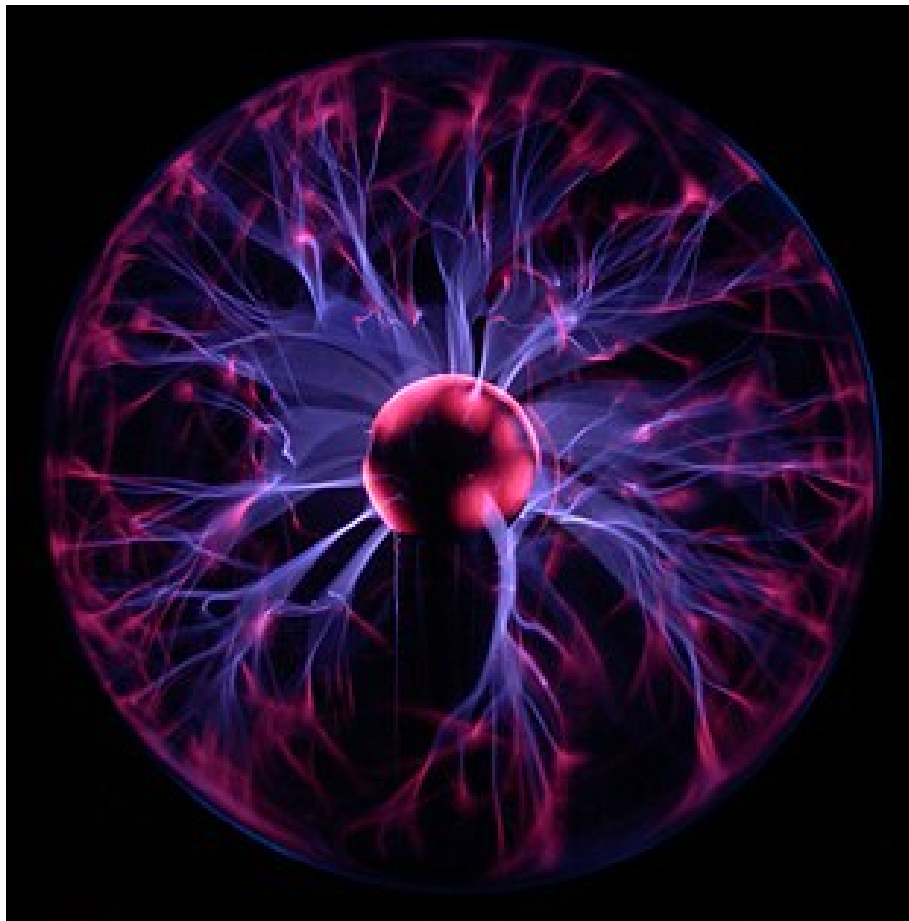


# Laboratorio di Fisica dei Plasmi

Negrini Filippo

A.A. 2023/2024





# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Struttura della dispensa . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modelli teorici</b>	<b>5</b>
2.1	Trattazione cinetica . . . . .	5
2.2	Trattazione fluida . . . . .	6
2.3	Equilibrio di rotazione . . . . .	7
2.4	Traiettorie delle singole particelle . . . . .	11
2.5	Equilibrio termico . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Instabilità di diocotron</b>	<b>15</b>
3.1	Teoria perturbativa lineare . . . . .	16
3.1.1	Profilo di densità a gradino . . . . .	17
3.1.2	Plasma fuori asse . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Richiami di Elettronica</b>	<b>21</b>
4.1	Introduzione . . . . .	21
4.1.1	Circuito RC . . . . .	23
4.2	Dominio delle frequenze . . . . .	24
4.2.1	Trasformata di Fourier . . . . .	24
4.2.2	Impedenza . . . . .	25
4.2.3	Risposta in frequenza . . . . .	26
4.2.4	Circuito RC passa-basso . . . . .	26
4.2.5	Circuito RC passa-alto . . . . .	28
4.3	L'amplificatore operazionale . . . . .	29
4.3.1	Amplificatore invertente . . . . .	29
4.3.2	Amplificatore non invertente . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Procedure di Laboratorio</b>	<b>32</b>
5.1	Utilizzo della strumentazione . . . . .	32
5.1.1	Temporizzazione . . . . .	32
5.1.2	Oscilloscopio . . . . .	33
5.1.3	Fotocamera . . . . .	34
5.2	Esperienza 0 . . . . .	34

# Capitolo 1

## Introduzione

Nel corso di Laboratorio di Fisica dei Plasmi siamo interessati a plasmi non neutri, ossia dei sistemi a molti corpi costituiti da particelle cariche che presentano una carica netta globale. Sistemi di questo genere sono caratterizzati dalla presenza di forti campi elettrici legati alla natura non neutra dell'insieme di particelle considerato: tali campi possono avere grande influenza sul comportamento del plasma e sulle proprietà del regime di stabilità che si può instaurare. I plasmi non-neutri più semplici sono quelli costituiti da singole specie cariche: a questa categoria appartengono i plasmi di elettroni prodotti in laboratorio.

In certe condizioni i plasmi non-neutri possono essere descritti utilizzando una trattazione macroscopica fluido-dinamica, per esempio i *plasmi freddi* si comportano come dei fluidi ideali bidimensionali: questo parallelismo consente di effettuare esperimenti per testare il comportamento di un fluido ideale. Questa non è l'unica utilità scientifica dei plasmi prodotti in laboratorio, poichè essi sono stati utilizzati anche per creare anti-materia, mescolando plasmi di positroni e di anti-protoni.

I plasmi non neutri costituiti da specie con cariche tutte dello stesso segno possono essere confinati con facilità maggiore rispetto ai plasmi neutri: i non-neutri possono essere delimitati in una specifica regione di spazio utilizzando solo campi elettrici e magnetici statici in una configurazione nota con il nome di *trappola di Malmberg-Penning*.

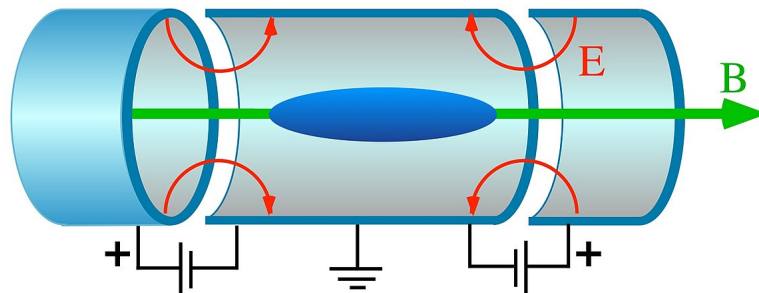


Figura 1.1: Versione cilindrica della trappola di Penning: B indica il campo magnetico, mentre E è il campo elettrico usato per tenere le particelle nel centro.

## 1.1 Struttura della dispensa

La dispensa si articola nei seguenti capitoli:

1. In questo capitolo abbiamo introdotto la tipologia di fenomeni fisici che ci proponiamo di trattare e studiare sperimentalmente.
2. Nel Capitolo 2 vengono introdotte alcune tecniche teoriche che consentono di studiare le caratteristiche principali dei plasmi non-neutri, ponendo particolare enfasi sugli equilibri che interessano le esperienze di laboratorio.
3. Nel Capitolo 3 viene introdotta l'instabilità di Diocotron, che sarà argomento di almeno un'esperienza in laboratorio ed è un'instabilità onnipresente nell'evoluzione di un plasma a bassa densità.

# Capitolo 2

## Modelli teorici

In questo capitolo investighiamo gli approcci teorici che consentono di trattare un plasma non collisionale e non neutro: ciò vuol dire che il sistema presenta una carica netta e che le proprietà sono studiate per intervalli di tempo piccoli rispetto alle tempistiche medie fra collisioni. Per descrivere un tale plasma possono essere utilizzati due formalismi:

- *trattazione di fluido macroscopico*, basata sulle equazioni di Maxwell e sull'equazione dei momenti
- *trattazione cinetica*, basata sulle equazioni di Vlasov-Maxwell

Nella prima delle due descrizioni vengono presi in considerazione osservabili macroscopici quali  $n(\vec{x}, t)$ ,  $V(\vec{x}, t)$  e  $P(\vec{x}, t)$ : tali quantità evolvono in dipendenza dei campi elettrici e magnetici presenti, che possono essere determinati mediante le equazioni di Maxwell. Se il plasma in analisi è freddo è possibile trascurare le variazioni di pressione, ponendo a zero la varianza del tensore delle pressioni. Il vantaggio di un tale approccio è la sua elevata semplicità: in ambito fluido non è però possibile trattare instabilità collettive e fenomeni caratteristici di un plasma, come il Landau damping.

Per includere la fenomenologia termica nell'analisi del plasma è necessario utilizzare un approccio *cinetico*: in questo caso l'attenzione è rivolta alla distribuzione  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ , che descrive la densità di probabilità di avere il sistema nel punto  $(\vec{x}, \vec{p})$  dello spazio delle fasi al tempo  $t$ . Per come è definita la distribuzione  $f$ , abbiamo che

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3x d^3p = \text{numero medio di particelle nell'intorno di } (\vec{x}, \vec{p})$$

Questo approccio consente di studiare un'ampia classe di fenomeni collettivi che dipendono dalla struttura della distribuzione all'equilibrio nello spazio delle fasi.

### 2.1 Trattazione cinetica

Consideriamo un plasma non neutro di elettroni caratterizzati da carica  $e$  e massa  $m$ : per scale di tempo corte rispetto al tempo di collisione la funzione di distribuzione di singola particella  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$  evolve secondo l'equazione di Vlasov, che descrive

l'evoluzione incomprimibile secondo il teorema di Liouville nello spazio delle fasi 6-dimensionale  $(\vec{x}, \vec{p})$ .

