

• 雷达系统与技术 •

DOI: 10.16592/j.cnki.1004-7859.2022.11.010

# 阵列雷达近场方向图误差特性分析

何 勤 程子扬\* 王志航 何子述

(电子科技大学 信息与通信工程学院, 成都 611731)

摘要: 文中基于近场阵列理论模型,研究通道误差和阵元位置误差对信号空域滤波性能造成的影响。首先,基于近场天线阵列信号模型对两种误差进行建模,从统计学角度推导出了输出波束差的一阶和二阶统计量的理论上限;然后,给出蒙特卡洛实验曲线和理论上限曲线,并作对比。误差波束仿真实例验证了给出的理论上限的可行性,对工程应用有一定的指导意义。

关键词: 通道误差; 阵元位置误差; 统计特性; 近场波束形成

中图分类号: TN820 文献标志码: A 文章编号: 1004-7859(2022)11-0061-06

引用格式: 何 勤,程子扬,王志航,等. 阵列雷达近场方向图误差特性分析[J]. 现代雷达,2022,44(11): 61-66.

HE Qin, CHENG Ziyang, WANG Zhihang, et al. Analysis of error characteristics of array radar near-field beam pattern [J]. Modern Radar, 2022, 44(11): 61-66.

## Analysis of Error Characteristics of Array Radar Near-field Beampattern

HE Qin, CHENG Ziyang\*, WANG Zhihang, HE Zishu

(School of Information and Communication Engineering,  
University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

**Abstract:** Based on the near-field array theoretical model, the effect of channel error and sensor position error on the signal's spatial filtering performance is studied. Firstly, based on the near-field antenna array signal model, two kinds of errors are modeled, and the theoretical upper bounds of the first-order and second-order statistics of the output beam difference are derived from a statistical point of view. Then, Monte Carlo experimental curve and theoretical upper limit curve are given and compared. The simulation results of the beam with error feasibility of the theoretical upper limit, showing a certain guiding significance for engineering applications.

**Key words:** channel error; sensor position error; statistical characteristics; near-field beamforming

## 0 引言

阵列数字波束形成技术<sup>[1]</sup>在雷达、通信和声呐等多个领域具有广泛的应用,它是阵列信号处理系统中一个重要的任务,主要是通过控制各通道的信号幅度、相位等参数对空域信号进行相应的滤波处理,可以很好地抑制空间干扰和环境噪声,提高信噪比,为后续的目标检测和跟踪提供帮助。在波束形成过程中,由于存在通道误差(CE)<sup>[2-4]</sup>和阵元位置误差(SPE)<sup>[5-6]</sup>,各阵元输出的信号在波束形成处理时的实际时延和理论时延之间存在一定的偏差,继而导致不能精确地对各阵元进行同相相加和最大化输出信号功率,进而影响波束形成的性能。

传统的阵列信号处理主要集中在阵列远场目标处理,而对于近场波束形成的分析设计较少。在实际中,阵列的近场效应广泛存在,特别是在麦克风阵列信号处理中。随着数字技术的发展,雷达阵元阵列的口径也逐渐扩大,这可以很好地改善阵列空间的角度分

辨率和降低阵元的最大负载功率。对于大口径的雷达,很多目标常处于近场区<sup>[7-8]</sup>,这也亟需相应地对传统波束形成理论进行拓展和改进。

本文针对近场背景构建了CE和SPE的仿真模型,从概率统计的角度单独分析了CE和SPE对近场波束形成性能的影响;根据特定的输入误差分布,给出了相应输出波束差的一阶和二阶统计量的理论上限。仿真实验表明:在一定程度上,蒙特卡洛(MC)曲线与理论上限曲线接近。理论上限可以作为一种快速评估输入误差对输出波束影响的分析工具。

