qquad (1)$$

$$F_A - (m - \Delta m)g = (m - \Delta m)a\,. \qquad (2)$$

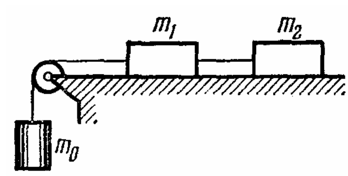
2 Из первого уравнения выразим силу Архимеда и подставим её значение во второе уравнение

$$F_A = m(g - a), \quad m(g-a) - (m - \Delta m)g = (m - \Delta m)a\,,$$

откуда

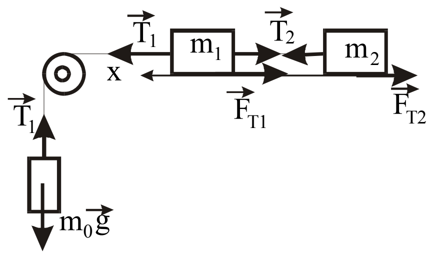
$$\Delta m = \frac{2ma}{g+a}\,. \qquad (3)$$

2.1.43 В установке, показанной на рисунке массы тел m_0, m_1, и m_2 известны. Массы блока и нитей пренебрежительно малы, а трение в блоке отсутствует. Найти ускорение a, с которым опускается масса m_0, и силу натяжения нити между телами m_1 – m_2, если коэффициент трения между этими телами и поверхностью равен μ.



Решение:

1 С учётом не растяжимости нити и идеальности блока уравнение второго закона Ньютона для трёх, движущихся с одинаковым ускорением масс, запишутся следующим образом



$$m_0 g - T_1 = m_0 a \qquad (1)$$

$$T_1 - T_2 - \mu m_1 g = m_1 a \qquad (2)$$

$$T_2 - \mu\, m_2 g = m_2 a\,. \qquad (3)$$

2 Выразим из первого уравнения T_1, а из третьего уравнения T_2 и подставим эти значения во второе уравнение

$$T_1 = m_0 g - m_0 a\,, \qquad T_2 = m_2 a + \mu m_2 g\,. \qquad (4)$$

$$m_0 g - m_0 a - m_2 a - \mu m_2 g - \mu m_1 g = m_1 a\,. \qquad (5)$$

3 Из уравнения (5) ускорение определится как

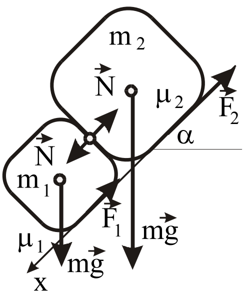
$$a = g\frac{m_0 - \mu(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_0}. \qquad (6)$$

4 Подставляя в уравнение (3) значение ускорения из (6), получим

$$T_2 = g\frac{(1+\mu)m_0 m_2}{m_0 + m_1 + m_2}. \qquad (7)$$

2.1.44 На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом поместили два соприкасающихся бруска. Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и брусками – соответственно μ_1 и μ_2, причём $\mu_1>\mu_2$. Определите: а) силу взаимодействия между брусками во время движения; б) предельное значение угла, при котором бруски будут покоиться.

Решение:



1 Запишем уравнение основного закона динамики в проекции на ось x для движущихся совместно тел с учётом того, что ускорение тел одинаково и силы взаимодействия N равны по модулю и противоположны по направлению

$$m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha - N = m_1 a, \quad (1)$$

$$m_2 g\sin\alpha - \mu_2 m_2 g\cos\alpha + N = m_2 a. \quad (2)$$

2 Выразим из уравнений (1) и (2) ускорение и приравняем полученные зависимости

$$g\sin\alpha - \mu_1 g\cos\alpha - N/m_1 = g\sin\alpha - \mu_2 g\cos\alpha - N/m_2, \quad (3)$$

откуда сила взаимодействия определится как:

$$N = \frac{m_1 m_2 \cos(\mu_1 - \mu_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

3 Предельное значение угла, при котором тела ещё будут покоится определится из условия равенства нулю суммы всех, действующих на тела сил, т.е.

$$m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha - N = 0, \qquad (5)$$

$$m_2 g\sin\alpha - \mu_2 m_2 g\cos\alpha + N = 0\,. \qquad (6)$$

4 Разрешая (5) и (6) относительно N и приравнивая результаты, получим

$$m_1 g\sin\alpha + m_2 g\sin\alpha = \mu_2 m_2 g\cos\alpha + \mu_1 m_1 g\cos\alpha\,,$$

или

$$\sin(m_1 + m_2) = \cos(\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1),$$

откуда

$$\alpha \le \mathrm{arctg}\frac{\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1}{m_1 + m_2}\,. \qquad (7)$$

2.1.45 Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость, если известно, что время подъёма тела в два раза меньше времени спуска.

Решение:

1 Запишем кинематические уравнения движения тела вверх и вниз

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2},\\ v_1 &= v_0 - a_1 t_1 \end{aligned}\right\} \quad v_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{a_1}, \quad t_2 = \frac{2v_0}{a_1}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{a_2 t_2^2}{2} = \frac{4v_0^2}{2a_1},\\ v_2 &= a_2 t_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

2 Подставим далее в первое уравнение системы (1) значение t_1 и приравняем x_1 и x_2 так как тело вверх и вниз проделывает одинаковый путь

$$x_1 = \frac{v_0^2}{a_1} - \frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v_0^2}{2a_1}, \quad x_2 = \frac{2a_2 v_0^2}{a_1^2}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{4}\,. \qquad (3)$$

3 Запишем основное уравнение динамики для движения тела вверх и вниз по плоскости

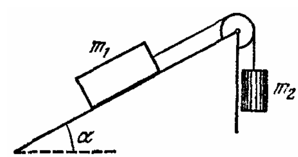
$$-\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma_1\,,\ -mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = ma_2\,,$$

откуда

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad a_2 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad (4)$$

4 Совмещая уравнения (3) и (4), получим

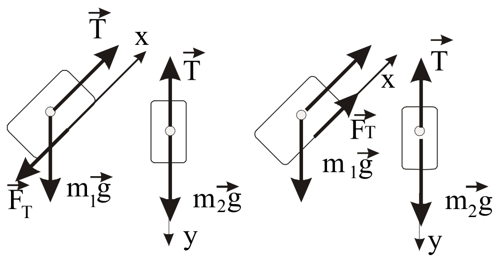
$$\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{1}{4}, \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{3}{5}\mathrm{tg}\alpha \cong 0{,}16. \qquad (5)$$



2.1.46 На наклонной плоскости с известным углом наклона α расположено тело массой m_1, соединённое, перекинутой через идеальный блок, невесомой и нерастяжимой нитью с другим телом массой m_2. В начальный момент времени тела покоятся. Определите отношение масс m_2/m_1 при котором тело m_2 начнёт: а) опускаться; б) подниматься.

