# Лекция 1. Вводная.

*Предмет физики. Физический объект, физическое явление, физический закон. Физика и современное естествознание. Системы отсчета. Кинематика материальной точки. Угловые скорость и ускорение твердого тела. Классический закон сложения скоростей и ускорений при поступательном движении подвижной системы отсчета.*

Физика (с древнегреческого переводится как ПРИРОДА) – наука, занимающаяся изучением простейших, и вместе с тем наиболее общих законов движения окружающих нас объектов материального мира. Вследствие этой общности не существует явлений природы, не имеющих физических свойств или сторон. Понятия физики и её законы лежат в основе всего естествознания.

В своей основе физика – экспериментальная наука: её законы базируются на фактах, установленных опытным путем. Эти законы представляют собой строго определенные количественные соотношения и формулируются на математическом языке.

Различают экспериментальную физику (опыты, проводимые для обнаружения новых фактов и для проверки открытых физических законов), и теоретическую физику (цель которой состоит в формулировке общих законов природы и в объяснении конкретных явлений на основе этих законов, а также в предсказании новых явлений.)

Современная физика имеет дело с немногим числом фундаментальных законов, или фундаментальных физических теорий, охватывающих все разделы физики. Эти теории представляют собой обобщение наших знаний о характере физических процессов и явлений; приближенно, но наиболее полное отражение различных форм движения материи в природе.

К фундаментальным физическим теориям относятся: классическая механика Ньютона, механика сплошных сред, термодинамика, статистическая физика, электродинамика, специальная теория относительности и релятивистская механика, общая теория относительности, квантовая механика, квантовая статистика, квантовая теория поля.

Физические законы записываются в виде математических соотношений между физическими величинами.

> **Физи́ческий зако́н** — эмпирически установленная и выраженная в строгой словесной и/или математической формулировке устойчивая связь между повторяющимися явлениями, процессами и состояниями тел и других материальных объектов в окружающем мире. Выявление физических закономерностей составляет основную задачу физической науки.
> **Физический объект** - выделенная для анализа часть физического мира.
> **Физическая величина** - характеристика одного из свойств физического объекта: - общая в качественном отношении многим физическим объектам; но - индивидуальная в количественном отношении для каждого объекта.

***Физические величины*** имеют единицы измерения (размерности), которые отражают их физические свойства. В настоящее время для систем единиц принята международная система (СИ) в которой основными единицами являются килограмм, метр, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела. В рамках СИ считается, что эти единицы имеют независимую размерность, т.е. ни одна из основных единиц не может быть получена из других. (ГОСТ 8.417-81 Государственная система обеспечения единства измерений).

Основным приемом познания является **научный метод —** совокупность основных способов получения новых знаний и методов решения задач в рамках любой науки.

Метод включает в себя способы исследования феноменов, систематизацию, корректировку новых и полученных ранее знаний.

Умозаключения и выводы делаются с помощью правил и принципов рассуждения на основе эмпирических (наблюдаемых и измеряемых) данных об объекте.

Базой получения данных являются *наблюдения и эксперименты*.

Для объяснения наблюдаемых фактов выдвигаются гипотезы и строятся теории, на основании которых формулируются выводы и предположения. Полученные прогнозы проверяются экспериментом или сбором новых фактов.

Важной стороной научного метода, его неотъемлемой частью для любой науки, является требование объективности, исключающее субъективное толкование результатов. *Не должны приниматься на веру какие-либо утверждения, даже если они исходят от авторитетных учёных*.

Всякая физическая теория базируется на каких-то основных положениях (постулатах). При этом в рамках этой теории пренебрегают какими-то явлениями. Затем по результатам опытных данных проверяют выводы, полученные из этой теории. Если необходимо, то основные положения теории уточняются и т.д.

В классической механике, например, время рассматривается как абсолютный параметр, не зависящий от других явлений.

Одной из простейших моделей физического объекта является точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь (и это практически не повлияет на решение задачи). Материальная точка – точка, имеющая массу. Точечный заряд – точка, имеющая электрический заряд.

