



Gas di Bose ideali: analisi teorica e computazionale

Fisica Statistica Avanzata

Filippo Negrini (Matricola: 47127A)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI MILANO



Table of Contents

1 Analisi teorica

- ▶ Analisi teorica
- ▶ Ricorsione canonica
- ▶ Path sampling
- ▶ Backup



Funzione di partizione

1 Analisi teorica

- sistema non interagente
- ensemble gran-canonico
(μ , V , T)

$$Z(T, V, z) = \prod_i \frac{1}{1 - z \exp(-\beta \epsilon_i)}$$



Frazione di condensato

1 Analisi teorica

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 0 & T \geq T_c \\ 1 - (T/T_c)^{3/2} & T < T_c \end{cases}$$

$$\frac{N_T}{N} = \begin{cases} 1 & T \geq T_c \\ (T/T_c)^{3/2} & T < T_c \end{cases}$$

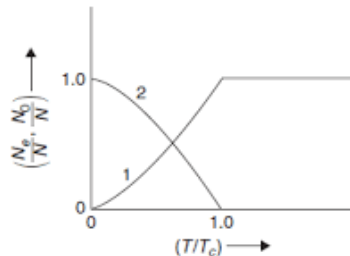


Figura: Frazione di condensato in funzione della temperatura.



Calore specifico

1 Analisi teorica

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z)$$

- punto angoloso a T_c
- recupero il risultato valido per il gas ideale nel limite $T \rightarrow \infty$.

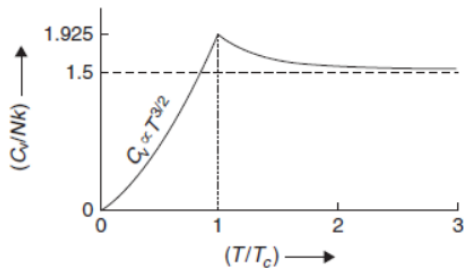


Figura: Calore specifico del gas di Bose ideale



Table of Contents

2 Ricorsione canonica

► Analisi teorica

► Ricorsione canonica

► Path sampling

► Backup



Funzione di partizione

2 Ricorsione canonica

Sistema ad N particelle ideale

$$Z_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k Z_{N-k}$$

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{NZ_N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial z_k}{\partial \beta} Z_{N-k} + z_k \frac{\partial Z_{N-k}}{\partial \beta} \right)$$

$$N_0 = \frac{1}{Z_N} \sum_{k=1}^N Z_{N-k}$$



Frazione di condensato

2 Ricorsione canonica

$$N_0 = \frac{1}{Z_N} \sum_{k=1}^N Z_{N-k}$$

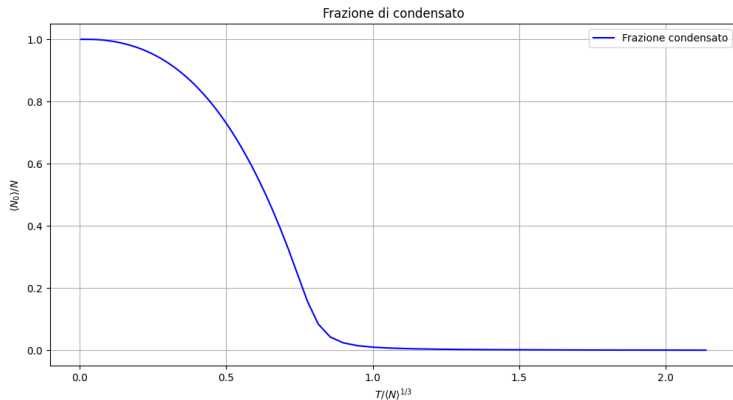


Figura: Frazione di condensato calcolata con la tecnica di ricorsione.



Calore specifico

2 Ricorsione canonica

- Ritrovo il limite classico per $T \rightarrow \infty$
- Picco in corrispondenza del punto critico

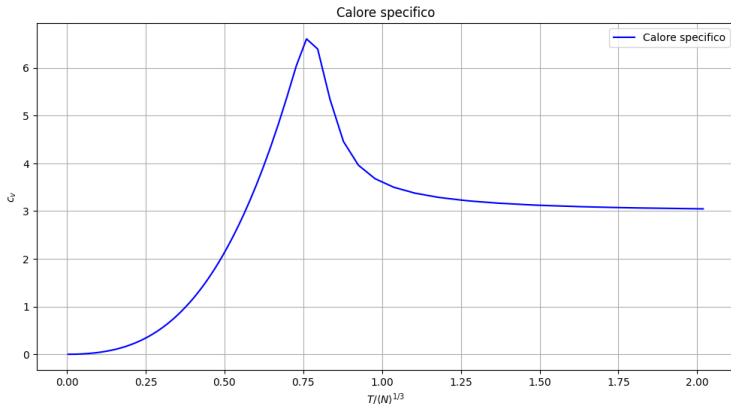


Figura: Calore specifico valutato con la tecnica ricorsiva.



Table of Contents

3 Path sampling

- ▶ Analisi teorica
- ▶ Ricorsione canonica
- ▶ Path sampling
- ▶ Backup



Levy construction

3 Path sampling

$$\pi^{free}(x_k | x_1, x_2) \propto \rho^{free}(x_1, x_k, \Delta t_1) \rho^{free}(x_k, x_2, \Delta t_2)$$

- studio mosse per x_k
- posizioni adiacenti: x_1, x_2
- intervalli temporali: $\Delta t_1, \Delta t_2$

Distribuzione delle mosse gaussiane:

$$\langle x_k \rangle = \frac{\Delta t_2 x_1 + \Delta t_1 x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{\Delta t_2} + \frac{1}{\Delta t_1} \right)^{-1/2}$$



Esempio di cammini liberi

3 Path sampling

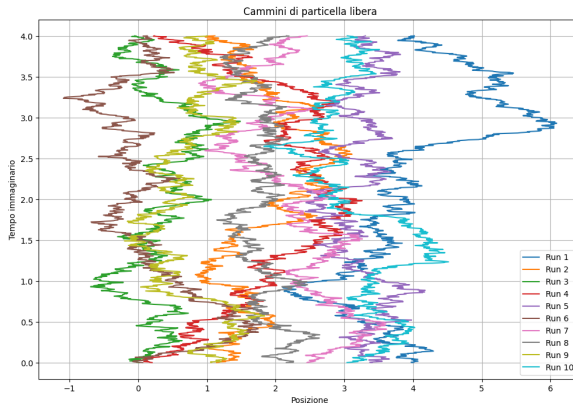


Figura: Cammini costruiti con ricostruzione di Levy



Table of Contents

4 Backup

- ▶ Analisi teorica
- ▶ Ricorsione canonica
- ▶ Path sampling
- ▶ Backup



Pressione ed isoterme

4 Backup

$$p = \frac{k_B T}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \frac{k_B T}{V} \log(1 - z)$$

- curva limitante per isoterme è $pV^{5/3} = \text{const}$
- parallelismo con Van der Waals

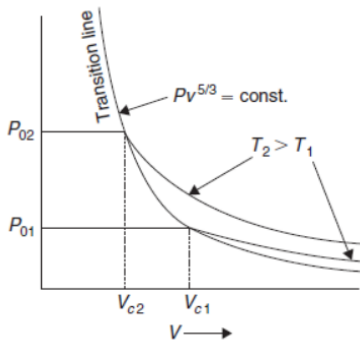


Figura: Isotherme del gas di Bose ideale