Лекция 3. Закон сохранения момента импульса.

Момент силы. Момент импульса материальной точки и механической системы. Уравнение моментов механической системы. Закон сохранения момента импульса механической системы.

Математическое замечание.

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ и $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ называется вектор $\vec{s}=\vec{a}\times\vec{b}$, который в декартовой системе координат определяется по формуле

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\vec{e}_y\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\vec{e}_z\left(a_xb_y-a_yb_x\right).$$

Величина $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|sin\alpha$ (площадь прямоугольника на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Свойства векторного произведения.

1) Вектор $\vec{s}$ направлен перпендикулярно к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому для любого вектора $\vec{d}$, лежащего в плоскости (линейно независимых) векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т.е. $\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$), получаем $\left(\vec{c},\vec{d}\right)=0$. Следовательно, если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, то $\vec{s}=\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2) Производная по времени – это вектор $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\dfrac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dfrac{d\vec{b}}{dt}$.

Действительно, (базисные векторы постоянные)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\frac{d}{dt}\left(\vec{e}_x\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\vec{e}_y\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\vec{e}_z\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\right)=$$

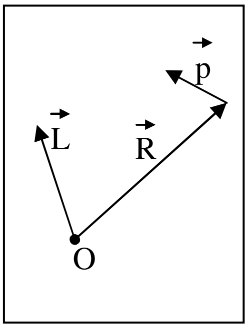
$$=\vec{e}_x\left(\dot{a}_yb_z+a_y\dot{b}_z-\dot{a}_zb_y-a_z\dot{b}_y\right)+\vec{e}_y\left(\dot{a}_zb_x+a_z\dot{b}_x-\dot{a}_xb_z-a_x\dot{b}_z\right)+\vec{e}_z\left(\dot{a}_xb_y+a_x\dot{b}_y-\dot{a}_yb_x-a_y\dot{b}_x\right)=$$

$$=\vec{e}_x\left(\dot{a}_yb_z-\dot{a}_zb_y\right)+\vec{e}_y\left(\dot{a}_zb_x-\dot{a}_xb_z\right)+\vec{e}_z\left(\dot{a}_xb_y-\dot{a}_yb_x\right)+\vec{e}_x\left(a_y\dot{b}_z-a_z\dot{b}_y\right)+\vec{e}_y\left(a_z\dot{b}_x-a_x\dot{b}_z\right)+$$

$$+\vec{e}_z\left(a_x\dot{b}_y-a_y\dot{b}_x\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ \dot{b}_x & \dot{b}_y & \dot{b}_z\end{vmatrix}=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Вектор момента импульса

Вектором момента импульса относительно точки O называется $\vec{L}=\vec{R}\times\vec{p}$,



где $\vec{R}$ - радиус-вектор из точки O, $\vec{p}=m\vec{\mathrm{v}}$ - вектор импульса точки. Вектор $\vec{L}$ направлен перпендикулярно к плоскости векторов $\vec{R}$ и $\vec{p}$. Точку O иногда называют *полюсом*.

Найдем производную от вектора момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{R}}{dt}\times\vec{p}+\vec{R}\times\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

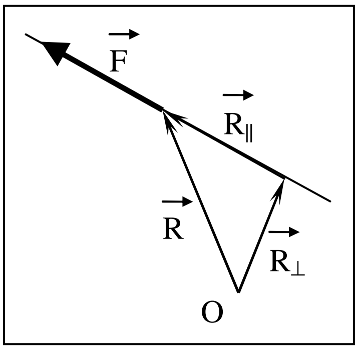
Первое слагаемое в правой части: $\dfrac{d\vec{R}}{dt}\times\vec{p}=\vec{\mathrm{v}}\times\left(\mathrm{m}\vec{\mathrm{v}}\right)=\vec{0}$. Так как в инерциальной системе отсчета по второму закону Ньютона (в импульсной форме) $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$, то второе слагаемое имеет вид $\vec{R}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{R}\times\vec{F}$.

Величина $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{R}\times\vec{F}$ называется *моментом силы* $\vec{F}$ относительно точки О.