## Кинематика.

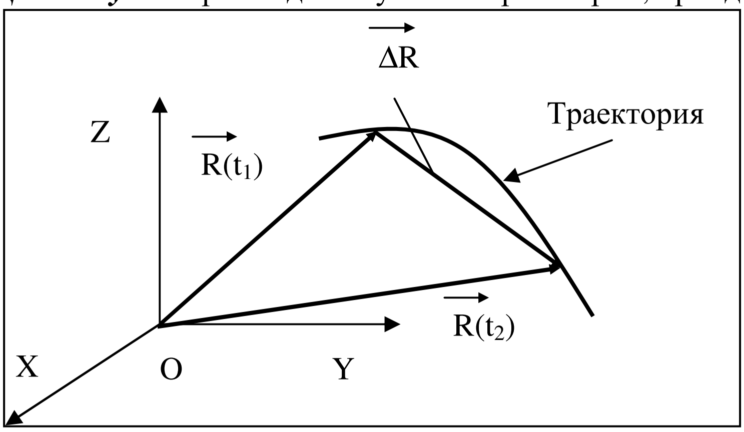
Кинематика описывает общие законы движения точки (без учета сил). Именно в кинематике вводятся понятия вектора скорости, вектора ускорения, вектора перемещения.

При описании движения необходимо определить систему отсчета – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение – это тело называется началом отсчета. Выбор системы отсчета определяется целью и удобством рассмотрения движения точек или тел. В качестве системы координат применяют, например, декартову (правую) систему, или сферическую и т.д.

## Траектория, перемещение.

Пусть некоторая точка А движется в пространстве. Множество точек в пространстве, которые проходит точка А при своем движении называется ***траекторией*** точки. ***Уравнение траектории*** - это закон изменения радиус-вектора точки, выраженный в виде $\vec{R}_A = \vec{R}(t)$ (Эта запись означает, что координаты радиус-вектора точки А в каждый момент времени задаются тремя функциями $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, зависящими от времени *t*.). Путь – это участок траектории между начальным и конечным положениями точки.

***Длина пути*** *L* равна длине участка траектории, пройденного точкой за промежуток времени ($t_1$, $t_2$). (Иногда путем называют длину пути – обычно это ясно из условия задачи – например, «найти путь, пройденный точкой до остановки»).




Примеры траекторий. Если траектория - окружность, то движение точки называется вращательным. Если траектория – прямая линия, то движение называется прямолинейным.

***Вектором перемещения*** $\Delta\vec{R}$ за интервал времени ($t_1$, $t_2$) называется вектор, соединяющий начальное (в момент $t_1$) и конечное (в момент $t_2$) положения точки.

По определению, вектор перемещения равен ***векторной*** разности радиус-векторов

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(t_2) - \vec{R}(t_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

(т.е. координаты вектора перемещения равны разности соответствующих координат этих векторов). Из рисунка видно, что вектор перемещения лежит на *секущей* прямой для траектории.

Например, если точка покоится, то вектор перемещения – нулевой $\Delta\vec{R}=\vec{0}$ . Или если точка в процессе своего движения вернулась в ту же точку, то вектор перемещения **тоже** нулевой.

***Величиной перемещения (или просто перемещением)*** называется длина вектора перемещения:

$$\Delta R=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}\ .$$

Очевидно, что длина пути $L$ и величина перемещения $\Delta R$, в общем случае, не совпадают. Если величина перемещения может уменьшаться, то ***длина пути убывать не может***.

***Средней путевой скоростью*** (или средней скоростью пути) называется отношение длины пути точки за интервал времени ($t_1$, $t_2$) к величине этого интервала $\Delta t=t_2-t_1$. По определению – эта величина является ***числом (скаляром)***.

$$\mathrm{V}_{\text{СР.ПУТИ}}=\frac{L}{\Delta t}\ (\text{м/с}).$$

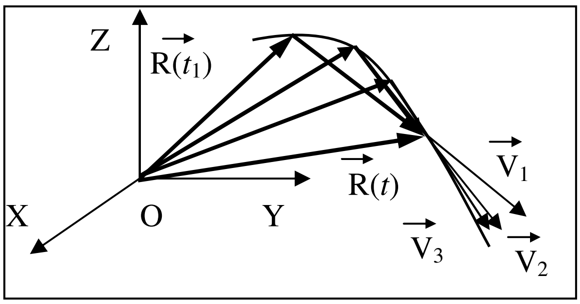
***Вектором средней скорости перемещения*** (или просто скоростью перемещения) за период времени ($t_1$, $t_2$) называется ***вектор*** равный отношению вектора перемещения к величине этого промежутка времени $\Delta$t.

