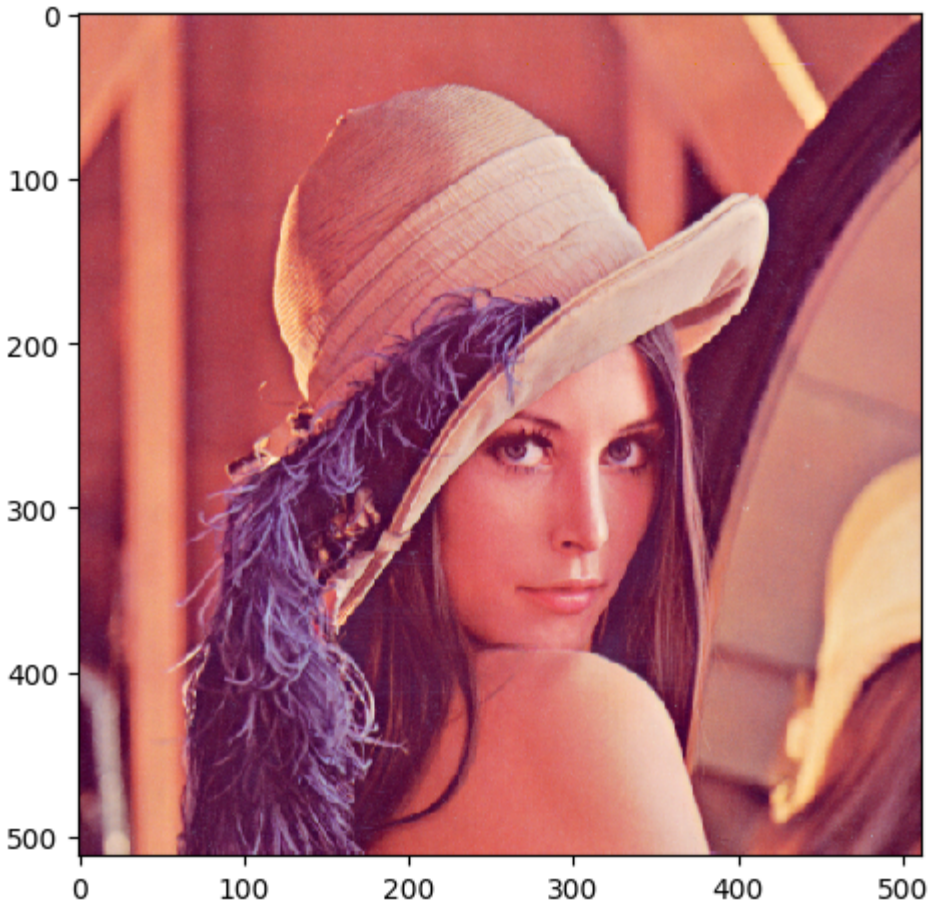
Parte 1: Compresión de imágenes con Kmeans

Leer la imagen

In [1]:
```
from skimage import io
from sklearn.cluster import KMeans
import numpy as np

#Lee la imagen
image = io.imread('lena.png') #recuerda cargar la imagen a su notebook en google co
print('Imagen Original')
io.imshow(image)
io.show()

#Dimensiones de la imagen original
rows = image.shape[0]
cols = image.shape[1]

#Transforma en matriz de Nx3 (N pixeles, 3 características R, G, B)
image = image.reshape(rows*cols, 3)

#Matriz Nx3
#pixel 1: R, G, B
#pixel 2: R, G, B
#...
#pixen N: R, G, B
```

```
Imagen Original
```



Implementar k-means

In [2]:
```
#Implementa k-means clustering para k clusters
print('Calculando k-means')
k = 2 # número de colores
kmeans = KMeans(n_clusters=k) #con n_clusters = 128 puede demorar unos 5 minutos en
kmeans.fit(image)
```

```
Calculando k-means
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
```

Out[2]:
```
KMeans(n_clusters=2)
```

Comprimir imagen

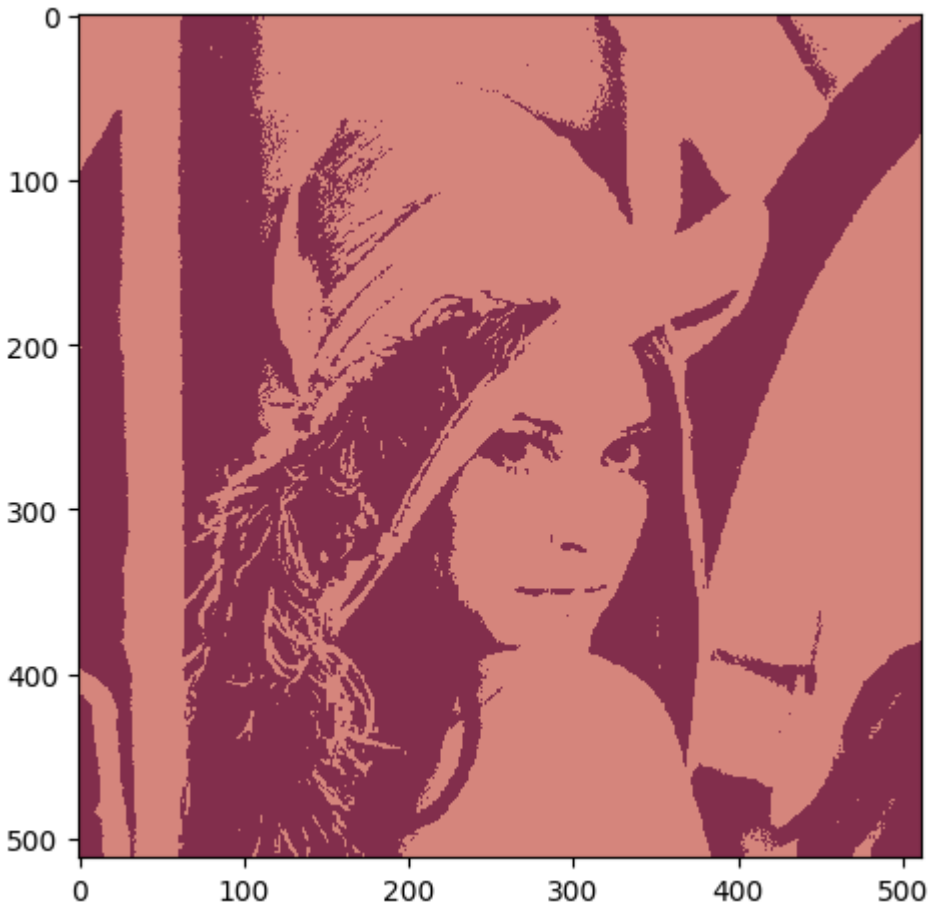
In [3]:
```
#Compresión: Reemplaza cada pixel  con su centroide más cercano
print('Comprimiendo la imagen')
compressed_image = kmeans.cluster_centers_[kmeans.labels_] #cluster_centers_ son la
compressed_image = np.clip(compressed_image.astype('uint8'), 0, 255)

#Regresamos a la dimensión original filasxcolumnas*3
compressed_image = compressed_image.reshape(rows, cols, 3)
```

```
Comprimiendo la imagen
```

Mostrar Imagen comprimida

In [4]:
```
#Guardamos y mostramos la imagen comprimida
print('Imagen comprimida')
io.imsave('compressed_image_8.png', compressed_image)
io.imshow(compressed_image)
io.show()
```

```
Imagen comprimida
```