Окончательно получаем *уравнение динамики вращательного движения точки:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}_O\left(\vec{F}\right).$$

Производная от вектора момента импульса относительно точки равна моменту действующих сил относительно этой точки.



Свойства момента силы.

1) $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\perp\vec{R}$ и $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\perp\vec{F}$.

2) В декартовых координатах

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(yF_z-zF_y\right)+\vec{e}_y\left(zF_x-xF_z\right)+\vec{e}_z\left(xF_y-yF_x\right).$$

или $\vec{M}_O=\vec{M}_{Ox}+\vec{M}_{Oy}+\vec{M}_{Oz}$ - вектор момента силы относительно точки равен сумме моментов силы относительно координатных осей.

3) Момент суммы сил равен сумме моментов каждой из сил $\vec{M}_O\left(\sum_i\vec{F}_i\right)=\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$.

4) Сумма моментов сил относительно точки

$$\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\sum_i\vec{R}_i\times\vec{F}_i$$

при переходе к другой точке O_1 , при которой $\vec{R}_i=\vec{R}_{i1}+\vec{R}_1$ изменится по правилу

$$\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\sum_i\left(\vec{R}_{i1}+\vec{R}_1\right)\times\vec{F}_i=\sum_i\left(\vec{R}_{i1}\times\vec{F}_i\right)+\sum_i\left(\vec{R}_1\times\vec{F}_i\right)=\vec{M}_{O1}+\vec{R}_1\times\left(\sum_i\vec{F}_i\right).$$

Следовательно, момент сил не изменится, если $\sum_i\vec{F}_i=\vec{0}$.

5) Пусть $\vec{R}=\vec{R}_\perp+\vec{R}_\parallel$, где $\vec{R}_\perp\perp\vec{F}$, $\vec{R}_\parallel\parallel\vec{F}$ тогда $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{R}\times\vec{F}=\vec{R}_\perp\times\vec{F}$.

Следовательно, если две *одинаковые* силы лежат *на одной прямой*, то их моменты *одинаковые*. Эта прямая называется *линией действия силы* $\vec{F}$. Длина вектора $\left|\vec{R}_\perp\right|$ называется плечом силы относительно *точки* О.

Момент силы относительно оси.

Как следует из определения момент силы, координаты вектора моменты силы относительно координатных осей определяются формулами

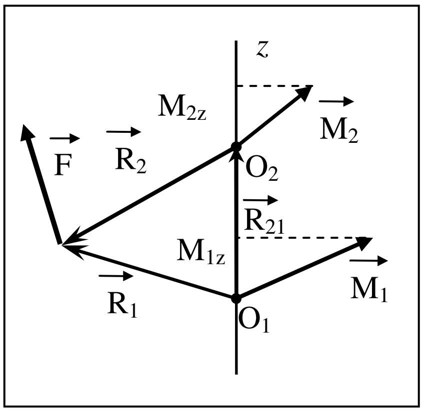
$$M_{Ox}\left(\vec{F}\right)=yF_z-zF_y,\ M_{Oy}\left(\vec{F}\right)=zF_x-xF_z,\ M_{Oz}\left(\vec{F}\right)=xF_y-yF_x.$$

Рассмотрим нахождение момента силы относительно *некоторой* оси z. Для этого надо рассмотреть вектор момента силы относительно некоторой точки О *на этой оси* и найти проекцию вектора момента силы на эту ось.

Свойства момента силы относительно оси z.

1) Проекция вектора момента силы на ось z не зависит от выбора точки О. Возьмем на оси z две разные точки O_1 и O_2 и найдем моменты силы F относительно этих точек.

$$\vec{M}_1=\vec{R}_1\times\vec{F},\ \vec{M}_2=\vec{R}_2\times\vec{F}.$$



Разность векторов $\vec{M}_1-\vec{M}_2=\left(\vec{R}_1-\vec{R}_2\right)\times\vec{F}$ перпендикулярна вектору $\vec{R}_1-\vec{R}_2=\vec{R}_{21}$, лежащему на оси z. Следовательно, если рассмотреть орт оси z – вектор $\vec{k}$, то проекции на ось z

$$M_{1z}-M_{2z}=\left(\vec{M}_1,\vec{k}\right)-\left(\vec{M}_2,\vec{k}\right)=\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2,\vec{k}\right)=0$$