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right\} f(\vec{x}, \vec{p}, t) = 0 \quad (2.1)$$

Notiamo che è presente un termine in cui figurano sia il campo elettrico che il campo magnetico: possiamo determinarli utilizzando le equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} [c] \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{\mu_0 c}{4\pi} \right] e \int d^3 p \vec{v} f(\vec{x}, \vec{p}, t) + \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{\mu_0 c}{4\pi} \right] \vec{J}_{ext} + \frac{1}{c} \left[ \frac{1}{c} \right] + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \left[ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right] e \int d^3 p f(\vec{x}, \vec{p}, t) + 4\pi \left[ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right] \rho_{ext} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

Le equazioni di Vlasov-Maxwell sono altamente non lineari, in quanto  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$  è modificata dai campi auto-indotti dal plasma, che a loro volta evolvono quando la funzione di distribuzione cambia. In condizioni di stato quasi-stazionario è possibile porre a zero tutte le derivate parziali rispetto al tempo in modo da determinare le soluzioni stazionarie  $f^0(\vec{x}, \vec{p})$ ,  $\vec{E}^0(\vec{x})$  e  $\vec{B}^0(\vec{x})$ : lavorando con piccole perturbazioni è possibile valutare la stabilità degli equilibri così individuati.

## 2.2 Trattazione fluida

In alcune circostanze il comportamento globale del plasma può essere descritto utilizzando un'approccio fluido-dinamico: siamo interessati alla densità del sistema  $n(\vec{x}, t)$ , alla velocità media  $\vec{V}(\vec{x}, t)$ , al momento medio  $\vec{P}(\vec{x}, t)$  ed al tensore delle pressioni  $\mathbf{P}(\vec{x}, t)$ . Per passare dalla trattazione cinetica a quella fluida introduciamo i primi momenti della distribuzione  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$  integrando nei momenti, in modo tale da perdere l'informazione cinetica e mantenere solo quella spaziale. Possiamo quindi riconoscere:

$$n(\vec{x}, t) = \int d^3 p f(\vec{x}, \vec{p}, t) \quad (2.6)$$

$$n(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) = \int d^3 p \vec{v} f(\vec{x}, \vec{p}, t) \quad (2.7)$$

$$n(\vec{x}, t) \vec{P}(\vec{x}, t) = \int d^3 p \vec{p} f(\vec{x}, \vec{p}, t) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P}(\vec{x}, t) = \int d^3 p \left[ \vec{p} - \vec{P}(\vec{x}, t) \right] \left[ \vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t) \right] f(\vec{x}, \vec{p}, t) \quad (2.9)$$

Possiamo ora ottenere le equazioni fluide andando ad integrare nei momenti: la semplice integrazione in  $d^3 p$  restituisce l'equazione di continuità, mentre lavorando con  $\vec{p} d^3 p$  è possibile ottenere l'equazione che descrive l'equilibrio delle forze:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{V}) = 0 \quad (2.10)$$

$$n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \vec{P} + \nabla \cdot \mathbf{P} = nq \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [c] \vec{v} \times \vec{b} \right) \quad (2.11)$$

Abbiamo trovato un sistema di equazioni differenziali in cui nell'equazione che descrive l'evoluzione del momento di ordine 0 compare il momento di primo ordine ed in generale nell'equazione riguardante il k-esimo momento è presente il k+1-esimo: per chiudere il sistema supponiamo di trattare un plasma freddo, ossia caratterizzato da velocità termica molto inferiore alla velocità fluida in gioco. Così facendo possiamo trascurare il termine di ordine superiore, ossia la divergenza del tensore delle pressioni, di fatto trascurando l'agitazione termica rispetto ai moti del fluido.

## 2.3 Equilibrio di rotazione

Consideriamo un plasma non-neutro di lunghezza infinita confinato radialmente da un campo magnetico  $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ : in condizioni di stato stazionario ( $\partial/\partial t = 0$ ) supponiamo di avere un profilo di densità a gradino assi-simmetrico del tipo:

$$n(r) = \begin{cases} n_0 & r \in [0, r_b] \\ 0 & r \in (r_b, \infty) \end{cases} \quad (2.12)$$

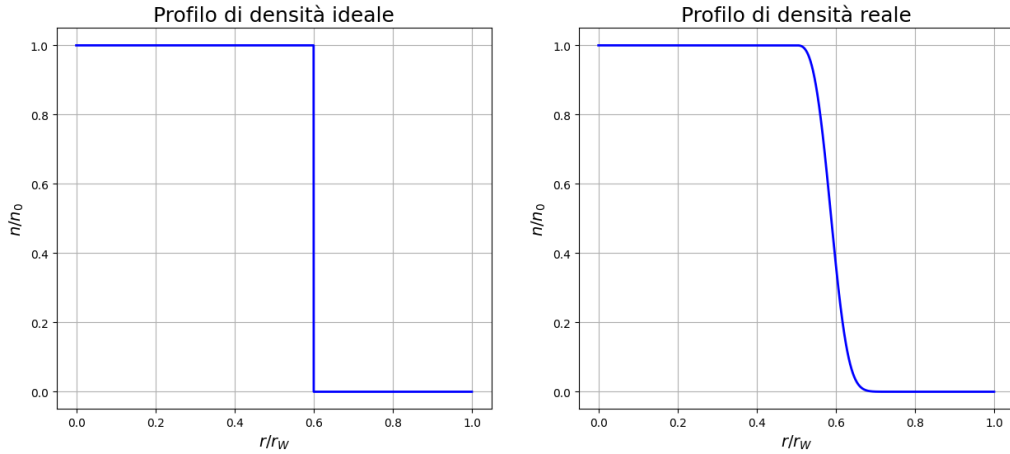


Figura 2.1: Confronto fra profilo di densità ideale e situazione realistica

La distribuzione spaziale di carica genera un campo elettrico diretto radialmente ed identicamente nullo nel centro del plasma: è possibile determinare l'andamento di tale campo risolvendo l'equazione di Poisson. Il set di equazioni che consente di descrivere la situazione in analisi è:

$$\nabla \cdot (n\vec{V}) = 0 \quad (2.13)$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{q}{m} \left( -\nabla\Phi + \frac{1}{c} [c] \vec{v} \times \vec{b} \right) \quad (2.14)$$

$$\nabla^2\Phi = -4\pi \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] qn \quad (2.15)$$



Procediamo con l'obiettivo di determinare il potenziale: sfruttiamo le simmetrie del sistema, evidenti nel set di coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ . Dato che non abbiamo dipendenza dalla coordinata  $z$ , tutte le derivate rispetto alla quota saranno identicamente nulle. L'equazione di continuità e l'equazione di evoluzione dei momenti si traducono in:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rnV_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (nV_\theta) = 0 \quad (2.16)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{q}{m} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c} [c] V_\theta B_\theta \right) \quad (2.17)$$

$$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta V_r}{r} = -\frac{q}{m} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{c} [c] V_z B_\theta \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -4\pi \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] qn \quad (2.19)$$

Specializzando la casistica in analisi sfruttando il profilo di densità introdotto in precedenza (2.12) ed imponendo delle ulteriori condizioni di simmetria sulla velocità:

$$\begin{cases} n = n(r) \\ V_r = 0 \\ V_\theta = V_\theta(r) \end{cases} \quad (2.20)$$

è possibile ridurre il set di partenza a sole due equazioni che consentono di ottenere informazioni riguardo al comportamento globale del plasma.

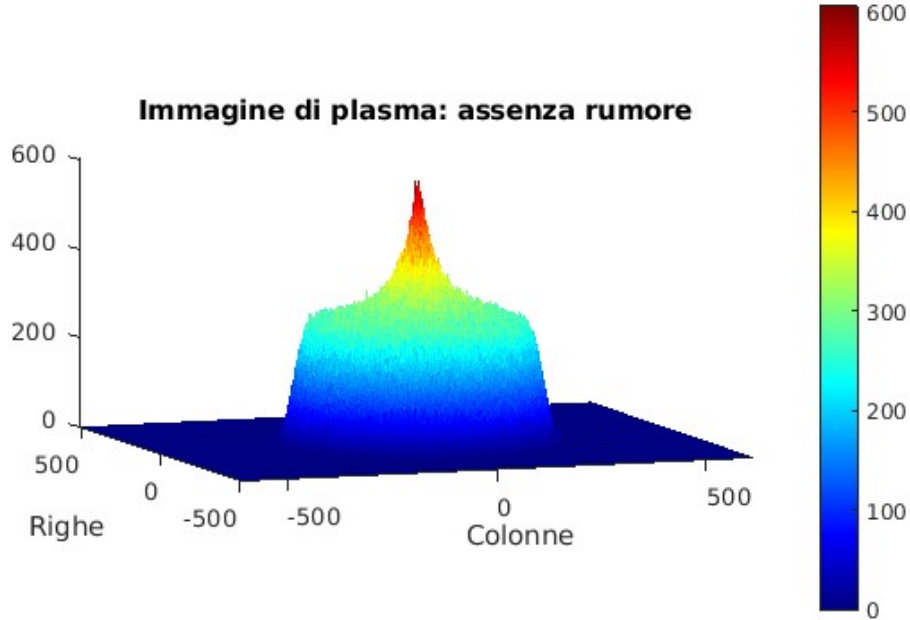


Figura 2.2: Immagine di plasma scattata in laboratorio dove notiamo come il profilo di densità risulti alquanto lontano dalle condizioni di idealità.

