انتگرال

نگین رحیمی یزدی
نرم افزار ریاضی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
neginrahimiyazdi@gmail.com

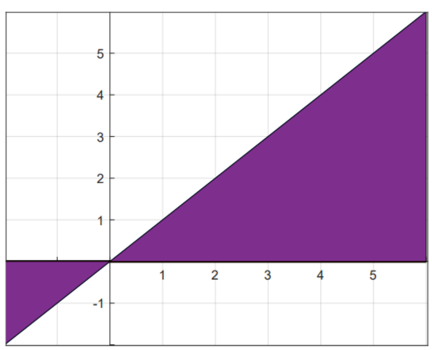
۱ مقدمه

در ریاضیات، انتگرال روشی برای اختصاص اعداد به توابع است، به‌گونه‌ای که جابجایی، مساحت، حجم و دیگر مفاهیم برآمده از ترکیب داده‌های بی‌نهایت کوچک را به وسیله آن بتوان توصیف کرد. انتگرال‌گیری یکی از دو عمل مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال است، که عمل دیگر آن (عمل معکوس) دیفرانسیل‌گیری یا همان مشتق‌گیری است. (۱؛ ۲؛ ۳)

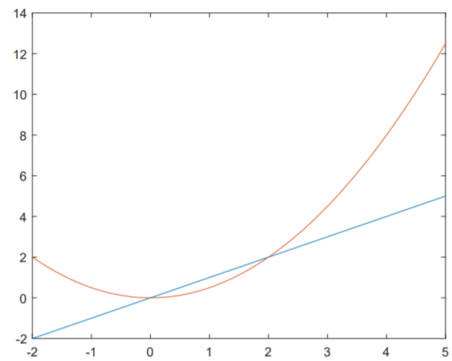
۲ انتگزال معین

انتگرال معین (۴؛ ۵)

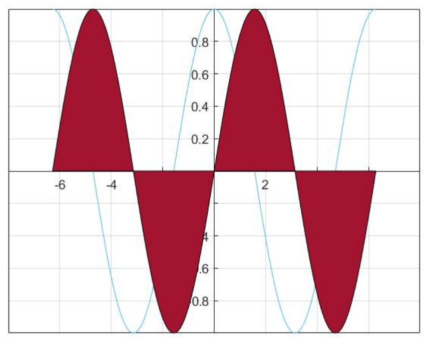
$$\int_a^b x dx$$



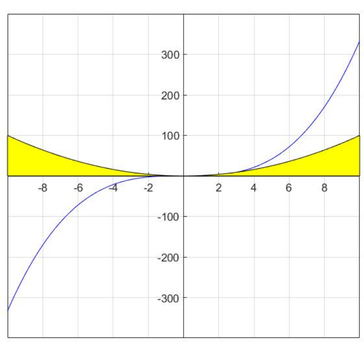
شکل ۱: انتگرال $y = x$



شکل ۲: انتگرال $y = x$



شکل ۳: انتگرال $y = sin(x)$



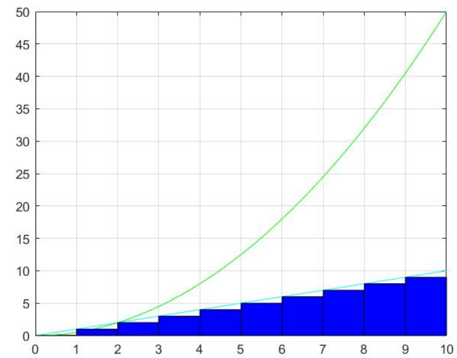
شکل ۴: انتگرال $y = x^2$

۳ تقریب انتگرال‌های معین

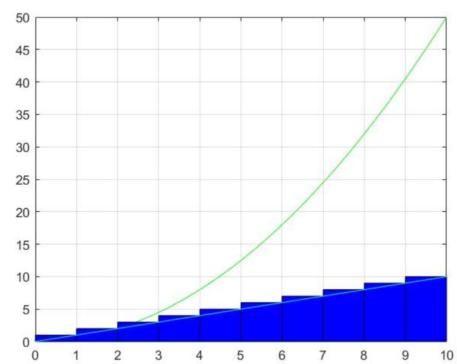
محاسبه سطح زیر نمودار به‌وسیله مستطیل‌هایی زیر نمودار. هر چه قدر عرض مستطیل‌ها کوچک می‌شوند مقدار دقیق تری از مقدار انتگرال بدست می‌آید.