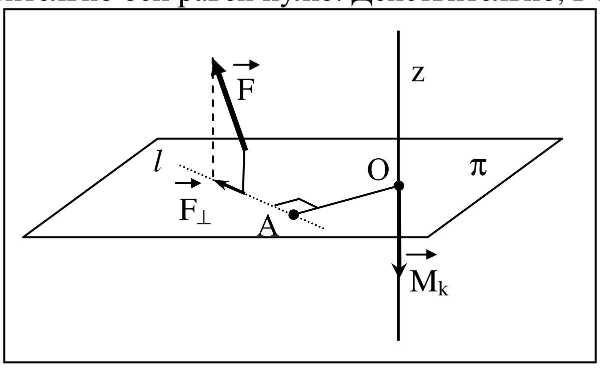
равны между собой. Следовательно, момент силы относительно оси определен однозначно.

Если момент силы относительно некоторой точки на оси равен нулю, то равен нулю момент силы относительно этой оси.

2) Если вектор силы $\vec{F}$ параллелен оси z, то момент силы относительно оси равен нулю $M_z=0$. Действительно вектор момента силы относительно любой точки на оси должен быть перпендикулярен вектору силы, поэтому он также перпендикулярен параллельной оси – проекция вектора момента силы на эту ось будет равна нулю. Следовательно, если $\vec{F}=\vec{F}_\perp+\vec{F}_\|$ разложение вектора силы на компоненту $\vec{F}_\|$ параллельную оси, и компоненту $\vec{F}_\perp$, перпендикулярную оси, то

$$M_z\left(\vec{F}\right)=M_z\left(\vec{F}_\|\right)+M_z\left(\vec{F}_\perp\right)=M_z\left(\vec{F}_\perp\right).$$

3) Если вектор силы и ось не параллельны, но лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси равен нулю. Действительно, в этом случае вектор момента силы относительно



любой точки на оси направлен перпендикулярно этой плоскости (т.к. вектор $\vec{R}$ тоже лежит в этой плоскости). Можно сказать и иначе. Если рассмотреть точку пресечения линии действия силы и прямой z, то момент силы относительно этой точки равен нулю, поэтому и момент силы относительно оси равен нулю.

Итак, чтобы найти момент силы $\vec{F}$ относительно оси z, надо:

1) найти проекцию силы $\vec{F}_\perp$ на *любую* плоскость π перпендикулярную этой оси и указать точку O - точку пересечения этой плоскости с осью z;
2) найти плечо силы $\vec{F}_\perp$ относительно оси – т.е. расстояние от линии действия силы *l* (в плоскости π) до прямой *z* – длину отрезка OA;
3) найти величину момента силы $M_k=F_\perp\cdot\left|OA\right|$ и направление по правилу правого винта (буравчика).

Правило правого винта в данном случае: вектор момента силы вдоль оси направлен так, что вектор $\vec{F}_\perp$ задает вращение в плоскости π вокруг точки O по часовой стрелке.

4) Если на оси z указано положительное направление (говорят, что ось ориентирована), то указать знак проекции момента силы.

Момент импульса механической системы.

Рассмотрим суммарный момент импульса системы относительно некоторой точки O.

$$\vec{L}=\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{R}_i\times\vec{p}_i$$

При переходе к другой точке O_1 радиус-векторы точек системы преобразуются $\vec{R}_i=\vec{R}_{1i}+\vec{R}_1$, поэтому

$$\vec{L}=\sum_i\left(\vec{R}_{1i}+\vec{R}_1\right)\times\vec{p}_i=\sum_i\left(\vec{R}_{1i}\times\vec{p}_i+\vec{R}_1\times\vec{p}_i\right)=\sum_i\vec{R}_{1i}\times\vec{p}_i+\vec{R}_1\times\left(\sum_i\vec{p}_i\right)$$

Суммарный импульс системы равен импульсу центра масс $\sum_i\vec{p}_i=\vec{p}_C$

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\vec{R}_1\times\vec{p}_C\,.$$

В системе отсчета, где центр масс системы покоится $\vec{p}_C=\vec{0}$, суммарный момент импульса *не зависит* от точки, относительно которой он вычисляется.