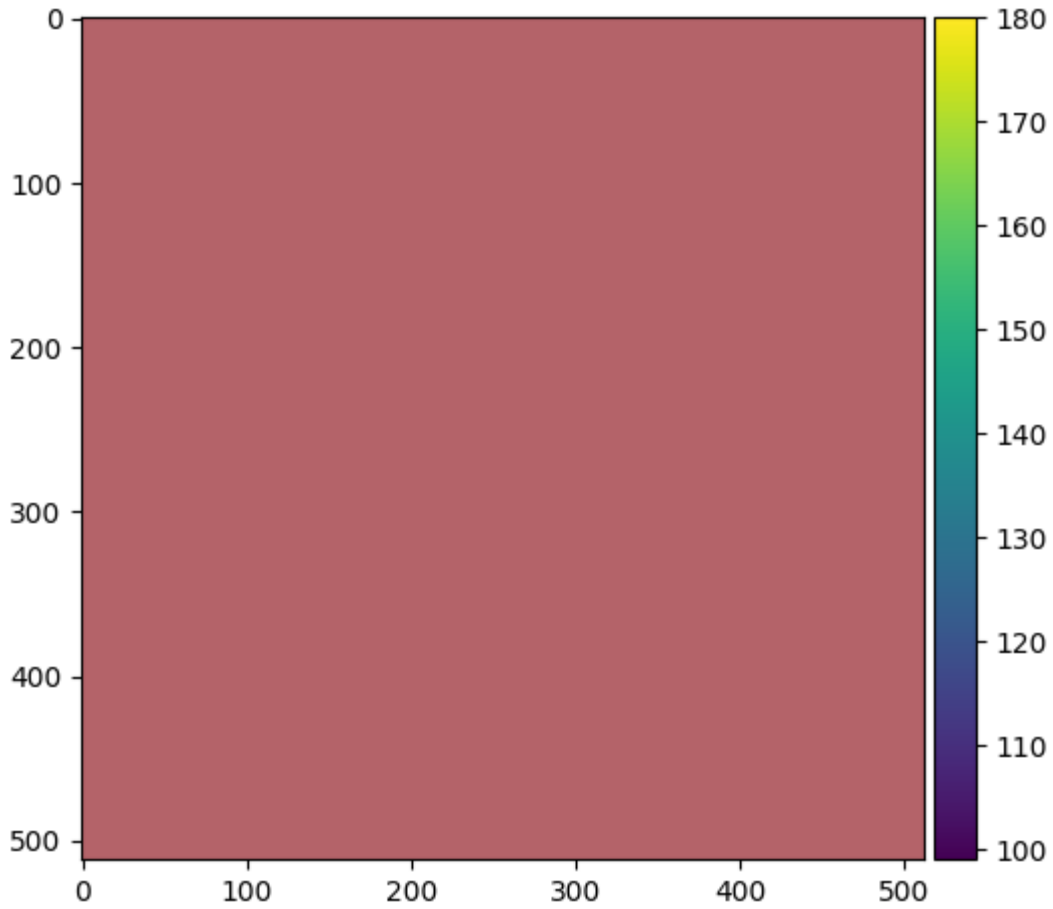
Actividad

Grafique la distorsión (heterogeneidad) en función del número de clusters k. Utilice los siguientes valores para k: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Comente sus resultados. A partir de qué valor de k para usted es imperceptible la diferencia entre la imagen original y la comprimida?

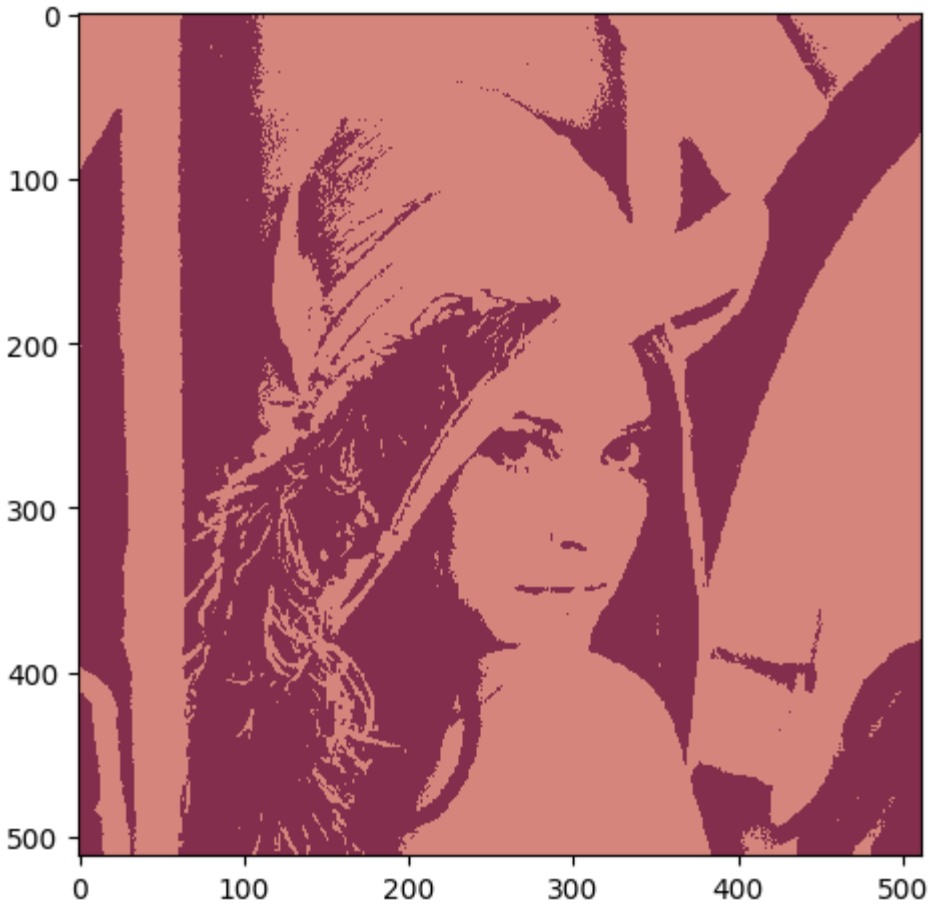
Tip: Consulte la ayuda de kmeans para entender donde almacena la distorsión el objeto kmeans https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html . Recuerde que la distorsión no es nada más que la suma de las distancias al cuadrado entre las muestras y su cluster más cercano.

In [12]:
```
#Implementa k-means clustering para k clusters
k = [1,2,4,8,16,32,64,128] # número de colores
distorsion = []
for i in k:
  print('Calculando k-means para k =  ', i)
  kmeans = KMeans(n_clusters=i) #con n_clusters = 128 puede demorar unos 5 minutos
  kmeans.fit(image)
  distorsion.append(kmeans.inertia_) #cluster_centers_ son las coord. de los centro

  #Compresión: Reemplaza cada pixel  con su centroide más cercano
  print('Comprimiendo la imagen para k = ', i)
  compressed_image = kmeans.cluster_centers_[kmeans.labels_] #cluster_centers_ son
  compressed_image = np.clip(compressed_image.astype('uint8'), 0, 255)

  #Regresamos a la dimensión original filasxcolumnas*3
  compressed_image = compressed_image.reshape(rows, cols, 3)

  #Guardamos y mostramos la imagen comprimida
  print('Imagen comprimida para k = ', i)
  io.imsave('compressed_image_8.png', compressed_image)
  io.imshow(compressed_image)
  io.show()
```