Решение:

1 Тела будут покоиться относительно плоскости, если сумма, действующих на каждое из них сил, будет равна нулю. Предположим, что возможным перемещением тела с массой m_1 является



его подъём вверх по наклонной плоскости (левая схема рисунка). Уравнения второго закона Ньютона, при этом, примут вид

$$T - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$m_2 g - T = 0, \qquad (2)$$

или

$$T = \mu m_1 g\cos\alpha + m_1 g\sin\alpha, \quad T = m_2 g. \qquad (3)$$

2 Рассматриваемое виртуальное перемещение станет возможным при

$$m_2 \geq m_1(\mu\cos\alpha + \sin\alpha),$$

откуда следует, что

$$\frac{m_2}{m_1} \geq \mu\cos\alpha + \sin\alpha\,. \qquad (4)$$

3 При рассмотрении виртуального перемещения системы тел в противоположном направлении (правая часть схемы) уравнения (3) запишутся следующим образом

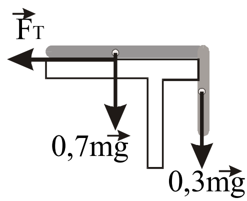
$$T = \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha\,, \qquad T = m_2 g\,,$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1} \leq \sin\alpha - \mu\cos\alpha\,. \qquad (5)$$

2.1.47 Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет 30% от его длины. Определите коэффициент трения каната о стол.

Решение:



1 Если предположить, что канат имеет одинаковый диаметр и погонную массу, то условие при котором возможно его соскальзывания запишется следующим образом:

$$0{,}7\mu mg \leq 0{,}3mg\,, \qquad (1)$$

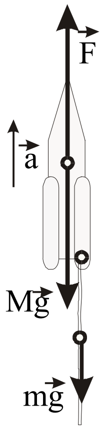
другими словами, сила трения между столом и лежащей частью каната должна быть равна или меньше веса свешивающейся части.

2 Решая уравнение (1) относительно коэффициента трения, получим

$$\mu = 0{,}3/0{,}7 \cong 0{,}43\,. \qquad (2)$$

2.1.48 При старте ракеты не отстыковался один из питающих кабелей массой 10 кг. Ракета массой M = 6т, поднимается вертикально вверх. Сила тяги её стартовых двигателей составляет F = 500 кН. Определите ускорение ракеты и натяжение свободно свисающего кабеля, на расстоянии ¼ его длины от разъёма. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

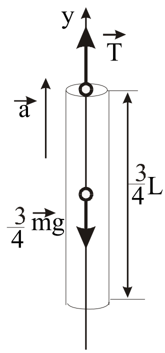


1 Уравнение второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось при заданных силах имеет следующий вид

$$F - g(M + m) = (M + m)a\,, \qquad (1)$$

откуда

$$a = \frac{F}{M + m} - g \cong 73\frac{\text{м}}{\text{с}}\,. \qquad (2)$$

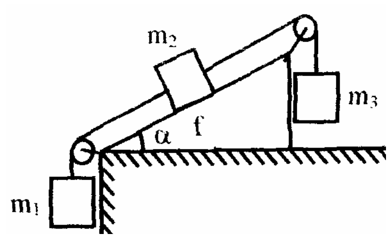


2 Натяжение в заданном сечении кабеля определим, полагая его однородным и представив свободным, т.е. наложенные связи заменим их реакциями. Ракета с частью (1/4 всей длины) кабеля заменяется силой натяжения T

$$T - \frac{3}{4}mg = \frac{3}{4}ma\,, \qquad (2)$$

$$T = \frac{3}{4}m(g - a) = \frac{3}{4}\left(g + \frac{F}{M + m} - g\right) \cong 625\text{Н}\,.$$

2.1. 49 Прямоугольный клин с острым углом $\alpha = 30^0$ при основании закреплён на горизонтальной плоскости. На клине находится тело массой m_2, соединённое посредствам нитей, перекинутых через два идеальных блока, с телами массой m_1 и m_3. Коэффициент трения между телом m_2 и клином $\mu = 0{,}3$. Найдите натяжение нитей.

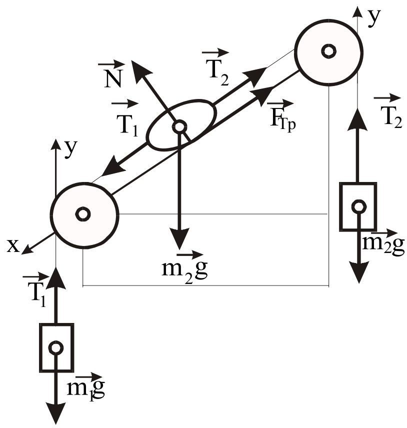


Решение:

1 Уравнения второго закона Ньютона для масс с заданными связями запишутся так

$$\left.\begin{aligned} &T_1 = m_1 g - m_1 a,\\ &T_1 - T_2 + m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a,\\ &T_2 - m_3 g = m_3 a. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

2 Из первого и третьего уравнений системы (1) выразим натяжение нитей T_1 и T_2 и подставим эти значения во второе уравнение



$$T_1 = -m_1a + m_1g\,, \qquad (2)$$

$$T_2 = m_3a + m_3g\,. \qquad (3)$$

$$m_1g - m_3g + m_2g\sin\alpha -$$

$$-\mu m_2g\cos\alpha = a\left(m_1 + m_2 + m_2\right),$$

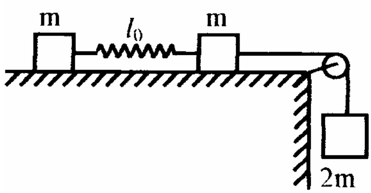
откуда несложно определить величину ускорения, с которым движутся массы (изначально принято, что масса m_1 опускается)

$$a = g\frac{\left(m_1 - m_3\right) + m_2\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}{m_1 + m_2 + m_3} \cong 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,. \qquad (4)$$

3 Подставим далее значение ускорения в уравнения (3,4)

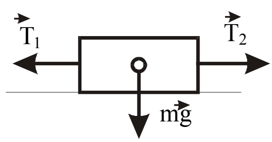
$$T_1 = m_1\left(g - a\right) \cong 50\text{Н}\,, \quad T_2 = m_2\left(g + a\right) \cong 45\text{Н}\,. \qquad (5)$$

2.1.50 На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m соединённые невесомой пружиной жёсткости k. Длина пружины в свободном состоянии равна L_0. К правому кубику прикреплена невесомая и нерастяжимая нить, переброшенная через идеальный блок. Ко второму концу нити подвешен груз массой 2m. Система приходит в движение из состояния покоя. Определите максимальное расстояние между кубиками при движении.



Решение:

1 Рассмотрим ситуацию до возникновения движения левого кубика. Начало перемещения масс m и 2m будет сопровождаться растяжением пружины.