انتگرال‌های معین ممکن است با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی، تخمین زده شوند. یکی از عمومی‌ترین روش‌ها، روش مستطیلی نامیده می‌شود در این روش ناحیه زیر نمودار تابع به یک سری مستطیل تبدیل شده و جمع مساحت آن‌ها نشان دهنده مقدار تقریبی انتگرال است. از دیگر روش‌هایی معروف برای تخمین مقدار انتگرال روش سیمپسون و روش ذوزنقه‌ای

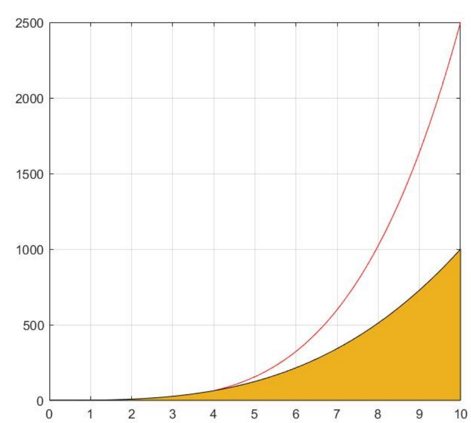
است. اگر چه روش‌های عددی مقدار دقیق انتگرال را به ما نمی‌دهند ولی در بعضی از مواقع که انتگرال تابعی قابل حل نیست یا حل آن مشکل است کمک زیادی به ما می‌کند.(۶)



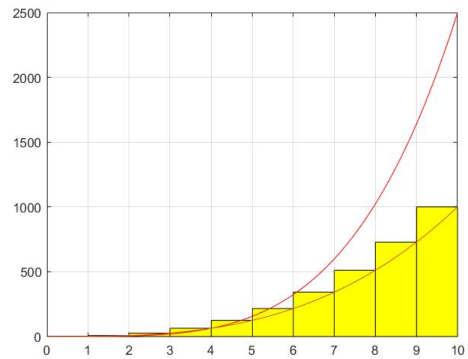
شکل ۵: جمع پایینی داربوسک برای تابع $y = x$



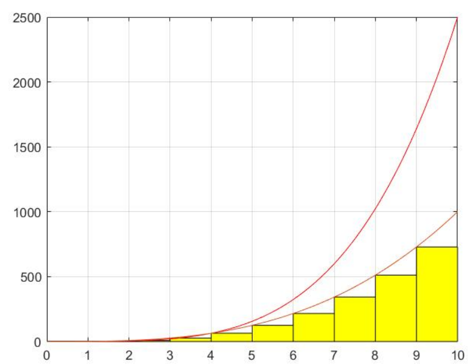
شکل ۶: جمع بالایی داربوسک برای تابع $y = x$



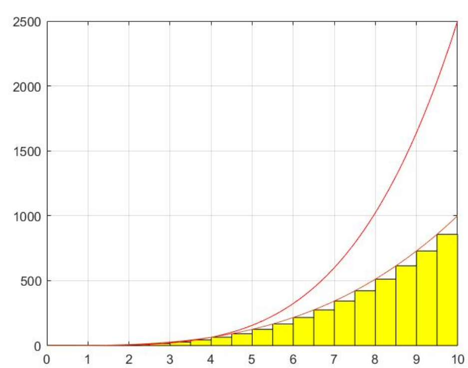
شکل ۷: انتگرال $y = x^3$



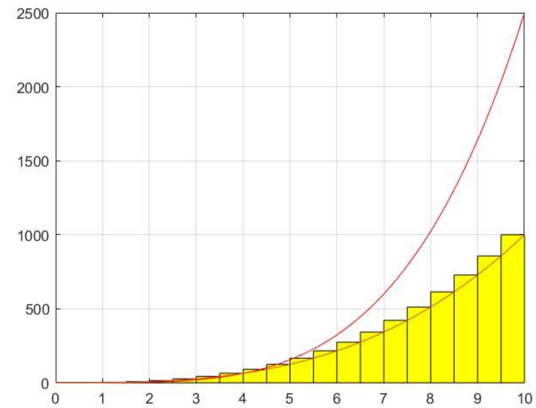
شکل ۸: جمع بالایی داربوسک برای تابع $y = x^3$



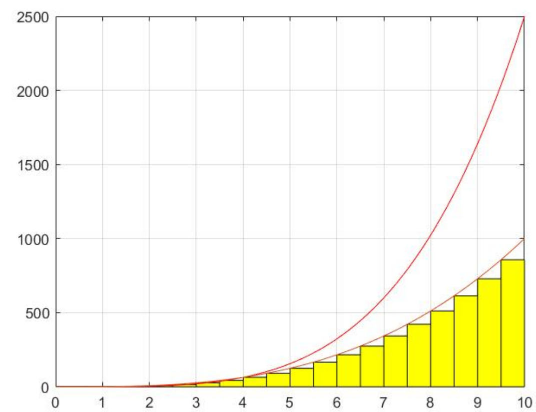
شکل ۹: جمع پایینی داربوسک برای تابع $y = x^3$



