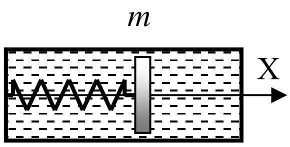
Лекция 6. «Колебания» (продолжение).

Свободные затухающие колебания. Декремент и логарифмический декремент колебаний. Вынужденные колебания. Установившиеся вынужденные колебания. Механический резонанс.



Рассмотрим движение тела в вязкой среде под действием квазиупругой силы вблизи положения равновесия (например, поршня на пружине). Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости тела: $\vec{F}_{СОПР} = -r \cdot \vec{\mathrm{v}}$, где r – коэффициент сопротивления (Н·с/м)

Уравнение движения поршня можно записать в виде $ma = -kx - r\mathrm{v}$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где введены обозначения $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Это уравнение называется *уравнением свободных затухающих колебаний.*

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$W_{МЕХ} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2\frac{x^2}{2}\right).$$

(Если r=0, то получаем уравнение свободных незатухающих колебаний $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.) Для затухающих колебаний механическая энергия не остаётся постоянной

$$\frac{dW_{МЕХ}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2\frac{x^2}{2}\right)\right\} = m\left(\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x}\right) = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \omega_0^2 x\right) = m\dot{x}\left(-2\beta\dot{x}\right) = -r\dot{x}^2 < 0$$

а убывает. Поэтому с течением времени колебания затухают.

Решение ищем уравнения свободных затухающих в виде $x = e^{\lambda t}$. Подставим в уравнение и, после сокращений, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$

Дискриминант квадратного уравнения $D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$,

значения корней $\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Тогда решение уравнения должно иметь вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right),$$

где C_1 и C_2 – постоянные коэффициенты.

Воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, где $i = \sqrt{-1}$.

Видно, что если $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$, то решение не описывает колебания.

Колебания будут наблюдаться, если $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$. Введем обозначение $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

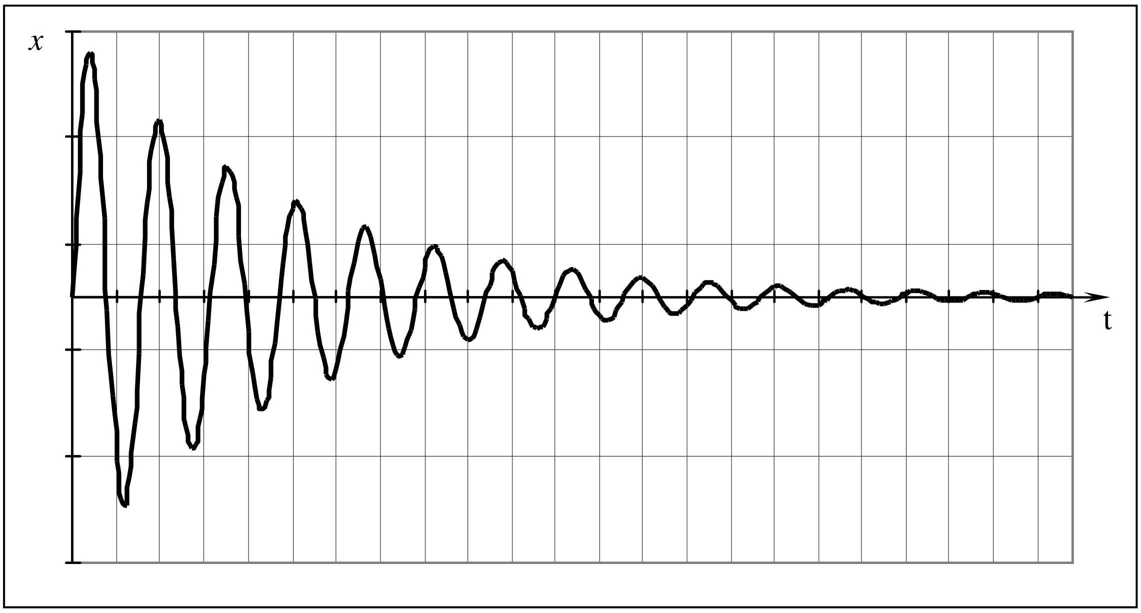
Тогда $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\omega^2} = i \cdot \omega$ и решение уравнения будет иметь вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

- оно описывает свободные колебания циклической частоты ω, затухающие с течением времени. Где циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а период $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Необходимым условием колебательного движения является неравенство $\beta < \omega_0$.

Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ является *амплитудой затухающих колебаний*. С течением времени амплитуда убывает – говорят, что колебания *затухают*. Временем *затухания* (временем *релаксации*) называется время, за которое амплитуда убывает в *e* раз



$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e\,,\; e^{\beta\tau} = e\,,\; \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Число полных колебаний, совершаемое системой за это время $N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$.

Декремент затухания – отношение амплитуд колебаний через период

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Логарифмический декремент затухания $\delta = ln\,\Delta = \beta T$. Поэтому $N_e = \frac{1}{\delta}$.

Величина $Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta}$ называется *добротностью колебательной системы*.

Энергию колебаний в момент времени t можно определить как $W = \frac{kA^2}{2} = \frac{kA_0^{\,2} e^{-2\beta t}}{2}$.

Убыль энергии за один период $W_1 - W_2 = \frac{kA_0^{\,2} e^{-2\beta t}}{2} - \frac{kA_0^{\,2} e^{-2\beta(t+T)}}{2} = \frac{kA_0^{\,2} e^{-2\beta t}}{2}\left(1 - e^{-2\beta T}\right)$

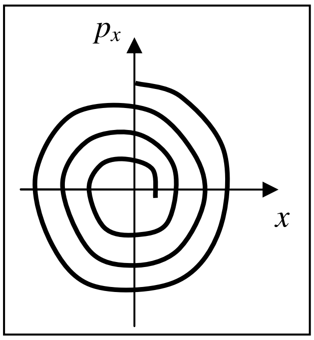
Рассмотрим отношение запасенной энергии к убыли энергии $\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}$.

При малом логарифмическом декременте затухания $\delta = \beta T << 1$ воспользуемся разложением $1 - e^{-2\beta T} = 1 - \left(1 - 2\beta T + ...\right) \approx 2\beta T$. Учитывая, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и при малых β $\omega \approx \omega_0$

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\beta \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\beta 2\pi} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Для затухающих свободных колебаний добротность характеризует скорость убывания энергии при малых затуханиях.

Фазовый портрет свободных затухающих колебаний.



Закон колебательного движения $x = A_0 e^{-\beta t} sin(\omega t+\alpha)$.

Скорость при колебаниях

$v_x = \dot{x} = -\beta A_0 e^{-\beta t} sin(\omega t+\alpha) + \omega A_0 e^{-\beta t} cos(\omega t+\alpha)$

Импульс $p_x = mv_x = -m\beta A_0 e^{-\beta t} sin(\omega t+\alpha) + m\omega A_0 e^{-\beta t} cos(\omega t+\alpha)$

Так как $sin(\omega t+\alpha) = \dfrac{x}{A_0 e^{-\beta t}}$ и $cos(\omega t+\alpha) = \dfrac{p_x + m\beta x}{m\omega A_0 e^{-\beta t}}$, то

$$sin^2(\omega t+\alpha) + cos^2(\omega t+\alpha) = \left(\frac{x}{A_0 e^{-\beta t}}\right)^2 + \left(\frac{p_x + m\beta x}{m\omega A_0 e^{-\beta t}}\right)^2 = 1$$

Фазовая траектория представляет собой сужающуюся к нулевой точке спираль. Вращение происходит по часовой стрелке.

Вынужденные колебания.

Рассмотрим движение тела в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической силы $F(t) = F_0 cos(\Omega t+\alpha)$.

Второй закон Ньютона $ma = -kx - r\mathrm{v} + F(t)$ перепишем в виде

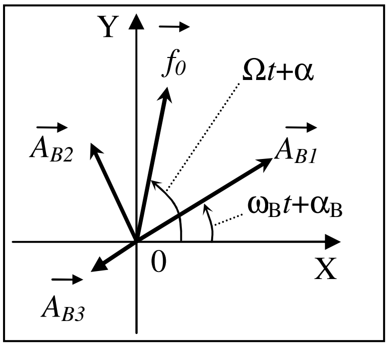
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 cos(\Omega t+\alpha)$$

где введены обозначения $2\beta = \dfrac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$. Это уравнение называется *уравнением вынужденных колебаний*.

Решением этого обыкновенного дифференциального уравнения является *сумма* решений *однородного* и частного решения *неоднородного* уравнений.