2 В момент начала движения левого кубика, правый кубик будет находиться

под действием двух горизонтальных сил T_1 и T_2, причём

$$T_1 = kx, \quad T_2 = 2mg, \tag{1}$$

с другой стороны, движение становится возможным при условии

$$T_2 > T_1, \quad \Rightarrow \quad 2mg > kx, \tag{2}$$

где x – удлинение пружины, которое, после затухания колебаний станет постоянным и равным

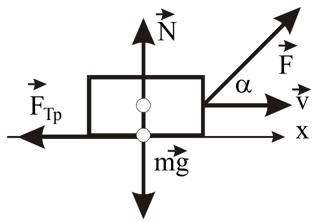
$$x = \frac{2mg}{k}. \tag{3}$$

3 Максимальное расстояние между кубиками с учётом начальной длины пружины L_0

$$L_{max} = L_0 + \frac{2mg}{k}. \tag{4}$$

2.1.50 Тело массой m = 1 кг тянут по горизонтальной поверхности под действием силы F = 3 Н, составляющей угол $\alpha = 45^0$ с горизонтом. При этом, за время $\Delta t = 2$ с скорость равнопеременного движения изменяется от $v_1 = 1$м/с до $v_2 = 3$м/с. Определите коэффициент трения μ тела о плоскость.

Решение:



1 Нормальная реакция связи в данном случае определится в виде

$$N = mg - F\sin\beta, \tag{1}$$

тогда сила трения примет вид

$$F_{Тр} = \mu(mg - F\sin\alpha). \tag{2}$$

2 Основное уравнение динамики

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\beta) = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}m, \tag{3}$$

откуда

$$F\Delta t\cos\alpha - (v_2 - v_1)m = \mu(mg - F\sin\alpha),$$

или

$$\mu = \frac{F\cos\alpha\Delta t - (v_2 - v_1)m}{(mg - F\sin\alpha)\Delta t} \cong 0{,}14. \tag{4}$$

2.1.51 Два тела массами M и m (M > m) с одинаковой высоты без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха для каждого тела постоянна и равна F. Сравните время падения тел.

Решение:

1 Определим время падения тела малой массы с заданной высоты h путём интегрирования основного уравнения динамики, которое в общем случае представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка

$$mg - F = m\frac{dv}{dt}, \qquad (1)$$

2 Разделим в уравнении (1) переменные и проинтегрируем его

$$(mg - F)dt = mdv, \ (mg - F)\int dt = m\int dv, \qquad (2)$$

$$(mg - F)t_1 = mv \ + C_1. \qquad (3)$$

Постоянную интегрирования, имеющую размерность кг·м/с определим, подставив в (3) значение t = 0? $C_1 = mv(0)$, т.к. начальная скорость по условию задачи равна нулю, то $C_1 = 0$.

3 Выразим в уравнении (3) скорость через координату тела и снова разделим переменные

$$(mg - F)t_1 = m\frac{dy}{dt}, \quad (mg - F)t_1 dt = mdy,$$

$$(mg - F)\int t_1 dt = m\int dy, \quad y_1 + C_2 = \left(g - \frac{F}{m}\right)\frac{t_1^2}{2}. \qquad (4)$$

4 В начальный момент времени тела находятся на одинаковой высоте h, значит постоянная интегрирования равна $C_2 = h$. В конечный момент падения координата y = 0, поэтому

$$h = \left(g - \frac{F}{m}\right)\frac{t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g - F/m}}. \qquad (5)$$

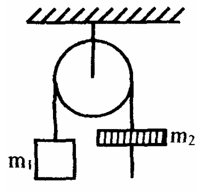
5 Аналогичные уравнения можно записать и для тела с массой M, в результате получим время его падения

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g - F/m}}. \qquad (6)$$

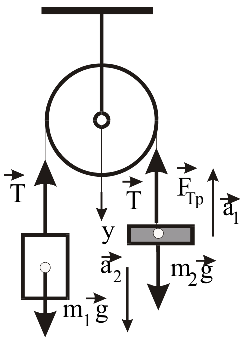
6 Искомое отношение времён падения тел с учётом (5) и (6) запишется следующим образом

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{g - F/m}{g - F/M}} \,. \tag{7}$$

2.1.52 Через лёгкий вращающийся без трения блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить. На одном конце нити прикреплен груз массой m_1, а по другому концу скользит с постоянным ускорением шайба массой m_2. Определите ускорение массы m_1 и величину силы трения шайбы о нить.



Решение:



1 В данном случае сила натяжения нити равна силе трения

$$F_{Тр} = T \,, \tag{1}$$

а ускорение шайбы относительно неподвижной вертикальной координаты определится как

$$a = (a_2 - a_1). \tag{2}$$

2 С учётом условий (1) и (2) уравнения движения массы m_1 и шайбы в проекции на ось y примут вид

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{Тр} \,; \qquad m_2(a_2 - a_1) = m_2 g - F_{Тр} \,. \tag{3}$$

откуда

$$m_1 a_1 - m_1 g = m_2(a_2 - a_1) - m_2 g \,. \tag{4}$$

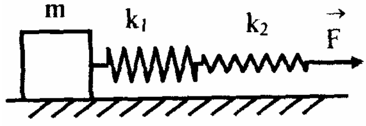
3 Разрешая (4) относительно a_1 получим

$$a_1 = \frac{m_1 g - m_2(g - a_2)}{m_1 + m_2} \,. \tag{5}$$

4 Значение силы трения целесообразно получить, подставив (5) в первое уравнение системы (3)

$$F_{Тр} = \frac{m_1 m_2 (2g - a_2)}{m_1 + m_2} \,. \tag{6}$$

2.1.53 Тело массой m, посредствам с двух, последовательно соединённых пружин жёсткости k_1 и k_2 перемещается по гладкой горизонтальной плоскости силой F, параллельной плоскости. Каково суммарное удлинение пружин при установившемся движении системы?



Решение:

1 При растяжении пружин будут возникать силы упругости

$$F_1 = k_1 x_1, \quad F_2 = k_2 x_2, \quad F_O = k_O x_O, \tag{1}$$

откуда

$$x_1 = \frac{F_1}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F_2}{k_2}, \quad x_O = \frac{F_O}{k_O}. \tag{2}$$

2 Поскольку пружины соединены последовательно, то каждая из них будет находиться под действием одинаковой силы, т.е.

$$F_O = F_1 = F_2 = F, \tag{3}$$

с другой стороны, удлинение соединения пружин будет равно сумме деформаций $x_O = x_1 + x_2$.

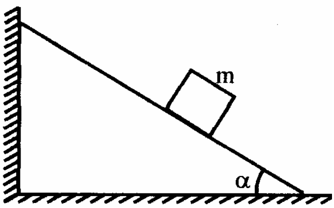
3 Определим общий коэффициент упругости соединения пружин, воспользовавшись уравнениями (2)

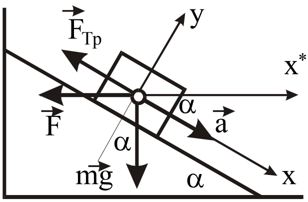
$$x_O = \frac{F}{k_O} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \quad k_O = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{4}$$

4 Суммарное удлинение пружин с учётом (4) запишется следующим образом

$$x_O = F\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}. \tag{5}$$

2.1.54 Найти силу, действующую на вертикальную стенку со стороны клина, если на него положили груз массой m. Угол при основании клина α, коэффициент трения между грузом и поверхностью клина μ. Трение между клином и полом отсутствует.