Если рассматривается движение твердого тела, то возможное движение в этом случае – это вращение вокруг центра масс. *В этом смысле момент импульса описывает вращательное движение*.

Найдем производную от суммарного момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\vec{R}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i\vec{R}_i\times\vec{F}_i\,.$$

Силы, действующие на точки системы, разделим на внутренние, действующие между точками системы и внешние – со стороны тел, не входящих в систему: $\vec{F}_i=\vec{F}_i^{ВНУТР}+\vec{F}_i^{ВНЕШ}$.

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\vec{R}_i\times\left(\vec{F}_i^{ВНУТР}+\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right)=\sum_i\vec{R}_i\times\vec{F}_i^{ВНУТР}+\sum_i\vec{R}_i\times\vec{F}_i^{ВНЕШ}\,.$$

Внутренние силы подчинятся третьему закону Ньютона - они лежат на прямых линиях, попарно соединяющих точки, противоположны по направлению и одинаковы по величине

$$\vec{F}_i^{ВНУТР}=-\vec{F}_j^{ВНУТР}\,.$$

Для каждой из таких пар сил можно ввести одинаковое плечо $\vec{R}_{ij\perp}$, поэтому

$$\sum_i\vec{R}_i\times\vec{F}_i^{ВНУТР}=\sum_i\left(\vec{R}_{\perp ij}\times\vec{F}_i^{ВНУТР}+\vec{R}_{\perp ij}\times\vec{F}_j^{ВНУТР}\right)=\sum_i\vec{R}_{\perp ij}\times\left(\vec{F}_i^{ВНУТР}+\vec{F}_j^{ВНУТР}\right)=\vec{0}\,.$$

Окончательно

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\vec{R}_i\times\vec{F}_i^{ВНЕШ}=\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right).$$

Уравнение динамики вращательного движения системы точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right).$$

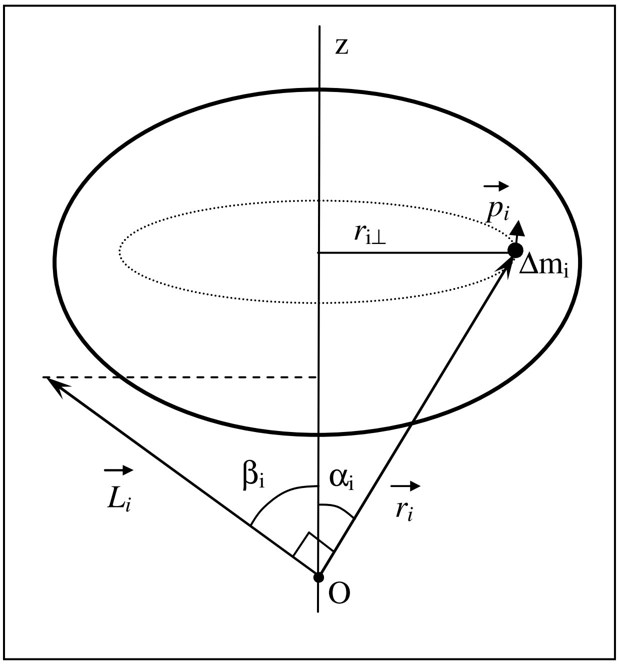
Покоординатное равенство

$$\frac{dL_x}{dt}=\sum_i M_{Ox}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right),\ \frac{dL_y}{dt}=\sum_i M_{Oy}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right),\ \frac{dL_z}{dt}=\sum_i M_{Oz}\left(\vec{F}_i^{ВНЕШ}\right).$$

Производная от вектора суммарного момента импульса системы равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему.

Момент импульса твердого тела.

