БИЛЕТ 23

1. Закон сохранения момента импульса механической системы относительно неподвижной оси.

Закон сохранения момента импульса.

Уравнение динамики вращательного движения системы точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right).$$

Покоординатное равенство

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_{Ox}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right),\ \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_{Oy}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right),\ \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right).$$

1) Если момент внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой точки равен нулю, то сохраняется момент импульса системы относительно этой точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L} = const.$$

Например, при движении планет в гравитационном поле Солнца, сохраняется вектор момента импульса планеты относительно Солнца, т.к. линия действия силы гравитации проходит через Солнце, поэтому её момент равен нулю относительно Солнца.

2) Если момент внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой оси равен нулю, то сохраняется момент импульса системы вдоль этой оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right) = 0 \Leftrightarrow L_z = 0.$$

Пример. Волчок будет вращаться достаточно долго при малой силе трения, сохраняя тем самым момент импульса вдоль вертикальной оси z, так моменты сил тяжести и реакции опоры равны нулю (векторы силы тяжести и реакции опоры параллельны оси вращения).

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси каждая отдельная (.) движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью v_i. Скорость v_i и импульс $m v_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i v_i$. Поэтому можно записать, что момент импульса точки относительно оси z равен

$$L_{iz} = m_i v_i r_i$$

Момент импульса тв. тела отн-но оси — Σ моментов импульса отдельных его точек:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \underbrace{v_i}_{=\omega r_i} r_i \Rightarrow L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega_i = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \underbrace{J_z}_{=\text{момент инерции тела}} \omega$$

Продиф-ем по времени dt:

$$\underbrace{\frac{dL_z}{dt}}_{\text{скорость изменения момента тела отн-но непод. оси вращ}} = J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

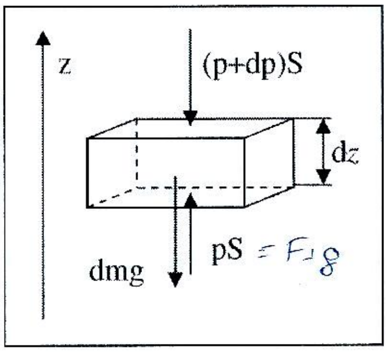
– ещё одна форма уравнения динамики вращательного движения тв. тела отн-но непод. оси.

$\Leftrightarrow$ результирующему моменту отн-но этой оси всех внешних сил, действующих на тело

2. *Барометрическая формула. Распределение Больцмана.*

Распределение Больцмана.

Пусть идеальный газ находится во внешнем поле силы тяжести.



Рассмотрим равновесие малого объёма газа

$$pS - dmg - (p + dp)S = 0$$

$$-dpS = \rho S dz g$$

где плотность газа $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p\mu}{RT}$

$$-dp = \frac{p\mu}{RT}dzg\ ,\ \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT}dz\ ,\ p = Ce^{-\frac{\mu g z}{RT}}$$

Задавая давление при z=0 p=p_0, получаем $p = p_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}$.

Делим числитель и знаменатель на число Авогадро: $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$ - масса молекулы, $k = \dfrac{R}{N_A}$ - постоянная Больцмана

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}} = p_0 e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}$$

это *барометрическая формула* для изотермического столба газа в однородном поле силы тяжести.

Замечание. Хотя температура атмосферы и уменьшается с высотой, эта формула достаточно хорошо согласуется с экспериментом.

С учётом основного уравнения МКТ p=nkT получаем $n = n_0 e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}$, где n_0 – концентрация молекул при z=0. Если учесть, что $W_П$=$m_0$gz – потенциальная энергия молекул в поле сил тяжести, то получаем распределение Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{W_П}{kT}}$$

Замечание. Отсюда следует, что при T→0 молекулы собираются вблизи z=0.