Решение:

1 Величину ускорения груза определим из основного уравнения динамики, записанного в виде проекции на ось x

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma,$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \qquad (1)$$

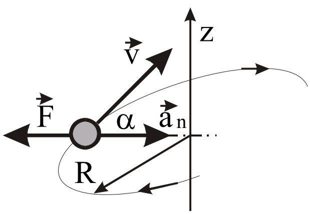
2 Определим далее проекцию ускорения на ось x*, перпендикулярную вертикальной грани клина

$$a_{x^*} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot\cos\alpha. \qquad (2)$$

3 Сила, действующая на вертикальную стенку при $\mu \le \mathrm{tg}\alpha$, т.е. когда груз будет двигаться вниз по клину, запишется традиционным соотношением

$$F = mg\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot\cos\alpha\,. \qquad (3)$$

2.1.55 Частица массы m движется по гладкой внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R. Найти силу давления частицы на стенку цилиндра, если в начальный момент ее скорость равна v и составляет угол α с горизонтом.



Решение:

1 Очевидно, что частица по внутренней поверхности цилиндра может двигаться, опускаясь по спиральной траектории. Криволинейное движение частицы будет сопровождаться возникновением нормального ускорения a_n, которое, в свою очередь приводит к появлению силы инерции F, направленной в противоположную сторону.

2 Определим проекцию скорости частицы на направление нормального ускорения и само нормальное ускорение

$$v_n = v\cos\alpha, \qquad a_n = \frac{v^2\cos^2\alpha}{R}, \qquad (1)$$

откуда:
$$F = ma_n = mv^2\cos^2\alpha/R\,. \qquad (2)$$

2.1.56 Материальная точка массой m = 1 кг движется по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta\sin(\omega t)\vec{j}$ Определить модуль силы, действующей на материальную точку в момент времени t = 1 с, если α = 2 м/с, β = 3 м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Решение:

1 По заданному уравнению радиус-вектора $\vec{r} = f(t)$ определим его проекции на оси декартовой системы координат

$$r_x = \alpha t, \quad r_y = \beta \sin\omega t\,. \tag{1}$$

2 Дифференцируя дважды по времени уравнения (1) определим проекции ускорения на эти оси

$$a_x = \frac{d^2 r_x}{dt^2} = 0, \qquad a_y = \frac{d^2 r_y}{dt^2} = -\beta\omega^2 \sin\omega t\,, \tag{2}$$

3 Как видно из уравнений (2), точка вдоль оси x движется равномерно, а воль оси y ускоренно, поэтому модуль полного ускорения точки определится как:

$$|\vec{a}| = \beta\omega^2 \sin\omega t\,. \tag{3}$$

4 Модуль действующей на точку силы в соответствии со вторым законом Ньютона

$$|\vec{F}| = m|\vec{a}| = m\beta\omega^2 \sin\omega t = 7{,}5\text{Н}\,. \tag{4}$$

Вектор силы совпадает с вертикальной остью и направлен в противоположную ей сторону.

2.1.57 На материальную точку массой m действует сила $\vec{F} = kt\vec{i}$, где k - положительная постоянная. В начальный момент времени скорость точки $\vec{v} = v_0\vec{i}$. В какой момент времени модуль скорости точки будет в два раза больше первоначального модуля скорости?

Решение:

1 Точка движется вдоль оси ох ускоренно, поскольку известна начальная скорость и действующая сила, то для нахождения искомого времени целесообразно применить теорему об изменении импульса

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \equiv \Delta\vec{p},$$

$$\mathrm{k}tt = \Delta p_0, \quad kt^2 = 2mv_0, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2mv_0}{k}}.$$

2.1.58 Закон движения материальной точки имеет вид $\vec{r} = \alpha t^3 \vec{i} + \beta t \vec{j}$, где α и β - положительные постоянные. При каком соотношении между α и β в момент времени t = 1 с угол φ между вектором скорости v и вектором силы F, действующей на точку, равен 60°?

Решение:

1 Проекции радиус-вектора точки на оси декартовой системы координат равны:

$$r_x = \alpha t^3, \qquad r_y = \beta t. \tag{1}$$

2 Проекции скорости на эти же оси координат

$$v_x = 3\alpha t^2, \qquad v_y = \beta. \tag{2}$$

3 Модуль вектора скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{9\alpha^2 t^4 + \beta^2}. \tag{3}$$

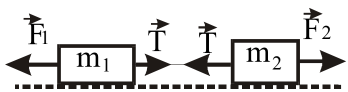
4 Направление вектора скорости

$$\cos 60^0 = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{3\alpha}{\sqrt{9\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

5 Разрешая (4) относительно β, получим

$$\beta = 3\alpha\sqrt{3}.$$

2.1.59 Два тела массами m_1 и m_2 связанные невесомой и нерастяжимой нитью, выдерживающей силу натяжения T, расположены на гладкой горизонтальной поверхности. К телам приложены силы противоположного направления: $F_1 = \alpha t^2$, $F_2 = 2\alpha t^2$, где α - положительная постоянная. Найти, в какой момент времени нить оборвется.



Решение:

1 Уравнения второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось

$$-F_1 + T = m_1 a, \qquad -T + F_2 = m_2 a. \tag{1}$$

2 Ввиду не растяжимости нити, ускорение тел будет одинаковым. Другими словами

$$\frac{T - F_1}{m_1} = \frac{F_2 - T}{m_2}, \tag{2}$$

или с учётом заданных значений сил

$$m_2\left(T - \alpha t^2\right) = m_1\left(2\alpha t^2 - T\right), \tag{3}$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(2m_1 + m_2)}}. \tag{4}$$

2.1.60 В условиях предыдущей задачи (2.1.59) найдите скорость системы в момент обрыва нити, если v(0) = 0.

Решение:

1 Определим суммарную силу, действующую на систему тел с общей массой $m = m_1 + m_2$

$$F = F_2 - F_1 = \alpha t^2, \tag{1}$$

2 Запишем уравнение второго закона Ньютона в виде

$$\alpha t^2 = (m_1 + m_2)\frac{dv}{dt}, \tag{2}$$

$$\alpha \int t^2 dt = (m_1 + m_2)\int dv, \tag{3}$$

или, после интегрирования

$$\frac{\alpha t^3}{3} = (m_1 + m_2)v + C_1. \tag{4}$$

3 Постоянная интегрирования в (4) представляет собой величину скорости в начальный момент времени, т.е. $C_1 = 0$. Таким образом, с учётом времени разрыва нити (2.1.59) величина скорости тел определится как

$$v = \frac{\alpha t^3}{3(m_1 + m_2)} = \frac{(m_1 + m_2)T}{3(2m_1 + m_2)}\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T}{\alpha(2m_1 + m_2)}}. \tag{5}$$

2.1.61 Определить закон движения материальной точки массой m, если на нее действует сила $\vec{F} = \alpha\vec{j} + \beta t\vec{k}$, где α, β постоянные величины. Начальные условия: $\vec{r}(0) = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0\vec{i}$.