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω. Выделим в теле малую частицу массой Δm_i. Найдем момент импульса этой частицы относительно некоторой точки O на оси вращения. Если радиус-вектор точки $\vec{r}_i$, а вектор импульса $\vec{p}_i$, то вектор момента импульса $\vec{L}_i=\vec{r}_i\times\vec{p}_i$ приложен к точке O и направлен перпендикулярно к векторам $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ под некоторым углом β_i к оси z. Траекторией частицы Δm_i является окружность, а вектор импульса $\vec{p}_i$ направлен по касательной к этой окружности. Следовательно, угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ равен 90^0. Поэтому величина $L_i=r_ip_i$. Пусть $r_{i\perp}$ - радиус ок-



ружности – траектории частицы. Тогда $p_i = \Delta m_i v_i = \Delta m_i \cdot r_{i\perp}\omega$. Рассмотрим проекцию вектора момента импульса на ось z: $L_{iz} = L_i \cos\beta_i$. Учитывая, что $\cos\beta_i = \sin\alpha_i$, получаем: $L_{iz} = r_i p_i \cos\beta_i = r_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}\omega \sin\alpha_i$. Но $r_{i\perp} = r_i \sin\alpha_i$. Тогда

$$L_{iz} = \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^{\ 2}\omega$$

Для всего тела

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^{\ 2}\omega = \omega \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^{\ 2}.$$

В выражение входят параметры движения частиц, которые не зависят от положения точки O. Поэтому величина момента импульса вдоль оси z не зависит от положения точки на оси, для которой она вычисляется.

В этом выражении величина

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^{\ 2}$$

называется *моментом инерции* твердого тела относительно оси z (единица измерения кг·м^2). Для сплошных тел

$$I_z = \iiint_m r_\perp^{\ 2} dm.$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Момент импульса твердого тела при вращательном движении вокруг оси z вычисляется как

$$L_z = I_z \omega.$$

Тогда уравнение динамики:

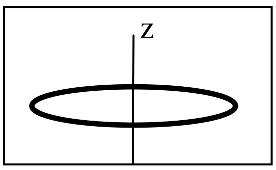
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z \omega\right).$$

Если тело твердое, то $I_z = const$, поэтому, с учетом того, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ (угловое ускорение), получаем

$$I_z \varepsilon = M_z^{\text{ВНЕШ}}$$

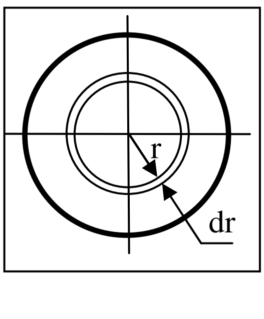
Это уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: *угловое ускорение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси прямо пропорционально величине момента внешних сил относительно этой оси*. Момент инерции играет роль *меры инертности при вращательном движении*.

Примеры на вычислении момента инерции.



1) Момент инерции тонкого кольца (прямого цилиндра) массы m и радиуса R относительно оси z, перпендикулярной плоскости кольца, проходящей через центр кольца

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^{\ 2} = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2.$$

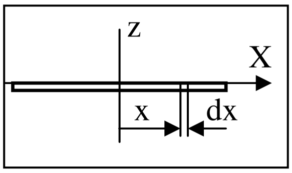


2) Момент инерции диска (сплошного цилиндра) массы m и радиуса R относительно оси z, перпендикулярной плоскости диска, проходящей через центр диска (сплошного цилиндра).

Выделим тонкий цилиндр радиусом *r* и толщиной *dr*.

Масса этого цилиндра $dm=\frac{m}{\pi R^2}2\pi rdr=\frac{m}{R^2}2rdr$, $r_\perp = r$.

Поэтому $I_z=\int\limits_0^R r^2\frac{m}{R^2}2rdr=\frac{2m}{R^2}\int\limits_0^R r^3dr=\frac{2m}{R^2}\frac{R^4}{4}=\frac{mR^2}{2}$

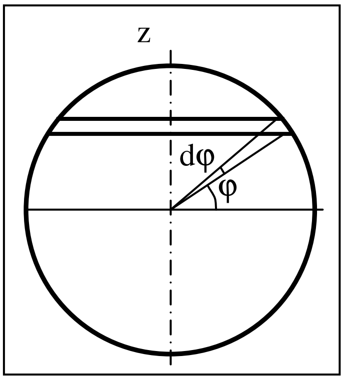


3) *Момент инерции тонкого стержня* относительно оси z, являющейся срединным перпендикуляром. Масса стержня m, длина L.
Выделим на расстоянии x от оси маленькую часть стержня длиной dx.