$$\vec{\mathrm{V}}_{\text{СР.ПЕРЕМ}}=\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right).$$

Координаты этого вектора получены делением координат вектора перемещения на величину интервала времени $\Delta$t (так как промежуток времени положительно число, то направления вектора перемещения и вектора средней скорости перемещения совпадают).

## **Мгновенная скорость**.

***Мгновенная скорость (скорость)*** точки $\vec{V}$ , это вектор, являющийся пределом скоростей перемещения (в некоторый момент времени) при стремлении $\Delta t$ к нулю.




$$\vec{\mathrm{V}}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{\mathrm{V}}_{\text{ПЕРЕМ}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}.$$

(В математике таким образом определяется первая производная.) Т.е. вектор скорости – это вектор, равный мгновенному изменению вектора перемещения: $\vec{\mathrm{V}}=\vec{R}'(t)$. Координаты вектора скорости равны производным от соответствующих координат вектора перемещения:

$$\mathrm{V}_X=\mathrm{X}'(t),\ \mathrm{V}_Y=\mathrm{Y}'(t),\ \mathrm{V}_Z=\mathrm{Z}'(t).$$

В механике *традиционно* производную по времени обозначают верхней точкой. Так что

$$\vec{\mathrm{V}}=\dot{\vec{R}}(t).$$

***Вектор скорости <u>всегда</u>*** лежит на касательной линии к траектории и направлен в сторону перемещения (движения) точки.

Важное свойство мгновенной скорости - длина вектора мгновенной скорости равна величине ***мгновенной путевой скорости.*** Отсюда, можно сделать вывод, что ***производная по времени от длины пути равна модулю вектора скорости.*** Так длина вектора не может быть отрицательной, то производная от длины пути тоже не может быть отрицательной – это значит, что длина пути не убывает:

$$\mathrm{V}=\left|\vec{\mathrm{V}}\right|=\dot{\mathrm{L}}\left(\mathrm{t}\right)\geq 0\,.$$

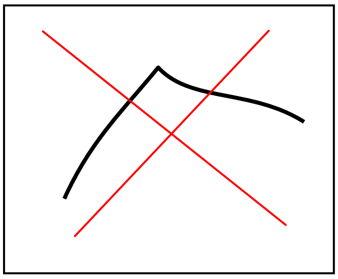
Таким образом, перемещение точки за интервал времени (в декартовой системе координат)

$$\Delta\vec{R}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{\mathrm{v}}dt\Leftrightarrow\Delta x=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{v}_x dt,\quad \Delta y=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{v}_y dt,\quad \Delta z=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{v}_z dt\,.\ \text{Длина пути}\ L=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{\mathrm{v}}\right|dt\,.$$

**Ускорение**.

В общем случае вектор скорости $\vec{V}$ тоже зависит от времени, т.е. его координаты являются функциями времени $\vec{V} = \left(V_X(t); V_Y(t); V_Z(t)\right)$, следовательно, по аналогии с вышеизложенным можно ввести вектор среднего ускорения и вектор мгновенного ускорения, равный мгновенному изменению вектора скорости – он называется *вектором ускорения* $\vec{a} = \vec{V}'(t)$, компоненты которого определяются равенствами

$$a_x = \dot{v}_x,\ a_y = \dot{v}_y,\ a_z = \dot{v}_z.$$



Единицы измерения величины ускорения м/с$^2$.

**В дальнейшем будут рассматриваться только гладкие траектории, а именно – такие траектории, у которых движение точки описывается непрерывно дифференцируемыми функциями. В частности, среди них не могут быть такие у которых касательная не определена однозначно!**

## Движение по прямой (прямолинейное движение). Движение с постоянной скоростью.

Если величина вектора скорости точки не меняется, то длина пути вычисляется как $L = V \cdot (t - t_0)$, где $t_0$ – начальный момент отсчета времени.