Решение:

1 Исходя из заданного вектора действующей силы, уравнения второго закона Ньютона на оси оy и оz можно представить следующим образом

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{dv_y}{dt}, \qquad \frac{\beta t}{m} = \frac{dv_z}{dt}, \tag{1}$$

откуда, после разделения переменных и интегрирования с учётом заданных начальных условий, получим

$$\frac{dr_y}{dt} = \frac{\alpha t}{m}, \qquad \frac{dr_z}{dt} = \frac{\beta t^2}{2m}. \tag{2}$$

2 Интегрирование уравнений (2) позволяет получить зависимости проекций радиус-вектора на соответствующие оси декартовой системы координат

$$r_y = \frac{\alpha t^2}{2m}, \qquad r_z = \frac{\beta t^3}{6m}, \tag{3}$$

3 В проекции на ось ох движение исследуемой точки будет равномерным, потому что скорость по условию задачи не меняется и направлена вдоль этой оси, т.е.

$$r_x = v_0 t. \tag{4}$$

4 Объединяя (3) и (4) получим уравнение, определяющее изменение радиус-вектора во времени

$$\vec{r}(t) = v_0 t\vec{i} + \frac{\alpha t^2}{2m}\vec{j} + \frac{\beta t^3}{6m}\vec{k} \tag{5}$$

2.1.62 Определите траекторию материальной точки с массой m=3кг, движущейся под действием силы $\vec{F} = \alpha\vec{i} + \beta t\vec{j}$, где α = 2Н, β = 3Н/с и при t=0 $\vec{r}(0) = 0, \vec{v}(0) = 0$.

Решение:

1 Уравнения основного закона динамики в проекции на оси ох и оy в данном случае имеют вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\alpha}{m}, \qquad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\beta t}{m}. \qquad (2)$$

2 Проинтегрируем уравнения (2) дважды с учётом нулевых начальных условий

$$\int dv_x = \frac{\alpha}{m}\int dt, \qquad \int dv_y = \frac{\beta}{m}\int t dt,$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t}{m}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\beta t^2}{m},$$

откуда

$$x = \frac{\alpha}{m}\int t dt = \frac{\alpha t^2}{2m}, \qquad y = \frac{\beta}{2m}\int t^2 dt = \frac{\beta t^3}{6m}. \qquad (3)$$

3 Полученные уравнения движения записаны в параметрической форме, параметром является время. Чтобы из этих уравнений получить уравнение траектории необходимо из них исключить параметр. Выразим из первого уравнения системы (3) время

$$t = \sqrt{\frac{2xm}{\alpha}}, \qquad (4)$$

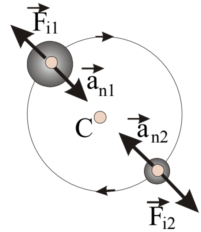
и подставим во второе уравнение.

4 С учётом заданных значений α, β, m уравнение траектории примет вид

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{3x}. \qquad (5)$$

2.1.63 Ускорение звёзд, входящих в состав двойной звезды равны a_1 и a_2. Какова масса второй звезды, если масса первой равна m_1?

Решение:



1 Двойными называются звёзды, вращающиеся вокруг общего центра масс C под действием сил тяготения. Нахождение тела на стационарной орбите возможно только при равенстве сил инерции, которые не являются силами в ньютоновском понимании, потому что вызва-

ны не взаимодействием тел, а спецификой криволинейного движения. Таким образом

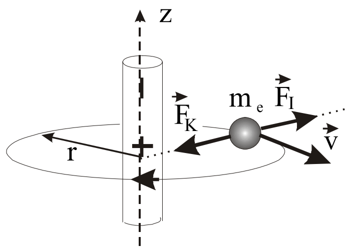
$$\left|\vec{F}_{i1}\right| = \left|\vec{F}_{i2}\right|, \quad \frac{m_1 v_1^2}{r} = \frac{m_2 v_2^2}{r}, \text{ или } \quad m_1 a_{n1} = m_2 a_{n2}, \qquad (1)$$

откуда

$$m_2 = \frac{a_{n1} m_1}{a_{n2}}. \qquad (2)$$

2.1.64 Электроны движутся по окружности любого радиуса вокруг заряженной нити, имея одинаковую скорость v. Как зависит сила, действующая на электрон массой m_e, в зависимости от его удаления от нити? Как будет меняться траектория электрона при изменении заряда нити?

Решение:



1 Стационарная круговая орбита электрона, представляющего собой отрицательно заряженную частицу с массой покоя m_e будет иметь место в случае равенства по модулю кулоновской силы притяжения и силы инерции

$$\left|\vec{F}_K\right| = \left|\vec{F}_i\right|. \qquad (1)$$

2 Сила инерции, как известно, прямо пропорциональна квадрату линейной скорости частицы и обратно пропорциональна расстоянию до оси вращения

$$\left|\vec{F}_i\right| = \frac{m_e v^2}{r}. \qquad (2)$$

Таким образом, сила Кулона в данном случае обратно пропорциональна расстоянию между электроном и заряженной нитью.

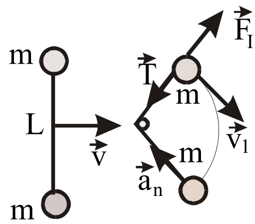
3 При увеличении заряда нити

$$F_K > \frac{m_e v^2}{r}, \qquad (3)$$

для восстановления равновесия радиус орбиты должен уменьшится, при уменьшении заряда – наоборот, радиус увеличится.

2.1.65 Два шарика массы m каждый, связанные нитью длиной L, движутся со скоростью v по горизонтальному столу в направлении, перпендикулярном связывающей их не провисающей нити. Середина нити налетает на гвоздь. Чему равна сразу после этого сила натяжения нити?

Решение:



1 Сразу после соприкосновения середины нити с гвоздём траектория масс изменится, они станут двигаться по круговой траектории радиуса L/2 навстречу друг другу. Массы можно рассматривать как свободные, если наложенную на них связь в виде нити заменить реакцией связи - силой натяжения нити, которая обусловлена её упругими свойствами. Сила натяжения нити по модулю равна силе инерции, т.е.

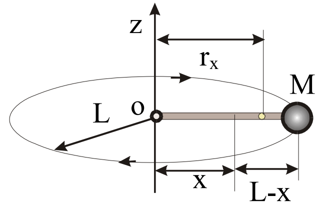
$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{F}_i\right| = \frac{2mv^2}{L}. \qquad (1)$$

2.1.66 Тело массы M связано нитью длины L с осью, вокруг которой оно обращается с угловой скоростью ω. Найдите силу натяжения нити. Размеры тела малы, силой тяжести можно пренебречь. Нить заменили однородной верёвкой массой m. Определите натяжение верёвки на расстоянии x от оси вращения.

