Linear Control Systems

NEGAR NEDA - 9331050

Dr. Rasti

AMIRKABIR UNIVERSITY OF TECHNOLOGY | MARCH 7 , 2018

سوال 1

a) در تمام سوال ها تبدیل لاپلاس یک طرفه محاسبه شده یعنی در بازه 0 تا بی نهایت. در نتیجه:

$$f_1(t) = u(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

(b

$$f_2(t) = tu(t) = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

(c

$$f_3(t) = \sin \omega t \, u(t) => L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

(d

$$f_4(t) = \cos \omega t \, u(t) => L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(e

$$e^{at} f(t) \to F[s-a]$$

با توجه به این قانون تبدیل لاپلاس $e^{-at} \sin \omega t$ را محاسبه می کنیم:

$$f_5(t) = e^{-at} \sin \omega t \, u(t) \to L[f_5(t)] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

f) مشابه سوال بالا

$$f_6(t) = e^{-at} cos \, \omega t \, u(t) \to L[f_6(t)] = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

(g

$$f_7(t) = 3t^2 e^{-t} u(t) \to L[t^2] = \frac{2!}{s^3} \to L[3t^2] = \frac{6}{s^3} \to L[f_7(t)] = \frac{6}{(s+1)^3}$$

(h

$$f_8(t) = \sin t \cos t\, u(t) = \frac{1}{2}\sin 2t\, u(t) \to L[\frac{1}{2}\sin 2t] = \frac{1}{2} * \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{1}{s^2+4}$$

(i

$$f(t) = (\mathrm{t}-3)e^{t-3}u(t-3) \to t-3 = x \to f(x) = \; xe^x u(x) \to L[x] = \frac{1}{S^2}$$

$$\to L[xe^x] = \frac{1}{(S-1)^2} \to L[f(t)] = L[f(x+3)] = \frac{1}{(s-1)^2} * e^{-3s}$$

(j

$$f_{10}(t) = (2t^2e^{-at}\cos t)u(t)$$

$$\to L[\cos t] = \frac{s}{s^2+1^2}$$

$$\to L[e^{-at}\cos t] = \frac{s+a}{(s+a)^2+1} \to L[f_{10}]$$

$$= 2 * \frac{d^2}{ds^2}\,\frac{s+a}{(s+a)^2+1} \;=\; \frac{4\big((a+s)(s^2+2sa+a^2-3)\big)}{\big((a^2+2sa+s^2+1)\big)^3}$$

سوال 2

(a

$$F_1{}^\circ(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} + \frac{a_3}{s+3}$$

$$a_1 = \lim_{s\to-1}\frac{s^2+s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \lim_{s\to-2}\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+3)} = -3$$

$$a_3 = \lim_{s\to-3}\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{7}{2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{2} * \frac{1}{s+1}\;e^{-s}\right] = \frac{1}{2} * e^{1-t}u(t)$$

$$L^{-1}\left[-3*\frac{1}{s+2}\ e^{-s}\right]=-3*e^{2(1-t)}u(t)$$
$$L^{-1}\left[\frac{7}{2}*\frac{1}{s+3}\ e^{-s}\right]=\frac{7}{2}*e^{3(1-t)}u(t)$$

(b

$$F_2(s)=\frac{1}{s(s+2)^2}=\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s+2}+\frac{a_3}{(s+2)^2}$$

$$a_1=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(s+2)^2}=\frac{1}{4}$$
$$a_2=\lim_{s\to -2}1*\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)=-\frac{1}{s^2}=-\frac{1}{4}$$
$$a_3=\lim_{s\to -2}\frac{1}{s}=-\frac{1}{2}$$
$$F_2(s)=\frac{1}{4s}-\frac{1}{4}*\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}*\frac{1}{(s+2)^2}$$

$$L^{-1}[F_2(s)]=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]u(t)$$

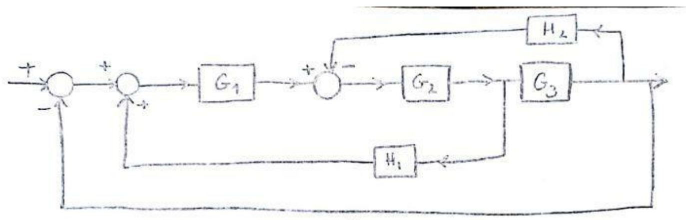
(c

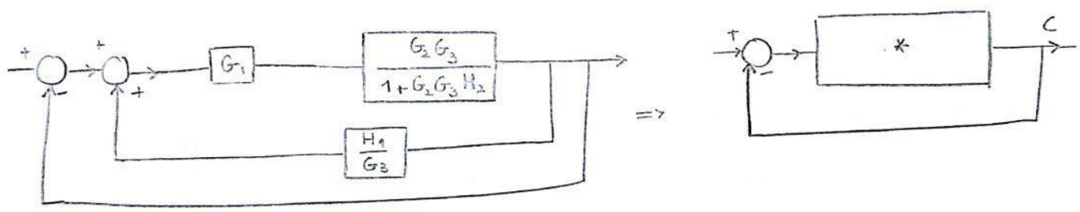
$$x_3[s]=\frac{s^3-3s^2+s+2}{s}H(s)=s^2H(s)-3sH(s)+1H(s)+\frac{2}{s}H(s)$$
$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}-\frac{3dh(t)}{dt}+h(t)+2u(t)*h(t)$$