Пусть теперь постоянно *направление* вектора скорости. В этом случае траектория точки лежит на прямой линии. **Всегда можно таким образом ввести систему координат, чтобы этой прямой являлась, например, ось X.** Тогда во все моменты времени остальные координаты Y=0 и Z=0. Вектор скорости должен касаться траектории, поэтому он также лежит на этой прямой и для него также $V_Y=0$, $V_Z=0$. Таким образом, при прямолинейном движении радиус-вектор описывается одной координатой X(t), $\vec{R} = \left(X(t);0;0\right)$; вектор скорости одной координатой $V_X(t)$, $\vec{V} = \left(V_X(t);0;0\right)$ и ускорение тоже одной координатой $a_X(t)$, $\vec{a} = \left(a_X(t);0;0\right)$. Поэтому в данном случае можно не использовать векторное представление, а только числовое – рассматривая только соответствующую координату. О направлении вектора можно судить по знаку координаты - если координата соответствующего вектора положительная, то вектор направлен в положительном направлении оси X. Тогда

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v_x dt,\ \Delta v_x = \int_{t_0}^{t} a_x dt$$

В частном случае равноускоренного (равнопеременного движения) $a_x = const$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0) + \frac{a_x \cdot (t - t_0)^2}{2}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot (t - t_0),$$

где $x_0$, $v_{0x}$ – значения координаты и скорости в начальный момент времени $t=t_0$.

В общем случае движения с постоянным ускорением можно записать

$$v_X = v_{0X} + a_X \cdot (t - t_0),\ x = x_0 + v_{0X} \cdot (t - t_0) + \frac{a_X \cdot (t - t_0)^2}{2},$$

$$v_Y = v_{0Y} + a_Y \cdot (t - t_0),\ y = y_0 + v_{0Y} \cdot (t - t_0) + \frac{a_Y \cdot (t - t_0)^2}{2},$$

$$v_Z = v_{0Z} + a_Z \cdot (t - t_0),\ z = z_0 + v_{0Z} \cdot (t - t_0) + \frac{a_Z \cdot (t - t_0)^2}{2}.$$

или, в векторной форме

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{a} \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0).$$

траекторией тела может быть прямая или парабола, в зависимости от начальных условий.

**Закон сложения скоростей и ускорений.**

При описании движения точки все системы отсчета является равноправными. Рассмотрим как преобразуются кинематические величины при переходе от одной системы отсчет к другой. Ограничимся системами отсчета, которые движутся друг относительно друга поступательно.

Положение некоторой точки A можно задать в системе отсчета 1 радиус-вектором $\vec{R}_1$, в системе отсчета 2 – радиус-вектором $\vec{R}_2$. Если задан вектор, задающий положения начала отсчет одной системы отсчета относительно другой, то

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R}_{21}$$

Тогда получаем уравнения связи для скоростей и ускорений

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21}, \ \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{21},$$

где $\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{R}_{21}}{dt}$, $\vec{a}_{21} = \frac{d\vec{a}_{21}}{dt}$ - векторы скорости и ускорения второй системы отсчет относительно первой.

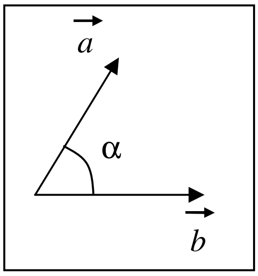
Системой отсчета, ***сопутствующей*** данной точке называется такая система отсчета, в которой вектор скорости данной точки является нулевым (т.е. точка покоится в данной системе отсчета).

**Пример**. Сопутствующей системой отсчета для водителя автомобиля является система, связанная с автомобилем, так как в этой системе отсчета водитель покоится.♣

**Математические сведения**

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ в декартовой системе координат вычисляется как $(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

С другой стороны $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$ в любой системе координат.