Масса этой части $dm=\frac{m}{L}dx$, $r_\perp = x$. Откуда

$$I_z=\int\limits_{-L/2}^{L/2}x^2\frac{m}{L}dx=\frac{m}{3L}\frac{2L^3}{8}=\frac{mL^2}{12}.$$

4) *Момент инерции тонкостенного шара* относительно любой оси симметрии z. Масса шара m, радиус R.



Выделим на поверхности сферы кольцевой сегмент, для которого ось z является осью симметрии. Сегмент опирается на малый центральный угол dφ, положение сегмента определяется углом φ, отсчитываемым от плоскости экватора.

Тогда $r_\perp = R\cos\varphi$, $dm=\frac{m}{4\pi R^2}2\pi R\cos\varphi\cdot Rd\varphi$

$$I_z=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(R\cos\varphi\right)^2\frac{m}{4\pi R^2}2\pi R\cos\varphi\cdot Rd\varphi$$

$$I_z=\frac{m}{2}R^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\varphi\right)^2\cos\varphi\cdot d\varphi=\frac{m}{2}R^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\left(\sin\varphi\right)$$

$$I_z=\frac{2}{3}mR^2.$$

5) Момент инерции сплошного шара относительно любой оси симметрии z. Масса шара m, радиус шара R.

Представим шар как набор вложенных друг в друга тонкостенных сфер переменного радиуса *r* и толщиной *dr*. Масса одной такой сферы $dm=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}4\pi r^2\cdot dr=\frac{3m}{R^3}r^2\cdot dr$.

Момент инерции такой сферы $dI_z=\frac{2}{3}dm\cdot r^2=\frac{2}{3}\frac{3m}{R^3}r^2\cdot dr\cdot r^2=\frac{2m}{R^3}r^4\cdot dr$.

Поэтому $I_z=\int\limits_0^R\frac{2m}{R^3}r^4dr=\frac{2m}{R^3}\frac{R^5}{5}=\frac{2}{5}mR^2$

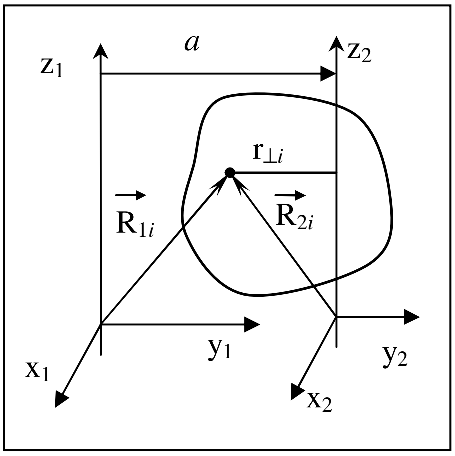
Теорема Гюйгенса-Штейнера

Как связаны между моменты инерции твердого тела относительно двух *параллельных* осей?

Рассмотрим две параллельные оси z_1 и z_2. Введем две системы координат так, чтобы их оси x и y были параллельны друг другу, причем вторая система координат была получены параллельным переносом из первой на вектор $\vec{a}=\left(a_x,a_y,0\right)$. При этом расстояние между осями будет равно $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$.

Тогда координаты любой *i*-й точки связаны соотношениями

$$x_{2i}=x_{1i}+a_x,\ y_{2i}=y_{1i}+a_y,\ z_{2i}=z_{1i}.$$



Квадрат расстояния от этой точки до первой оси z_1:
$r_{1\perp i}{}^2 = x_{1i}^2 + y_{1i}^2$ и до второй оси $r_{2\perp i}{}^2 = x_{2i}^2 + y_{2i}^2$.
Вычисляем момент инерции относительно второй оси:

$$I_{z2} = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{2i\perp}{}^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{2i}^2 + y_{2i}^2\right),$$

$$I_{z2} = \sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right) + \sum_i \Delta m_i \cdot \left(a_x^2 + a_y^2\right) + 2\sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}a_x + y_{1i}a_y\right)$$