Noto il profilo di densità, risolviamo inizialmente il problema di Poisson per poi ottenere delle informazioni sulla velocità azimutale, che sarà quella caratteristica di un moto di rotazione rigida. Procediamo con l'analisi delle equazioni ridotte per merito delle assunzioni precedentemente giustificate:

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{q}{m} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c} [c] V_\theta B_\theta \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -4\pi \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] qn \quad (2.22)$$

L'equazione (2.22) deve essere risolta separatamente nelle due regioni in cui può essere diviso lo spazio utilizzando come criterio la densità di carica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \begin{cases} \alpha n_0 & r \in [0, r_p] \\ 0 & r \in [r_p, r_W] \end{cases} \quad (2.23)$$

dove la costante alfa è definita come

$$\alpha = 4\pi e \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \quad (2.24)$$

Per avere un problema ben definito è necessario imporre delle condizioni al contorno di senso fisico: vogliamo evitare una soluzioni divergente richiedendo che

$$\begin{cases} \Phi(r = r_W) = 0, \\ \Phi(r = 0) < \infty. \end{cases} \quad (2.25)$$

Integrando il problema di Poisson in entrambe le regioni prese in considerazione ed imponendo continuità e derivabilità in  $r = r_p$  per giuntare le soluzioni si ottiene che

$$\Phi(r) = \frac{m}{e} \omega_p^2 \left\{ \frac{r^2 - r_p^2}{4} + \frac{r_p^2}{2} \log \left( \frac{r_p}{r_w} \right) \right. \\ \left. \frac{r_p^2}{2} \log \left( \frac{r}{r_W} \right) \right\} \quad (2.26)$$

dove si indica con  $\omega_p^2$  la frequenza di plasma elettronico, data da

$$\omega_p^2 = \frac{\alpha e n_0}{m}. \quad (2.27)$$

Ricavare il campo dall'equazione (2.26) è banale: noto  $\vec{E}$ , è possibile andarlo a sostituire nell'equazione per l'evoluzione dei momenti ottenendo che

$$-m\omega^2 r = \frac{m}{2} \omega_p^2 r - \left( \frac{eB_0}{mc} [c] \right), \quad (2.28)$$

dove  $\omega$  è una frequenza angolare introdotta per esplicitare  $V_\theta(r) = \omega(r)r$ . Possiamo riconoscere la frequenza angolare di ciclotrone, che evidenzia quale sia la frequenza di rotazione attorno alle linee di campo magnetico:

$$\Omega = \frac{eB_0}{mc} [c]. \quad (2.29)$$

La condizione esplotata dall'equazione (2.28) è verificata solamente quando si verifica che

$$\omega^2 - \Omega\omega + \frac{\omega_p^2}{2} = 0, \quad (2.30)$$

le cui soluzioni sono

$$\omega^\pm = \frac{\Omega}{2} (1 \pm \sqrt{1 - s}), \quad (2.31)$$

dove  $s = 2\omega_p^2/\Omega^2$  è il parametro di auto-campo: tale quantità esplicita il rapporto fra la forza elettrostatica che tende a defocalizzare il plasma e la forza di natura magnetica che ha un effetto focalizzante. Notiamo che l'equazione di secondo grado (2.30) ammette soluzione solo se  $s \leq 1$ : per avere un plasma in rotazione rigida è necessario che siano più intense le forze di natura magnetica legate all'applicazione di un campo esterno. La condizione per cui  $s = 1$  è nota come *limite di Brillouin*: per avere un plasma confinato è necessario che

$$\frac{n_0 mc^2}{\frac{B_0}{8\pi} \left[ \frac{4\pi}{\mu_0} \right]} \leq 1 \quad (2.32)$$

e di conseguenza è presente una densità limite oltre la quale la repulsione elettrostatica vince ed il plasma si disgrega.

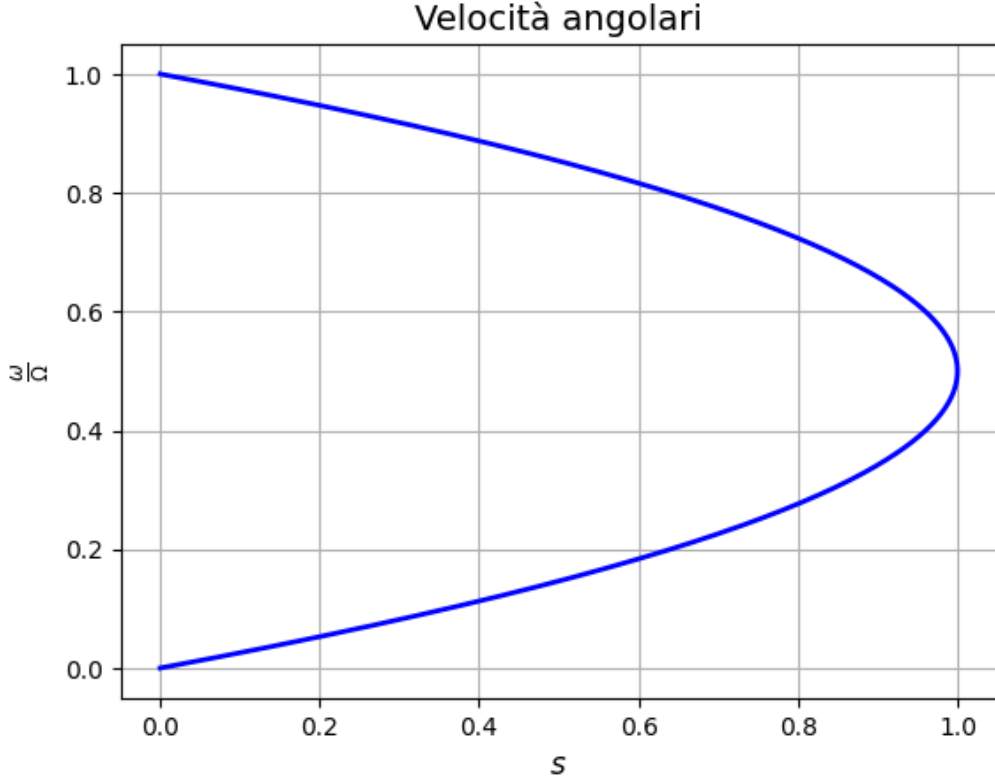


Figura 2.3: Relazione per la determinazione di  $\omega$ : il ramo superiore corrisponde alla soluzione  $\omega^+$ , mentre quello inferiore ad  $\omega^-$

Noi lavoreremo con  $s \ll 1$  a causa della bassa densità dei plasmi prodotti in laboratorio: saremo in particolare interessati a regimi di rotazione lenta.

## 2.4 Traiettorie delle singole particelle

È interessante esaminare i movimenti delle singole particelle costituenti il plasma: un elettrone percepisce l'azione di forze di natura elettro-magnetica prodotte dal campo elettrico auto-indotto e dal campo magnetico esterno, che stiamo continuando a considerare diretto lungo l'asse  $z$ . Il movimento di un elettrone è determinato da

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \times B_0 \hat{e}_z}{c} [c] \right) \quad (2.33)$$

dove con  $\vec{v}$  indichiamo la velocità della particella ed il campo  $\vec{E}(\vec{r})$  è quello che abbiamo determinato nella sezione precedente, ossia:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{m}{2e} \omega_p^2 \hat{e}_r \quad (2.34)$$

La componente  $v_z$  della velocità è costante perchè il campo elettrico è diretto radialmente e il campo magnetico lungo l'asse  $z$ : vogliamo ora valutare quanto accada nel piano  $xy$ . Possiamo esplicitare le prime due componenti dell'equazione vettoriale (2.33) in coordinate cartesiane, ottenendo un sistema di due equazioni differenziali accoppiate:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} \omega_p^2 x(t) - \Omega \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} \omega_p^2 y(t) + \Omega \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.36)$$

Per analizzare il movimento dell'elettrone, studiamo il sistema di equazioni in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare  $\omega$ , soluzione dell'equazione di secondo grado che consente di valutare l'equilibrio di una colonna di plasma in moto di rotazione rigida attorno al proprio asse. Effettuando il seguente cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

si ottiene che

$$\frac{d^2 x_r(t)}{dt^2} = \pm (\omega^+ \omega^-) \frac{dy_r(t)}{dt} \quad (2.38)$$

$$\frac{d^2 y_r(t)}{dt^2} = \mp (\omega^+ \omega^-) \frac{dx_r(t)}{dt}. \quad (2.39)$$

Il set di equazioni così determinato descrive un moto di girazione con periodo  $T = 2\pi/(\omega^+ - \omega^-)$ : la direzione di rotazione dipende dalla soluzione che si vuole considerare, ossia se quella in un sistema di riferimento *slow rotating* oppure *fast rotating*. Il moto al quale siamo interessati è quello nel sistema di riferimento del laboratorio: dobbiamo effettuare il cambio di coordinate inverso a quello introdotto dall'equazione (2.37). La traiettoria descritta dall'elettrone è una *epitrocoide*: questo accade poichè vanno considerati contemporaneamente il moto della singola particella e la rotazione rigida del plasma.

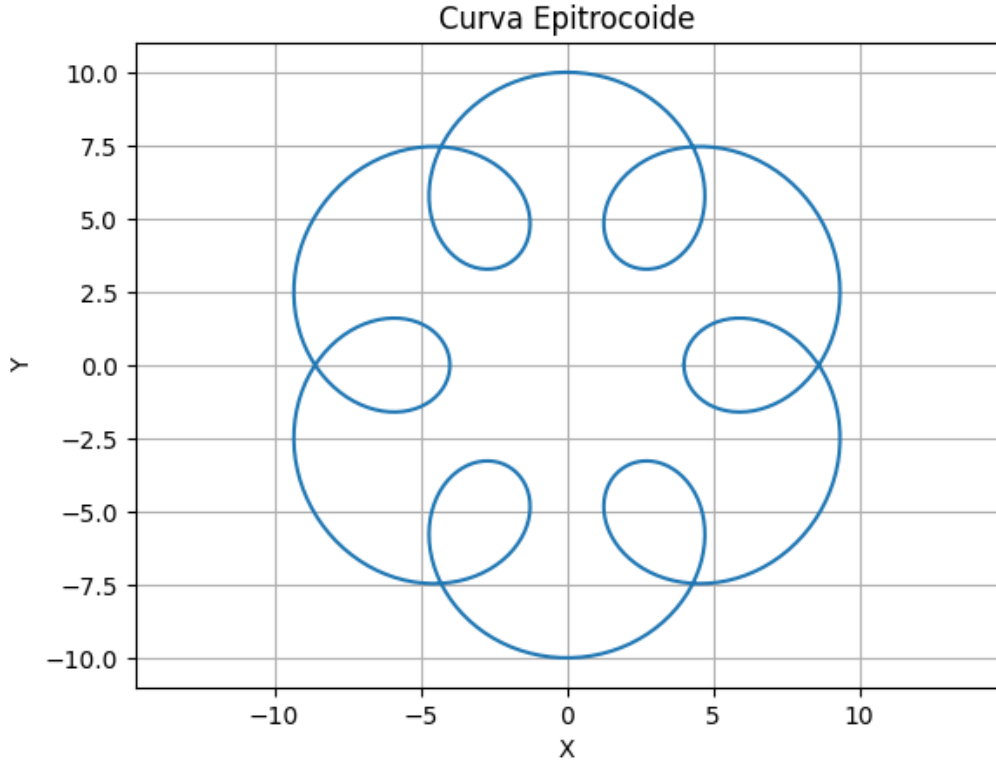


Figura 2.4: Traiettoria descritte da un elettrone nella colonna di plasma.