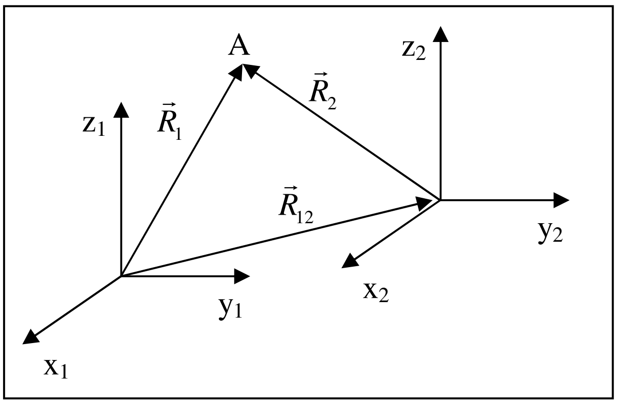



Выводы из этих формул.

1) Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны друг другу.

2) Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его длины $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$, откуда для длины вектора $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

3) Определим единичный вектор направления для любого вектора $\vec{b}$ как вектор $\vec{\tau}_{\vec{b}} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Он не зависит от длины вектора $\vec{b}$, а зависит, только от его направления. Причем длина этого вектора равна единице:




$$|\vec{\tau}_{\vec{b}}| = \sqrt{(\vec{\tau}_{\vec{b}}, \vec{\tau}_{\vec{b}})} = \sqrt{\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)} = 1.$$

Чтобы найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, надо найти проекцию на его направление

$$(\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \left(\vec{a}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = (\vec{a}, \vec{\tau}_{\vec{b}}).$$

4) Если вектор непрерывно меняется в зависимости от какого-то параметра, то этот вектор можно диф-

ференцировать по этому параметру. Пусть, например, координаты вектора зависят от времени $\vec{a}=\left(a_x(t),a_y(t),a_z(t)\right)$, тогда вектор $\vec{c}$, координаты которого определяются равенствами $c_x=\dfrac{da_x}{dt}$, $c_y=\dfrac{da_y}{dt}$, $c_x=\dfrac{da_y}{dt}$ называется производным от вектора $\vec{a}$, т.е. $\vec{c}=\dfrac{d\vec{a}}{dt}$.

5) Производная от скалярного произведения двух векторов

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{d}{dt}\left(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right)=\frac{da_x}{dt}b_x+\frac{da_y}{dt}b_y+\frac{da_z}{dt}b_z+a_x\frac{db_x}{dt}+a_y\frac{db_y}{dt}+a_z\frac{db_z}{dt}=\left(\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

В частности, $\dfrac{d}{dt}\left(\left|\vec{a}\right|^2\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a},\vec{a}\right)=2\left(\dfrac{d\vec{a}}{dt},\vec{a}\right)$.

6) Если длина вектора $\left|\vec{a}\right|=const$ не меняется, но сам вектор не постоянен $\vec{a}\neq const$, то получаем, что из условия $\left|\vec{a}\right|^2=const$ вытекает $\dfrac{d}{dt}\left(\left|\vec{a}\right|^2\right)=\left(\dfrac{d\vec{a}}{dt},\vec{a}\right)=0$, т.е. эти векторы ортогональны друг другу: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}\perp\vec{a}$. В некоторой системе координат вектор $\vec{a}$ *вращается* вокруг своего начала.

В этом случае конец вектора $\vec{a}$ описывает окружность, а вектор $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ направлен по касательной к этой окружности в сторону поворота $\vec{a}$ и, очевидно, $\dfrac{d\vec{a}}{dt}\perp\vec{a}$.

## Движение точки на плоскости.

Если траектория точки лежит в плоскости, то такое движение называется «плоским». В этом случае векторы скорости и ускорения также лежат в этой плоскости для любого момента времени.

Рассмотрим сопутствующую систему отсчета (эта система отсчета движется вместе с точкой). Тогда вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов - вектора $\vec{\boldsymbol{a}}_t$, параллельного вектору скорости и вектора $\vec{a}_n$, перпендикулярного вектору скорости

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n.$$

Вектор ускорения $\vec{a}_t$ называется тангенциальным или касательным ускорением, а вектор ускорения $\vec{a}_n$ называется нормальным (перпендикулярным) ускорением.