## 1 误差建模

考虑由 $2N+1$ 个阵元组成的阵列天线,以中心阵元0号阵元作为参考阵元。目标位于 $(r, \theta)$ 处,当 $r < 2D^2/\lambda$ 时,目标被认为是此阵列的近场目标,其中 $D$ 是阵列口径<sup>[7]</sup>。在近场模型中,假设阵列位于 $x$ 轴,坐标分别是 $\{x_n\}_{n=-N}^N$ ,那么阵列的阵列流形可以表示为<sup>[8]</sup>

收稿日期: 2022-08-11 修订日期: 2022-09-16

$$\mathbf{a}(r, \theta) = [e^{j\psi_{-N}}, \dots, e^{j\psi_0}, \dots, e^{j\psi_N}]^T \quad (1)$$

式中:  $\psi_n = -2\pi(d_n - r)/\lambda$  为目标传播到第  $n$  个阵元上与到参考阵元上的相位差;  $d_n \approx r + x_n^2 \cos^2 \theta / 2r - x_n \sin \theta$  为第  $n$  个阵元与目标之间的距离;  $x_n$  为第  $n$  个阵元的  $x$  轴坐标。

### 1.1 幅相误差

CE 包括幅度误差和相位误差(PE),但主要是 PE 严重影响波束的指向<sup>[3]</sup>。为此,主要分析 PE 对波束形成的影响,而实际中的阵列误差集中表现在阵列矢量上。假设 PE 服从高斯分布  $\phi_n \sim N(0, \sigma^2)$ , 且每个通道的 PE 是独立的。混合 PE 的输出波束模型为

$$F_\phi(r, \theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}_\phi(r, \theta)| = \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{j(\varphi_n + \psi_n) + j\phi_n} \right| \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{w} = [c_{-N}e^{-j\varphi_{-N}}, \dots, c_N e^{-j\varphi_N}]^T$  为权向量,  $c_n$  为在第  $n$  号阵元上施加的标量幅度值,  $\varphi_n$  为在第  $n$  号阵元上施加的相位;  $\mathbf{a}_\phi(r, \theta) = [e^{j\psi_{-N}+j\phi_{-N}}, \dots, e^{j\psi_0+j\phi_0}, \dots, e^{j\psi_N+j\phi_N}]^T$  为混入 PE 的阵列流形。那么无误差波束与混合 PE 的波束之差(简称波束差)为

$$\Delta F(r, \theta) = F(r, \theta) - F_\phi(r, \theta) \quad (3)$$

式中:  $F(r, \theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(r, \theta)|$  为没有混入 PE 的波束。

存在 PE 的波束差的一阶和二阶统计量分别为

$$\mu_\phi(r, \theta) = E(\Delta F(r, \theta)) = F(r, \theta) - E(F_\phi(r, \theta)) \quad (4)$$

$$\sigma_\phi^2(r, \theta) = E(\Delta F(r, \theta))^2 = E(F_\phi(r, \theta))^2 - E^2(F_\phi(r, \theta)) \quad (5)$$

式中:  $E(\cdot)$  表示求期望。

引理<sup>[9]</sup>: 如果有函数  $f(x, y)$  在区间  $[a, b]$  上是凸函数, 那么根据 Jensen 不等式, 有  $E(f(x, y)) \geq f(E(x), E(y))$ ,  $x, y \in [a, b]$ 。

对于  $E(F_\phi(r, \theta))$ , 由于涉及到绝对值下的多个随机变量复合期望的求解, 无法直接显性积分, 所以对其进行适当的松弛。根据引理可以得到

$$E(F_\phi(r, \theta)) \geq E(|\mathbf{w}^H \mathbf{a}_\phi(r, \theta)|) \quad (6)$$

所以, 有不等式

$$\mu_\phi(r, \theta) \leq F(r, \theta) - E(|\mathbf{w}^H \mathbf{a}_\phi(r, \theta)|) \triangleq \mu_{\phi_{\text{up}}}(r, \theta) \quad (7)$$

$$\sigma_\phi^2(r, \theta) \leq E(F_\phi(r, \theta))^2 - E(|\mathbf{w}^H \mathbf{a}_\phi(r, \theta)|)^2 \triangleq \sigma_{\phi_{\text{up}}}^2(r, \theta) \quad (8)$$