## 2.5 Equilibrio termico

Vogliamo ora esaminare le proprietà all'equilibrio di un plasma assi-simmetrico non-neutro tenendo in considerazione gli effetti di natura termica: lo strumento ideale sono le equazioni di Vlasov-Poisson in condizioni di stato stazionario, ossia tali per cui  $\partial/\partial t = 0$ . Le costanti del moto del problema in analisi sono:

$$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + p_\theta^2 + p_z^2) - e\Phi(r) \quad \text{Energia} \quad (2.40)$$

$$P_\theta = r \left( p_\theta - \frac{mr\Omega}{2} \right) \quad \text{Momento angolare canonico} \quad (2.41)$$

$$p_z \quad \text{Quantità di moto - componente z} \quad (2.42)$$

L'identificazione delle costanti del moto è fondamentale poichè fornisce degli strumenti che consentono di determinare la distribuzione  $f(r, \vec{p})$  nello spazio delle fasi. Supponiamo infatti che  $c = c(\vec{x}, \vec{p}, t)$  sia una costante del moto: in tal caso sappiamo che

$$\frac{dc}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla c + \frac{F}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} c = 0, \quad (2.43)$$

ossia l'evoluzione di  $c$  nello spazio delle fasi rispetta il teorema di Liouville. Una distribuzione  $f = f(c_1, c_2 \dots c_k)$  che sia funzione di costanti del moto è soluzione dell'equazione di Vlasov: nel caso di nostro interesse andremo allora a cercare una

relazione funzionale del tipo  $f(H, P_\theta, p_z)$ . Una classe di equilibri interessanti è quella delle funzioni di distribuzione che dipendono da  $H$  e  $P_\theta$  per mezzo di una combinazione lineare del tipo  $H - \omega P_\theta$ : tali  $f$  descrivono rotazioni rigide della colonna di plasma con  $\omega$  costante, senza quindi strati che scorrono a velocità diverse. Siamo interessati a distribuzioni definite nello spazio delle fasi come

$$f(r, \vec{p}) = f(H - \omega P_\theta, p_z). \quad (2.44)$$

Manipolando le definizioni di momento angolare canonico ed energia del sistema preso in considerazione è possibile ottenere una formulazione alternativa per la combinazione lineare dalla quale dipende la distribuzione di probabilità:

$$H - \omega P_\theta = \frac{1}{2m} [p_r^2 + (p_\theta - m\omega r)^2 + p_z^2] + \psi(r), \quad (2.45)$$

dove  $\psi(r)$  è un potenziale efficace della forma

$$\psi(r) = \frac{mr^2}{2} (\omega\Omega - \omega^2) - e\Phi(r) \quad (2.46)$$

Lavoriamo ora con

$$f(r, \vec{p}) = \frac{\hat{n}_e}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{H - \omega P_\theta}{k_B T}\right), \quad (2.47)$$

che è una distribuzione dipendente da un'hamiltoniana di rotazione rigida in condizioni di equilibrio termico a cui un plasma non-neutro isolato tenderebbe per mezzo di collisioni binarie fra costituenti elementari. Possiamo determinare quale sia la densità d'equilibrio finale integrando la  $f(r, \vec{p})$  nello spazio dei momenti, ottenendo che

$$n(r) = \hat{n}_e \exp\left[-\frac{\psi(r)}{k_B T}\right], \quad (2.48)$$

con una forte dipendenza sul potenziale efficace. Una volta determinato il profilo di densità, sostituiamo il risultato ottenuto nell'equazione di Poisson per ricavare la seguente relazione differenziale per il potenziale efficace:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 2m \left\{ \left( \omega\Omega - \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{2} \right) + \frac{\omega_p^2}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\psi(r)}{k_B T}\right) \right] \right\} \quad (2.49)$$

La colonna di plasma è radialmente confinata (ossia  $n_e(r \rightarrow \infty) = 0$ ) solamente nel momento in cui

$$\omega\Omega - \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{2} > 0 : \quad (2.50)$$

notiamo che le velocità angolari limite  $\omega^\pm$  sono proprio quelle che avevamo calcolato nel caso dell'equilibrio di una colonna infinita di plasma freddo in rotazione. Se  $\omega$  si discosta sensibilmente dai valori soluzione dell'equazione di secondo grado e si trova nella regione ammessa, allora il profilo di densità presenterà una dipendenza radiale debole: se al contrario  $\omega \simeq \omega^\pm$  si ha una caduta repentina di  $n(r)$  nel giro di alcune lunghezze di Debye.

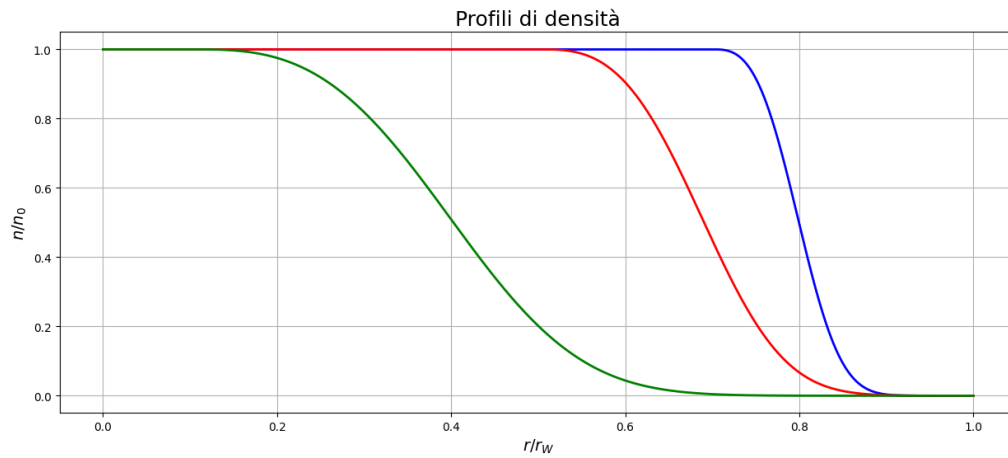


Figura 2.5: Differenti profili di densità: l'andamento a zero è fortemente legato alla  $\omega$  considerata.

## Capitolo 3

### Instabilità di diocotron

Nel capitolo precedente, la velocità angolare era indipendente dalla posizione radiale (ossia  $\partial\omega/\partial r = 0$ ): in questo capitolo non è più presente questa restrizione poichè esamineremo le caratteristiche principali dell'instabilità di *diocotron*, che è causata da una velocità relativa non nulla presente fra diversi strati di fluido. Il plasma che vogliamo trattare è composto da soli elettroni ed a bassa densità: il regime con cui vogliamo lavorare è

$$\begin{cases} \omega_p^2/\Omega^2 \ll 1, \\ n_i(r) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Il plasma elettronico che prendiamo in considerazione è confinato radialmente da un campo magnetico assiale  $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$ : dato il limite in cui ci siamo posti trascuriamo gli effetti inerziali elettronici ( $m \rightarrow 0$ ). L'equazione dei momenti fornisce un criterio per determinare il movimento di un elemento di fluido, in quanto il primo membro dipendente dalla massa elettronica risulta essere identicamente nullo come evidenziato in seguito

$$0 = -en(\vec{x}, t) \left\{ \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{V(\vec{x}, t) \times B_0\hat{e}_z}{c} [c] \right\} \quad (3.2)$$

Ricavare dalla relazione (3.2) la velocità media con cui evolve il plasma è immediato: in seguito è riportato il risultato e le varie componenti espresse in coordinate polari, che si addicono maggiormente a trattare le simmetrie di nostro interesse.

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = -\frac{c}{B_0} \nabla \Phi(\vec{x}, t) \times \hat{e}_z \left[ \frac{1}{c} \right] \quad (3.3)$$

$$V_r(r, \theta, t) = -\frac{c}{B_0 r} \left[ \frac{1}{c} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} [\Phi(r, \theta, t)] \quad (3.4)$$

$$V_\theta(r, \theta, t) = \frac{c}{B_0} \left[ \frac{1}{c} \right] \frac{\partial}{\partial r} [\Phi(r, \theta, t)] \quad (3.5)$$

Notiamo che la velocità calcolata con la relazione (3.3) ha divergenza nulla: questo comporta la scomparsa di uno dei tre termini che costituiscono l'equazione di continuità, che insieme all'equazione di Poisson fornisce tutte le informazioni necessarie



per descrivere l'evoluzione del sistema. Espresse in coordinate polari, esse risultano:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{B_0 r} \left[ \frac{1}{c} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{c}{B_0 r} \left[ \frac{1}{c} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} n(r, \theta, t) = 0 \quad (3.6)$$

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi(r, \theta, t) = 4\pi \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] en(r, \theta, t) \quad (3.7)$$

Notiamo che nel limite di  $m \rightarrow 0$  il rapporto  $(\omega_p/\Omega)^2$  che definisce le condizioni in cui stiamo considerando il plasma si avvicina allo zero, mentre la frequenza di diocotron

$$\omega_D(r) = \frac{\omega_p^2}{2\Omega} = \frac{2\pi n_0(r) ec}{B_0} \quad (3.8)$$

rimane finita.