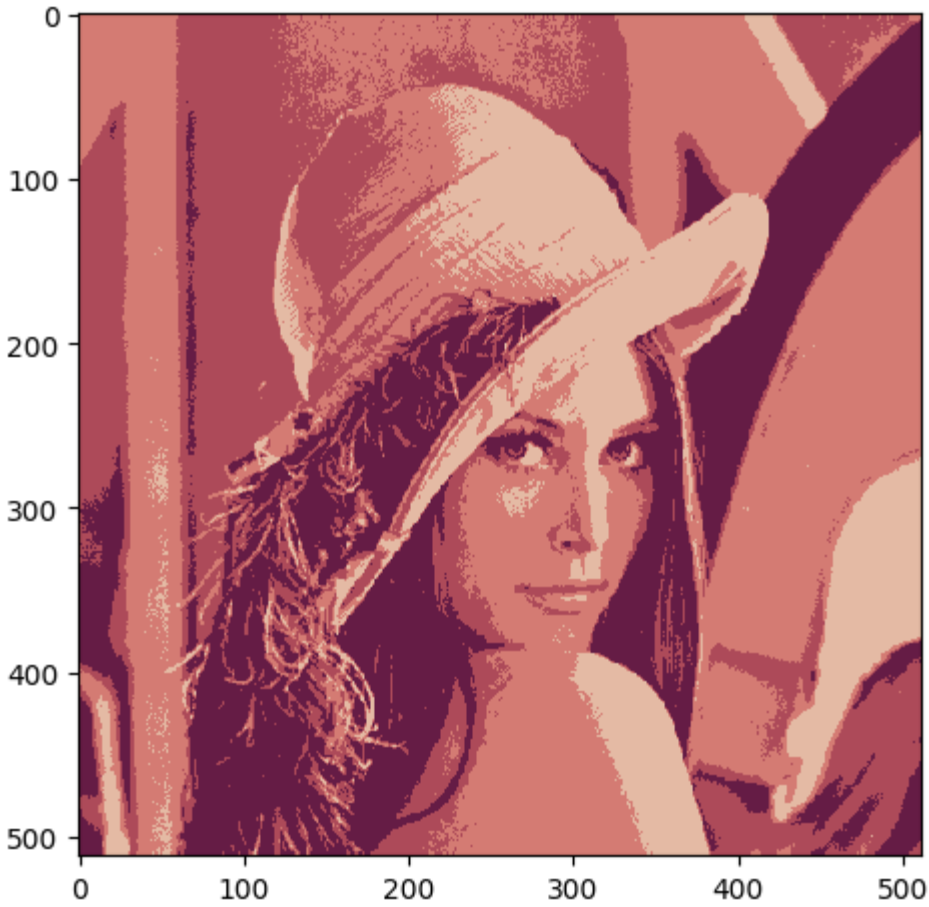
```
Calculando k-means para k =   1
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  1
Imagen comprimida para k =  1
<ipython-input-12-dd361d070ce0>:20: UserWarning: compressed_image_8.png is a low co
ntrast image
  io.imsave('compressed_image_8.png', compressed_image)
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/skimage/io/_plugins/matplotlib_plugin.py:15
0: UserWarning: Low image data range; displaying image with stretched contrast.
  lo, hi, cmap = _get_display_range(image)
```



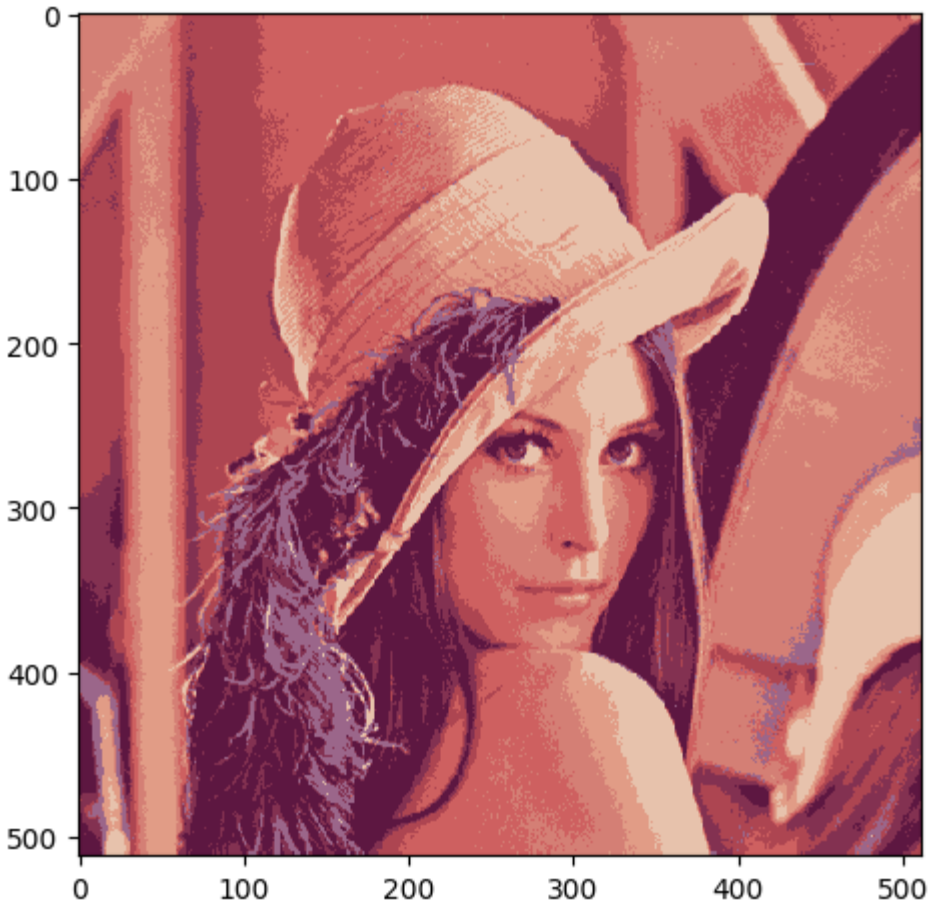

```
Calculando k-means para k =   2
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  2
Imagen comprimida para k =  2
```



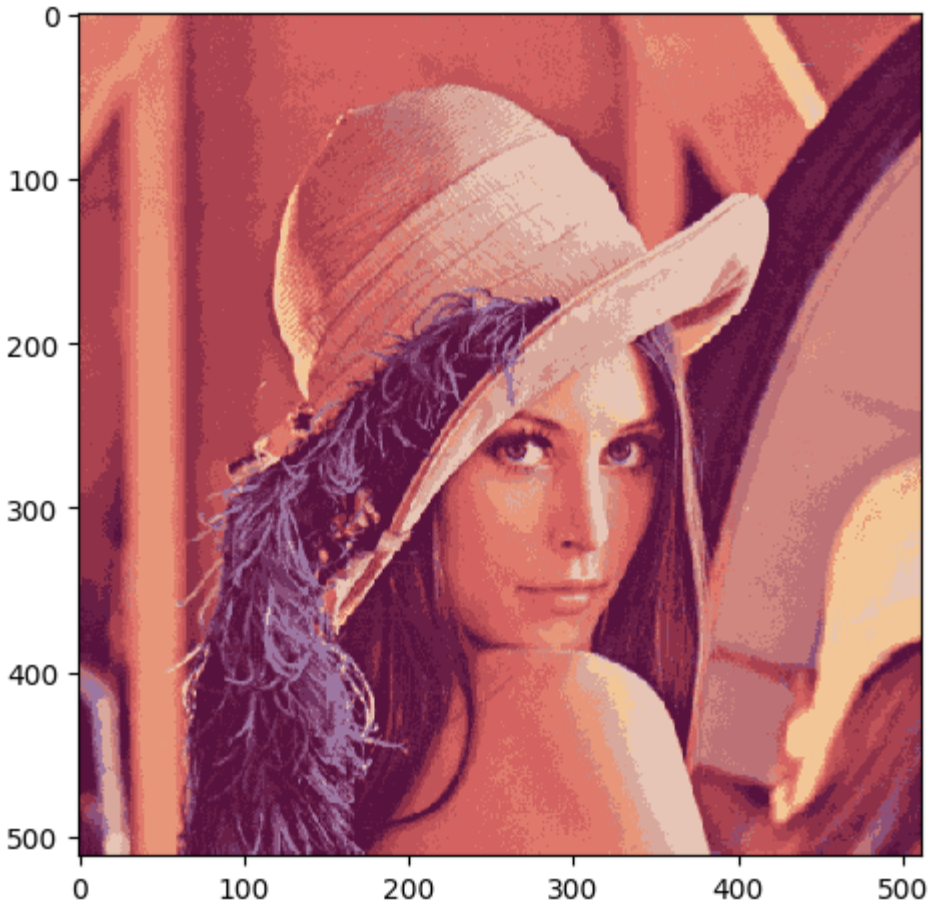

```
Calculando k-means para k =   4
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  4
Imagen comprimida para k =  4
```



