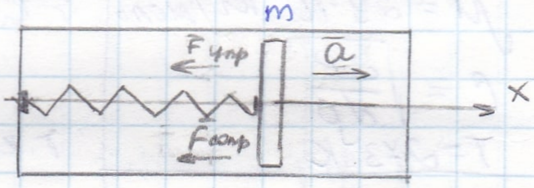
Билет 13

1. Свободные затухающие колебания. Декремент и логарифмический декремент затухания. Добротность колебательной системы.

Затуханием колебаний называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой.

Рассмотрим движение тела в вязкой среде (поршень на пружине)



$$m\bar{a} = \bar{F}_{упр} + \bar{F}_{сопр}$$

x:

$$ma = -kx - r\upsilon$$

$$\underbrace{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

уравнение свободных затухающих колебаний.

β - коэф. затухания

ω_0 - цикл. частота своб. незатух. колеб.

$$\frac{r}{m} = 2\beta \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

В случае малых затуханий $\beta^2 \ll \omega_0^2$:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$A = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний

A_0 - начальная амплитуда

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - циклическая частота затухающих колебаний

Затухающие колебания не являются периодическими.

Однако, если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода затухающих колебаний как промежутка времени между двумя последующими максимумами колеблющейся физической величины.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Декремент затухания – отношение амплитуд колебаний через период

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln \Delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N} \qquad N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta}$$

где N – число колебаний, совершаемых за время τ уменьшения амплитуды в e раз ($\tau = \frac{1}{\beta}$ – время релаксации)

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина Q, равная произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебаний системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t+T$ (за один условный период затухающих колебаний):

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}$$

Энергия $W(t)$ пропорциональна квадрату амплитуды $A(t)$:

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi A_0^2 e^{-\beta t 2}}{A_0^2 e^{-\beta t 2} - A_0^2 e^{-\beta(t+T)2}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}$$

При малых значениях логар. декр. зат. $\delta << 1$

$1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta$, поэтому $Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N$

2. Кинематические следствия из преобразований Лоренца. Изменение интервала времени в различных ИСО.

Следствие смотри в билете 7 номер 1
(стр 21)

Временные интервалы в различных ИСО связаны следующим соотношением:

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

3. Адиабатический процесс для идеального газа в P-V переменных имеет вид: $PV^\gamma = const$, где γ - показатель адиабаты. Написать уравнение адиабаты в P-T переменных.

$$PV^\gamma = const$$

Согласно у-ю Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT \qquad V = \nu R \frac{T}{P}$$

$$pV^\gamma = P\left(\nu R \frac{T}{P}\right)^\gamma = const, \text{ т.к. } \nu^\gamma R^\gamma = const, \text{ то}$$

$$P \frac{T^\gamma}{P^\gamma} = const$$

$$\boxed{P^{1-\gamma} T^\gamma = const}$$

4. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, коэффициенты диффузии и вязкости при давлении $p = 160$ кПа и температуре $T = 500$ К. Как изменяются найденные величины в результате двукратного увеличения объёма газа при постоянном давлении. Эффективный диаметр молекул кислорода $d = 0{,}38$ нм

Дано:

$P = 160$ кПа $= 160000$ Па
$T = 500$ К
$d = 0{,}38$ нм $= 0{,}38 \cdot 10^{-9}$ м
$V_2 = 2V_1$ $p = const$

ср. дл. пр. $\lambda - ?$
коэф. диф. $D - ?$
коэф. вяз. $\eta - ?$

Решение:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n \pi d^2}$$

$$p = nkT \Rightarrow n = \frac{p}{kT}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\frac{p}{kT}\pi d^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}\, p \pi d^2} =$$

$$= \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 500}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 16 \cdot 10^4 \cdot 0{,}38^2 \cdot 10^{-18}} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda = \frac{1}{3} \cdot 575{,}2 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-8} \approx 1{,}28 \cdot 10^{-5} \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 500}{3{,}14 \cdot 0{,}032}} \approx 575{,}2 \text{ м/с}$$

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \rho = \frac{1}{3} \cdot 575{,}2 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}23 = 1{,}58 \cdot 10^{-5}$$

$$p = \frac{\rho}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT} = \frac{16 \cdot 10^4 \cdot 0{,}032}{8{,}31 \cdot 500} \approx 1{,}23$$

При двукратном увеличении объёма газа

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ $\quad n = \frac{N}{V} \Rightarrow$ при ув. V в 2 раза $n \downarrow$ а $\lambda \uparrow$ так же в 2 раза

$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\,\lambda$, т.к. $p = const \Rightarrow \frac{V}{T} = const$, т.е. при $V\uparrow \Rightarrow T\uparrow$ и $\lambda\uparrow \Rightarrow D\uparrow$ в $2\sqrt{2}$ раза.

$$\eta = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \lambda \rho = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\,\lambda \frac{m}{V}$$

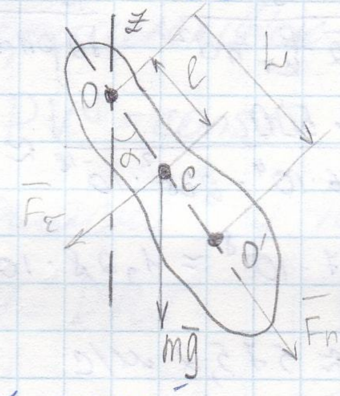
$\frac{V}{T} = const$ $\quad T\uparrow$ в 2 раза $\Rightarrow \langle v \rangle \uparrow$ в $\sqrt{2}$ раз

$\lambda\uparrow$ в 2 раза, $\rho\downarrow$ в 2 раза $\Rightarrow$ $\eta\uparrow$ в $\sqrt{2}$ раз

Билет 14

1. Физический маятник. Период малых колебаний физического маятника

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела



O' — центр качания

Если физ маятник отклонён из положения равновесия на некоторый угол α, то момент возвращающей силы

$$M = I\varepsilon = I\ddot{\alpha}$$

где I — момент инерции маятника относительно оси z

ε — угловое ускорение

С др. стороны при малых углах

$$M = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha$$

l — расстояние между точкой подвеса и центром масс C.

$F_\tau = -mg\sin\alpha$ — возвращающая сила (со знаком минус, поскольку она всегда направлена противоположно направлению увеличения α)

Следовательно

$$I\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0$$

Т.о., при малых колебаниях физ маятник совершает гармонические колебания