Однородное уравнение

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



является уравнением свободных затухающих колебаний.

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 cos(\Omega t+\alpha)$$

будем искать в виде $x_B = A_B cos(\omega_B t+\alpha_B)$. Изобразим уравнение на амплитудно-векторной диаграмме, на которой величине $\omega_0^2 x_B = \omega_0^2 A_B cos(\omega_B t+\alpha_B)$ соответствует вектор $\vec{A}_{B1}$, такой что $\left|\vec{A}_{B1}\right| = \omega_0^2 A_B$. Так как

$\dot{x}_B = -\omega_B A_B sin(\omega_B t+\alpha_B) = \omega_B A_B cos\left(\omega_B t+\alpha_B+\dfrac{\pi}{2}\right)$, то величине

$2\beta\dot{x}_B = 2\beta\omega_B A_B cos\left(\omega_B t+\alpha_B+\dfrac{\pi}{2}\right)$ соответствует вектор $\vec{A}_{B2}$, повернутый относительно вектора $\vec{A}_{B1}$ на угол $\dfrac{\pi}{2}$, длина которого $\left|\vec{A}_{B2}\right| = 2\beta\omega_B A_B$.

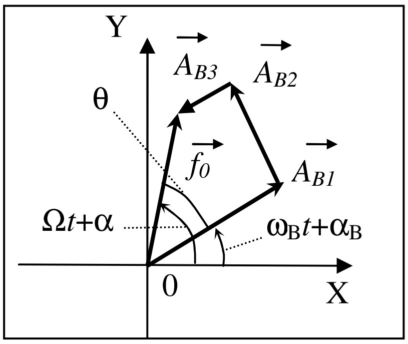
Величине $\ddot{x}_B = -\omega_B{}^2 A_B cos(\omega_B t+\alpha_B) = \omega_B{}^2 A_B cos(\omega_B t+\alpha_B+\pi)$ соответствует вектор $\vec{A}_{B3}$, повернутый на угол π относительно вектора $\vec{A}_{B1}$ и $\left|\vec{A}_{B3}\right| = \omega_B{}^2 A_B$.

В правой части уравнения величине $f_0 cos(\Omega t+\alpha)$ соответствует вектор $\vec{f}_0$.

Уравнению $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 cos(\Omega t+\alpha)$

будет соответствовать векторная сумма

$$\vec{A}_{B1} + \vec{A}_{B2} + \vec{A}_{B3} = \vec{f}_0 .$$



Так как длины векторов не меняются, то это равенство возможно только для случая $\omega_B = \Omega$. Таким образом, *вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы.*

Из диаграммы следует, что при этом должно выполняться равенство $f_0^2 = \left(A_{B1} - A_{B3}\right)^2 + A_{B2}^2$, поэтому получаем

$$f_0^2 = \left(\omega_0^2 A_B - \Omega^2 A_B\right)^2 + \left(2\beta\Omega A_B\right)^2.$$

Откуда находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A_B = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

Обозначим через $\theta = \alpha - \alpha_B$ - разность фаз вынуждающей силы и вынужденных колебаний.

Из диаграммы следует, что $tg\theta = \dfrac{A_{B2}}{A_{B1} - A_{B3}}$: $tg\theta = \dfrac{2\beta\omega_B A_B}{\omega_0^2 A_B - {\omega_B}^2 A_B} = \dfrac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

Таким образом, при $\omega_0 > \Omega$ получаем, что θ>0 – вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, а при $\omega_0 < \Omega$ - вынужденные колебания опережают по фазе вынуждающую силу.

Следствие. Под действием периодической силы тело совершает два вида колебаний - свободные затухающие с собственной частотой ω, и вынужденные – с частотой вынуждающей силы. Затухающие с течением времени прекратятся и останутся только вынужденные колебания – их называют *установившимися*.

Резонанс – явление резкого возрастания амплитуды установившихся колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной резонансной частоте системы.

Найдем, при какой частоте вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний будет иметь максимальное значение. Для этого найдем экстремум амплитуды: $\dfrac{\partial A_B}{\partial\Omega} = 0$,

$$\frac{\partial A_B}{\partial\Omega} = -\frac{1}{2}\frac{f_0\left(2(-2\Omega)\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 8\beta^2\Omega\right)}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2\right)^{3/2}} = \frac{f_0\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\beta^2\right)}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Первое решение Ω=0 соответствует постоянной сдвигающей силе и отсутствию вынужденных колебаний.