Введем единичный вектор для направления скорости $\vec{\tau}_{\vec{v}}=\dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$. Этот вектор направлен по касательной к траектории в ту же сторону, что и вектор скорости. Тогда для ускорения должно быть

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}}+\left|\vec{v}\right|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}.$$

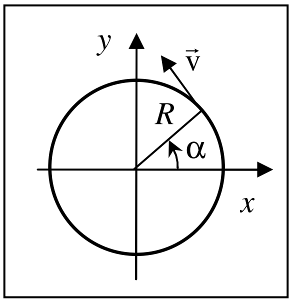
В этом выражении первое слагаемое определяет вектор, параллельный вектору скорости, а второе – перпендикулярный (так как $\vec{\tau}_{\vec{v}}\perp\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$), поэтому $\vec{a}_t=\dfrac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}}$ и $\vec{a}_n=\left|\vec{v}\right|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$.

Вектор $\vec{a}_t=\dfrac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}}$ (тангенциальное или касательное ускорение) отвечает за изменение модуля вектора скорости. Проекция на касательное направление

$$\left(\vec{a}_t\right)_{\vec{v}}=\left(\vec{a}_t,\vec{\tau}_{\vec{v}}\right)=\frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\left(\vec{\tau}_{\vec{v}},\vec{\tau}_{\vec{v}}\right)=\frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}.$$

Если модуль (длина) вектора скорости увеличивается, то величина проекции на касательное направление вектора ускорения положительная и $\vec{a}_t$ направлен в ту же сторону, что и вектор скорости $\vec{v}$. И наоборот - если модуль вектора скорости уменьшается, то вектор касательного ускорения направлен против вектора скорости.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n = |\vec{\mathrm{v}}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{\mathrm{v}}}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\dot{\vec{\tau}}_{\vec{\mathrm{v}}}$, т.е. в сторону поворота вектора скорости, следовательно, он отвечает за изменение направления вектора скорости.




Для того чтобы получить явную формулу для величины нормального ускорения рассмотрим движение точки по окружности радиуса R. Пусть окружность лежит в плоскости z=0. Радиус-вектор точки на окружности $\vec{R} = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0)$. Вектор скорости точки

$\vec{\mathrm{v}} = \dot{\vec{R}} = (-\dot{\alpha}\cdot R\sin\alpha, \dot{\alpha}\cdot R\cos\alpha, 0)$, вектор ускорения точки

$\vec{a} = \dot{\vec{\mathrm{v}}} = \left(-\ddot{\alpha}\cdot R\sin\alpha - \dot{\alpha}^2\cdot R\cos\alpha, \ddot{\alpha}\cdot R\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\cdot R\sin\alpha, 0\right)$

Введем обозначения:

- величина $\omega = \dfrac{d\alpha}{dt}$ называется угловой скоростью (единица измерения 1/с),

- касательным ускорением называется величина $\varepsilon = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ (единица измерения 1/с$^2$).

Тогда $\vec{\mathrm{v}} = (-\omega R\sin\alpha, \omega R\cos\alpha, 0)$ и величина скорости

$$|\vec{\mathrm{v}}| = |\omega| R.$$

Рассмотрим проекцию вектора ускорения на единичный вектор $\vec{\tau}_{\vec{R}} = \dfrac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$

Так как $(\vec{a}, \vec{\tau}_{\vec{R}}) = (\vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \vec{\tau}_{\vec{R}}) = (\vec{a}_n, \vec{\tau}_{\vec{R}})$, где

$(\vec{a}_n, \vec{\tau}_{\vec{R}}) = \left(-\ddot{\alpha}\cdot R\sin\alpha - \dot{\alpha}^2\cdot R\cos\alpha\right)\cos\alpha + \left(\ddot{\alpha}\cdot R\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\cdot R\sin\alpha\right)\sin\alpha$

$(\vec{a}_n, \vec{\tau}_{\vec{R}}) = -\dot{\alpha}^2\cdot R\cos\alpha\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\cdot R\sin\alpha\sin\alpha = -\omega^2\cdot R$, то

$$|\vec{a}_n| = |\omega|^2 R = \frac{|\vec{\mathrm{v}}|^2}{R}.$$

Так как вектор скорости поворачивается к центру окружности, то вектор нормального ускорения направлен перпендикулярно вектору скорости к центру окружности (поэтому его часто называют *центростремительным* ускорением).