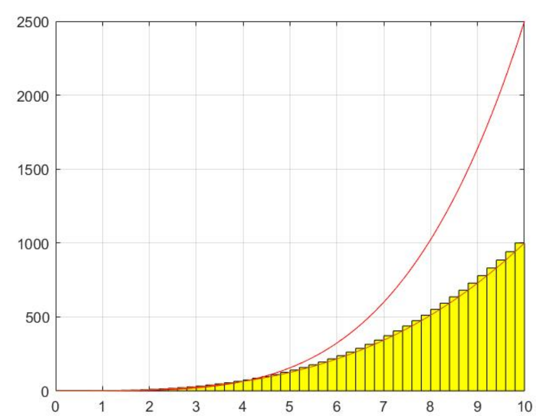
شکل ۱۰: جمع پایینی داربوسک برای تابع $y = x^3$



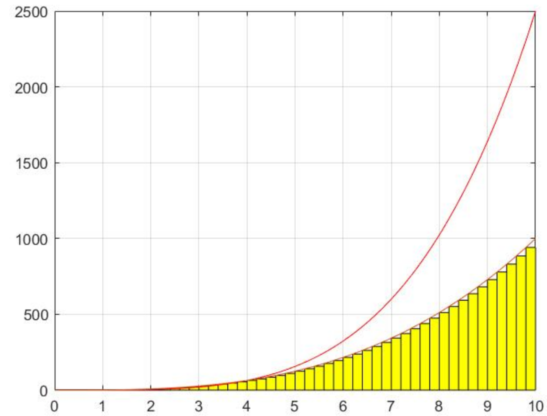
شکل ۱۱: جمع بالایی داربوسک برای تابع $y = x^3$



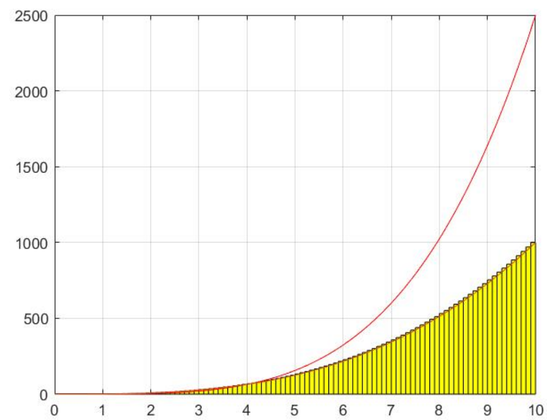
شکل ۱۲: جمع پایینی داربوسک برای تابع $y = x^3$



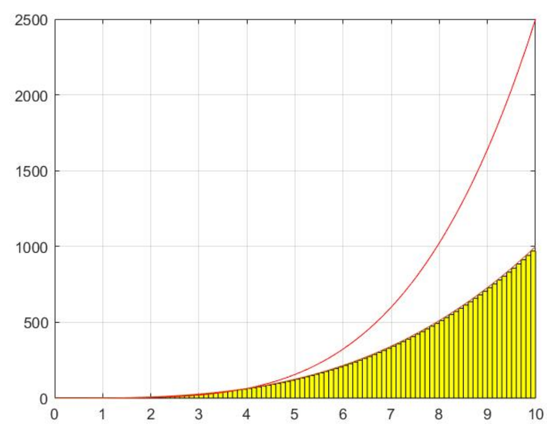
شکل ۱۳: جمع بالایی داربوسک برای تابع $y = x^3$



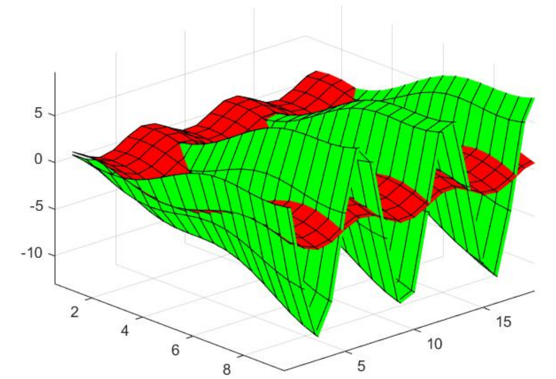
شکل ۱۴: جمع پایینی داربوسک برای تابع $y = x^3$



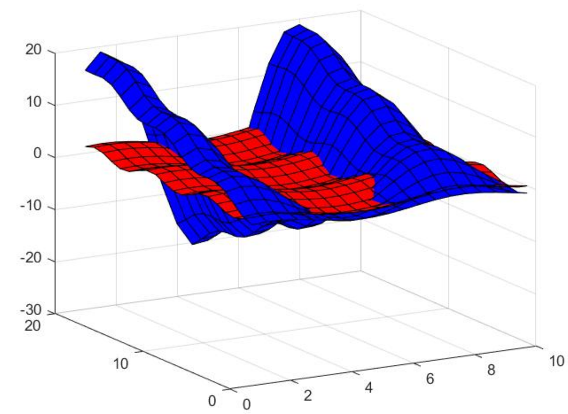
شکل ۱۵: جمع بالایی داربوسک برای تابع $y = x^3$