Второе (ограниченное) решение $\Omega_{REZ} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ называется *резонансной частотой системы*.

Отсюда вытекает условие возникновения резонанса $\beta < \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Амплитуда колебаний при резонансе

$$A_{B\_REZ} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

Предельное значение амплитуды вынужденных колебаний при постоянной (сдвигающей) силе (когда Ω=0) – это статическое отклонение на величину $A_{0B} = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{A_B}{A_{0B}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\dfrac{\beta^2}{\omega_0^2}\left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$.

При резонансе оно примет вид $\dfrac{A_{B\_REZ}}{A_{0B}}=\dfrac{1}{2\dfrac{\beta}{\omega_0}\sqrt{1-2\dfrac{\beta^2}{\omega_0^2}}}$.

Обозначим $x=\dfrac{\Omega}{\omega_0}$ и построим графики зависимости амплитуды от частоты для различных значений параметров. (График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты называется *резонансной кривой*.).

Зависимость резонансной частоты и резонансной амплитуды от параметра затухания

β/ω_0	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4
Ω/ω_0	0,998398718	0,995088	0,989949	0,959166	0,905539	0,824621
$\dfrac{A_{B\_REZ}}{A_{0B}}$	12,52004813	7,178117	5,050763	2,60643	1,840525	1,515848