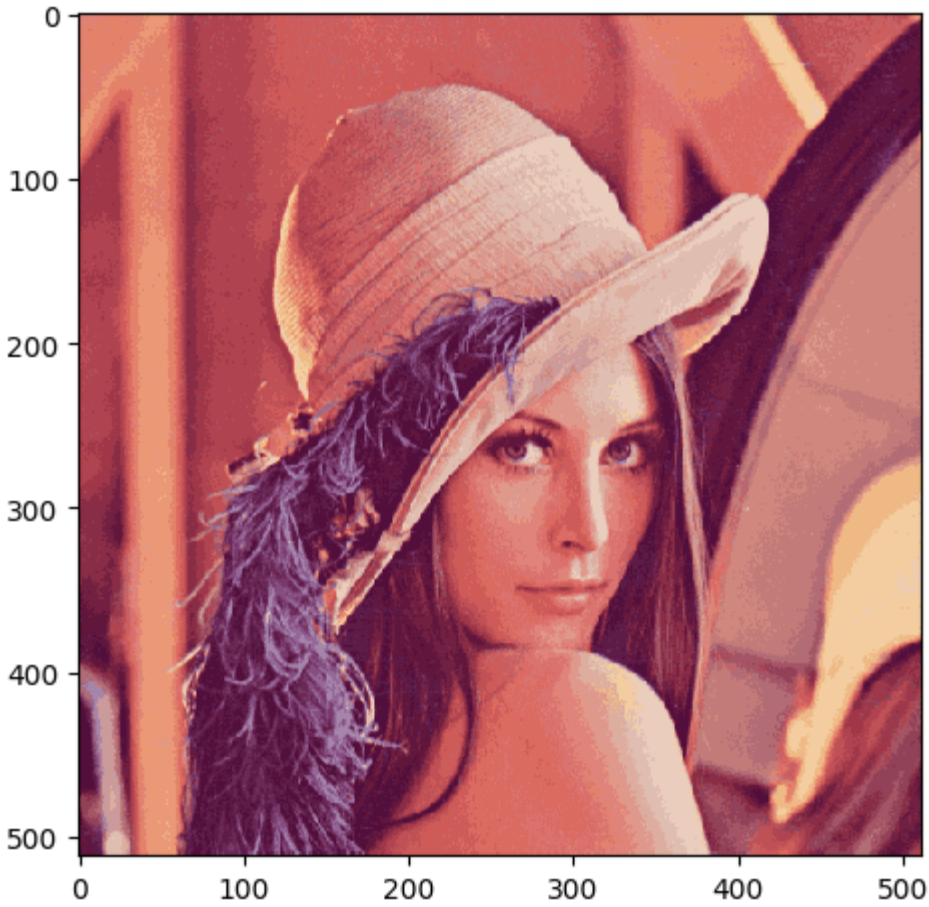

```
Calculando k-means para k =   8
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  8
Imagen comprimida para k =  8
```



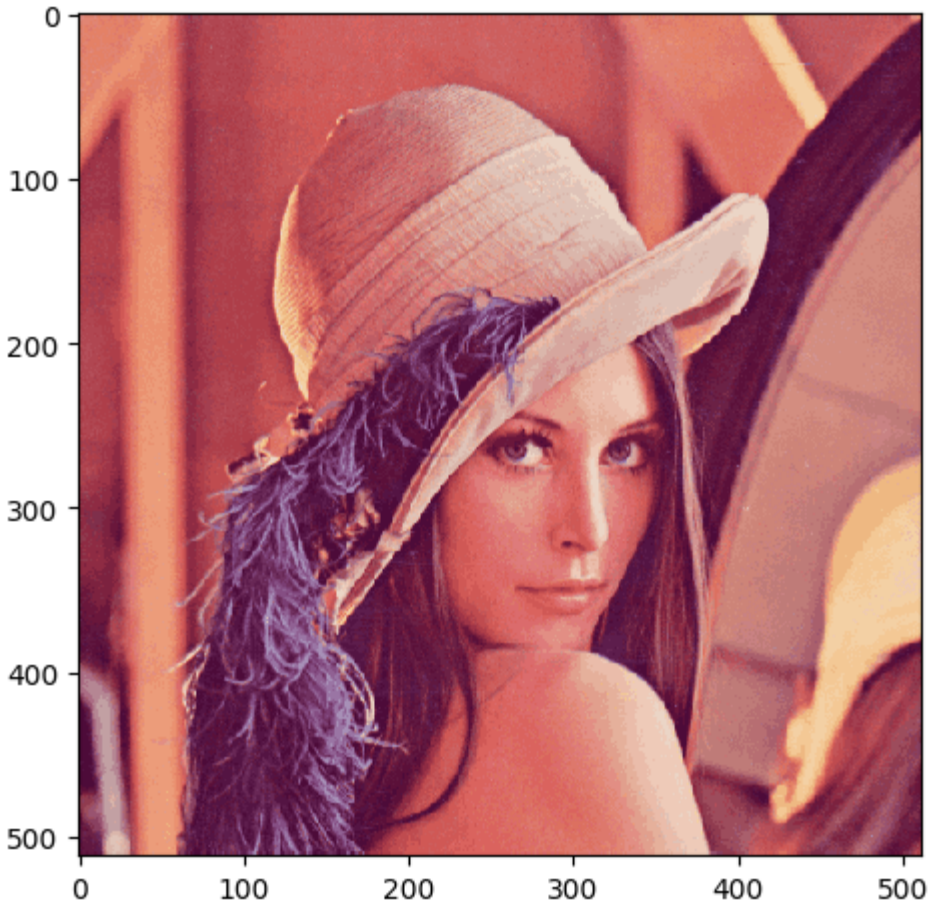

```
Calculando k-means para k =   16
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  16
Imagen comprimida para k =  16
```