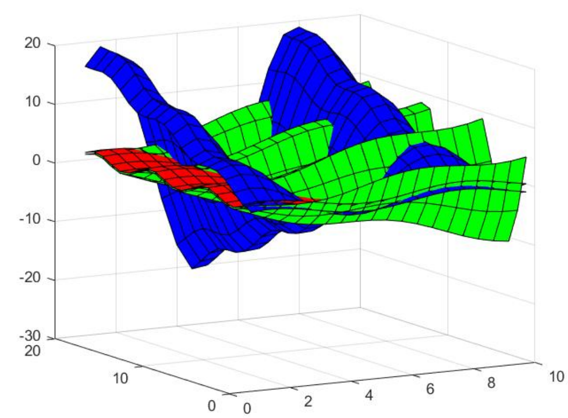
شکل ۱۶: جمع پایینی داربوسک برای تابع $y = x^3$



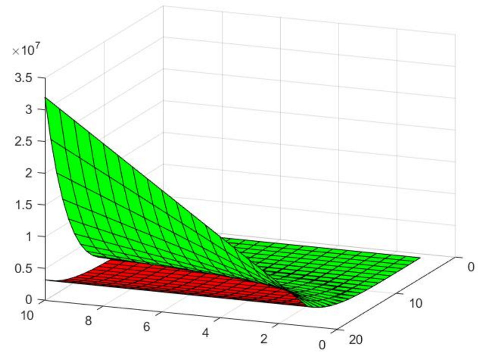
شکل ۱۷: تابع انتگرال $z = cos(x) + sin(y)$ نسبت به x



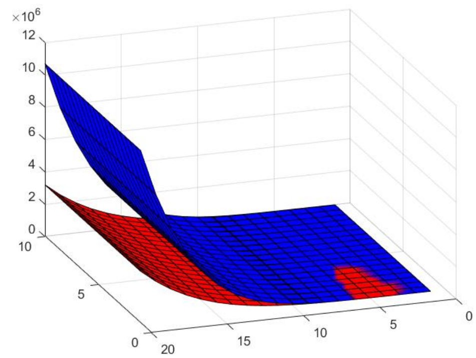
شکل ۱۸: تابع انتگرال $z = cos(x) + sin(y)$نسبت به y



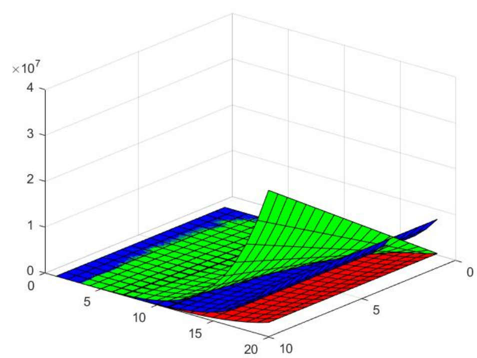
شکل ۱۹: تابع انتگرال $z = cos(x) + sin(y)$ یکبار نسبت به x یکبار نیسبت به y



شکل ۲۰: تابع انتگرال $z = x^2 + y^5$ نسبت به x



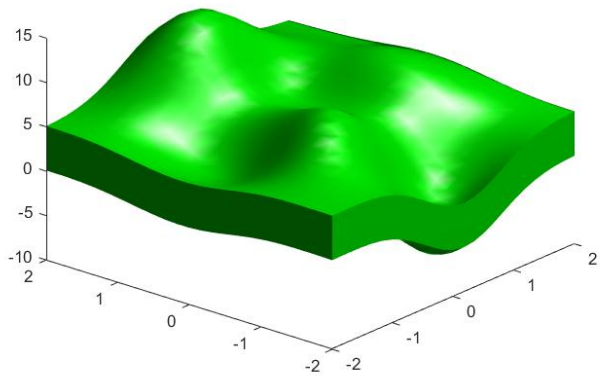
شکل ۲۱: تابع انتگرال $z = x^2 + y^5$ نسبت به y



شکل ۲۲: تابع انتگرال $z = x^2 + y^5$ نسبت به یکبار y یکبار نسبت به x

۴ انتگرال گیری عددی

در این بخش قصد داریم تقریبی برای $\int_a^b f(x)dx$ بیابیم. انتگرال گیری عدی زمانی کاربرد دارد که نتوانیم به طور صریح و دقیق انتگرال مورد نظر را محاسبه کنیم.همچنین ممکن است به ضابطه تابع دسترسی نداشته باشیم و تنها مقادیر آن را در متناهی نقطه داشته باشیم .با استفاده از درون یابی اتگرال مورد نظر را با خطای محدود می یابیم. (۷)