式中:  $\mu_{\phi_{\text{up}}}(r, \theta)$  和  $\sigma_{\phi_{\text{up}}}^2(r, \theta)$  定义为波束差的期望上

限和方差上限。

根据联合多变量的期望准则, 可以得到

$$\mu_{\phi_{\text{up}}}(r, \theta) = e^{-\sigma^2/2} F(r, \theta) \quad (9)$$

$$\sigma_{\phi_{\text{up}}}^2(r, \theta) = (1 - e^{-\sigma^2}) \sum_{n=-N}^N c_n^2 \quad (10)$$

同时, 给出波束差期望的下限

$$\begin{aligned} \mu_\phi(r, \theta) &= F(r, \theta) - E(F_\phi(r, \theta)) \geq \\ &= F(r, \theta) - E\left(\sum_{n=-N}^N |\mathbf{w}^H \mathbf{a}_\phi(r, \theta)|\right) = \\ &= F(r, \theta) - M = \\ &= \mu_{\phi_{\text{low}}}(r, \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

### 1.2 阵元位置误差

波束形成中除了会引入 PE, 还由于地形起伏、地势变化和人力安装测量等多种因素会引起阵元位置的测量误差。高精度的测向、定位及波束形成算法往往要求较高的阵元位置精确度, 即阵元实际位置与标称阵元位置是相一致的或控制在可允许的误差范围之内。

假设现在阵元位置存在误差, 第  $n$  个阵元的实际坐标可写为

$$x_n' = x_n + \Delta x_n \quad (12)$$

假设其中  $\Delta x_n$  服从均匀分布且各 SPE 是相互独立的, 即  $\Delta x_n \sim U(-u/2, u/2)$ 。存在 SPE 的第  $n$  个阵元上的相位差表达式如下

$$\psi_{\Delta x, n} = -2\pi(d_n'(r, \theta) - r)/\lambda = \psi_n + \phi_{\Delta x, n} \quad (13)$$

式中:  $d_n'(r, \theta)$  为引入 SPE 后的第  $n$  个阵元与目标之间的距离;  $\phi_{\Delta x, n} = -2\pi((x_n \cos^2 \theta / r - \sin \theta) \Delta x_n + \cos^2 \theta \Delta x_n^2 / 2r) / \lambda$  为第  $n$  个阵元上的时延相位差。因为通常有  $\pi \cos^2 \theta / \lambda r \rightarrow 0$ , 所以忽略相位差的二次方项, 得到  $\phi_{\Delta x, n} = -2\pi(x_n \cos^2 \theta / r - \sin \theta) \Delta x_n / \lambda$ 。那么含有 SPE 的阵列流形为

$$\mathbf{a}_{\Delta x}(r, \theta) = [e^{j\psi_{-N}+j\phi_{\Delta x, -N}}, \dots, e^{j\psi_0+j\phi_{\Delta x, 0}}, \dots, e^{j\psi_N+j\phi_{\Delta x, N}}]^T \quad (14)$$

相应的混合 SPE 的波束差为

$$\Delta F_{\Delta x}(r, \theta) = F(r, \theta) - F_{\Delta x}(r, \theta) \quad (15)$$

式中:  $F_{\Delta x}(r, \theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}_{\Delta x}(r, \theta)|$  为含有 SPE 的输出波束。存在 SPE 的波束差的一阶和二阶统计量分别可表示为

$$\mu_{\Delta x}(r, \theta) = E(\Delta F_{\Delta x}(r, \theta)) = F(r, \theta) - E(F_{\Delta x}(r, \theta)) \quad (16)$$

$$\sigma_{\Delta x}^2(r, \theta) = E(\Delta F_{\Delta x}(r, \theta))^2 = E(F_{\Delta x}(r, \theta))^2 - E^2(F_{\Delta x}(r, \theta)) \quad (17)$$