### 3.1 Teoria perturbativa lineare

Per investigare le proprietà del set di equazioni introdotto nella sezione precedente, lavoriamo con piccole perturbazioni che rompano la simmetria azimutale: supponiamo di introdurre delle eccitazioni che presentano una dipendenza dalla coordinata angolare  $\theta$  in modo tale da avere una densità ed un potenziale elettrostatico pari a

$$n(r, \theta, t) = n_0(r) + n_1(r, \theta, t) = n_0(r) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} n_1^l(r) \exp(il\theta - i\omega_l t), \quad (3.9)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_0(r) + \Phi_1(r, \theta, t) = \Phi_0(r) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Phi_1^l(r) \exp(il\theta - i\omega_l t), \quad (3.10)$$

dove il parametro  $l$  è il numero che descrive il modo azimutale della perturbazione. Andando a sostituire la densità  $n(r, \theta, t)$  nell'equazione di continuità possiamo compiere il primo passo per la determinazione delle autofrequenze dei modi di diocotron e delle autofunzioni: dato che vogliamo effettuare un'analisi lineare trascuriamo tutti i termini di ordine superiore nella perturbazione. Considerando i singoli termini abbiamo che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial r} = -i \frac{\partial}{\partial r} [n_0(r)] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} l \Phi_1^l(r) \exp(il\theta - i\omega_l t) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial n}{\partial \theta} = i \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_0(r)] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} l n_1^l(r) \exp(il\theta - i\omega_l t) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -i \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \omega_l n_1^l(r) \exp(il\theta - i\omega_l t) \quad (3.13)$$

Introducendo quanto trovato nell'equazione di continuità e considerando l'evoluzione di uno specifico modo di diocotron abbiamo che

$$n_1^l(r) \left\{ \frac{cl}{B_0 r} \left[ \frac{1}{c} \right] \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_0(r)] - \omega_l \right\} = \frac{cl}{B_0 r} \left[ \frac{1}{c} \right] \Phi_1^l(r) \frac{\partial}{\partial r} [n_0(r)] \quad (3.14)$$

Effettuiamo la stessa analisi con l'equazione di Poisson: vogliamo introdurre le perturbazioni non-assisimmetriche in un contesto di analisi perturbativa lineare. Consideriamo anche in questo caso i singoli termini, ottenendo che

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\Phi(r, \theta, t)] = - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} l^2 \Phi_1^l(r) \exp(il\theta - i\omega_l t) \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [\Phi(r, \theta, t)] \right\} = \frac{1}{r} A(r, \theta, t) + B(r, \theta, t) \quad (3.16)$$

dove

$$A(r, \theta, t) = \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_0(r)] + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_1^l(r)] \exp(il\theta - i\omega_l t) \quad (3.17)$$

$$B(r, \theta, t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\Phi_0(r)] + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\Phi_1^l(r)] \exp(il\theta - i\omega_l t) \quad (3.18)$$

Notiamo ora che possiamo distinguere due equazioni, una per i termini di grado zero che è l'equazione di Poisson che abbiamo già utilizzato in precedenza ed una seconda per i termini di grado uno, infatti si ha che:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_0(r)] + \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\Phi_0(r)] = 4\pi \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] en_0(r) \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_1^l(r, \theta, t)] \right\} - l^2 \Phi_1^l(r) = 4\pi \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] en_1^l(r) \quad (3.20)$$

Possiamo riscrivere il risultato appena ottenuto per le perturbazioni di primo ordine al potenziale riconoscendo la presenza in (3.14) di frequenze caratteristiche dei fenomeni di plasma quali:

$$\Omega = \frac{eB_0}{mc} \quad \text{frequenza di ciclotrone} \quad (3.21)$$

$$\omega_p^2(r) = 4\pi \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{n_0(r)}{m} \quad \text{frequenza di plasma} \quad (3.22)$$

$$\omega^-(r) = \frac{c}{rB_0} \left[ \frac{1}{c} \right] \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_0(r)] \quad \text{frequenza di rotazione} \quad (3.23)$$

e sostituendo  $n_1(r)$  nell'equazione di Poisson per i termini di primo ordine. Così facendo troviamo il problema agli autovalori, che può essere utilizzato per determinare le autofrequenze  $\omega_l$  e di conseguenza le autofunzioni  $\Phi_l(r)$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_1^l(r)] \right\} - \left( \frac{l}{r} \right)^2 \Phi_1^l(r) = - \frac{l}{\Omega r} \frac{\partial}{\partial r} [\omega_p^2(r)] \frac{\Phi_1^l(r)}{\omega_l - l\omega^-(r)} \quad (3.24)$$

### 3.1.1 Profilo di densità a gradino

Supponiamo che il profilo di densità  $\rho(r, \theta) = \rho(\theta)$  sia quello a gradino introdotto in precedenza. Il salto avviene per la posizione radiale  $r = R_p$  ed il raggio della

regione confinante della trappola è  $r = R_w$ :

$$n_0(r) = \begin{cases} n_0 & r \leq R_p \\ 0 & R_p < r \leq R_w \end{cases} \quad (3.25)$$

Vogliamo trovare le autofrequenze ed i modi normali per un sistema siffatto: iniziamo lavorando con l'equazione di Poisson che abbiamo determinato in precedenza. Raccogliamo la frequenza di ciclotrone in modo tale da ottenere che

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_1^l(r)] \right\} - \frac{l^2}{r} \Phi_1^l(r) = -2l \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\omega_p^2(r)}{2\Omega} \right] \frac{\Phi_1^l(r)}{\omega_l - l\omega^-(r)} \quad (3.26)$$

La derivata del rapporto fra la frequenza di plasma elevata al quarto ed il doppio della frequenza di ciclotrone è diversa da zero solamente nella discontinuità posta ad  $r = R_p$ . Detto  $\omega_D$ , oppure frequenza angolare di Diocotron, il rapporto precedentemente citato, si deve avere che:

$$\frac{d\omega_D}{dr} = -\omega_D \delta(r - R_p) \quad (3.27)$$

Quando la posizione radiale coincide con il raggio di plasma, il secondo membro risulta essere identicamente nullo. Le soluzioni da ricercare per una equazione differenziale di questo genere sono del tipo  $r^\lambda$ : sostituendo un tale ansaltz nell'equazione

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_1^l(r)] \right\} - \frac{l^2}{r} \Phi_1^l(r) = 0 \quad (3.28)$$

si può ricavare come  $\lambda = \pm l$ . Le condizioni che consentono di univocamente determinare la soluzione sono la non-divergenza della stessa quando il raggio è identicamente nullo, l'annullamento della perturbazione di potenziale sulla parete della trappola ed il collegamento con continuità della soluzione fra le due regioni prese in considerazione. Imponendo le prime due ci riportiamo ad un andamento del tipo

$$\Phi_1^l(r) = \begin{cases} A (r/R_w)^l & r \leq R_p \\ C \left[ (r/R_w)^l - (r/R_w)^{-l} \right] & R_p < r \leq R_w \end{cases} \quad (3.29)$$

Consideriamo ora quanto accade all'interfaccia fra le due regioni dove abbiamo calcolato le soluzioni. Richiediamo innanzitutto che il potenziale sia continuo all'interfaccia; questo si traduce in

$$A \left( \frac{R_p}{R_w} \right)^l = C \left[ \left( \frac{R_p}{R_w} \right)^l - \left( \frac{R_p}{R_w} \right)^{-l} \right] \quad (3.30)$$

Il campo presenta tuttavia una discontinuità: questo è dovuto alla presenza della delta in corrispondenza di  $r = R_p$ . Quantifichiamo quale sia il contributo della delta nella regione di cambio di densità integrando in un intervallo  $\varepsilon$  piccolo a piacere la relazione (3.26). Abbiamo quindi che

$$\int_{R_p-\varepsilon}^{R_p+\varepsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_1^l(r)] \right\} - \frac{l^2}{r} \Phi_1^l(r) \right] dr = - \int_{R_p-\varepsilon}^{R_p+\varepsilon} \left[ 2l \frac{\Phi_1^l}{\omega_l - l\omega_D} \frac{d\omega_D}{dr} \right] dr \quad (3.31)$$

Le equazioni (3.29) ed (3.31) costituiscono un sistema lineare di rapida risoluzione. Le autofrequenze e le autofunzioni in analisi lineare per il semplice profilo di densità preso in considerazione risultano essere

$$\omega_l = \omega_D \left[ l - 1 + \left( \frac{R_p}{R_w} \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

$$\Phi^l = \begin{cases} A (r/R_w)^l & r \leq R_p \\ A (r/R_w)^l \frac{(r/R_w)^l - (r/R_w)^{-l}}{(R_p/R_w)^l - (R_p/R_w)^{-l}} & R_p < r \leq R_w \end{cases} \quad (3.33)$$

### 3.1.2 Plasma fuori asse

Supponiamo ora di lavorare con una colonna di plasma caratterizzata da  $R_p \ll 1$  (al limite filiforme) che si trova posta sull'asse  $x$  ad una certa distanza  $d$  dall'asse della trappola. Lavorando con il metodo della carica immagine in modo tale da rispettare la condizione di potenziale nullo sulle pareti della trappola, vogliamo valutare quali siano le correzioni alle auto-frequenze precedentemente determinate. In una certa posizione  $(r, \theta)$  il potenziale dovuto alla presenza di carica "reale" e carica immagine risulta pari a:

$$\Phi_{tot}(r, \theta) = -2\lambda \log \left( \frac{|\vec{r} - \vec{r}_\lambda|}{R_w} \right) - 2\lambda' \log \left( \frac{|\vec{r} - \vec{r}_{\lambda'}|}{R_w} \right) + 2c \quad (3.34)$$

Nel limite di posizione radiale che tende ad infinito il potenziale sopra riportato presenta un andamento del tipo

$$\Phi_{tot}(r, \theta) \simeq -(\lambda + \lambda') \log \left( \frac{r}{R_w} \right) + 2c \quad (3.35)$$

Dato che vogliamo avere un potenziale costante ad infinito per far sì che il campo sia identicamente nullo, è necessario che  $\lambda = -\lambda'$ . La condizione per aver potenziale nullo sulla parete contenitiva della trappola si traduce in

$$\frac{R_w^2 + d^2 - 2R_w d \cos \theta}{R_w^2 + x^2 - 2R_w x \cos \theta} = \exp \left( \frac{2c}{\lambda} \right) = \delta^2 \quad (3.36)$$

Dato che la relazione che abbiamo trovato deve valere per ogni possibile posizione angolare si deve imporre che  $\delta x^2 = d$  per annullare il termine dipendente dal coseno. La carica immagine deve trovarsi in  $r = R_w^2/d$ .