Решение:

1 В случае невесомой и нерастяжимой нити её натяжение определится соотношениями

$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{F}_i\right| = \frac{mv^2}{L} = \frac{m\omega^2 L^2}{L} = m\omega^2 L. \qquad (1)$$



2 Выделим заданное сечение верёвки и определим массу её части длиной (L-x)

$$m_x = \frac{m}{L}\left(L - x\right). \qquad (2)$$

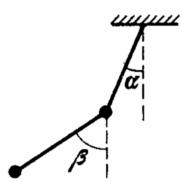
3 Определим расстояние от оси вращения oz до центра масс отрезка верёвки

$$r_x = L - \frac{L-x}{2} = \frac{L+x}{2}. \qquad (3)$$

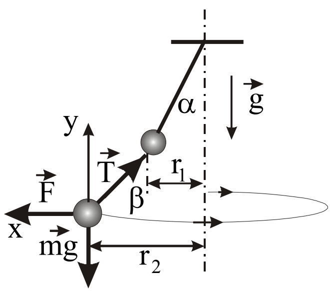
4 Натяжение верёвки в сечении x будет обусловлено вращающейся массой M и массой верёвки m_x

$$\left|\vec{T}\right| = M\omega^2 L + \frac{m\omega^2\left(L^2 - x^2\right)}{2L}. \qquad (4)$$

2.1.67 К тяжёлому шарику, подвешенному на нити длины L,подвешен второй тяжёлый шарик на нити той же длины. При вращении шариков вокруг вертикальной оси, проходящей через верхнюю точку подвеса, обе нити лежат в одной плоскости и составляют с вертикалью постоянные углы α и β. Найдите угловую скорость вращения шариков.



Решение:



1 Рассмотрим условие вращения по круговой орбите радиуса r_2 нижнего шарика. Шарик находится под действием двух сил: силы тяжести mg и силы натяжения нити T. Если к шарику приложить силу инерции F, противоположную по направлению вектору нормального ускорения, то его можно рассматривать как неподвижный. Уравнения второго закона Ньютона в проекции на оси координат, при этом, примут вид

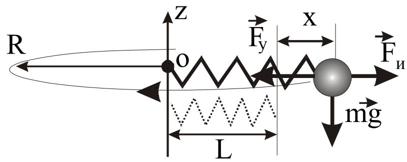
$$\left.\begin{aligned} T\sin\beta &= m\omega^2 r_2, \\ T\cos\beta &= mg \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

откуда, поделив уравнения, друг на друга, получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\beta}{r_2}} = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\beta}{L(\sin\alpha + \sin\beta)}}. \qquad (2)$$

2.1.68 Груз массы m, прикреплённый к пружиной жёсткостью k к оси, движется по круговой траектории радиуса R вокруг этой оси с угловой скоростью ω. Определите длину недеформируемой пружины.

Решение:



1 Пусть длина недеформированной пружины равна L, а удлинение при вращении груза составляет – x.

2 Груз можно рассматривать свободным и неподвижным, если пружину заменить реакцией связи в виде силы упругости $F_у$ и приложить силу инерции $F_и$. В этом случае

$$kx = m\omega^2 R . \quad (1)$$

Удлинение пружины

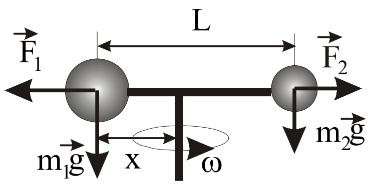
$$x = \frac{m\omega^2 R}{k} . \quad (2)$$

3 Длина не деформированной пружины определится в виде разности

$$L = R - x = R\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right). \quad (3)$$

2.1.69 Два тела массой m_1 и m_2 закреплены на концах невесомого стержня длиной L. Стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг общего центра масс с угловой скоростью ω. Определите растяжение, возникающее в стержне.

Решение:



1 Запишем уравнение моментов сил тяжести относительно оси вращения масс

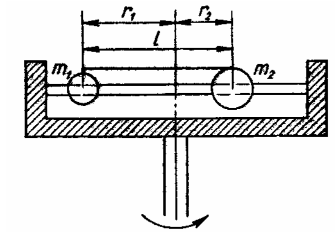
$$m_1 g x = m_2 g(L - x), \quad (1)$$

откуда определим величину x

$$x = m_2(L - x)/m_1 . \quad (2)$$

3 Растяжение стержня при вращении масс будет происходить под действием сил инерции ($F=F_1= F_2$),

$$F = m_1\omega^2 x = \frac{m_1 m_2 L\omega^2}{m_1 + m_2} . \quad (3)$$



2.1.70 На вертикальной оси вращается с угловой скоростью ω горизонтальный стержень, по которому свободно перемещаются два малых груза с массами m_1 и m_2, связанные нитью длиной l. Определите натяжение нити.

Решение:

1 Натяжение нити в данном случае обусловлено нормальным ускорением, которое является следствием вращения тел вокруг оси. Натяжение численно будет равно силе инерции, т.е.

$$\left|\vec{T}\right| = \left|F_i\right| = m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2 . \qquad (1)$$

2 Определим далее расстояния от масс до оси вращения с учётом того, что $r_1 + r_2 = l$

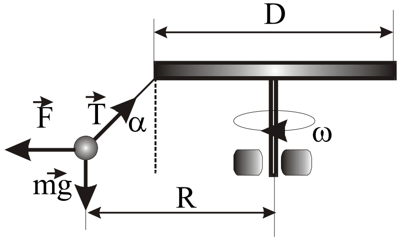
$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \qquad r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} . \qquad (2)$$

3 Подставляя (2) в (1), получим

$$\left|\vec{T}\right| = \frac{m_1 m_2 \omega^2 l}{m_1 + m_2} . \qquad (3)$$

2.1.71 На периферии вращающегося горизонтального диска диаметром D подвешен на нити длиной l груз. Во время вращения диска вокруг неподвижной вертикальной оси нить отклоняется на угол α. Определите угловую скорость диска.

Решение:



1 Сила тяжести и сила натяжения нити дают результирующую горизонтальную силу инерции F, которая является причиной отклонения груза от вертикального положения на угол α. Уравнение второго закона Ньютона на направление нити представится следующим образом

$$mg\sin\alpha = m\omega^2 R\cos\alpha\,,\quad \text{или}\quad m\omega^2 R = mg\,\mathrm{tg}\alpha\,. \qquad (1)$$

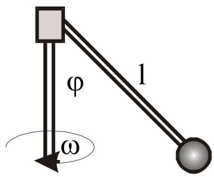
2 Выразим расстояние R от оси вращения до груза через длину нити и диаметр диска

$$R = D/2 + l\sin\alpha\,. \qquad (2)$$

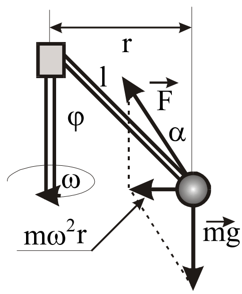
3 Подставим значение R из (2) в (1) и разрешим полученное уравнение относительно ω

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\cdot \mathrm{tg}\alpha}{D + 2l\sin\alpha}}\,. \qquad (3)$$

2.1.72 Жёсткий стержень длиной l закреплён под углом φ на вертикальной оси и вращается вместе с ней с угловой скоростью ω. К нижнему концу стержня прикреплён шарик массы m. Определите силу, с которой стержень действует на шарик.