Резонансная кривая

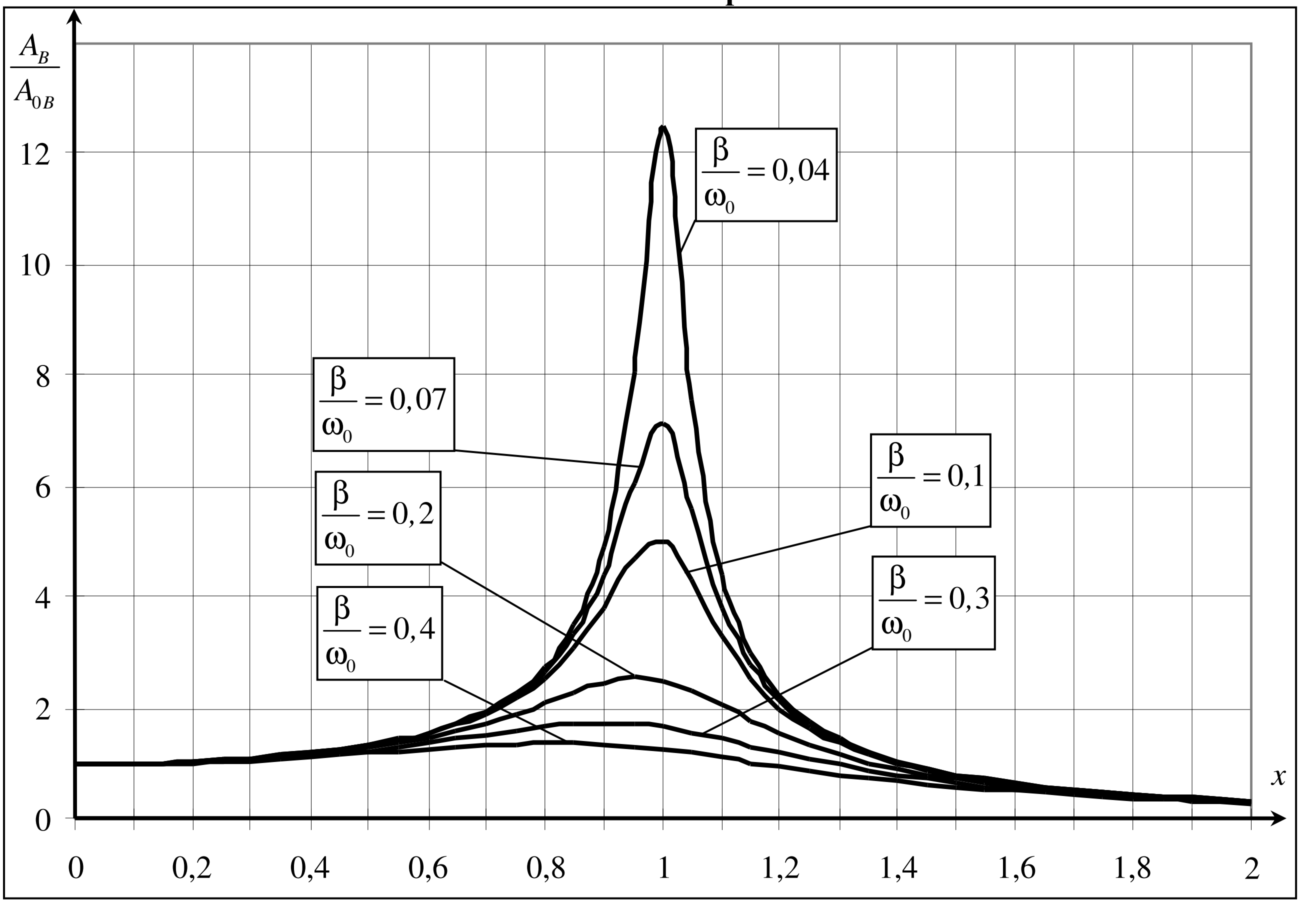
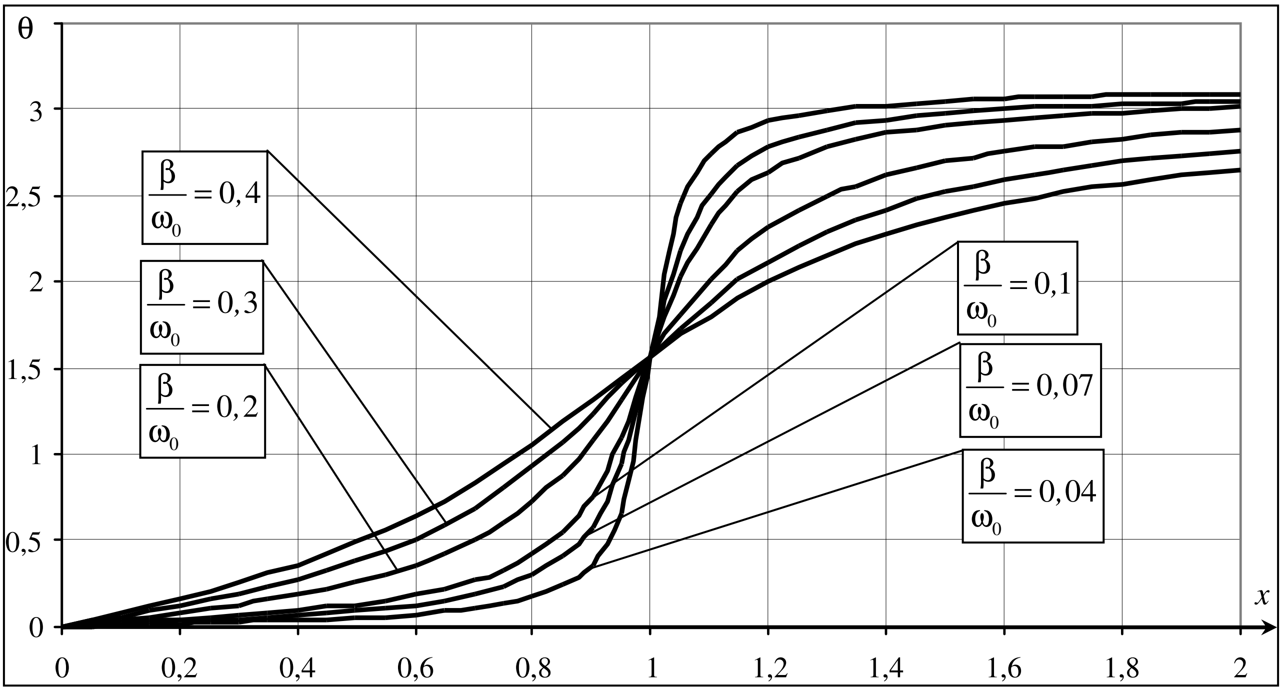


График зависимости разности фаз от частоты



Ширина резонансной кривой $\Delta\Omega_R$ - это интервал частоты, в пределах которого амплитуда колебаний отличается от резонансной амплитуды в пределах $A(\Omega)\geq\frac{A_R}{\sqrt{2}}$. (Или энергия колебаний отличается не более чем в 2 раза).