Per determinare quali siano le correzioni alle auto-frequenze precedentemente determinate, continuiamo a sfruttare la carica immagine ed in particolare consideriamo quali siano le forze attrattive che sono presenti fra i due fili di carica. Nelle condizioni in cui ci siamo posti, il campo elettrico in  $d$  risulta essere pari a

$$\vec{E}_i = 2\lambda \frac{1}{(R_w^2/d) - d} \hat{e}_r \quad (3.37)$$

Valutando la velocità di rotazione, possiamo poi sfruttare che  $\omega_1^{nl} = v_\theta/r$  in modo tale da determinare la frequenza angolare non lineare, che ora presenta una dipendenza sulla coordinata radiale a cui si trova la colonna di plasma

$$\omega_1^{nl} = -\frac{2c\lambda}{BR_w^2} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \right] \frac{1}{1 - (r/R_w)^2} \quad (3.38)$$

La casistica con cui abbiamo lavorato è altamente irrealistica, poichè solitamente i plasmi che vengono trattati in laboratorio hanno un estensione radiale non trascurabile rispetto a quella della trappola. Per tener conto della sua dimensionalità finita è possibile aggiungere un fattore correttivo alla reazione precedente, in modo tale che la frequenza non lineare risulti essere

$$\omega_1^{nl} = \omega_D \left( \frac{R_p}{R_w} \right)^2 \frac{1}{1 - (r/R_w)^2} \quad (3.39)$$

# Capitolo 4

## Richiami di Elettronica

### 4.1 Introduzione

In questo capitolo sono presenti alcuni rudimenti di elettronica che consentono di comprendere meglio il funzionamento del setup sperimentale che viene utilizzato in laboratorio. Iniziamo quindi ricordando la definizione di corrente elettrica, che si esprime matematicamente come la derivata della carica elettrica rispetto al tempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (4.1)$$

I circuiti elettrici sono formati da elementi circuitali interconnessi tra di loro: un esempio ne sono i bipoli elettrici, che sono dispositivi a due terminali. Il più semplice bipolo lineare è la **resistenza**, le cui caratteristiche sono racchiuse nella *Legge di Ohm*:

$$V = RI. \quad (4.2)$$

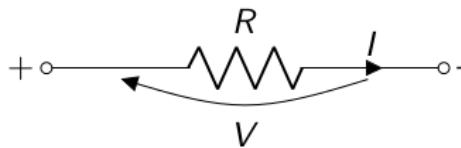


Figura 4.1: Rappresentazione schematica di una resistenza

Un punto comune a due o più bipoli è detto nodo: i bipoli si possono disporre in modo tale da formare dei percorsi chiusi, detti maglie. I concetti di nodo e maglia consentono di semplificare l'analisi di circuiti complessi per mezzo delle *Leggi di Kirchhoff*. La *KVL (Kirchhoff Voltage Law)* afferma che lungo una qualsiasi maglia di un circuito la somma algebrica di tutte le tensioni è pari a zero:

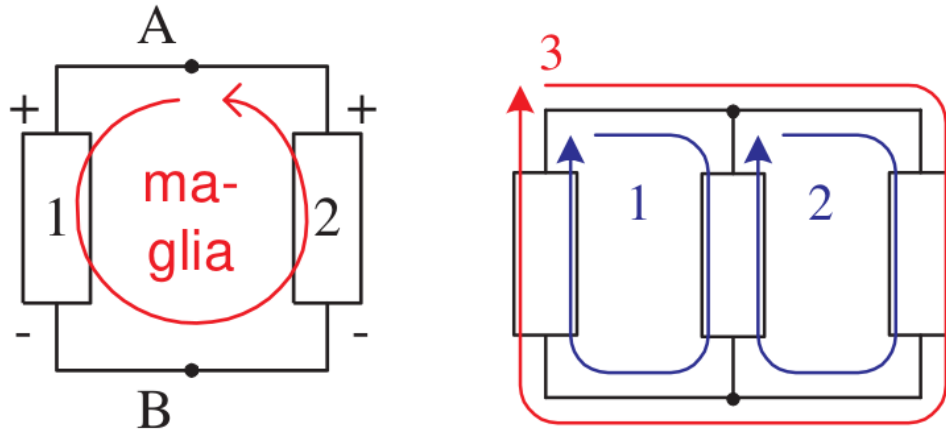
$$\sum_{k \in \text{maglia}} V_k = 0, \quad (4.3)$$

dove si considerano positive le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia e negative le tensioni discordi. La *KCL (Kirchhoff Current Law)* riguarda

invece le correnti ed evidenzia come in un qualsiasi nodo di un circuito la somma algebrica di tutte le correnti è identicamente nulla

$$\sum_{k \in \text{maglia}} I_k = 0, \quad (4.4)$$

dove sono positive le  $I_k$  entranti nel nodo, mentre negative quelle uscenti.



Circuito con una maglia e due nodi      Circuito con tre maglie e due nodi

Figura 4.2: Esempi di maglie in un circuito

Un altro esempio di bipolo è il **condensatore**, che è un elemento circuitale costituito da due superfici metalliche parallele separate da un isolante. Le armature metalliche possono immagazzinare della carica, in quantità proporzionale alla tensione applicata

$$q(t) = Cv(t), \quad (4.5)$$

dove con  $C$  si indica la capacità del condensatore, misurata in farad (F).

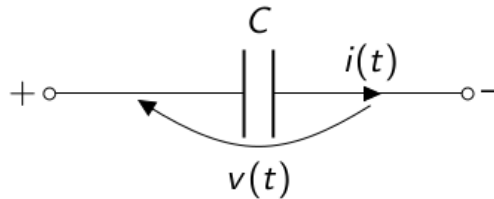


Figura 4.3: Rappresentazione schematica di un condensatore

L'ultimo esempio di bipolo a cui siamo interessati è l'**induttore**, che è costituito da un filo di materiale conduttore percorso da corrente (solenoidale). All'interno dell'avvolgimento si ha un flusso di campo magnetico  $\Phi$  che è proporzionale alla corrente che percorre il filo

$$\Phi(t) = Li(t), \quad (4.6)$$

dove  $L$  è l'induttanza dell'induttore e si misura in henry (H).

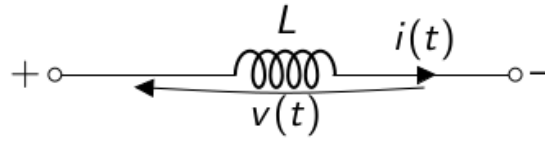


Figura 4.4: Rappresentazione schematica di un induttore

#### 4.1.1 Circuito RC

Il circuito RC è un circuito del primo ordine, ossia è caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine.

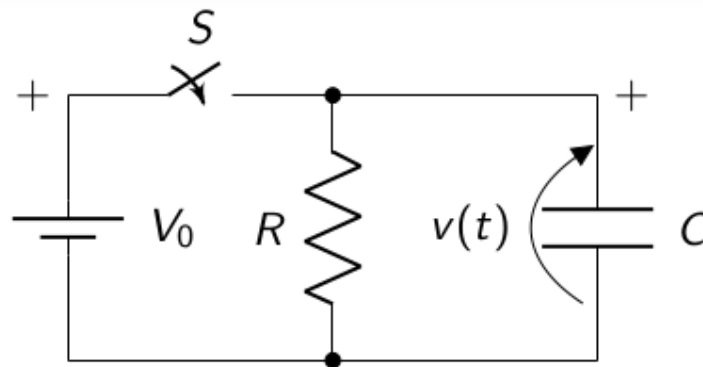


Figura 4.5: Rappresentazione schematica di un circuito RC

Gli elementi circuitali presenti sono tre:

- un interruttore ideale  $S$  che si comporta come un circuito aperto quando è spento e come un cortocircuito quando è acceso
- una resistenza  $R$
- un condensatore  $C$

Quando l'interruttore è acceso si assiste ad una carica del condensatore: la differenza di potenziale  $v(t)$  è pari a quella dovuta al generatore di tensione  $V_0$ . Mediante le semplici relazioni (4.2) e (4.5) introdotte in precedenza è possibile ricavare i valori di corrente nel resistore e di carica immagazzinata nel condensatore. Supponiamo ora di aprire l'interruttore scollegando di fatto il generatore di tensione: per risolvere il circuito occorre lavorare con le leggi di Kirchhoff. In particolare notiamo che

$$i_R(t) + i_C(t) = 0, \quad (4.7)$$

dove gli indici si riferiscono ai due elementi circuitali presente nell'unica maglia del circuito RC una volta aperto. La relazione (4.7) è un'equazione differenziale del primo ordine per la differenza di potenziale ai capi del condensatore, poichè effettuando le opportune sostituzioni è possibile mostrare come

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} = 0. \quad (4.8)$$



Notiamo che la soluzione di (4.8) sia un esponenziale reale, che imponendo la condizione iniziale di potenziale al tempo dello spegnimento dell'interruttore pari a  $V_0$  risulta essere

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (4.9)$$

## 4.2 Dominio delle frequenze

Lavorare nello spazio delle frequenze per risolvere i circuiti elettrici è vantaggioso, perchè si assiste ad una notevole semplificazione dei calcoli da compiere: le equazioni differenziali presenti nel dominio del tempo che governano il comportamento dei circuiti RLC (resistori, induttori, condensatori) diventano delle relazioni algebriche. Nel dominio delle frequenze gli elementi circuitali che abbiamo precedentemente introdotto sono rappresentati in termini di impedenza o ammettenza, che si comportano come resistenze in un'analisi algebrica: questo rende più immediata l'analisi dei circuiti. Nel dominio delle frequenze è anche possibile effettuare un'analisi della risposta in frequenza, cruciale per la progettazione di filtri.

### 4.2.1 Trasformata di Fourier

Un segnale è periodico quando si ripete identicamente dopo un intervallo di tempo  $T$ , detto periodo: l'inverso del periodo è la frequenza e viene solitamente indicata con la lettera  $f$ . Ogni **segnale periodico**  $x(t)$  con periodo  $T = 1/f_0$  può+ essere espresso come **serie di Fourier**

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2k\pi f_0 t) + b_k \sin(2k\pi f_0 t)], \quad (4.10)$$

dove  $a_k$  e  $b_k$  sono detti coefficienti di Fourier e si ottengono mediante integrazione su un periodo del segnale di partenza che si vuole ricostruire

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(2k\pi f_0 t) dt, \quad (4.11)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(2k\pi f_0 t) dt. \quad (4.12)$$

Lavorando con le *formule di Eulero* per il seno ed il coseno è possibile scrivere la serie di Fourier in forma complessa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(j2k\pi f_0 t), \quad (4.13)$$

dove  $c_k$  sono dei coefficienti complessi tali per cui

$$c_k = c_{-k}^* = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-j2k\pi f_0 t) dt \quad (4.14)$$

Un segnale non periodico può essere considerato come un segnale periodico caratterizzato da un periodo tendente ad infinito (e di conseguenza una frequenza caratteristica tendente a zero): in questo caso l'analisi di Fourier prevede il passaggio dalla sommatoria all'integrale. Si identifica con il nome **Trasformata di Fourier** di un segnale  $x(t)$  la seguente quantità:

$$X(f) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (4.15)$$

L'anti-trasformata consente di effettuare il passaggio inverso, ossia da dominio delle frequenze al dominio del tempo e si differenzia dalla trasformata per il segno dell'esponente (che è quindi positivo nel caso di  $\mathcal{F}^{-1}$ ) e per il fatto che l'integrazione viene effettuata sulle frequenze.