Решение:



1 Искомая сила не направлена вдоль стержня, т.к. он жёстко соединён с осью вращения и не может менять своего положения. Дело в том, что сила F и сила тяжести, будучи сложенными, геометрически должны дать силу, равную по модулю силе инерции и направленную к оси вращения. Иногда эту силу называют центростремительной

$$m\omega^2 r = \sqrt{F^2 - (mg)^2}\,. \qquad (1)$$

2 Выразим далее расстояние от шарика до оси вращения через длину стержня

$$r = l\sin\varphi\,. \qquad (2)$$

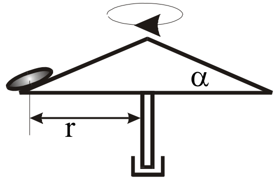
3 Подставим (2) в (1) и выразим величину F

$$F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2\varphi}\,. \qquad (3)$$

4 Направление действующей на стержень силы определится из прямоугольного треугольника

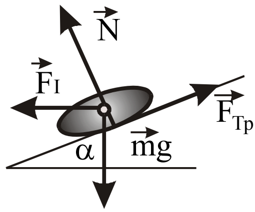
$$\mathrm{tg}\alpha = \omega^2 l\sin\varphi/g\,. \qquad (4)$$

2.1.73 На нижнем краю поверхности конуса с углом наклона α покоится тело массой m. Конус начинает равномерно вращаться вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Центр масс тела находится на расстоянии r от оси вращения. Определите, при каком наименьшем коэффициенте трения тело удержится на поверхности конуса.



Решение:

1 Вращение тела с постоянной угловой скоростью даёт основание полагать, что равнодействующая всех, действующих на тело сил, будет по величине равна силе инерции F_I, т.е.



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{Тр} = m\vec{a}_n . \qquad (1)$$

2 В проекции на традиционное направление декартовых осей векторное уравнение (1) представится следующим образом

$$F_{Тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = m\omega^2 r , \qquad (2)$$

$$F_{Тр}\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 . \qquad (3)$$

3 Подставим в уравнения (2) и (3) значение силы трения

$$\mu mg\cos\alpha + N\sin\alpha = m\omega^2 r ,$$

$$\mu mg\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 ,$$

и исключим неизвестную нормальную реакцию связи

$$\frac{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}{\mu\cos\alpha - \omega^2 r\sin\alpha} = \frac{g}{\omega^2 r} . \qquad (4)$$

4 Коэффициент трения из (4) запишется следующим образом

$$\mu \ge \frac{\omega^2 r\cos\alpha + g\sin\alpha}{g\cos\alpha - \omega^2 r\sin\alpha} . \qquad (5)$$

5 Уравнение (5) справедливо при

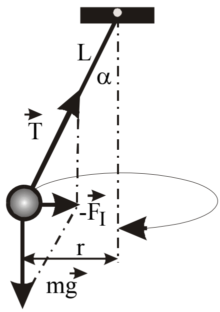
$$g\cos\alpha - \omega^2 r\sin\alpha \ge 0 , \qquad (6)$$

или

$$\mathrm{tg}\alpha \le g/\omega^2 r . \qquad (7)$$

2.1.74 Груз вращается на подвесе, выполненном в виде резинового шнура, вокруг вертикальной оси. Начальная длина подвеса равна l, а при вращении подвес растягивается до длины L. Определите угловую скорость вращения груза, если статическое удлинение шнура при подвешивании к нему груза составляет nl.

Решение:



1 Уравнение движения груза на горизонтальную ось при его вращении

$$m\omega^2 r = T\sin\alpha . \qquad (1)$$

2 Расстояние до оси вращения r можно выразить через длину подвеса $r = L\sin\alpha$, и переписать (1) в виде

$$T = m\omega^2 L . \qquad (2)$$

3 С другой стороны, растяжение шнура при вращении обусловит проявление его упругих свойств

$$T = k\Delta l = k(L - l). \qquad (3)$$

4 Коэффициент упругости шнура k определяется из условия его статического удлинения, заданного условием задачи

$$mg = k(nl - l) = kl(n - 1), \qquad (4)$$

откуда

$$k = \frac{mg}{l(n-1)} . \qquad (5)$$

5 Приравняем далее (3) и (2)

$$kl(n - 1) = m\omega^2 L ,$$

и определим величину угловой скорости

$$m\omega^2 L = \frac{mg(L-l)}{l(n-1)}, \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g(L-l)}{Ll(n-1)}} . \qquad (6)$$

2.1.75 Водопроводная труба диаметром d, располагается горизонтально и делает поворот с закруглением R. Через поперечное сечение трубы ежесекундно протекает вода, массой M. Определите давление воды на стенку трубы в месте закругления.

Решение:

1 Частички воды, движущиеся по криволинейным траекториям, имеют нормальное ускорение, направленное к центру вращения. Реакция воды, равная по модулю силе инерции, определится как

$$N = mv^2/R\,. \qquad (1)$$

2 Поскольку в задаче идёт речь о сплошной среде, то массу жидкости m, участвующей в круговом движении, необходимо определить d (1) как $m = \rho\ell s$, где ρ - плотность жидкости, ℓ - длина изогнутого участка, s - сечение трубы.

3 Скорость при этом будет равна

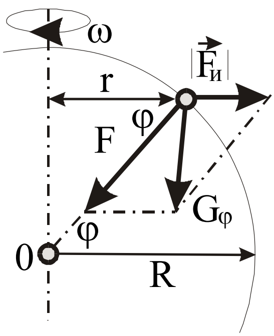
$$v = M/\rho s\,. \qquad (2)$$

4 Давление, как известно, определяется в виде отношения проекции действующей силы на нормаль к площади, т.е.

$$p = \frac{N}{\ell d} = \frac{mv^2}{R\ell d} = \frac{\rho\ell s v^2}{R\ell d} = \frac{M^2}{\rho R d s}\,. \qquad (3)$$

2.1.76 Определите закон изменения силы тяжести на поверхности нашей планеты в зависимости от широты, считая Землю правильной сферой.

Решение:



1 Выделим на поверхности Земли некую точку и определим её линейную скорость с учётом широты, определяемой углом φ

$$v = \omega R\cos\varphi\,, \qquad (1)$$

где R – радиус Земли.