.
В этом равенстве
$\sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right) = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{1i\perp}^2 = I_{z1}$ - момент инерции относительно оси z_1,
$\sum_i \Delta m_i \cdot \left(a_x^2 + a_y^2\right) = a^2 \sum_i \Delta m_i = ma^2$,

$$\sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}a_x + y_{1i}a_y\right) = \sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i}a_x + \sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i}a_y = a_x \sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i} + a_y \sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i}.$$

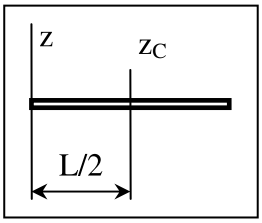
Учтём, что $\sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i} = mx_{1C}$ и $\sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i} = my_{1C}$ (где x_{1C} и y_{1C} – координаты центра масс тела в 1й системе координат) и получим

$$I_{z2} = I_{z1} + ma^2 + 2m\left(a_x x_{1C} + a_y y_{1C}\right)$$

Если ось z_1 проходит *через центр масс тела*, то x_{1C} =0 и y_{1C} =0, поэтому выражение упрощается:

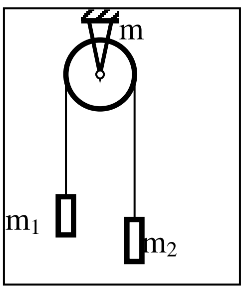
$$I_z = I_{zC} + ma^2$$

Это теорема Гюйгенса-Штейнера: *момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела и квадрата расстояния между осями, умноженного на массу тела.*



Пример. Момент инерции стрежня относительно оси, проходящей через край стержня, перпендикулярно ему, равен сумме момента инерции относительно срединной оси и массе, умноженный на квадрат половины длины стержня:

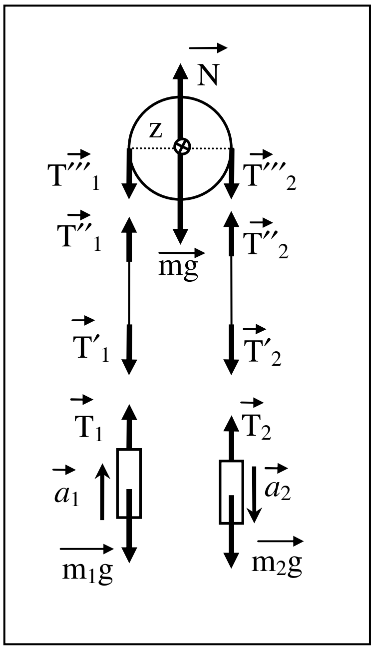
$$I_z = I_{zC} + m\frac{L^2}{4} = \frac{Lm^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}.$$



Пример. Рассмотрим движение грузов на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (диск). Массы грузов m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$), масса блока m. Трения в оси блока нет. Нить не скользит по блоку. Силами сопротивления в воздухе пренебрегаем. Найти ускорение грузов. Радиус блока R.
Решение. Фиксируем систему отсчета, в которой ось блока неподвижная. Предполагаем, что эта система отсчета инерциальная. Ось z системы координат в этой системе отсчёта направим вдоль оси вращения блока («от нас»).
«Мысленно» разбиваем систему на части и находим силы между частями системы в соответствие со вторым и третьим законами Ньютона.
При этом учтём, что нить невесомая (масса любой части нити равна нулю), поэтому, если кусок нити движется под действием (растягивающих) сил, то из второго закона Ньютона

$$m_{НИТИ}\vec{a} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$

следует при $m_{НИТИ}$=0, что эти силы равны по величине F_2=F_1.
Нить также является нерастяжимой, поэтому ускорения всех точек нити одинаковые по величине. Следовательно, ускорения грузов одинаковые по величине.



Нить не скользит по блоку – это значит, что скорости точек обода диска равны скоростям (соответствующих) точек нити. Следовательно, их тангенциальные ускорения тоже одинаковые.

Из всего этого следуют уравнения:

- равенства соответствующих сил натяжения

$$T_1 = T_1' = T_1'' = T_1''' ,\ T_2 = T_2' = T_2'' = T_2''' ,$$

- равенства ускорений

$$a_1 = a_2 = \varepsilon R ,$$

- равновесия оси блока

$$N - mg - T_1 - T_2 = 0$$

- динамики центров масс грузов

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2$$

- динамики вращательного движения блока вокруг оси z

$$I_z \varepsilon = T_2 R - T_1 R .$$

Обозначим величину ускорения грузов как a.