同理, 根据引理可以得到下面不等式

$$\mu_{\Delta x}(r, \theta) \leq F(r, \theta) - |E(\mathbf{w}^H \mathbf{a}_{\Delta x}(r, \theta))| \triangleq \mu_{\Delta x, \text{up}}(r, \theta) \quad (18)$$

$$\sigma_{\Delta x}^2(r, \theta) \leq E(F_{\Delta x}(r, \theta))^2 - |E(\mathbf{w}^H \mathbf{a}_{\Delta x}(r, \theta))|^2 \triangleq \sigma_{\Delta x, \text{up}}^2(r, \theta) \quad (19)$$

式中:  $\mu_{\Delta x, \text{up}}(r, \theta)$  和  $\sigma_{\Delta x, \text{up}}^2(r, \theta)$  定义为波束差的期望上限和方差上限。

根据联合多变量的期望准则, 计算得到

$$\mu_{\Delta x, \text{up}}(r, \theta) = F(r, \theta) - |E(\mathbf{w}^H \mathbf{a}_{\Delta x}(r, \theta))| = F(r, \theta) - \frac{2}{u} |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{a}}(r, \theta)| \quad (20)$$

式中:  $\bar{\mathbf{a}}(r, \theta) = \mathbf{z}(r, \theta) \odot \mathbf{a}(r, \theta)$ ,  $\mathbf{z}(r, \theta) = [\sin(b_{-N}u/2)/b_{-N}, \dots, \sin(b_N u/2)/b_N]^T$ ,  $b_n = 2\pi(x_n \cos^2 \theta / r - \sin \theta) / \lambda$ 。波束差期望  $\mu_{\Delta x}(r, \theta)$  的下限为  $\mu_{\Delta x, \text{low}}(r, \theta) = F(r, \theta) - M$ 。

同理, 根据联合多变量的期望准则计算得到

$$\sigma_{\Delta x, \text{up}}^2(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N c_n^2 - \frac{4}{u^2} \sum_{n=-N}^N \left( \frac{c_n \sin(ub_n/2)}{b_n} \right)^2 (b_n \neq 0) \quad (21)$$

此外, 当  $b_n = 0$  时, 将  $u/2$  带入到式(20)和式(21)中替换  $\sin(ub_n/2)/b_n$ 。

## 2 仿真实例与分析

本节通过仿真实例分别分析 CE 和 SPE 对近场波束形成的影响, 并验证理论上限的性能。参数设置如下: 均匀线阵阵元数 7 ( $N=3$ ), 间隔为半波长。目标位于近场 ( $r=12\lambda$ ,  $\theta=0$ ), MC 次数设为 500。仿真实例采用静态权向量进行波束形成。

### 1) 仿真 1

设定 CE 中的 PE 服从  $N(0, \sigma^2)$  的高斯分布, 此时 SPE 设为零, 下面给出不同程度的 PE 引起的波束畸变和波束差的统计特性曲线。通过图 1a) 和图 2a) 中的 MC 曲线可以看出: 角度维 MC 曲线是随着角度波动起伏的, 理论上限与此一致, 且在大 PE 下, 主瓣 MC 曲线偏离零则更大, 表示主瓣恶化较为严重; 但是距离维 MC 曲线基本不随距离波动。较图 1, 图 2 施加的

$\sigma^2$  增大, 给出的期望上限曲线在角度主瓣域仍然贴近 MC 曲线, 但是在角度旁瓣域则呈现的逼近效果略变差; 而在距离维, 期望上限逼近效果几乎没什么变化, 仍然较好。

图 1b) 和图 2b) 表示不同程度 PE 下的波束差方差的 MC 曲线及其上限。可以看出, MC 曲线在角度维上有一定的波动, 且在主瓣域波动稍微大一些; 但高斯分布的 PE 引起的波束差方差曲线基本不随距离变化。较图 1, 图 2 施加的 PE 增大, 方差上限偏离 MC 曲线更远, 此时用方差上限估计当前 MC 曲线的效果略变差。图 1c) 和图 2c) 展示了不同程度 PE 下 500 次 MC 的近场角度维和距离维波束图。可以看到, 小的 PE 下, 波束角度维旁瓣波动较主瓣严重, 当 PE 增大, 波束主瓣也开始畸变; 在距离维, 波束的波动基本与距离无关, 与分析一致。综上分析表明: 高斯相位误差对波束的影响比较大, 在信号处理过程中, 应该加以严格控制。