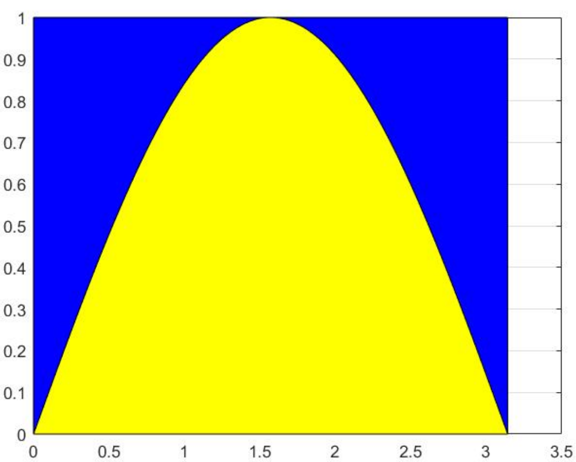


شکل ۲۳:

۵ قاعده نقطه میانی ساده

تقریب انتگرال اینگونه به قضیه نقطه میانی ساده معروف است. (۷)

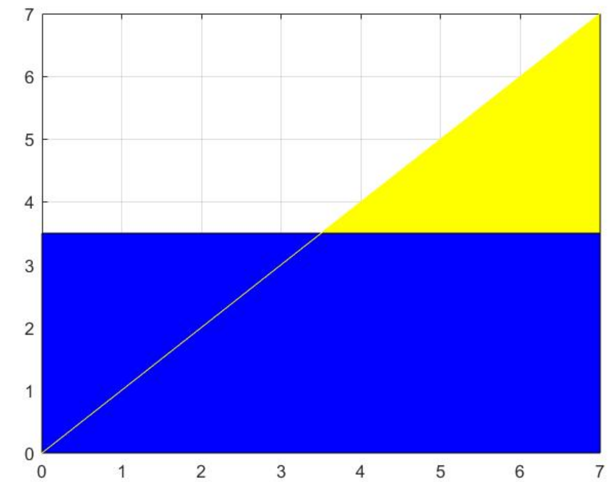
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx = \int_a^b f_0(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = I_0(f)$$



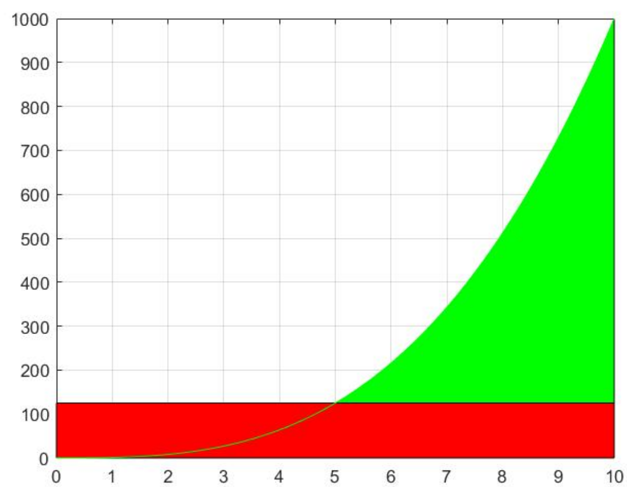
شکل ۲۴: مقایسه مقدار انتگرال با انتگرال گرفته شده در روش نقطه میاني $y = sin(x)$

ثابت می شود c وجود دارد که خای اندازه گیری عددی نقطه میانی ساده برابر می شود با:

$$R_0(f) = \int_a^b f(x)dx - I_0(f) = (b-a)^3 \frac{f''(c)}{24}$$



شکل ۲۵: مقایسه مقدار انتگرال با انتگرال گرفته شده در روش نقطه میاني $y = x$



شکل ۲۶: مقایسه مقدار انتگرال با انتگرال گرفته شده در روش نقطه میاني $y = x^3$

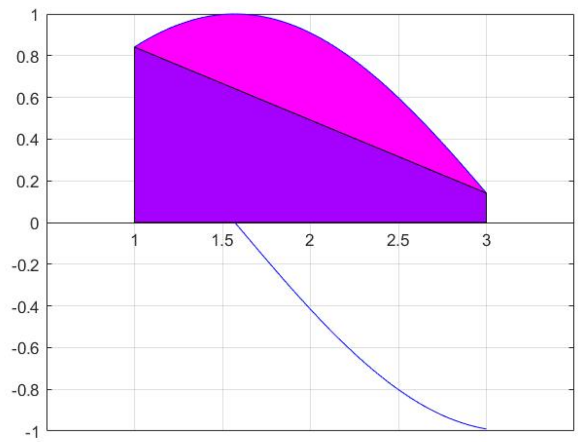
۶ قاعده انتگرال گیری ذوزنقه ای ساده

با استفاده از نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار، نمودار را مانند ذوزنقه فرض می کنیم.

