Dokumentacja

Zadanie III.9. Zagadnienie różniczkowe

$$y' = -3y(y + x^3) - 3x^4 + 1, \qquad y(1) = 0,$$

rozwiązać na przedziale [1,3] metodą Eulera oraz zmodyfikowaną metodą Eulera, zwaną metodą punktu środkowego.

Wynik porównać z rozwiązaniem dokładnym $y(x) = x - x^3$.

Nazewnictwo elementarne

- $y' = -3y(y + x^3) - 3x^4 + 1$
- $[1,3]$ - zakres na osi x pomiędzy którym będą przeprowadzane poszukiwania rozwiązania
- $N-$ liczba ustalona przez użytkownika by zwiększyć przybliżenie
- $X_i = 1 + ih\ dla\ i = 0, 1, \dots, N$ - równoodległe punkty z przedziału [1,3]
- $y(x) = x - x^3$- rozwiązanie dokładne zagadnienia różniczkowego

Podstawowa metoda Eulera[1]

Równanie postaci $y' = f(x, y)$ o warunkach początkowych $(x_0, y_0) : y_0 = y(x_0)$, kolejne punkty z krokiem h na osi x. Zatem: $x_{n+1} = x_n + h$ Ponieważ - z definicji pochodnej $y' = \frac{\Delta y}{h}$ czyli zarazem $f(x_n, y_n) = y' = \frac{\Delta y}{h}$ Po przekształceniu: $\Delta y = hf(x_n, y_n)$
Ponieważ szukamy wzoru na y_{n+1}, zatem do wzoru $y_{n+1} = y_n + \Delta y$ podstawiamy wyżej wyliczone Δy i otrzymujemy ostatecznie równanie: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

Porównując otrzymany wynik z rozwinięciem Taylora otrzymujemy:

$$y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}h^2$$

gdzie $x_n < \xi < x_{n+1}$ co oznacza, że przybliżenie wartości $y(x_{x+1})$ ma błąd rzędu h^2.
Świadczy to o tym, że obranie mniejszego przedział kroku da w rezultacie dokładniejszy wynik.

Zmodyfikowana metoda Eulera[1]

Zgodnie z tą metodą, Δy obliczamy jako:

$$\Delta y = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + f(x_m, y_m)\frac{h}{2})h$$

[1]Źródło: http://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Eulera