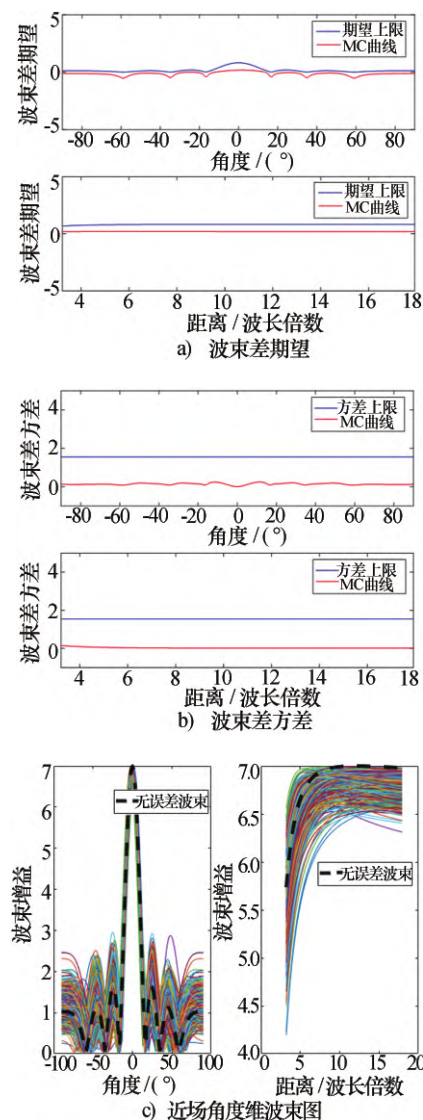
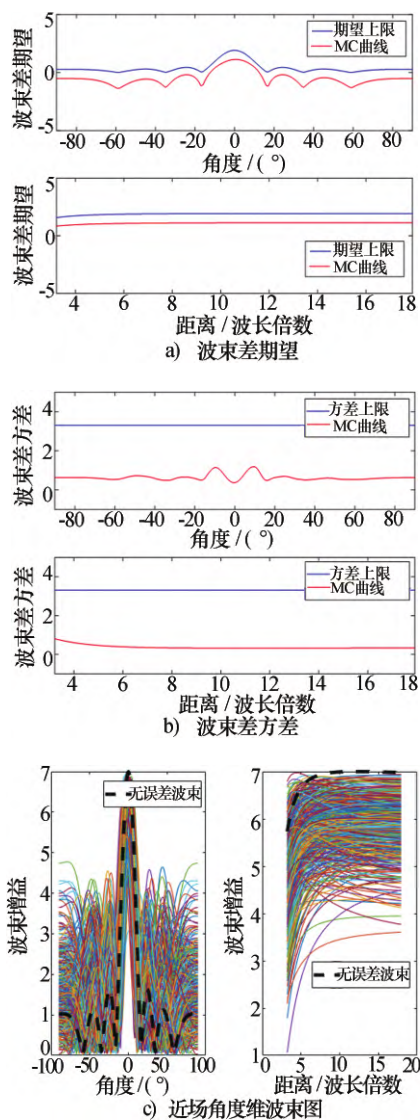