Учитывая, что $A_{B\_REZ}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$ и $A_B=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}$,

находим $\frac{A_{B\_REZ}}{A_B}=\frac{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}=\frac{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$.

Или $\frac{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}=\sqrt{2}$, $\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}=2\sqrt{2}\beta\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$.

Откуда получаем квадратное уравнение $\Omega^4+\left(4\beta^2-2\omega_0^2\right)\Omega^2+\left(\omega_0^2-4\beta^2\right)^2=0$.

Дискриминант этого уравнения $D=16\beta^2\omega_0^2-48\beta^4=16\beta^2\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)$.

Решение квадратного уравнения

$$\left(\Omega^2\right)_{1,2}=\frac{-\left(4\beta^2-2\omega_0^2\right)\pm4\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}}{2}=-\left(2\beta^2-\omega_0^2\right)\pm2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}.$$

Так как $\left(\omega_0^2-4\beta^2\right)^2>0$, то $\left(\Omega^2\right)_{1,2}=\omega_0^2-2\beta^2\pm2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}>0$.

Откуда находим (только положительные решения)

$\Omega_1=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2-2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}}$ и $\Omega_2=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2+2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}}$.

Поэтому для ширины резонансной кривой получаем

$\Delta\Omega_R=\Omega_2-\Omega_2=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2+2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}}-\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2-2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}}$.

Следовательно, такой параметр определен при $\beta<\frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$.

Найдем отношение $\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R}$ при малом значении β.

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R}=\frac{\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}{\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2+2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}}-\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2-2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2-3\beta^2\right)}}},$$

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R}=\frac{\Omega_{REZ}}{\sqrt{\Omega_{REZ}{}^2+2\beta\sqrt{\left(\Omega_{REZ}{}^2-\beta^2\right)}}-\sqrt{\Omega_{REZ}{}^2-2\beta\sqrt{\left(\Omega_{REZ}{}^2-\beta^2\right)}}} \text{ или } \frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R}\approx\frac{\Omega_{REZ}}{2\beta}.$$

Учтем, что при малых β выполняется $\Omega_{REZ}\approx\omega_0\approx\omega$, поэтому

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R}\approx\frac{\Omega_{REZ}}{2\beta}\approx\frac{\omega}{2\beta}=\frac{2\pi}{2\beta T}=\frac{\pi}{\delta}=Q,$$

где величины ω, δ, Q характеризуют затухающие свободные колебания данной колебательной системы.

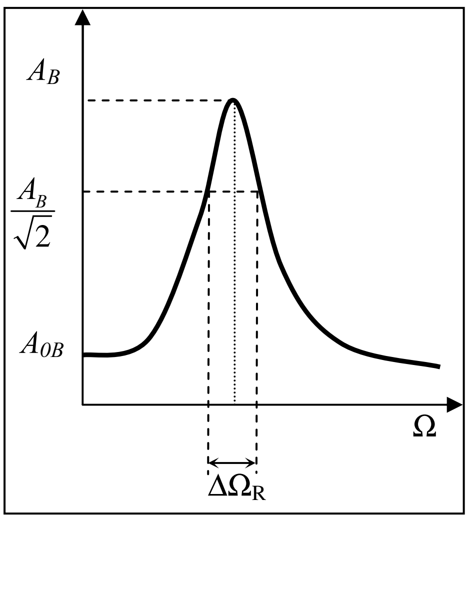
Рассмотрим также отношение

$$\frac{A_{B\_REZ}}{A_{0B}}=\frac{1}{2\frac{\beta}{\omega_0}\sqrt{1-2\frac{\beta^2}{\omega_0^2}}}.$$

Для малого затухания β: $\frac{A_{B\_REZ}}{A_0}\approx\frac{\omega_0}{2\beta}=Q$.

Следствия.

1) Для вынужденных колебаний добротность колебательной системы характеризует *резонансные свойства колебательной системы*. Добротность равна отношению резонансной частоты к широте резонансной кривой (при малом затухании). Отсюда следует, что чем выше добротность, тем уже («острее») резонансная кривая $\Delta\Omega_R=\frac{\Omega_{REZ}}{Q}$.



2) Добротность при малом затухании также характеризует отношение амплитуды при резонансе к статическому отклонению системы под действием постоянной силой такой же величины $\frac{A_{B\_REZ}}{A_0}\approx Q$.