Dokumentacja

Zadanie II.10. Dla równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = 3 - x + \ln x$, wczytywać $a, b \in R$ takie, by $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Następnie, dopóki „użytkownik się nie znudzi”, wczytywać wartość $0 < \varepsilon < 1$ i metodą połowienia na $[a, b]$ przybliżyć z dokładnością ε rozwiązanie tego równania. Rozwiązanie to przybliżyć również metodą siecznych z $x_0 = a, x_1 = b$, przy czym x_k będzie dobrym przybliżeniem, gdy $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$. Porównać ilość kroków wykonanych metodą połowienia i metodą siecznych.

Nazewnictwo elementarne

- $f(x) = 3 - x + \ln x \;\; D: (0, +\infty)$
- a, b - liczby rzeczywiste spełniające wymagania $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$
- c środek przedziału $[a, b]$
- $[a, b]$ przedział na którym $f(a) \cdot f(b) < 0$
- ε - dokładność przybliżenia podawana przez użytkownika z zakresu $0 < \varepsilon < 1$
- $x_0, x_1, \dots, x_k$ - kolejne przybliżenia metodą siecznych przy czym $x_0 = a \; i \; x_1 = b$

Metoda poławiania

Jedna z metod rozwiązywania równań nieliniowych. Opiera się ona na twierdzeniu Bolzano-Cauchy'ego:

Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ *ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania* $f(x) = 0$.

Aby można było zastosować metodę równego podziału, muszą być spełnione założenia:

1. funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a; b]$
2. funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziału: $f(a)f(b) < 0$

Przebieg algorytmu:

1. Sprawdzić, czy pierwiastkiem równania jest punkt $x_1 = \frac{a+b}{2}$, czyli czy $f(x_1) = 0$.
2. Jeżeli tak jest, algorytm kończy się, a punkt jest miejscem zerowym. W przeciwnym razie x_1 dzieli przedział $[a, b]$ na dwa mniejsze przedziały $[a, x_1]$ i $[x_1, b]$.
3. Wybierany jest ten przedział, dla którego spełnione jest drugie założenie, tzn. albo $f(x_1)f(a) < 0$ albo $f(x_1)f(b) < 0$. Cały proces powtarzany jest dla wybranego przedziału.

Działanie algorytmu kończy się w punkcie 2 albo po osiągnięciu żądanej dokładności przybliżenia pierwiastka.

Metoda siecznych

Metoda numeryczna, służąca do rozwiązywania równań nieliniowych z jedną niewiadomą.

Metoda siecznych to algorytm interpolacji liniowej. Polega na przyjęciu, że funkcja na dostatecznie małym odcinku $< a, b >$ w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy. Możemy wtedy na odcinku $< a, b >$ krzywą $y = f(x)$ zastąpić sieczną. Za przybliżoną wartość pierwiastka przyjmujemy punkt przecięcia siecznej z osią OX.

Metodę siecznych dla funkcji $f(x)$, mającej pierwiastek w przedziale $< a, b >$ można zapisać następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$