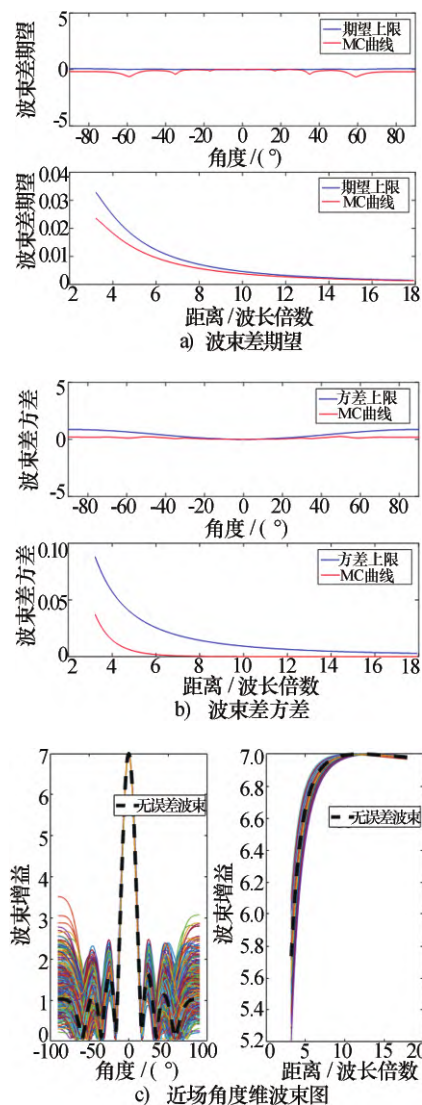
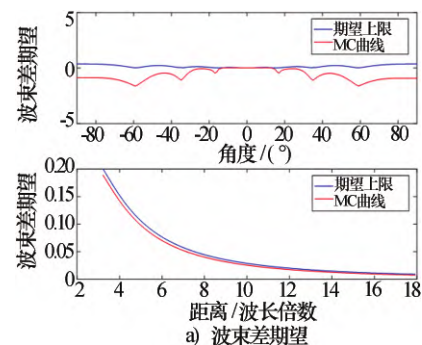
图 1 相位误差分布  $N(0, 0.25)$

图2 相位误差分布  $N(0, 0.64)$ 

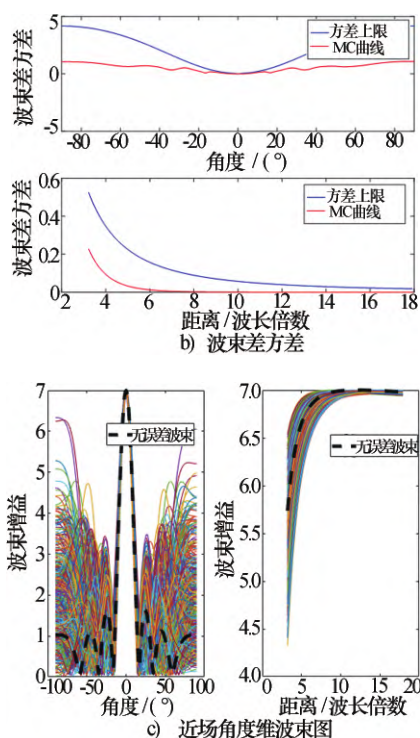
## 2) 仿真2

设定 SPE 分布服从  $U(-u/2, u/2)$  的均匀分布, 此时的 CE 设为零, 下面给出 SPE 引起的波束畸变和波束差统计量曲线。通过图 3a) 和图 4a) 中的曲线可以看出, 在角度维和距离维 MC 曲线都近似为零, 且随角度和距离有波动。较图 3, 图 4 中施加的 SPE 更大, 在角度维旁瓣域上的期望上限与 MC 曲线距离增大, 呈现的逼近效果稍微减弱, 但在主瓣区域的逼近仍然保持良好; 而距离维上的期望上限在整个距离维对 MC 曲线逼近的效果仍然保持良好, 这表明了位置误差对波束的影响较弱, 此时期望上限对 MC 的估计性能较好。图 3b) 和图 4b) 表明了不同程度 SPE 下的波束差方差的 MC 曲线及其理论上限。可以看出, 波束差方差也不是一条直线, 随着角度和距离都有不同程度的变化。与波束差期望曲线特性相似: 在角度维, 主瓣区间上方差上限逼近 MC 曲线的效果好于旁瓣域; 在距离维上, 随着距离增大呈现的逼近效果逐渐变得更好。

结合图 3a) 和图 4a) 的分析可以得出, 在本仿真的 SPE 下, 其对角度维旁瓣的影响程度甚于对角度维主瓣的影响。图 3c) 和图 4c) 展示了 SPE 下 500 次 MC 的近场角度维和距离维波束图和相应的无误差波束图。在角度维, 可以看出旁瓣域的波束恶化比主瓣域严重一些, 与波束差统计特性分析一致; 在距离维上, 波束图能量的损失较弱, 且随着距离增大, 波束误差波动更弱, 与统计误差分析一致。

图3 阵元位置误差分布  $U(-0.1\lambda, 0.1\lambda)$ 

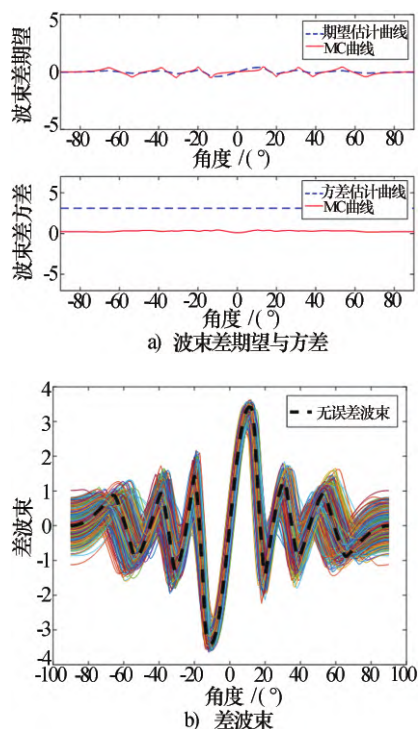
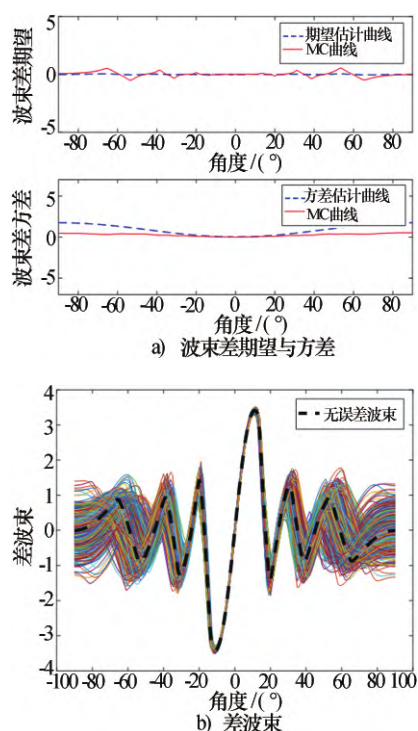


图4 阵元位置误差分布  $U(-0.25\lambda, 0, 0.25\lambda)$ 

### 3) 仿真 3

由于差波束在雷达目标的波达方向估计中有重要作用,本仿真就振幅差波束对误差理论进行验证。为了简化问题,假设构成差波束的两个子波束中引入的误差是独立不相关的。

图5和图6分别基于相位误差和阵元位置误差给出两个实例。两个实例中的“估计曲线”都是基于前面分析的理论统计量直接计算得到。

图5 相位误差分布  $N(0, 0.25)$ 图6 阵元位置误差分布  $U(-0.1\lambda, 0, 0.1\lambda)$ 

在图5a)相位误差中,由期望MC曲线可以看出,误差使得波束差偏离零均值,且随角度有一定波动;结合方差MC曲线可以得到,差波束的抖动较为稳定。期望估计曲线基本呈现了良好的估计性能,而方差估计曲线的估计效果稍差一些。

在阵元位置误差中,期望估计曲线和方差估计曲线都呈现了良好的估计性能,如图6a)所示。由期望MC曲线和方差MC曲线可以看出,阵元位置误差带给差波束在角度维主瓣域的抖动偏弱。图5b)和图6b)给出了500次MC下的差波束曲线图和相应的无误差的差波束图,与统计特性曲线分析一致。

### 3 结束语

文中基于近场阵列模型从统计学角度对PE和SPE提出了一阶和二阶理论上限。针对具体的输入误差,可以通过误差理论上限对当前输入误差进行评估。仿真展示给出的波束差一阶统计量和二阶统计量上界都能够在一定程度上与MC曲线贴合,二者的结合可以大致估计当前输入误差造成的输出波束差的分布特性。此外,由分析得到PE误差致使的主瓣指向偏移较SPE误差的影响更明显。在实际应用中,要尽量消除PE误差,避免给系统工作带来严重的影响。

### 参考文献

- [1] HANS S. Digital beamforming antennas: an introduction [J]. Microwave Journal, 1987, 30(1): 107-116.
- [2] 伍光新,陈希信,周瑞岩. 步进频信号波束形成指向偏

- 差与通道误差影响分析[J]. 现代雷达, 2019, 41( 12): 27-29.
- WU Guangxin, CHEN Xixin, ZHOU Ruiyan. Analysis of pointing bias and channel error in digital beamforming of stepped frequency signal [J]. Modern Radar, 2019, 41( 12): 27-29.
- [3] 韩小娟, 何兵哲, 楼大年, 等. 相控阵天线的通道误差对数字波束形成的影响[J]. 现代电子技术, 2014, 37( 1): 5-7.
- HAN Xiaojuan, HE Bingzhe, LOU Danian, et al. The influence of channel uncertainty of phased array antenna in digital beam forming [J]. Modern Electronics Technique, 2014, 37( 1): 5-7.
- [4] 熊 哲. 幅相误差对相控阵天线的性能影响研究[D]. 北京: 中国舰船研究院, 2012.
- XIONG Zhe. Study on the effects of signal amplitude and phase errors on the performance of phased array antennas [D]. Beijing: China Ship Research and Development Academy, 2012.
- [5] 王 鼎, 张 莉, 吴 瑛. 改进的阵列幅相差和阵元位置误差自校正算法[J]. 数据采集与处理, 2008, 23( 2): 176-178.
- WANG Ding, ZHANG Li, WU Ying. Calibration algorithm for DOA estimation presence of sensor amplitude, phase uncertainties and sensor position errors [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2008, 23( 2): 176-178.
- [6] 于 斌, 尹成友, 沈 辉. 阵列误差对测向性能的影响及校正方法[J]. 现代雷达, 2007, 29( 4): 34-38.
- YU Bin, YIN Chengyou, SHEN Hui. Effect and calibration of array error among sensor in direction-finding [J]. Modern Radar, 2007, 29( 4): 34-38.
- [7] 杨 冬. 近场波束形成算法及其应用研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2012.
- YANG Dong. Research on near-field beam forming algorithm and its application [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2012.
- [8] AKBAR E A, REZA A H, MAHMOOD K. Localization of mixed near-field and far-field sources using the largest aperture sparse linear array [J]. IET Signal Processing, 2018( 12): 155-162.
- [9] 徐沥泉, 徐利治. 多元 Jensen 不等式及其应用[J]. 江南大学学报( 自然科学版), 2010, 9( 6): 741-745.
- XU Liquan, HSU L C. On multivariate Jensen's inequalities and its application [J]. Journal of Jiangnan University ( Natural Science Edition), 2010, 9( 6): 741-745.

#### 作者简介:

何 勤 女, 1994 年生, 博士研究生, 研究方向为 MIMO 雷达波形设计、阵列雷达信号处理等;

程子扬 男, 1990 年生, 博士, 副研究员, 研究方向为 MIMO 雷达通信一体化、阵列信号处理等;

王志航 男, 1993 年生, 博士研究生, 研究方向为雷达自适应检测算法与信号处理;

何子述 男, 1962 年生, 博士, 教授, 研究方向为 MIMO 雷达、相控阵雷达信号处理等。