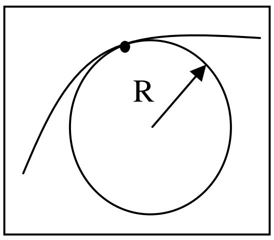
Найдем величину касательного ускорения. Так как $\vec{\tau}_{\vec{\mathrm{v}}} = \dfrac{\vec{\mathrm{v}}}{|\vec{\mathrm{v}}|} = \dfrac{\omega}{|\omega|}(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ и

$a_\tau = (\vec{a}, \vec{\tau}_{\vec{\mathrm{v}}}) = (\vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \vec{\tau}_{\vec{\mathrm{v}}}) = (\vec{a}_\tau, \vec{\tau}_{\vec{\mathrm{v}}})$, то

$a_\tau = \dfrac{\omega}{|\omega|}\left(\sin\alpha\left(\varepsilon\cdot R\sin\alpha + \omega^2\cdot R\cos\alpha\right) + \left(\varepsilon\cdot R\cos\alpha - \omega^2\cdot R\sin\alpha\right)\cos\alpha\right)$ или $a_\tau = \dfrac{\omega}{|\omega|}\varepsilon\cdot R$, поэтому

$$|a_\tau| = |\varepsilon|\cdot R.$$

К любой гладкой кривой можно в каждой точке построить не только единственную касательную прямую, но единственную касательную окружность. Поэтому при произвольном плоском движении точки вектор нормального ускорения направлен к центру этой касательной окружности. Для модуля вектора нормального ускорения можно написать формулу:




$$|\vec{a}_n| = \frac{\mathrm{v}^2}{R}.$$

Здесь $\mathrm{v}^2$ – квадрат модуля вектора скорости, R – радиус кривизны траектории в данной точке (радиус окружности, которая касается траектории в данной точке).

Величина скорости, длина пройденного пути определяются только касательным ускорением точки. О кривизне плоской траектории можно судить по нормальному ускорению точки. Если «не обращать внимание» на нормальное ускорение, то движения по прямой линии и по гладкой кривой неразличимы. В этом смысле при вращательном движении с **постоянным касательным ускорением $a_t$=const** можно в качестве координаты взять длину дуги:

$$S = V_0 \cdot t + \frac{a_t \cdot t^2}{2}$$

или

$$R \cdot (\varphi - \varphi_0) = R \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{R \cdot \varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Здесь принято, что $t_0=0$, $\omega_0$ – угловая скорость в начальный момент времени.
Таким образом, при вращательном движении с постоянным угловым ускорением можно написать формулу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$$

Соответственно, для угловой скорости $\varphi'(t) = \omega$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t .$$

**Частный случай – вращение с постоянной скоростью.**

При движении по окружности с постоянной скоростью касательное ускорение равно нулю. Угловая скорость остается постоянной $\omega=\omega_0$, следовательно, и угловое ускорение равно нулю. Тогда угловая координата меняется по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot (t - t_0).$$

Одному полному обороту соответствует $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$. Время одного оборота называется ПЕРИОДОМ $T=t-t_0$. Отсюда

$$2\pi = \omega \cdot T \text{, откуда } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

*Замечание.* Последняя формула может быть получена и другим способом. При движении по окружности длина пути за один оборот равна $L = 2\pi R$, а величина скорости $v = \omega \cdot R$. Если скорости постоянная, то $T = \frac{L}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Величина $\nu = \frac{1}{T}$ называется **частотой вращения** и измеряется в Герцах (Гц). Частота вращения – это количество оборотов в секунду. Тогда угловая скорость выражается через частоту:

$$\omega = 2\pi\nu .$$

Поэтому иногда угловую скорость вращения называют циклической частотой вращения.

Очень часто скорость вращения задают в *количествах оборотов в минуту* - $n$ (об/мин).

Связь частоты и скорости вращения $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{n}{60} = \frac{\pi n}{30}$.