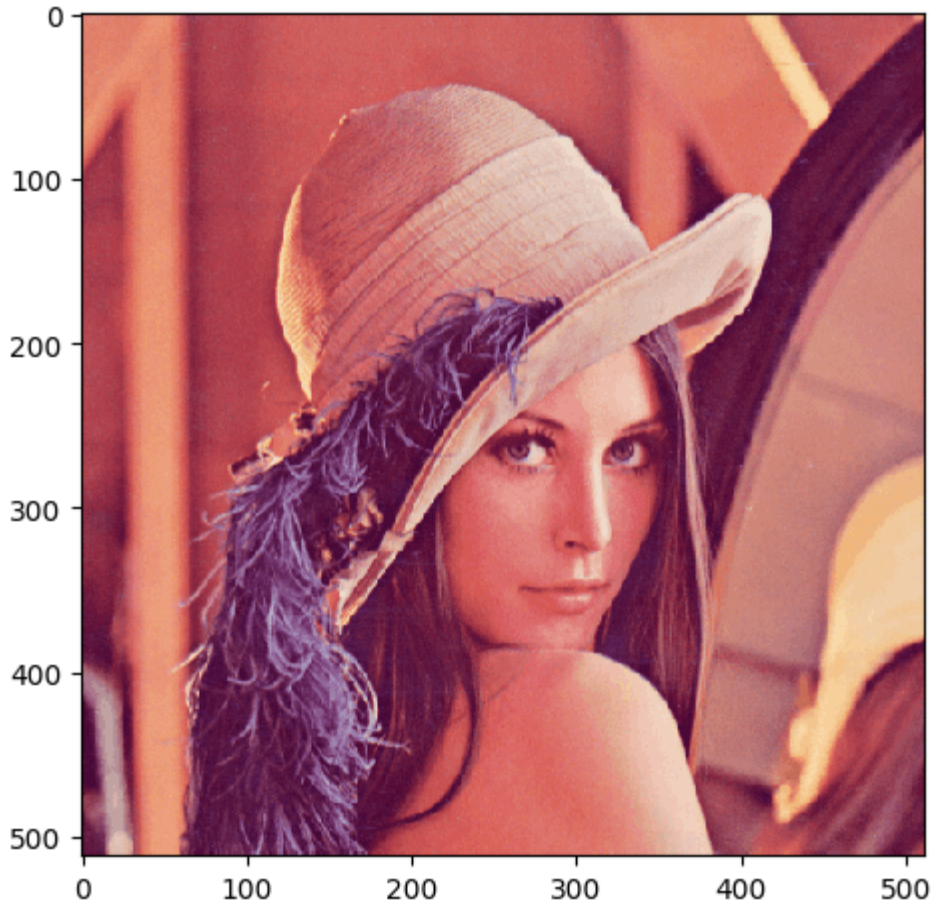

```
Calculando k-means para k =   32
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  32
Imagen comprimida para k =  32
```



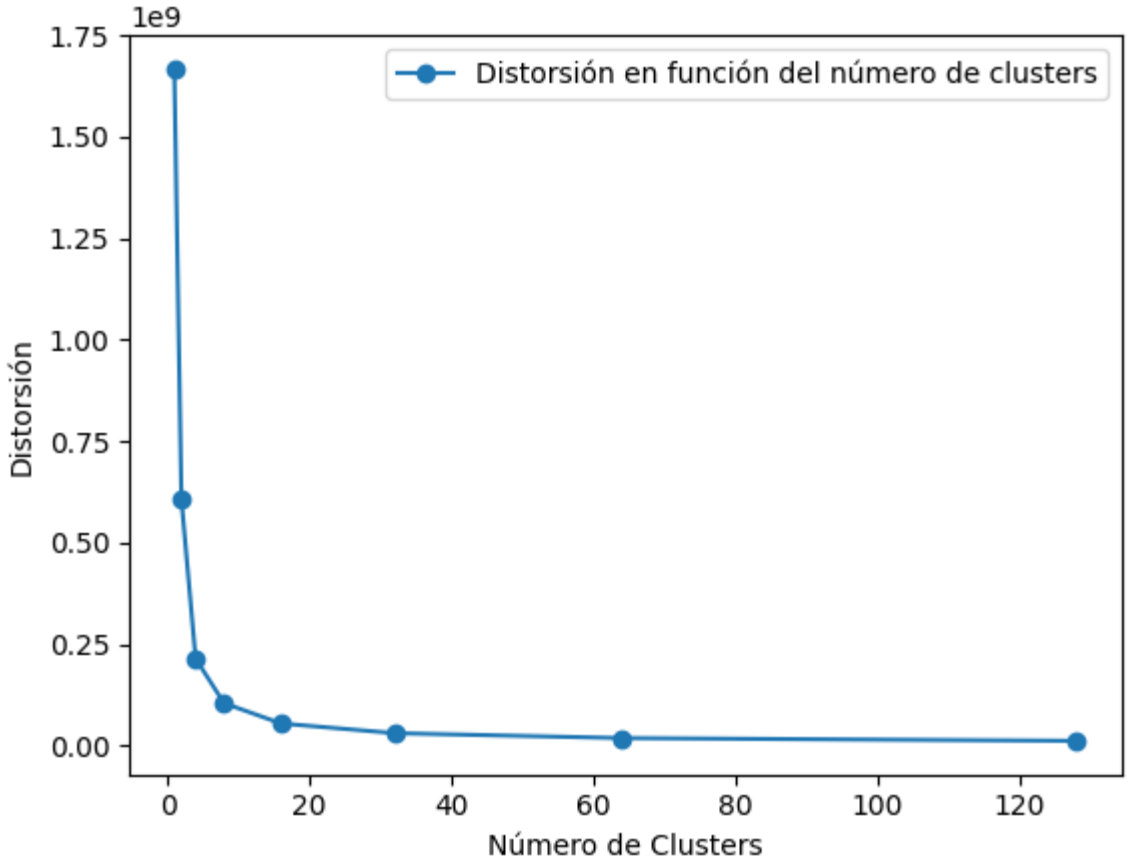

```
Calculando k-means para k =   64
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  64
Imagen comprimida para k =  64
```




```
Calculando k-means para k =   128
/usr/local/lib/python3.9/dist-packages/sklearn/cluster/_kmeans.py:870: FutureWarnin
g: The default value of `n_init` will change from 10 to 'auto' in 1.4. Set the valu
e of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Comprimiendo la imagen para k =  128
Imagen comprimida para k =  128
```



In [16]:
```
import matplotlib.pyplot as plt

# Plot the two arrays
plt.plot(k, distorsion, '-o',label='Distorsión en función del número de clusters')

# Add a legend and axis labels
plt.legend()
plt.xlabel('Número de Clusters')
plt.ylabel('Distorsión')

# Show the plot
plt.show()
distorsion
```



Out[16]:
```
[1667696252.483666,
 607088451.4581901,
 214402412.80558157,
 104698631.19235456,
 54736935.31049685,
 30775993.912985384,
 18667160.414809674,
 11884878.942435645]
```

A partir de $k = 32$, a mi parecer, es imperceptible la diferencia entre la imagen original y la comprimida.

Parte 2: Clustering de vinos

En la siguiente actividad se implementará un ejemplo de aprendizaje no supervisado utilizando k-means (Clustering).

Se tiene que agrupar vinos con caracteristicas similares para esto se debe cargar el archivo caractersiticas de vinos. La base de datos tiene 178 vinos y sus características como alcohol, alcalinidad, entre otras.