2 Определим величины сил инерции, и гравитации действующих на всякое тело массой m, вращающееся вместе с планетой с угловой скоростью ω

$$F = \gamma\frac{Mm}{R^2}, \qquad F_и = \frac{mv^2}{R\cos\varphi} = m\omega^2 R\cos\varphi\,. \qquad (2)$$

3 Таким образом результирующая сила, действующая на тело, будет равна геометрической сумме

$$G_\varphi = \sqrt{\frac{\gamma^2 M^2 m^2}{R^4} + 2m^2\gamma\frac{M}{R}\cos^2\varphi + m^2\omega^4 R^2\cos^2\varphi}\,. \qquad (3)$$

4 Уравнение (3) возможно упростить, с учётом того, что F >> $F_и$, а $F \cong mg$, действительно,

$$\frac{F_и}{F} = \frac{\omega^2 R}{g}\cos\varphi \cong \frac{1}{289}\cos\varphi\,. \qquad (4)$$

5 Если силу инерции разложить на составляющую совпадающую по направлению с $\vec{F}$ и перпендикулярную ей, то можно видеть, что на величину G_φ оказывает влияние только вертикальная составляющая

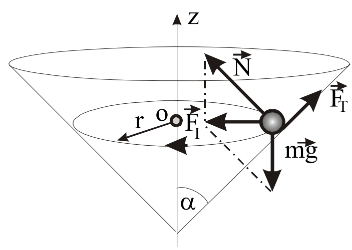
$$G_\varphi = F - F_и\cos\varphi = m\left(g - \omega^2 R\cos^2\varphi\right). \qquad (5)$$

Горизонтальная составляющая силы инерции $m\omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi$ изменяет направление силы тяжести, отклоняя её в сторону экватора. Эта составляющая равна нулю на полюсах и достигает максимума при $\varphi = 45^0$, а на экваторе снова спадает до нуля.

2.1.77 Шарик массой m катится с постоянной угловой скоростью ω по внутренней поверхности конуса, описывая горизонтальную окружность радиуса r. Угол при вершине конуса равен 2α, коэффициент трения шарика о поверхность конуса равен μ. Определите минимальное значение скорости, обеспечивающей такое движение.

Решение:

1 Условие движения тела по круговой траектории в векторной форме в данном случае запишется в виде



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{Tp} = m\vec{a}_n\,, \qquad (1)$$

в проекции на оси координат уравнение (1) представится так

$$\left.\begin{aligned} &N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha = \frac{mv^2}{r},\\ &mg - N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

2 Исключая из системы уравнений (2) нормальную реакцию связи шарика N, найдём искомую скорость

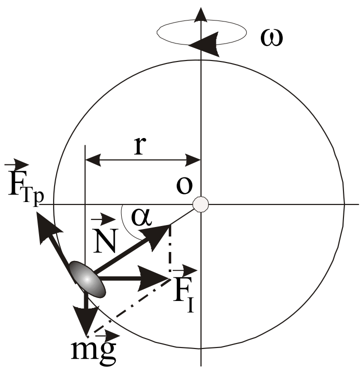
$$v_{min} \geq \sqrt{\frac{rg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{\sin\alpha + \mu\sin\alpha}} . \qquad (3)$$

3 Полученное для скорости уравнение будет справедливым при условии

$$\cos\alpha > \mu\sin\alpha, \text{ или } \mu < \mathrm{ctg}\alpha . \qquad (4)$$

2.1.78 Пустотелый шар радиуса R вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. На внутренней поверхности шара находится в равновесном состоянии небольшая шайба. Определите величину коэффициента трения между шайбой и поверхностью, если угловая координата шайбы α известна.

Решение:



1 Запишем векторное уравнение второго закона Ньютона

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{Тр} = m\vec{a}_n , \qquad (1)$$

2 Запишем далее проекцию (1) на горизонтальную ось

$$N\cos\alpha - F_{Тр}\sin\alpha = m\omega^2 r , \quad (2)$$

или

$$N\cos\alpha - F_{Тр}\sin\alpha = m\omega^2 R\cos\alpha .$$

3 На вертикальную ось уравнение (1) будет иметь следующую проекцию

$$F_{Тр}\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0, \qquad (3)$$

т.к. $F_{Тр} = \mu N$, то

$$\mu N\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0 . \qquad (4)$$

4 Образуем далее систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} m\omega^2\cos\alpha &= N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \\ mg &= N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) \end{aligned}\right\} ,$$

и поделим одно на другое

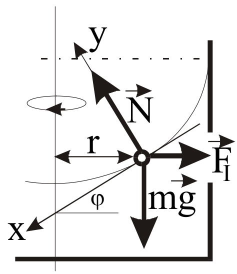
$$\frac{\omega^2 R\cos\alpha}{g} = \frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}. \qquad (5)$$

5 Коэффициент трения из уравнения (5) определится следующим образом

$$\mu = \frac{\cos\alpha\left(g + \omega^2 R\sin\alpha\right)}{g\sin\alpha + \omega^2 R\cos^2\alpha}. \qquad (6)$$

2.1.79 Сосуд с жидкостью вращается с частотой $n = 2c^{-1}$ вокруг вертикальной оси. Поверхность жидкости имеет форму воронки. Чему равен угол наклона φ поверхности жидкости в точках, лежащих на удалении $r = 5$ см от оси вращения?

Решение:



1 Частички жидкости, участвующие во вращении будут иметь нормальное ускорение, линейная скорость, как известно, пропорциональна расстоянию до оси вращения, поэтому и сила инерции тоже пропорциональна r. Выделим на заданном удалении r частичку жидкости и запишем для неё векторное уравнение второго закона Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n. \qquad (1)$$

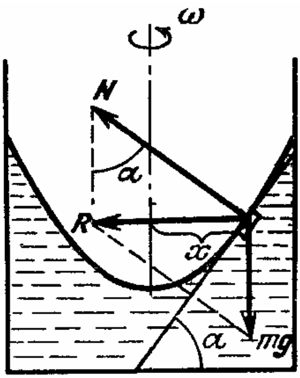
2 В проекции на горизонтальную ось это уравнение примет вид

$$m\omega^2 r\cos\varphi = mg\sin\varphi, \qquad (2)$$

откуда

$$\varphi = \mathrm{arctg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 r}{g} \cong 38{,}6^0. \qquad (3)$$

2.1.80 Знаменитый американский физик-экспериментатор Роберт Вуд (тот самый, что освобождал от пыли трубу своего спектроскопа, заставляя там проползать кота) построил телескоп с параболическим зеркалом, поместив на дне колодца вращающийся сосуд с ртутью. Определите, в каких пределах можно было менять фокусное расстояние ртутного зеркала при изменении угловой скорости в пределах от 2 рад/с до 4 рад/с.



Решение:

1 Свободная жидкость во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения. На каждую частичку жидкости действуют две силы: сила тяжести mg и нормальная реакция связи N. Геометрическая сумма этих сил R по модулю равна силе инерции. Приложив мысленно к исследуемому элементарному объёму жидкости силу инерции, можно рассматривать его как неподвижный, при постоянстве угловой скорости, разумеется. Как показано в предыдущей задаче (2.1.79)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}. \qquad (1)$$

2 Уравнение (1) можно представить в декартовых координатах

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad \Rightarrow \quad \int dy = \frac{\omega^2}{g}\int x dx,$$

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C. \qquad (2)$$

3 Исходя из свойств параболы, её фокус определится как

$$F = \frac{g}{2\omega^2}. \qquad (3)$$

4 Таким образом, для телескопа Роберта Вуда фокусное расстояние будет меняться в пределах

$$F_{min} = \frac{g}{2\omega_{max}^2} = 1{,}22\text{м}, \qquad F_{max} = \frac{g}{2\omega_{min}^2}. \qquad (4)$$