سوال 3

الف)

3- الف)

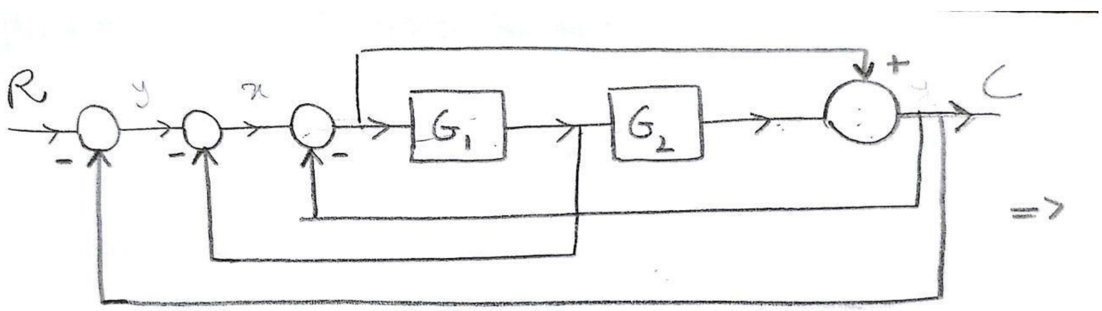




$$\text{* تابع تبدیل} \quad \frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2}}{1-\dfrac{G_1G_2\cancel{G_3}H_1}{(1+G_2G_3H_2)\cancel{G_3}}} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1}$$

$$\Longrightarrow R \longrightarrow \boxed{**} \longrightarrow C \qquad ** = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1}}{1+\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1}} = \boxed{\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1+G_1G_2G_3} = \frac{C}{R}}$$

ب)



$$c = (x-c)G_1G_2 + x - c$$

$$x = y - (x - c)G_1 \; => x = \frac{r - c + cG_1}{1 + G_1}$$

$$y = r - c$$

$$c = \left(\frac{r + cG_1 - c}{1 + G_1} - c\right) * G_1G_2 + \frac{r - c + cG_1}{1 + G_1} - c = \frac{rG_1G_2 - 2cG_1G_2}{1 + G_1} + \frac{r - 2c}{1 + G_1}$$
$$\rightarrow (1 + G_1 + 2G_1G_2 + 2)c = r(G_1G_2 + 1) \rightarrow \frac{c}{r}$$
$$= \frac{G_1G_2 + 1}{1 + G_1 + 2G_1G_2 + 2}$$

سوال 4

$$1)\; V_i(t) = Ri(t)$$
$$+ \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt \rightarrow \frac{dV_i(t)}{dt} = \frac{Rdi(t)}{dt} + \frac{1}{c}i(t) \rightarrow SV_i(S)$$
$$= RSI(S) + \frac{1}{c}I(s) \rightarrow V_i(S) = I(S)\left[\frac{1}{cS} + R\right]$$

2) $V_o(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt \rightarrow \frac{dV_o(t)}{dt} = \frac{1}{c}i(t) \rightarrow SV_o(S) = \frac{1}{c}I(s) \rightarrow I(s) = cSV_o(S)$

$$1\,,2)\; V_i(S) = cSV_o(S)\left[\frac{1}{cS} + R\right] \rightarrow \frac{V_o(S)}{V_i(S)} = \frac{1}{1 + RcS}$$

سوال 5

با انتقال K_2 به بعد از 1/S، تابع تبدیل مسیر فیدبک می شود: K_1 + SK_2

در نتیجه تابه تبدیل این سیستم می شود:

$$\frac{K}{(s+1)s + k(k_1 + k_2s)} = \frac{6}{(s+2)(s+3)} \rightarrow k = 6 \rightarrow s^2 + s + 6k_1 + 6k_2s$$
$$= s^2 + 5s + 6 \rightarrow k_1 = 1\,, k_2 = \frac{2}{3}$$

سوال 6

الف) ریشه های مخرج را به دست می آوریم:

$$-1 \ \pm 2i$$

یکی از ریشه ها در سمت راست محور j قرار داد در نتیجه پایدار است

ب) ریشه های مخرج را محاسبه می کنیم:

$$s^2 - 2s - 3 => \text{ریشه ها} = 3\ , -1$$

ریشه ها روی محور j قرار دارد در نتیجه این تابع پایدار نیست