В данном случае момент инерции блока (диска) относительно оси вращения $I_z = \dfrac{mR^2}{2}$, поэтому из уравнения динамики вращательного движения

$$\frac{mR^2}{2}\frac{a}{R} = \left(m_2 g - m_2 a\right) R - \left(m_1 g + m_1 a\right) R$$

находим $a = \dfrac{\left(m_2 - m_1\right) g}{\left(\dfrac{m}{2} + m_2 + m_1\right)}$.

Закон сохранения момента импульса.

Уравнение динамики вращательного движения системы точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right).$$

Покоординатное равенство

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_{Ox}\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right),\ \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_{Oy}\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right),\ \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right).$$

1) Если момент внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой точки равен нулю, то сохраняется момент импульса системы относительно этой точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L} = const .$$

Например, при движении планет в гравитационном поле Солнца, сохраняется вектор момента импульса планеты относительно Солнца, т.к. линия действия силы гравитации проходит через Солнце, поэтому её момент равен нулю относительно Солнца.

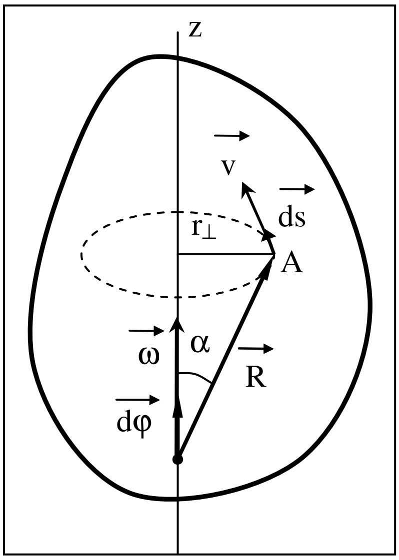
2) Если момент внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой оси равен нулю, то сохраняется момент импульса системы вдоль этой оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right) = 0 \Leftrightarrow L_z = 0 .$$

Пример. Волчок будет вращаться достаточно долго при малой силе трения, сохраняя тем самым момент импульса вдоль вертикальной оси z, так моменты сил тяжести и реакции опоры равны нулю (векторы силы тяжести и реакции опоры параллельны оси вращения).

Векторная форма записи угловой скорости

Рассмотрим поворот твердого тела на малый угол dφ вокруг оси z.
Точка А, находящаяся на расстоянии $r_{\perp}$ от оси вращения переместится на малый вектор $d\vec{s}$,



направленный по касательной к окружности в направлении поворота: $ds = r_{\perp} d\varphi$. Пусть положение точки А задано с помощью радиус-вектора $\vec{R}$ из какой-то точки О на оси вращения, тогда $r_{\perp} = R\sin\alpha$, поэтому можно написать

$$ds = R\sin\alpha \cdot d\varphi .$$

Если вдоль оси вращения задать вектор поворота $d\vec{\varphi}$, связанный с направлением поворота правилом буравчика, то справедливым будет равенство

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{R}$$

Так как для скорости движения точки А справедливо выражение $d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$, то задавая вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения равенством $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$, получаем

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и направление вращения связаны правилом буравчика (правого винта).
С помощью вектора угловой скорости можно задать вектор момента импульса вдоль оси вращения $\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$.

Замечание.

Условия равновесия тела можно сформулировать таким образом:
1) Если тело покоится, то центр масс тела не движется, поэтому для центра масс

$$\vec{a}_C = \frac{\sum_i \vec{F}_i^{ВНЕШ}}{m_C} = \vec{0} .$$

Поэтому $\sum_i \vec{F}_i^{ВНЕШ} = \vec{0}$ - сумма внешних сил, действующих на тело равна нулю. Следовательно, сумма проекций внешних сил на *любое направление* равна нулю.

2) Если тело не вращается, то угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{M_z^{ВНЕШ}}{I_z} = 0$, т.е. $M_z^{ВНЕШ} = 0$ - сумма моментов внешних сил относительно любой оси равна нулю.