In [13]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.cluster import KMeans
vinos=pd.read_csv('caracteristicas_de_vinos.csv',engine='python') #cargue el archiv
vinos.head()
```

Out[13]:

	Vino	Alcohol	Malic	Ash	Alcalinity	Magnesium	Phenols	Flavanoids	Nonflavanoids	Proantl
0	1	14.23	1.71	2.43	15.6	127	2.80	3.06	0.28	
1	2	13.20	1.78	2.14	11.2	100	2.65	2.76	0.26	
2	3	13.16	2.36	2.67	18.6	101	2.80	3.24	0.30	
3	4	14.37	1.95	2.50	16.8	113	3.85	3.49	0.24	
4	5	13.24	2.59	2.87	21.0	118	2.80	2.69	0.39	

Se elimina la primera columna pues esta es solo un índice

In [14]:
```
vinos_variables=vinos.drop(['Vino'],axis=1)
# se describe su media, desviación estandar minimo máximo de cada una de las caract
vinos_variables.describe()
```

Out[14]:

	Alcohol	Malic	Ash	Alcalinity	Magnesium	Phenols	Flavanoids	Nonfl
count	178.000000	178.000000	178.000000	178.000000	178.000000	178.000000	178.000000	17
mean	13.000618	2.336348	2.366517	19.494944	99.741573	2.295112	2.029270	
std	0.811827	1.117146	0.274344	3.339564	14.282484	0.625851	0.998859	
min	11.030000	0.740000	1.360000	10.600000	70.000000	0.980000	0.340000	
25%	12.362500	1.602500	2.210000	17.200000	88.000000	1.742500	1.205000	
50%	13.050000	1.865000	2.360000	19.500000	98.000000	2.355000	2.135000	
75%	13.677500	3.082500	2.557500	21.500000	107.000000	2.800000	2.875000	
max	14.830000	5.800000	3.230000	30.000000	162.000000	3.880000	5.080000	

A continuación, normalizamos los datos para que sus variables tengan media cero y varianza unitaria. La función `StandardScaler` es la que nos permite realizar esta normalización

In [15]:
```
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
scaler = StandardScaler() #normalizaciòn media cero, varianza 1.
scaler.fit(vinos_variables)
vinos_norm = scaler.transform(vinos_variables)
pd.DataFrame(vinos_norm).describe()
```

Out[15]:

	0	1	2	3	4	5	
count	1.780000e+02	1.780000e+02	1.780000e+02	1.780000e+02	1.780000e+02	178.000000	1.
mean	-8.382808e-16	-1.197544e-16	-8.370333e-16	-3.991813e-17	-3.991813e-17	0.000000	-3
std	1.002821e+00	1.002821e+00	1.002821e+00	1.002821e+00	1.002821e+00	1.002821	1.
min	-2.434235e+00	-1.432983e+00	-3.679162e+00	-2.671018e+00	-2.088255e+00	-2.107246	-1.
25%	-7.882448e-01	-6.587486e-01	-5.721225e-01	-6.891372e-01	-8.244151e-01	-0.885468	-8
50%	6.099988e-02	-4.231120e-01	-2.382132e-02	1.518295e-03	-1.222817e-01	0.095960	1
75%	8.361286e-01	6.697929e-01	6.981085e-01	6.020883e-01	5.096384e-01	0.808997	8
max	2.259772e+00	3.109192e+00	3.156325e+00	3.154511e+00	4.371372e+00	2.539515	3.

Actividad

Determine el número de clusters óptimo utilizando la técnica del codo (elbow´s method). Para esto, ejecute k-means para valores de k=1, 2, ... 11 y guarde la distorsión de cada clusterización. Grafique la distorsión en función de K y aplica el método del codo para determinar el valor óptimo de k (número de clusters).

Tip: Consulte la ayuda de kmeans para entender donde almacena la distorsión el objeto kmeans https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html . Recuerde que la distorsión no es nada más que la suma de las distancias al cuadrado entre las muestras y su cluster más cercano.

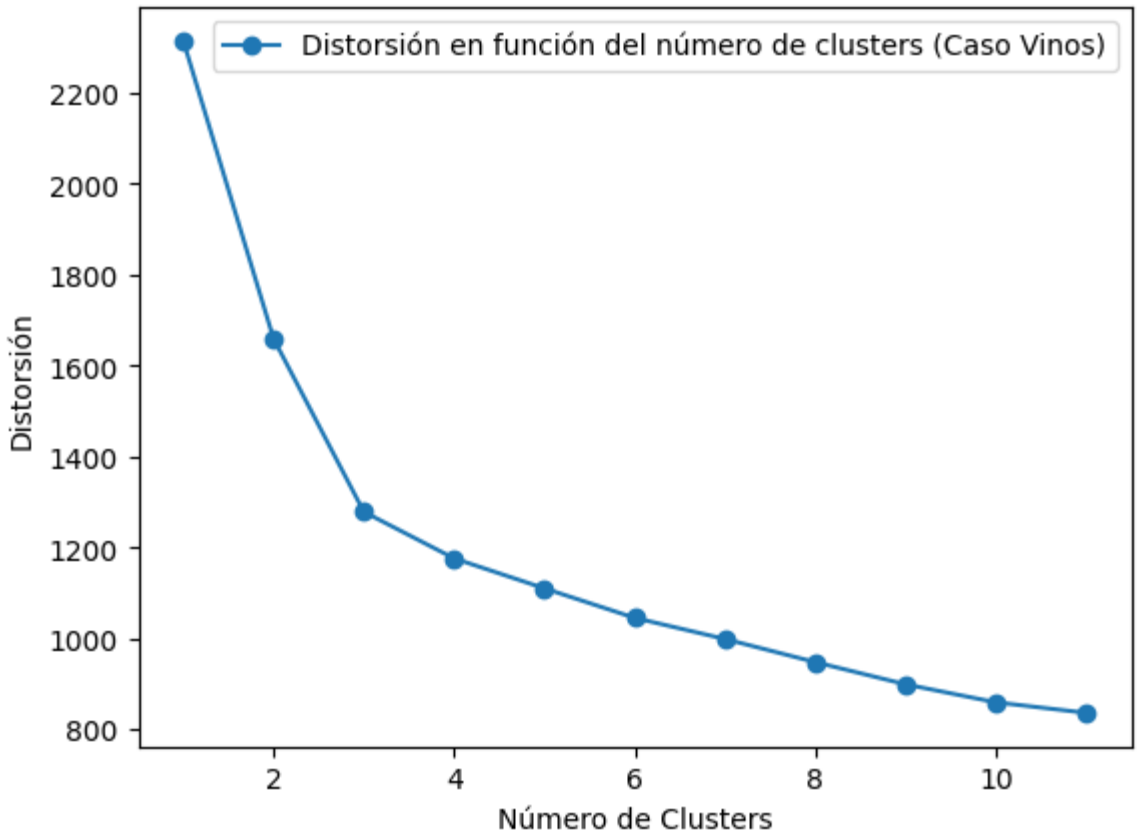
In [16]:
```
# INICIO CÓDIGO]
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
scaler = StandardScaler() #normalizaciòn media cero, varianza 1.
scaler.fit(vinos_variables)
vinos_norm = scaler.transform(vinos_variables)
pd.DataFrame(vinos_norm).describe()

#Implementa k-means clustering para k clusters
k_vinos = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11] # número de colores
distorsion_vinos = []
for i in k_vinos:
  print('Calculando k-means para k =  ', i)
  kmeans = KMeans(n_clusters=i) #con n_clusters = 128 puede demorar unos 5 minutos
  kmeans.fit(vinos_norm)
  distorsion_vinos.append(kmeans.inertia_) #cluster_centers_ son las coord. de los

#INSERTE AQUÍ EL CÓDIGO SOLICITADO
import matplotlib.pyplot as plt

# Plot the two arrays
plt.plot(k_vinos, distorsion_vinos, '-o', label='Distorsión en función del número d

# Add a legend and axis labels
plt.legend()
plt.xlabel('Número de Clusters')
plt.ylabel('Distorsión')

# Show the plot
plt.show()
distorsion_vinos
#FIN CÓDIGO
```

```
Calculando k-means para k =   1
Calculando k-means para k =   2
Calculando k-means para k =   3
Calculando k-means para k =   4
Calculando k-means para k =   5
```