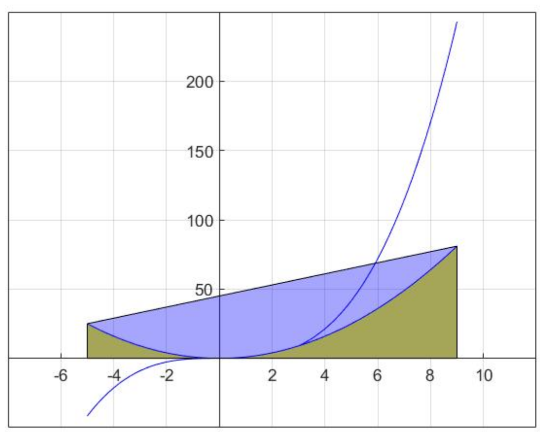
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = I_1(f)$$

ثابت می شود c وجود دارد که خطای اندازه گیری عددی ذوزنقه ای ساده برابر می شود با:

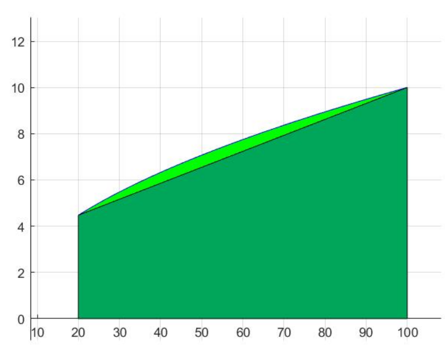
$$R_1(f) = \int_a^b f(x)dx - I_1(f) = -(b-a)^3\frac{f''(c)}{12}$$



شکل ۲۷:   روش ذوزنقه اي ساده $y = sin(x)$



شکل ۲۸:   روش ذوزنقه اي ساده $y = x^2$



شکل ۲۹:   روش ذوزنقه اي ساده $y = \sqrt{x}$

۷ درجه دقت فرمول های انتگرال های عددی

درجه دقت یک فرمول انتگرال گیری عددی برابر m است. هرگاه m بزرگ ترین عدد صحیحی مثبتی باشد که فرمول مربوطه به توابع $f(x) = x^k$ که ... $k = 0, 1, 2, 3,$ دقیق است. درجه دقت در روش ذوزنقعه ای و روش میانی برابر ۱ است. (۸)

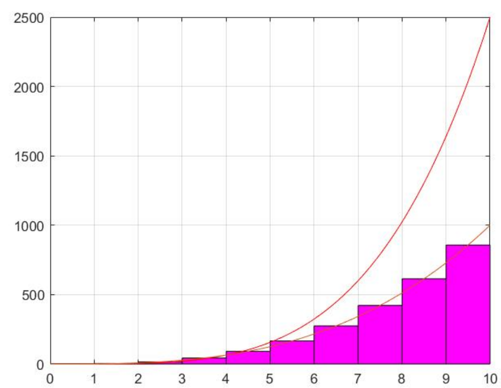
۸ انتگرال گیری عددی مرکب

به منظور کاهش خطا در تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به ویزه زمانی که بازه انتگرال گیری بزرگ باشد، ابتدا بازه را به زیر بازه هایی متساویی افاصله ننقسیم کرده و سپس از هر زیر بازه انتگرال می گیریم. (۸)

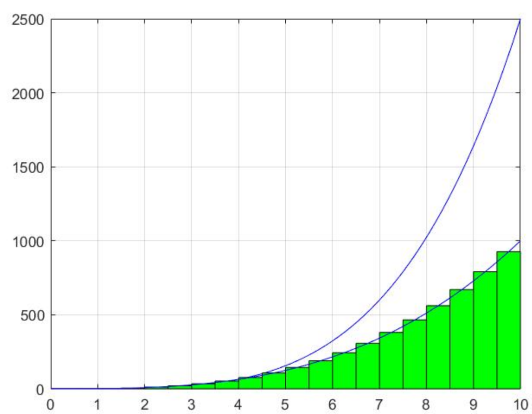
۹ انتگرال گیری عددی نقطه میانی مرکب

با در نظر گرفتن نقاط گسسته به صورت هم فاصله انتگرال روی بازه $[a, b]$ را به انتگرال به زیر بازه ها تقسیم کرده و برای انتگرال رو ی هر زیر بازه از فرمول انتکرالگیری نقطه میانی استفاده می کنیم.پس داریم:

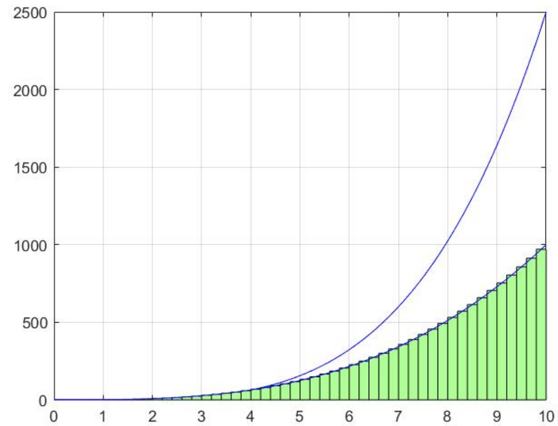
$$M_n(f) = 2h \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})$$



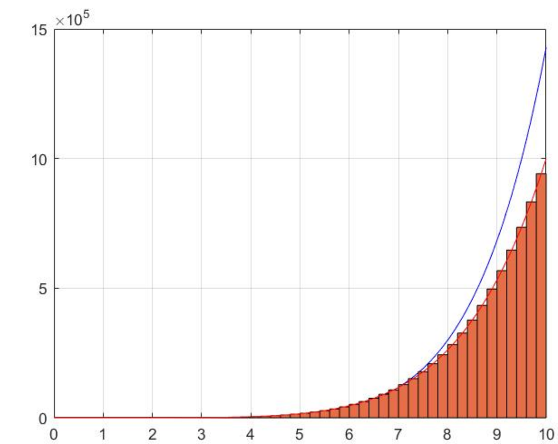
شکل ۳۰: روش نقطه میانی مرکب $y = x^3$



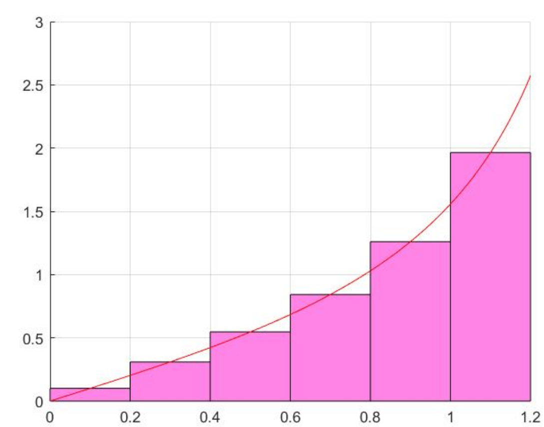
شکل ۳۱: روش نقطه میانی مرکب $y = x^3$



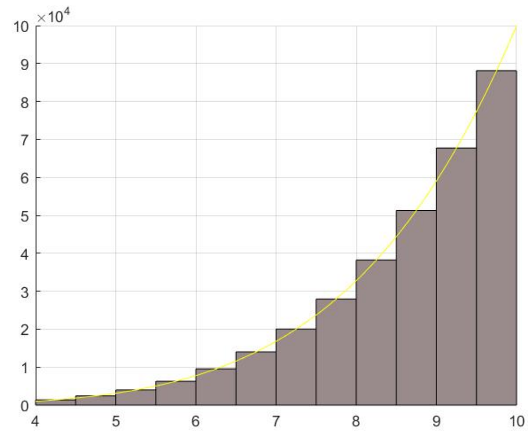
شکل ۳۲: روش نقطه میانی مرکب $y = x^3$



شکل ۳۳: روش نقطه میانی مرکب $y = x^6$



شکل ۳۴: روش نقطه میانی مرکب $y = tan(x)$



شکل ۳۵: روش نقطه میانی مرکب $y = x^5$

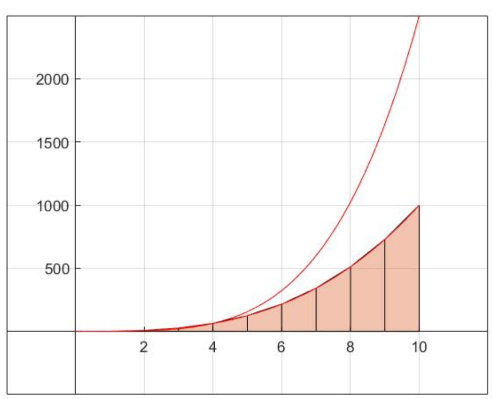
دقت شود که در این روش همواره n باید زوج باشد. ثابت می شود c وجود دارد که داریم:

$$\int_a^b f(x)dx - M_n(f) = \frac{b-a}{6} f''(c')$$

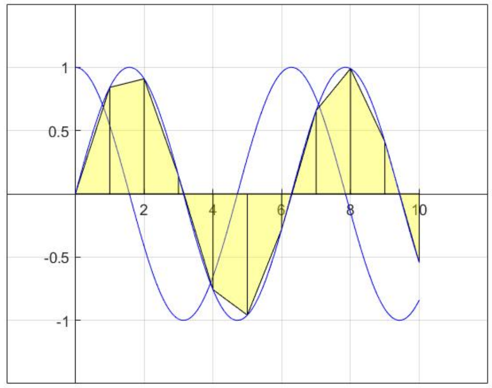
۱۰ انتگرال گیری عددی ذوزنقه ای مرکب

با در نظر گرفتن نقاط گسسته سازی به صورت متساوی الفاصله انتگرال گیری روی بازه $[a, b]$ را به مجموع انتگرال زیر بازه ها تبدیل کرده و برای تقریب انتگرال روی هر زیر بازه ، از فرمول انتگرال گیری دوزنقه ای ساده استفاده می کنیم. (۸)

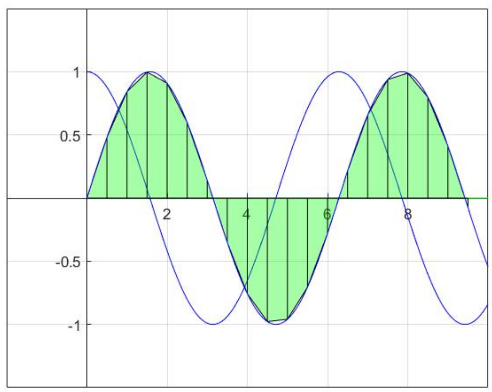
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)) = T_n(f)$$



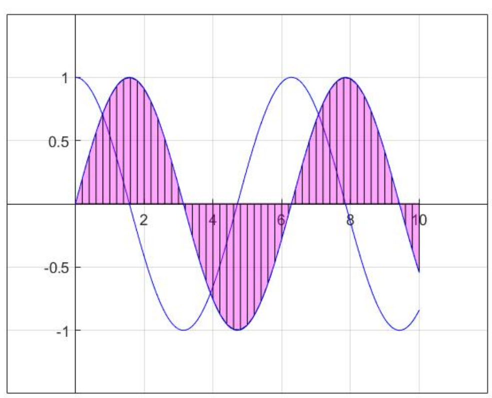
شکل ۳۶: روش ذوزنقه اي مرکب $y = x^3$



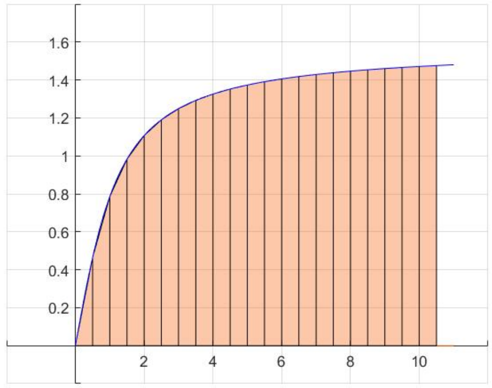
شکل ۳۷: روش ذوزنقه اي مرکب $y = sin(x)$



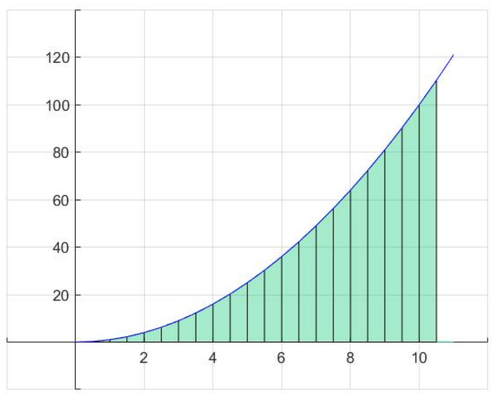
شکل ۳۸: روش ذوزنقه اي مرکب $y = sin(x)$



شکل ۳۹: روش ذوزنقه اي مرکب $y = sin(x)$



شکل ۴۰: روش ذوزنقه اي مرکب $y = arctan(x)$



شکل ۴۱: روش ذوزنقه اي مرکب $y = x^2$

ثابت می شود c وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)dx - T_n(f) = \frac{-(b-a)}{2} h^2 f''(c)$$

مراجع

[1] Contributors, Wikipedia. Integral, 2020.

[2] Contributors, SimpleWikipedia. Integral, 2020.

[3] Contributors, Wikipedia. Multiple integral, 2020.

[4] Robert Adams, Christopher Essex. *Calculus: A Complete Course.* 2019.

[5] B., Thomas G. *Thomas's Calculus.* 2017.

[6] Richard L.Burden, J. Douglas Faires. *Numerical Analysis.* 2011.

[7] F.B.Hildebbrand. *Introduction to Numerical Analysis.* 1956.

[8] Endre Suli, David F. Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis.* 2003.