La trasformata di Fourier consente di studiare le equazioni differenziali che risolvono i circuiti nello spazio delle frequenze, dove figurano come equazioni algebriche: questo è possibile poichè valgono le seguenti relazioni

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f), \quad (4.16)$$

$$\int x(t) dt \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f). \quad (4.17)$$

## 4.2.2 Impedenza

Passando dal dominio del tempo al dominio della frequenza per mezzo della trasformata di Fourier, notiamo che vale per tutti e tre gli elementi circuitali una relazione lineare fra intensità di corrente e differenza di potenziale: è infatti possibile scrivere che

$$V(f) = Z(f) I(f), \quad (4.18)$$

dove  $Z(f)$  è l'impedenza, una quantità che si misura in ohm e che per elementi circuitali in serie o in parallelo si compone analogamente ad una resistenza.

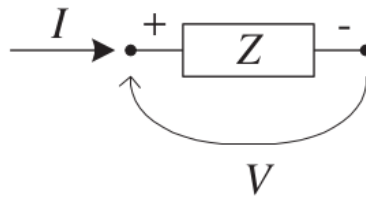


Figura 4.6: Rappresentazione schematica di un'impedenza

Nei casi dei tre bipoli presi in considerazione le impedenze sono differenti fra loro, infatti si ha che nel caso di:

$$\text{un resistore} \longleftrightarrow Z(f) = R \quad (4.19)$$

$$\text{un'induttanza} \longleftrightarrow Z(f) = j2\pi f L \quad (4.20)$$

$$\text{un condensatore} \longleftrightarrow Z(f) = \frac{1}{j2\pi fL} \quad (4.21)$$

L'impedenza  $Z$  è una grandezza complessa: la sua parte reale è la resistenza  $R$ , mentre la parte immaginaria prende il nome di reattanza  $X$ .

### 4.2.3 Risposta in frequenza

La **risposta in frequenza**  $H(f)$  di un circuito è definita come il rapporto fra i segnali di uscita e di ingresso nel dominio della frequenza, ossia come

$$H(f) = \frac{X_o(f)}{X_i(f)}, \quad (4.22)$$

dove con  $X_i(f)$  e  $X_o(f)$  sono indicate le trasformate di Fourier dei segnali in ingresso ed in uscita da un circuito. Solitamente la risposta in frequenza (che è una quantità complessa) viene espressa in termini di modulo  $|H(f)|$  e fase  $\angle H(f)$ , ossia in coordinate polari nel piano complesso: i diagrammi di Nyquist sono la rappresentazione della traiettoria di  $H(f)$  nel piano complesso.

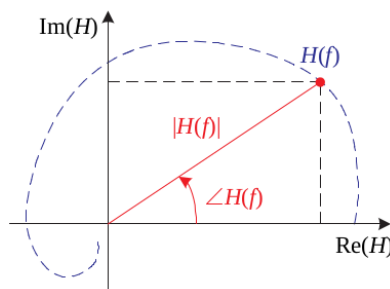


Figura 4.7: Esempio di diagramma di Nyquist

Notiamo che se l'ingresso è unitario, l'uscita coinciderà con la risposta in frequenza: dato che  $X_i(f) = 1$  se  $x_i(t) = \delta(t)$ , concludiamo che  $H(f)$  è la trasformata di Fourier della risposta ad un impulso (risposta impulsiva).

### Diagrammi di Bode

Per rappresentare graficamente  $H(f)$  si utilizzano i **diagrammi di Bode**. Tali grafici sono di due tipi:

- per le **ampiezze**, dove in ascissa si riporta la frequenza  $f$  in scala logaritmica, mentre in ordinata il modulo del guadagno in decibel.
- per la **fase**, che è analogo al precedente per quanto riguarda le scisse, mentre in ordinata riporta lo sfasamento.

### 4.2.4 Circuito RC passa-basso

Un filtro passa-basso è un sistema che permette il passaggio di frequenze al di sotto di una data soglia, detta frequenza di taglio, bloccando le alte frequenze. Un esempio

di circuito passa-basso passivo è il circuito RC presente in Figura 4.8, dove il segnale di output  $v_{out}$  è preso fra il resistore ed il condensatore.

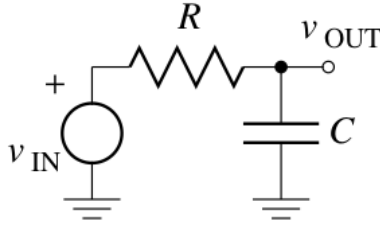


Figura 4.8: Rappresentazione schematica di un circuito RC passa-basso.

Nel dominio delle frequenze è possibile ricavare la corrente passante nella maglia come

$$I = \frac{V_{in}}{Z_R + Z_C} = \frac{V_{in} \cdot j2\pi fC}{1 + j2\pi fRC}, \quad (4.23)$$

lavorando quindi con l'impedenza totale del circuito, data in questo caso dalla somma di quelle dei due elementi circuitali. La tensione in uscita è pari alla differenza di potenziale ai capi del condensatore, che è nuovamente possibile ottenere ragionando in termini di impedenza

$$V_{out} = Z_C I = \frac{V_{in}}{1 + j2\pi fRC}. \quad (4.24)$$

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per procedere con il calcolo della risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}, \quad (4.25)$$

da cui con semplici passaggi algebrici possiamo determinare i diagrammi di Bode.

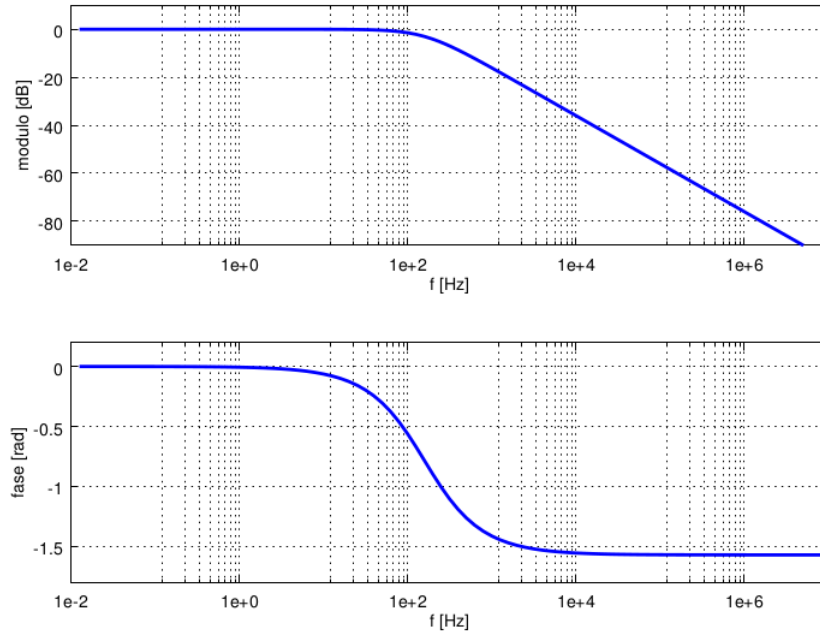


Figura 4.9: Diagrammi di Bode del circuito RC passa-basso.

### 4.2.5 Circuito RC passa-alto

L'RC passa alto (vedi Figura 4.10) è un esempio di filtro passa-alto, ossia è un circuito elettrico che permette solo il passaggio di frequenze al di sopra di un dato valore detto frequenza di taglio.

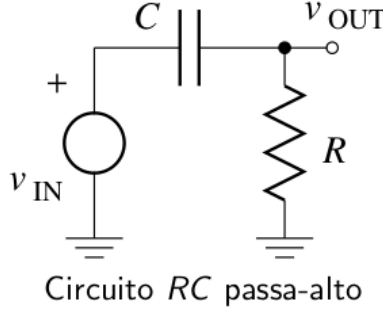


Figura 4.10: Rappresentazione schematica di un circuito RC passa-alto.

Il ragionamento che porta alla determinazione della risposta in frequenza è analogo a quello fatto nella sezione precedente. Partendo dalla corrente  $I$  nella maglia, data anche in questo caso dalla relazione (4.23) è possibile ricavare il segnale in uscita come

$$V_{out} = RI = \frac{V_{in} \cdot j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}, \quad (4.26)$$

con conseguente risposta in frequenza pari a

$$H(f) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}. \quad (4.27)$$

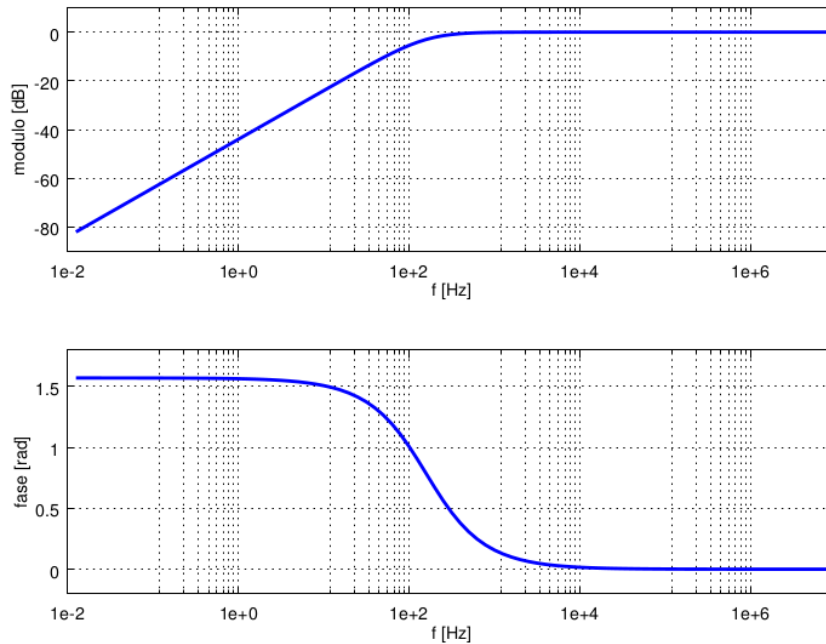


Figura 4.11: Diagrammi di Bode del circuito  $RC$  passa-alto.