```
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Calculando k-means para k =   6
Calculando k-means para k =   7
Calculando k-means para k =   8
Calculando k-means para k =   9
```

```
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
Calculando k-means para k =   10
Calculando k-means para k =   11
```

```
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
```



Out[16]:
```
[2314.0000000000005,
 1658.7588524290954,
 1277.928488844642,
 1175.501001765632,
 1109.6012330598774,
 1044.6650567512286,
 998.2141113244717,
 947.3250902204838,
 898.5181362452325,
 858.9480635833289,
 835.7357179582076]
```

Por la gráfica obtenida, haciendo uso del método del codo, se presume que el valor óptimo de k es 3.

Una vez determinado el número de clusters óptimo de acuerdo al método del codo, vamos a ejecutar de nuevo kmeans con dicho valor. En este apartado, usted solo tiene que asignar el valor de k obtenido del análisis anterior a la variable `nc` del siguiente bloque:

In [17]:
```
nc= 3 ##### Coloque aquí el valor de k obtenido con el método del codo del apartado
clustering = KMeans(n_clusters=nc, max_iter=300)
clustering.fit(vinos_norm)
vinos['KMeans_Clusters']=clustering.labels_ #creamos una columna con la etiqueta in
vinos
```

```
C:\Users\valex\AppData\Local\Programs\Python\Python311\Lib\site-packages\sklearn\cl
uster\_kmeans.py:870: FutureWarning: The default value of `n_init` will change from
10 to 'auto' in 1.4. Set the value of `n_init` explicitly to suppress the warning
  warnings.warn(
```

Out[17]:

	Vino	Alcohol	Malic	Ash	Alcalinity	Magnesium	Phenols	Flavanoids	Nonflavanoids	Proa
0	1	14.23	1.71	2.43	15.6	127	2.80	3.06	0.28	
1	2	13.20	1.78	2.14	11.2	100	2.65	2.76	0.26	
2	3	13.16	2.36	2.67	18.6	101	2.80	3.24	0.30	
3	4	14.37	1.95	2.50	16.8	113	3.85	3.49	0.24	
4	5	13.24	2.59	2.87	21.0	118	2.80	2.69	0.39	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
173	174	13.71	5.65	2.45	20.5	95	1.68	0.61	0.52	
174	175	13.40	3.91	2.48	23.0	102	1.80	0.75	0.43	
175	176	13.27	4.28	2.26	20.0	120	1.59	0.69	0.43	
176	177	13.17	2.59	2.37	20.0	120	1.65	0.68	0.53	
177	178	14.13	4.10	2.74	24.5	96	2.05	0.76	0.56	

178 rows × 15 columns

Con el fin de graficar los cluster se utilizará el algortimo PCA para visualizar los datos a graficar

In [18]:
```
from sklearn.decomposition import PCA

pca=PCA(n_components=2)
pca_vinos=pca.fit_transform(vinos_norm)
pca_vinos_df = pd.DataFrame(data=pca_vinos, columns =['Componente_1', 'Componente_2
pca_nombres_vinos= pd.concat([pca_vinos_df, vinos[['KMeans_Clusters']]], axis=1)
pca_nombres_vinos
```

Out[18]:

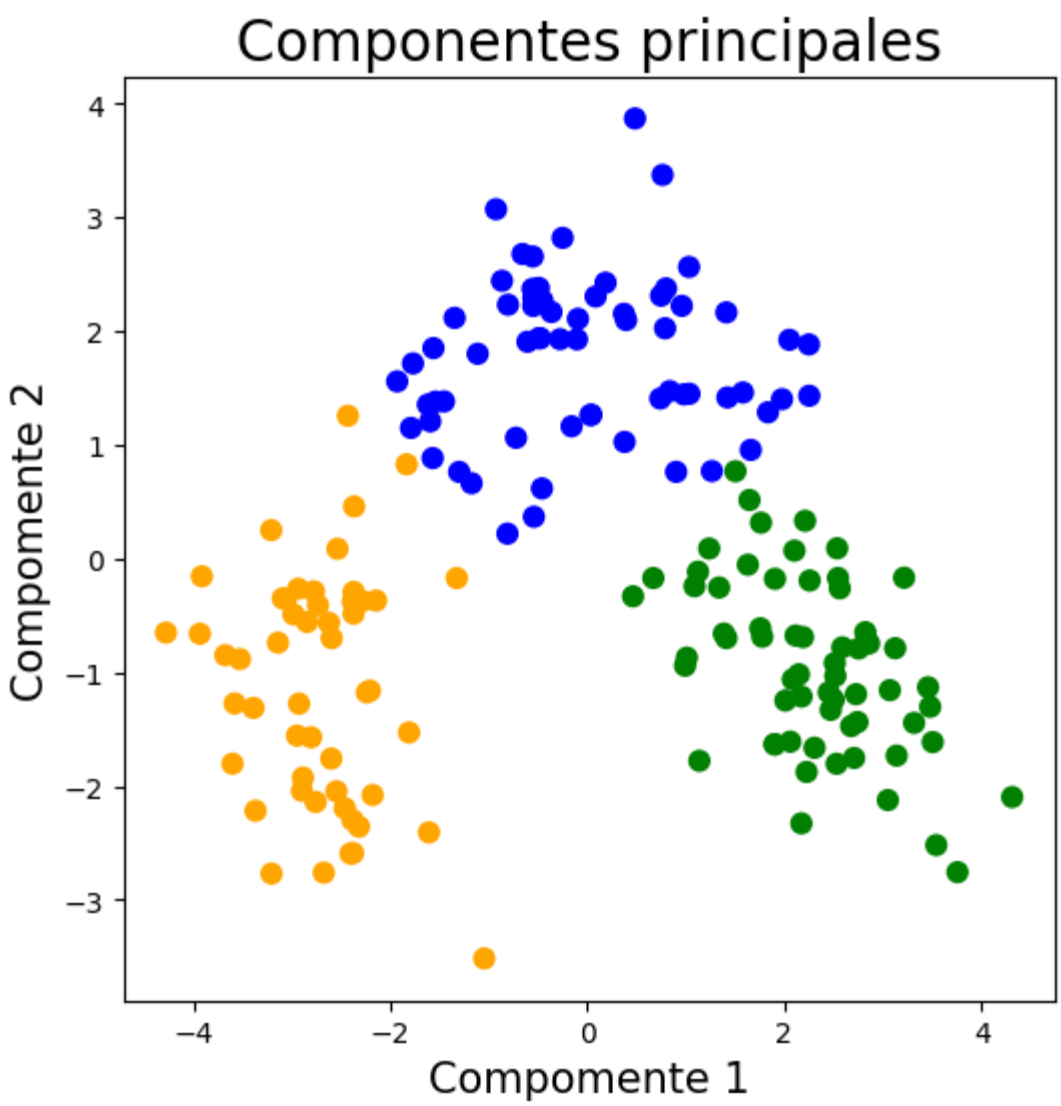
	Componente_1	Componente_2	KMeans_Clusters
0	3.316751	-1.443463	1
1	2.209465	0.333393	1
2	2.516740	-1.031151	1
3	3.757066	-2.756372	1
4	1.008908	-0.869831	1
...	...	...	...
173	-3.370524	-2.216289	2
174	-2.601956	-1.757229	2
175	-2.677839	-2.760899	2
176	-2.387017	-2.297347	2
177	-3.208758	-2.768920	2

178 rows × 3 columns

Una vez realizado PCA se realizará la gráfica de los cluster

In [19]:
```
fig = plt.figure(figsize=(6,6))

