Linear Control Systems

NEGAR NEDA – 9331050

HOMEWORK 4

Dr. Rasti

AMIRKABIR UNIVERSITY OF TECHNOLOGY | JUNE 12 , 2018

سوال 1

$$\Delta(s) = 1 + kG(s)H(s) = 1 + \frac{k(s+3)}{\big(s(s+1)(s+2)(s+4)\big)}$$
$$= s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+k)s + 3$$

قاعده 1: تعداد شاخه ها = تعداد قطب های حلقه بسته = 4 تا

قاعده 2: نقاط شروع = قطب های حلقه باز : s = 0, -1, -2, -4

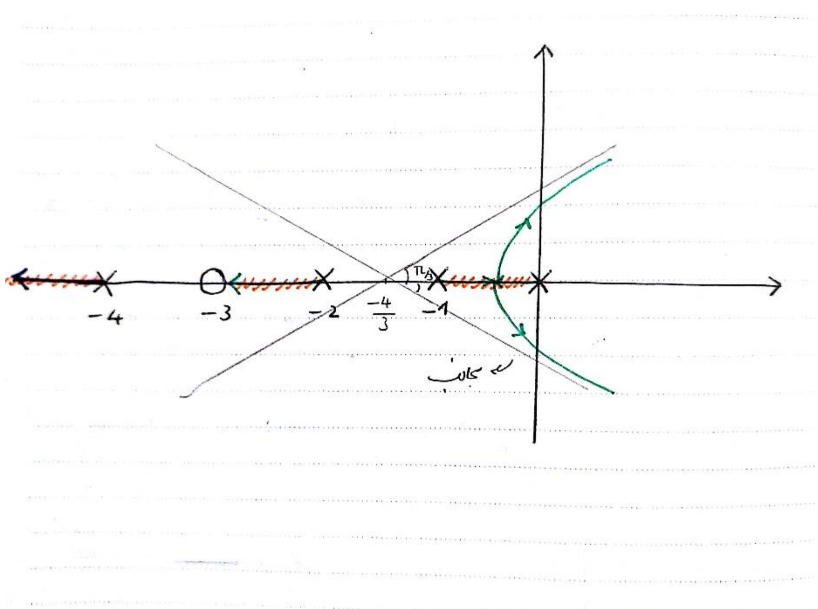
نقاط پایان = صفر های حلقه باز: s= -3

قاعده 3: نقاط بین قطب 0 و -1، نقاط بین قطب -2 و صفر -3، از قطب -4 تا بی نهایت (در شکل نشان داده شده)

قاعده 4: تعداد مجانب ها = 3= 4-1 تا

زاویه مجانب ها نسبت به محور حقیقی: $\frac{(2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}$

نقاط تلاقی مجانب ها با محور حقیقی: $\frac{(-4-2-1+0)-(-3)}{3} - \frac{4}{3}$



سوال 2

با توجه به شکل تابع تبدیل حلقه باز دو قطب در 1- و 2- و دو صفر در 3 و 5 دارد. در نتیجه اگر سیستم را داری فیدبک واحد در نظر بگیریم، تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$

با استفاده از روابط زیر نقاط شکست را به دست می‌آوریم:

$$G(s)H(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}=>A(s)=(s-3)(s-5),B(s)=(s+1)(s+2)$$

باید ریشه‌های عبارت زیر را به دست آوریم:

$$A'(s)B(s)-A(s)B'(s)=0$$

$$=>(2s-8)(s^2+3s+2)-(s^2-8s+15)(2s+3)=0$$

$$=>11s-26s-61=0$$

$$s*_{1,2}=\frac{\left(26\pm\sqrt{(26^2}+44*61\right)}{22}=>\begin{cases}3.81\\-1.45\end{cases}$$

منحنی مکان هندسی ریشه ها در دو نقطه 3.81 و 1.45- به هم برخورد می‌کنند.

سوال 3

A)

چند جمله‌ای مشخصه:

$$\Delta(s) = s^2 + s(k-4) + 13 + 2k$$

قاعده 1: تعداد شاخه ها = تعداد قطب های چند جمله‌ای مشخصه = 2 تا

قاعده 2: شروع شاخه = از قطب های حلقه باز:

$$s^2 - 4s + 13 = 0 => \ \Delta(s) = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \begin{cases} 2+3j \\ 2-3j \end{cases}$$

پایان شاخه = صفر های حلقه باز = 2-

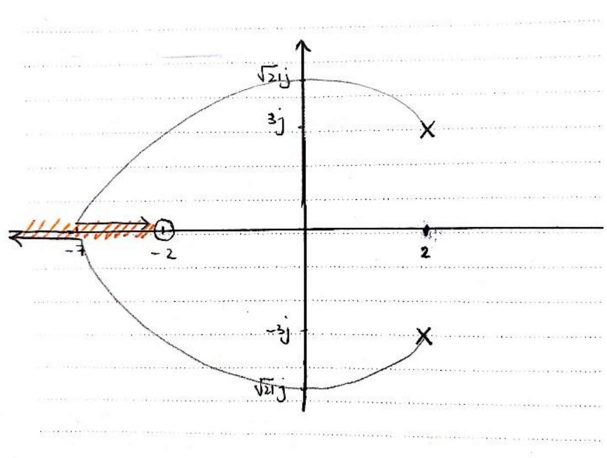
قاعده 3: مکان-ریشه روی محور حقیقی از سمت چپ صفر (2-) تا منفی بی‌نهایت است.

قاعده 4:

تعداد مجانب ها: 1 = 2-1

زاویه مجانب با محور حقیقی : $(2k+1)\pi = \ \pi$

نقطه تلاقی مجانب با محور حقیقی : $\frac{4-(-2)}{1} = 6$



B)

محاسبه نقطه تقاطع مکان هندسی ریشه ها با محور موهومی:

محور موهومی مرز ناپایداری است در نتیجه باید ببینیم سیستم حلقه بسته به ازای چه مقادیری از k در نقطه ناپایداری قرار می‌گیرد.

جدول روث-هرویتس را رسم می‌کنیم:

S^2	**1**	**13+2K**
S	k-4	0
1	13+2k	0

به ازای k بزرگتر از 4 هیچ تغییر علامتی در ستون اول نداریم و سیستم حلقه بسته پایدار است.و به ازای k=4 سیستم در مرز ناپایداری قرار دارد. برای به دست آوردن محل تقاطع با محور موهومی ریشه های چند جمله‌ای کمکی را به دست می‌آوریم:

$$s^2 + 13 + 2k = 0 \xrightarrow{k=4} s = \pm j\sqrt{21}$$

C)

بهره در نقطه تقاطع با محور موهومی در قسمت قبل به دست آمده. K=4 است.

D)

تابع تبدیل حلقه باز : $\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s+2}{s^2-4s+13}$

$$A'(s)B(s) - A(s)B'(s) = (s^2 - 4s + 13) - (s + 2)(2s - 4) = 0$$

$$=> \ s^2 + 4s - 21 = 0 => s = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

نقطه 3 غیر قابل قبول است زیرا روی مکان-ریشه قرار ندارد. در نتیجه مکان هندسی ریشه ها در نقطه 7- به هم برخورد می‌کنند.

---

۵)

زاویه خروج از قطب های مختلط:

π = مجموع زوایا از قطب های حلقه باز تا نقطه فرضی — مجموع زوایا از صفر های حلقه باز تا نقطه فرضی = شرط زاویه

$$\tan^{-1}\frac{3}{4}-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\pi \rightarrow x=-233.14rad=126.86\,rad=2.21°$$

سوال 4

$$G(s)=\frac{4(s^2+1)}{s(s+a)} => \Delta(s)=5s^2+4+sa=1+\frac{as}{5s^2+4}$$

سیستم جدیدی که مکان هندسی ریشه ها را برای آن رسم می‌کنیم دارای تابع تبدیل حلقه باز $\frac{s}{5s^2+4}$ است.

چند جمله‌ای مشخصه سیستم جدید به صورت زیر است:

تعداد شاخه ها = تعداد قطب ها = 2

شروع شاخه ها = قطب های حلقه باز : $5s^2+4=0 \rightarrow s=\begin{cases} j\sqrt{\frac{4}{5}} \\ -j\sqrt{\frac{4}{5}} \end{cases}$

پایان شاخه ها= صفر های حلقه باز: s=0

تعداد مجانب ها: 1 = 2-1

زاویه مجانب با محور حقیقی: $(2k+1)\pi=\pi$

نقطه تقاطع مجانب با محور حقیقی = 0

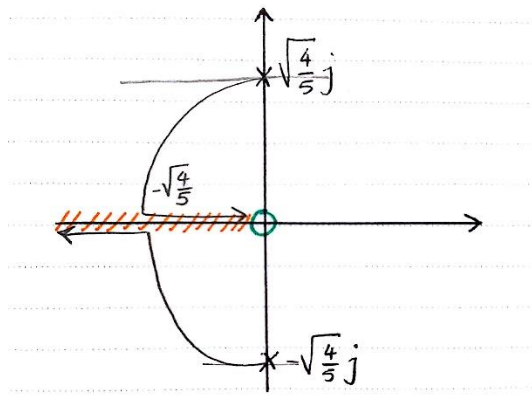
زاویه خروج از قطب مختلط:

$$\pi-(x+\pi)=\pi => x=-\pi$$

نقطه برخورد دو شاخه نیز برابر است جواب معادله زیر:

$$5s^2 + 4 - 10s^2 = 0 \rightarrow s = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

نقطه $-\sqrt{\frac{4}{5}}$ فقط در مکان ریشه قرار دارد پس دو شاخه در این نقطه به هم برخورد می‌کنند.



سوال 5

الف)

$$\Delta(s) = s^2(s+2) + k = s^3 + 2s^2 + k$$

تعداد شاخه ها = 3 تا

شروع شاخه: قطب های حلقه باز: s= 0مضاعف ، s= -2

پایان شاخه ها: صفر های حلقه باز : --

تعداد مجانب ها = 3 تا

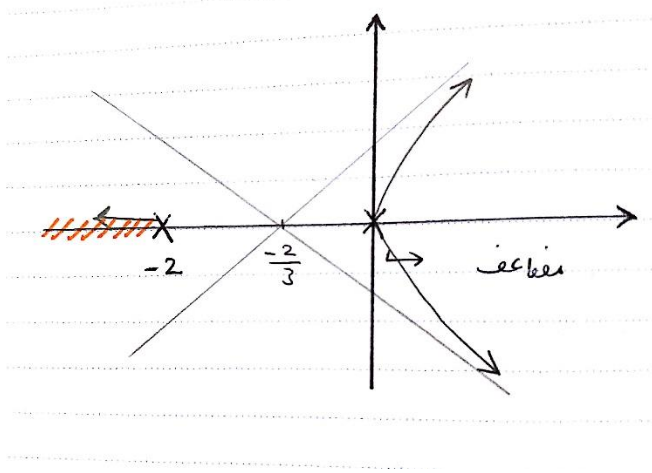
زاویه مجانب ها با محور حقیقی : $\frac{(2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

محل تقاطع مجانب ها با محور حقیقی: -2/3

رسم جدول روث-هرویتس:

S^3	1	0
S^2	2	k
S	--k/2	0
1	k	

فقط به ازای k=0 سیستم پایدار است. نمودار مکان هندسی آن به صورت زیر است:



ب)

تبدیل می کنیم به مسیر حلقه بسته با فیدبک واحد. تابع تبدیل می شود:

$$\frac{1}{s^2(s+2)+k_t s}$$

$$\Delta(s)=s^2(s+2)+k_t s+1=1+\frac{k_t s}{s^3+2s^2+1}$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز می‌شود :

$$\frac{k_t s}{s^3 + 2s^2 + 1}$$

قاعده1: تعدادشاخه ها = 3

قاعده 2: شروع شاخه = قطب های حلقه باز: 0.1 + 0.6j، 0.1-0.6j و 2.2-

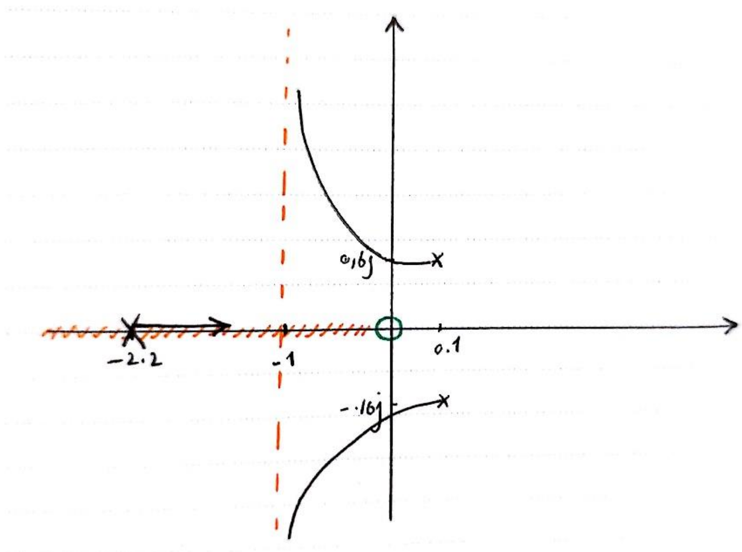
پایان شاخه ها = صفر های حلقه باز: 0

تعداد مجانب ها : 2 تا

زاویه مجانب ها با محور حقیقی: $\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

نقطه تلاقی مجانب ها با محور حقیقی: 1-

شکل:



$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + k_t s + 1$$

S^3	1	K_T
S^2	2	1
S	(2k_t − 1)/2	0
1	1	

$$\frac{2k_t - 1}{2} > 0 => k_t > \frac{1}{2}$$

به ازای k_t بزرگتر از ½ سیستم پایدار است.