## 4.3 L'amplificatore operazionale

I generatori di tensione possono essere di due tipologie:

- indipendenti, ossia generano grandezze elettriche indipendentemente da qualsiasi altra grandezza presente nel circuito.
- dipendenti, ossia la grandezza elettrica generata (tensione o corrente) ha un valore che è funzione di un'altra grandezza elettrica presente nel circuito.

L'amplificatore operazionale (detto anche **OpAmp**) è un generatore di tensione controllato in tensione che amplifica la differenza di tensione tra i due segnali di ingresso  $V^+$  e  $V^-$ : con '+' viene indicato l'ingresso '*non invertente*', mentre con '-' l'ingresso '*invertente*'.

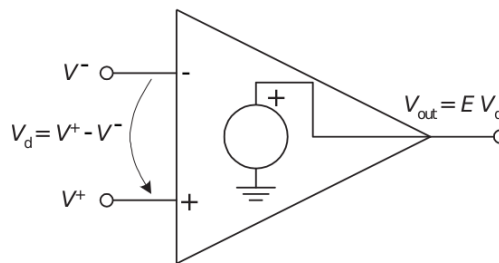


Figura 4.12: Rappresentazione schematica dell'amplificatore operazionale.

Il guadagno di tensione dell'OpAmp è infinito, ossia

$$V_{out} = EV_d = E(V^+ - V^-) \quad \text{con} \quad E \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

Solitamente l'amplificatore viene utilizzato in *configurazione retroazionata*: il segnale in uscita è riportato all'ingresso mediante una rete di retroazione costituita da elementi passivi come per esempio resistori. Sono possibili due tipologie di retroazione:

- positiva, con segnale d'uscita riportato all'ingresso non invertente.
- negativa, con segnale d'uscita riportato all'ingresso invertente.

I circuiti retroazionati hanno un comportamento simile a quello di una pallina appoggiata ad una superficie curva: possono essere stabili oppure instabili.

### 4.3.1 Amplificatore invertente

Il circuito che stiamo prendendo in considerazione presenta un solo amplificatore operazionale ideale: la rete di retroazione riporta il segnale all'ingresso invertente (ossia identificato con il segno meno sullo schema dell' OpAmp).

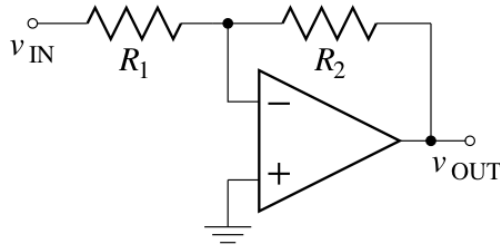


Figura 4.13: Rappresentazione schematica dell'amplificatore invertente.

Il circuito preso in analisi può essere descritto mediante il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} V_{in} - V^- = R_1 I_1 \\ V^- - V_{out} = R_2 I_2 \\ I_1 = I_2 \\ V_{out} = E(V^+ - V^-) = -EV^- \end{cases} \quad (4.29)$$

Dato che il guadagno  $E$  dell'amplificatore operazionale ideale è infinito, l'ultima equazione è risolvibile solamente se assume la forma indeterminata  $\infty \cdot 0$ : in tal caso il prodotto può assumere un valore finito. Sfruttando ora l'uguaglianza fra le due correnti è possibile verificare come

$$V_{out} = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}, \quad (4.30)$$

evidenziando come in questo circuito il guadagno dipenda solamente dal rapporto fra le due resistenze: la presenza del meno giustifica la qualifica di *invertente*.

### 4.3.2 Amplificatore non invertente

Un amplificatore che produce in uscita un segnale amplificato, avente una fase simile a quella dell'ingresso applicato, è detto amplificatore non invertente.

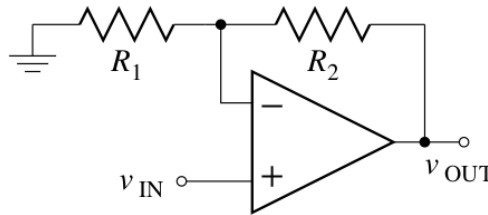


Figura 4.14: Rappresentazione schematica dell'amplificatore non invertente.

La rete di retroazione è identica al caso precedente: dato che la retroazione è negativa possiamo nuovamente applicare il principio di terra virtuale, ossia:

$$\begin{cases} V^- = V^+ = V_{in} \\ I^- = I^+ = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Andando nuovamente ad uguagliare le correnti passanti nelle due resistenze ricaviamo che

$$-\frac{V_{in}}{R_1} = \frac{V_{in} - V_{out}}{R_2}, \quad (4.32)$$

da cui banalmente segue che

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \quad (4.33)$$



# Capitolo 5

## Procedure di Laboratorio

In questo capitolo sono esposte le principali tecniche e procedure utilizzate in laboratorio, con un'attenzione particolare al setup sperimentale e agli strumenti di misura presenti.

### 5.1 Utilizzo della strumentazione

In primo luogo è necessario produrre il campo magnetico che consente di intrappolare le particelle cariche: il campo *solenoidale* è generato da una bobina che, se percorsa da 300 A di corrente, determina la presenza di un campo pari a 0.1 T. Noi lavoriamo solitamente con  $I = 390$  A: data la linearità della relazione possiamo facilmente ricavarci  $B$ .

Oltre alla bobina principale, sono presenti quattro bobine di correzione per limitare il più possibile il disallineamento e le irregolarità del campo: notiamo infatti che se le scolghiamo il plasma fuoriesce dalla trappola con una differente conformazione. I valori nominali delle quattro correnti sono: 0.48 A, 0.18 A, 1.06 A, 3.00 A.

#### 5.1.1 Temporizzazione

Il setup sperimentale presente in laboratorio è molto complesso: come si riesce a gestire il macchinario e a produrre le condizioni sperimentali ricercate? Un generatore ad 8 canali consente di temporizzare i potenziali nella trappola, specificandone l'ampiezza e l'intervallo di tempo per i quali essi devono agire. Il programma che gestisce il generatore accetta come input un file di testo contenente le istruzioni necessarie: le seguenti righe di codice riportano un esempio di file di istruzioni funzionante ed utilizzato in laboratorio.

```
*Clock 1ms
*Name      ENDC ENDP ZERO CH4      CAM      FD      SW      OSC
*Channels  1      2      3      4      5      6      7      8
*Amplitude 100    100    100    100    100    100    100    100 100
10000      0      0      0      0      0      0      3      0
2000       0      0      0      0      0      3      0      0
500         5      0      0      0      0      0      0      1
500         5      5      0      0      0      0      0      0
```

La prima riga consente di scegliere la scala di tempo con la quale di vogliono specificare le istruzioni: le possibili scelte sono  $1\text{ ms}$  oppure  $1\text{ }\mu\text{s}$  (da indicare però come  $1\text{ MHz}$ ). La seconda e la terza riga consentono di associare delle etichette ai vari canali presenti: solitamente i primi due sono riservati ai potenziali di confinamento, l'ultimo all'oscilloscopio e quello indicato dal nome FD al feedback damping. Il canale 7 è riservato allo switch per generare il plasma, mentre il canale 5 è quello del trigger della camera CCD. I primi due canali non riportano i valori del potenziale di confinamento, ma sono degli interruttori modulari per l'attivazione del potenziale confinante: i possibili valori variano fra 0 (potenziale più negativo) e 5 (potenziale più positivo). Notiamo che nella penultima riga il canale ENDC ha come valore 5: questo accade perchè vogliamo rimuovere la barriera di potenziale presente nell'estremità dove è posto il collettore per valutare la quantità di carica del plasma prodotto. La riga precedente abilita l'utilizzo del feedback damping: questo consente di riportare il plasma prodotto (solitamente fuori asse) verso il centro della trappola.

Le istruzioni presenti sono **sequenziali**: ogni singola riga non può avere una durata superiore alle 30000 unità di tempo selezionate e su ogni colonna deve essere riportata l'informazione relativa allo specifico canale.

Una volta prodotto il file di controllo, lo si deve fornire come input del programma **Waveform Generator**: per caricarlo si deve seguire il path *file/import* e svolgere le istruzioni che compaiono a video. Selezionando *output* e *configure channel* è possibile verificare la corretta corrispondenza dei canali: una volta aver effettuato questa configurazione è necessario selezionare l'opzione *send all*.

## 5.1.2 Oscilloscopio

L'oscilloscopio che viene utilizzato in laboratorio presenta 4 canali:

1. segnale proveniente dal **collettore**
2. amplificatore in trans-impedenza, con segnale proveniente da  $S_{2b}$
3. trigger dell'oscilloscopio, con soglia pari a  $500\text{ mV}$
4. libero

Nel momento in cui vengono salvate le misurazioni, il file che viene prodotto contiene solamente i valori numerici delle quantità che sono in quel momento visibili sull'oscilloscopio: lavorando con il secondo canale possiamo apprezzare l'efficacia del *feedback damping*, che smorza esponenzialmente il segnale legato all'offset del plasma prodotto in  $6/7\text{ ms}$ . L'oscilloscopio presenta 12 bit verticali, ossia  $2^{12}$  divisioni: la risoluzione in ordinata può essere molto elevata. Lo strumento presente in laboratorio può produrre degli errori in presa dati: quando il segnale preso in analisi è fuori scala potrebbe accadere che a volte produca dei valori infiniti (nel file di output sono presenti i simboli  $\infty$ ). Per evitare questa problematica è necessario lavorare a scale

differenti, che consentano di contenere nella schermata tutto il segnale che si vuole analizzare.

### 5.1.3 Fotocamera

La fotocamera utilizzata scatta delle foto di dimensioni 2448 x 2048: tali valori sono eccessivi, per questo motivo è consigliabile effettuare un binning per dimezzare sia il numero di righe che il numero di colonne. Il tempo di esposizione con cui vengono stampate le foto dipende dallo scopo con cui viene scattata l'immagine:  $t_{esp} = 2\text{ ms}$  se vogliamo investigare del plasma, oppure  $t = 2\text{ s}$  se vogliamo valutare le dimensioni, in metri, del singolo pixel.

## 5.2 Esperienza 0

L'esperienza introduttiva in laboratorio consiste nello studio di caratteristiche fondamentali del plasma come per esempio la carica totale: una frazione importante dell'esperimento è dedicata alla calibrazione dell'apparato e allo studio delle sistematiche dovute per esempio alla presenza di rumore.