ax=fig.add_subplot(1,1,1)
ax.set_xlabel('Compomente 1', fontsize=15)
ax.set_ylabel('Compomente 2', fontsize=15)
ax.set_title('Componentes principales', fontsize=20)

color_theme = np.array(['blue', 'green', 'orange', 'black', 'yellow','cyan','magent
ax.scatter(x=pca_nombres_vinos.Componente_1, y = pca_nombres_vinos.Componente_2, c=
plt.show
```

Out[19]:
```
<function matplotlib.pyplot.show(close=None, block=None)>
```


Componentes principales
Compomente 2
Compomente 1
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
0
2
4

Parte 3: Kmeans++

Investigue qué es K-means++ y la diferencia con k-means

Kmeans++ es una modificación del algoritmo Kmeans para clustering. La principal diferencia entre Kmeans y Kmeans++ es la forma en que seleccionan los centroides de los clusters iniciales.

Cuando solamente se usa Kmeans, los centroides iniciales se seleccionan aleatoriamente, tomando como base la data. Por otra parte, Kmeans++ realiza un proceso un poco diferente:

- Primero coloca el primer centroide de los clusters aleatoriamente a partir de los puntos de datos.
- Luego (para cada punto de datos) calcula la distancia que existe entre este y el centroide más cercano.
- A continuación coloca el siguiente centroide aleatoriamente pero le agrega una probabilidad proporcional al cuadrado de la distancia al centroide más cercano que encontró anteriormente.

De esta manera, al utilizar Kmeans++, existe una mayor probabilidad de encontrar clusters y centroides óptimos que no sean tan afectados por la aleatoriedad como lo eran con Kmeans.

Rerefencias:

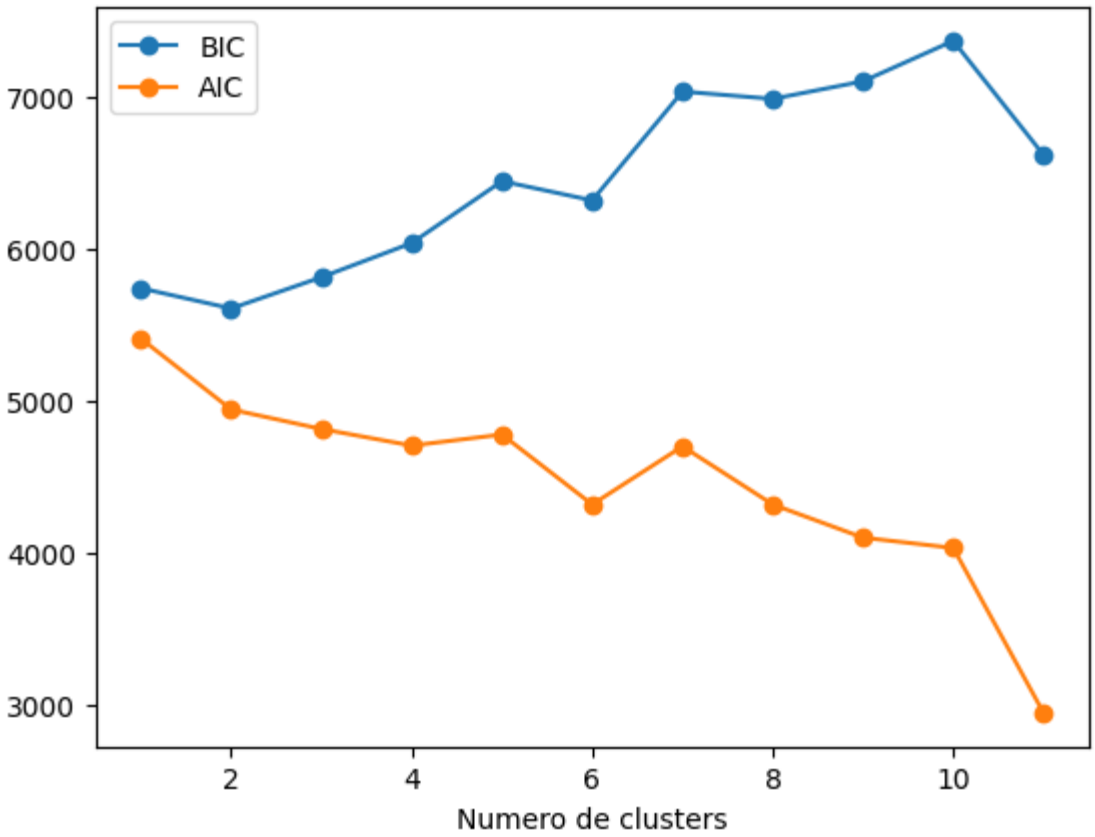
- Arthur, D., & Vassilvitskii, S. (2007). K-means++: The advantages of careful seeding. Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, 1027-1035.
- Scikit-learn documentation on Kmeans and Kmeans++: https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html#k-means

Parte 4: BIC AIC

Repetir la Parte 2 pero use las métricas BIC y AIC para determinar el número de clusters.

In [20]:
```
from sklearn.cluster import KMeans
import numpy as np
from sklearn import metrics
from sklearn.cluster import KMeans
from sklearn.mixture import GaussianMixture

#Implementa k-means clustering para k clusters
k_vinos_bic_aic = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11] # número de colores
distorsion_vinos_bic = []
distorsion_vinos_aic = []
for i in k_vinos:
    # Fit KMeans models for each k value and calculate BIC and AIC
    print('Calculando BIC y AIC para k =  ', i)
    #kmeans = KMeans(n_clusters=i) #con n_clusters = 128 puede demorar unos 5 minut
    #kmeans.fit(vinos_norm)
    #distorsion_vinos_bic.append(metrics.bic(vinos_norm, kmeans.labels_))
    #distorsion_vinos_aic.append(metrics.aic(vinos_norm, kmeans.labels_))
    gmm = GaussianMixture(n_components=i, init_params='kmeans')
    gmm.fit(vinos_norm)
    distorsion_vinos_bic.append(gmm.bic(vinos_norm))
    distorsion_vinos_aic.append(gmm.aic(vinos_norm))

# Plot the BIC and AIC scores as a function of cluster number
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(k_vinos, distorsion_vinos_bic, 'o-', label='BIC')
plt.plot(k_vinos, distorsion_vinos_aic, 'o-', label='AIC')
plt.xlabel('Numero de clusters')
plt.legend()
plt.show()
```

```
Calculando BIC y AIC para k =   1
Calculando BIC y AIC para k =   2
Calculando BIC y AIC para k =   3
Calculando BIC y AIC para k =   4
Calculando BIC y AIC para k =   5
Calculando BIC y AIC para k =   6
Calculando BIC y AIC para k =   7
Calculando BIC y AIC para k =   8
Calculando BIC y AIC para k =   9
Calculando BIC y AIC para k =   10
Calculando BIC y AIC para k =   11
```



Parte 5: Conclusiones

Concluya su trabajo de acuerdo a sus observaciones de los experimentos realizados.

Debido a que, utilizando el criterio de BIC y AIC, el valor menor es mejor, se puede concluir que:

- Según el criterio BIC, el valor óptimo de k sería 2.
- Según el criterio AIC, el valor óptimo de k sería 11.

Referencias para el código:

- https://datascience.oneoffcoder.com/kmc-bic-aic.html

In [ ]: