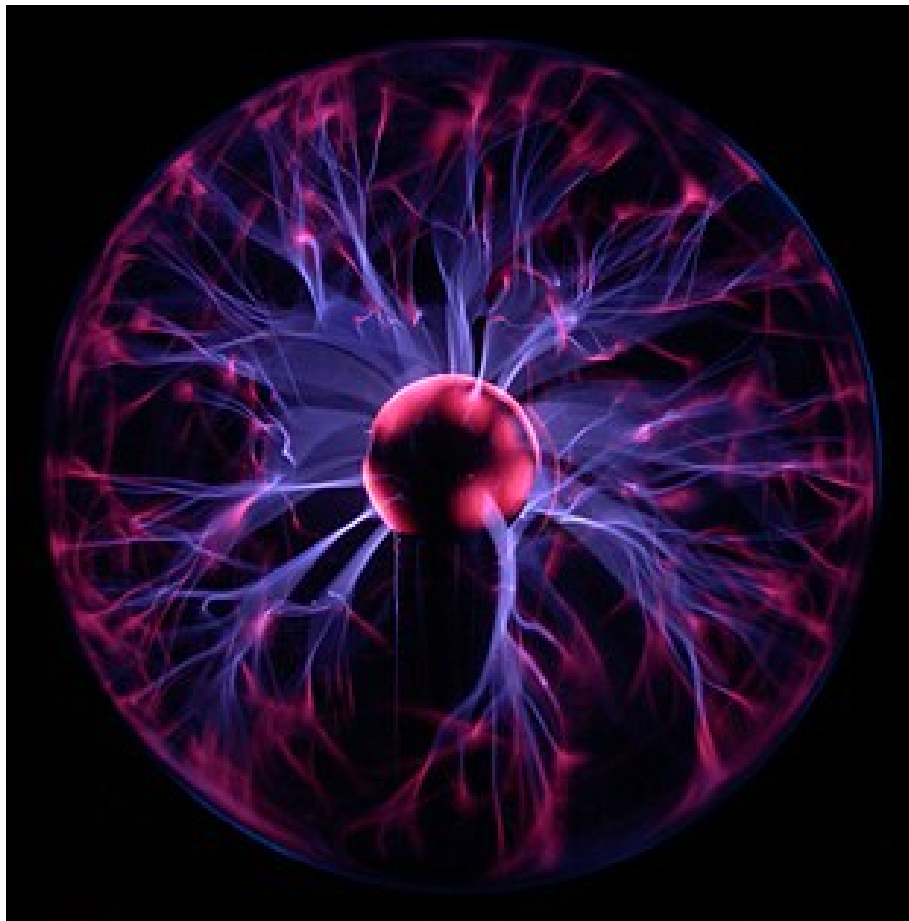


Laboratorio di Fisica dei Plasmi

Negrini Filippo

A.A. 2023/2024



Indice

1	Introduzione	2
1.1	Struttura della dispensa	2
2	Modelli teorici	3
3	Richiami di Elettronica	4
3.1	Introduzione	4
3.1.1	Circuito RC	6
3.2	Dominio delle frequenze	7
3.2.1	Trasformata di Fourier	7
3.2.2	Impedenza	8
3.2.3	Risposta in frequenza	9
3.2.4	Circuito RC passa-basso	9
3.2.5	Circuito RC passa-alto	11
3.3	L'amplificatore operazionale	12
3.3.1	Amplificatore invertente	12
3.3.2	Amplificatore non invertente	13

Capitolo 1

Introduzione

Nel corso di Laboratorio di Fisica dei Plasmi siamo interessati a plasmi non neutri, ossia dei sistemi a molti corpi costituiti da particelle cariche, che presentano una carica netta globale. Sistemi di questo genere sono caratterizzati dalla presenza di forti campi elettrici legati alla natura non neutra dell'insieme di particelle considerato: tali campi possono avere grande influenza sul comportamento del plasma e sulle proprietà del regime di stabilità che si può instaurare. I plasmi generati in laboratorio sono plasmi di elettroni: essi vengono confinati utilizzando una trappola di Malmberg-Penning.

1.1 Struttura della dispensa

La dispensa si articola nei seguenti capitoli:

- 1.

Capitolo 2

Modelli teorici

In questo capitolo investighiamo gli approcci teorici che consentono di trattare un plasma non neutro.

Capitolo 3

Richiami di Elettronica

3.1 Introduzione

In questo capitolo sono presenti alcuni rudimenti di elettronica che consentono di comprendere meglio il funzionamento del setup sperimentale che viene utilizzato in laboratorio. Iniziamo quindi ricordando la definizione di corrente elettrica, che si esprime matematicamente come la derivata della carica elettrica rispetto al tempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.1)$$

I circuiti elettrici sono formati da elementi circuitali interconnessi tra di loro: un esempio ne sono i bipoli elettrici, che sono dispositivi a due terminali. Il più semplice bipolo lineare è la **resistenza**, le cui caratteristiche sono racchiuse nella *Legge di Ohm*:

$$V = RI. \quad (3.2)$$

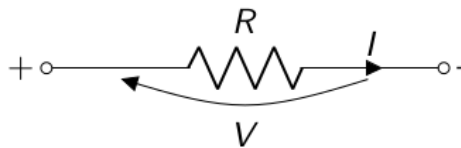


Figura 3.1: Rappresentazione schematica di una resistenza

Un punto comune a due o più bipoli è detto nodo: i bipoli si possono disporre in modo tale da formare dei percorsi chiusi, detti maglie. I concetti di nodo e maglia consentono di semplificare l'analisi di circuiti complessi per mezzo delle *Leggi di Kirchhoff*. La *KVL (Kirchoff Voltage Law)* afferma che lungo una qualsiasi maglia di un circuito la somma algebrica di tutte le tensioni è pari a zero:

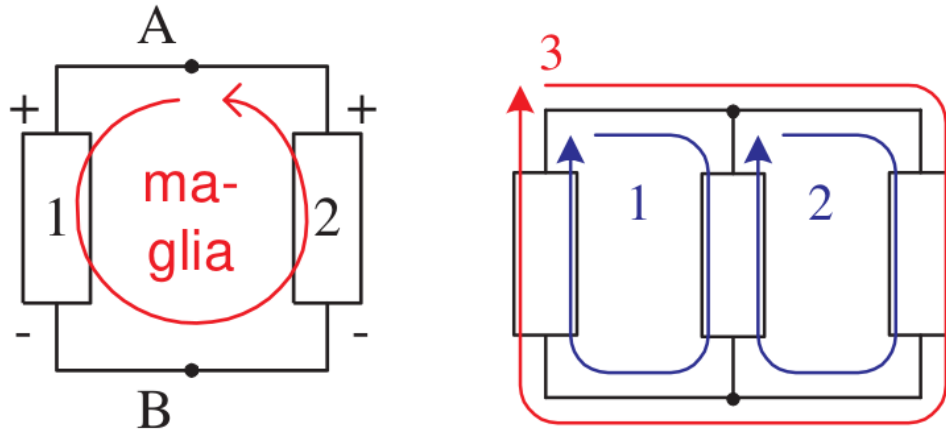
$$\sum_{k \in \text{maglia}} V_k = 0, \quad (3.3)$$

dove si considerano positive le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia e negative le tensioni discordi. La *KCL (Kirchoff Current Law)* riguarda

invece le correnti ed evidenzia come in un qualsiasi nodo di un circuito la somma algebrica di tutte le correnti è identicamente nulla

$$\sum_{k \in \text{maglia}} I_k = 0, \quad (3.4)$$

dove sono positive le I_k entranti nel nodo, mentre negative quelle uscenti.



Circuito con una maglia e due nodi Circuito con tre maglie e due nodi

Figura 3.2: Esempi di maglie in un circuito

Un altro esempio di bipolo è il **condensatore**, che è un elemento circuitale costituito da due superfici metalliche parallele separate da un isolante. Le armature metalliche possono immagazzinare della carica, in quantità proporzionale alla tensione applicata

$$q(t) = Cv(t), \quad (3.5)$$

dove con C si indica la capacità del condensatore, misurata in farad (F).

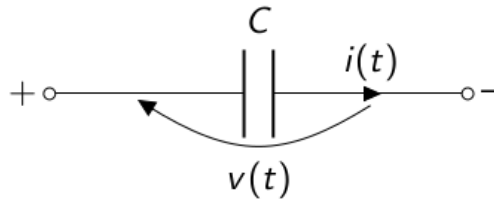


Figura 3.3: Rappresentazione schematica di un condensatore

L'ultimo esempio di bipolo a cui siamo interessati è l'**induttore**, che è costituito da un filo di materiale conduttore percorso da corrente (solenoidale). All'interno dell'avvolgimento si ha un flusso di campo magnetico Φ che è proporzionale alla corrente che percorre il filo

$$\Phi(t) = Li(t), \quad (3.6)$$

dove L è l'induttanza dell'induttore e si misura in henry (H).

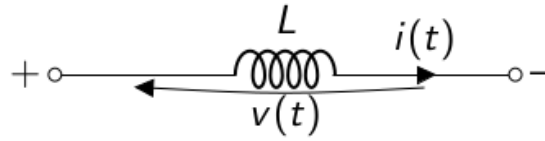


Figura 3.4: Rappresentazione schematica di un induttore

3.1.1 Circuito RC

Il circuito RC è un circuito del primo ordine, ossia è caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine.

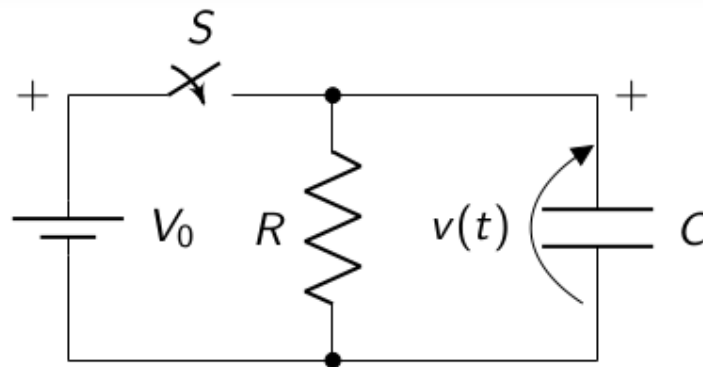


Figura 3.5: Rappresentazione schematica di un circuito RC

Gli elementi circuitali presenti sono tre:

- un interruttore ideale S che si comporta come un circuito aperto quando è spento e come un cortocircuito quando è acceso
- una resistenza R
- un condensatore C

Quando l'interruttore è acceso si assiste ad una carica del condensatore: la differenza di potenziale $v(t)$ è pari a quella dovuta al generatore di tensione V_0 . Mediante le semplici relazioni (3.2) e (3.5) introdotte in precedenza è possibile ricavare i valori di corrente nel resistore e di carica immagazzinata nel condensatore. Supponiamo ora di aprire l'interruttore scollegando di fatto il generatore di tensione: per risolvere il circuito occorre lavorare con le leggi di Kirchhoff. In particolare notiamo che

$$i_R(t) + i_C(t) = 0, \quad (3.7)$$

dove gli indici si riferiscono ai due elementi circuitali presente nell'unica maglia del circuito RC una volta aperto. La relazione (3.7) è un'equazione differenziale del primo ordine per la differenza di potenziale ai capi del condensatore, poichè effettuando le opportune sostituzioni è possibile mostrare come

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} = 0. \quad (3.8)$$

Notiamo che la soluzione di (3.8) sia un esponenziale reale, che imponendo la condizione iniziale di potenziale al tempo dello spegnimento dell'interruttore pari a V_0 risulta essere

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (3.9)$$

3.2 Dominio delle frequenze

Lavorare nello spazio delle frequenze per risolvere i circuiti elettrici è vantaggioso, perchè si assiste ad una notevole semplificazione dei calcoli da compiere: le equazioni differenziali presenti nel dominio del tempo che governano il comportamento dei circuiti RLC (resistori, induttori, condensatori) diventano delle relazioni algebriche. Nel dominio delle frequenze gli elementi circuitali che abbiamo precedentemente introdotto sono rappresentati in termini di impedenza o ammettenza, che si comportano come resistenze in un'analisi algebrica: questo rende più immediata l'analisi dei circuiti. Nel dominio delle frequenze è anche possibile effettuare un'analisi della risposta in frequenza, cruciale per la progettazione di filtri.

3.2.1 Trasformata di Fourier

Un segnale è periodico quando si ripete identicamente dopo un intervallo di tempo T , detto periodo: l'inverso del periodo è la frequenza e viene solitamente indicata con la lettera f . Ogni **segnale periodico** $x(t)$ con periodo $T = 1/f_0$ può essere espresso come **serie di Fourier**

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2k\pi f_0 t) + b_k \sin(2k\pi f_0 t)], \quad (3.10)$$

dove a_k e b_k sono detti coefficienti di Fourier e si ottengono mediante integrazione su un periodo del segnale di partenza che si vuole ricostruire

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(2k\pi f_0 t) dt, \quad (3.11)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(2k\pi f_0 t) dt. \quad (3.12)$$

Lavorando con le *formule di Eulero* per il seno ed il coseno è possibile scrivere la serie di Fourier in forma complessa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(j2k\pi f_0 t), \quad (3.13)$$

dove c_k sono dei coefficienti complessi tali per cui

$$c_k = c_{-k}^* = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-j2k\pi f_0 t) dt \quad (3.14)$$

Un segnale non periodico può essere considerato come un segnale periodico caratterizzato da un periodo tendente ad infinito (e di conseguenza una frequenza caratteristica tendente a zero): in questo caso l'analisi di Fourier prevede il passaggio dalla sommatoria all'integrale. Si identifica con il nome **Trasformata di Fourier** di un segnale $x(t)$ la seguente quantità:

$$X(f) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (3.15)$$

L'anti-trasformata consente di effettuare il passaggio inverso, ossia da dominio delle frequenze al dominio del tempo e si differenzia dalla trasformata per il segno dell'esponente (che è quindi positivo nel caso di \mathcal{F}^{-1}) e per il fatto che l'integrazione viene effettuata sulle frequenze.

La trasformata di Fourier consente di studiare le equazioni differenziali che risolvono i circuiti nello spazio delle frequenze, dove figurano come equazioni algebriche: questo è possibile poichè valgono le seguenti relazioni

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f), \quad (3.16)$$

$$\int x(t) dt \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f). \quad (3.17)$$

3.2.2 Impedenza

Passando dal dominio del tempo al dominio della frequenza per mezzo della trasformata di Fourier, notiamo che vale per tutti e tre gli elementi circuitali una relazione lineare fra intensità di corrente e differenza di potenziale: è infatti possibile scrivere che

$$V(f) = Z(f) I(f), \quad (3.18)$$

dove $Z(f)$ è l'impedenza, una quantità che si misura in ohm e che per elementi circuitali in serie o in parallelo si compone analogamente ad una resistenza.

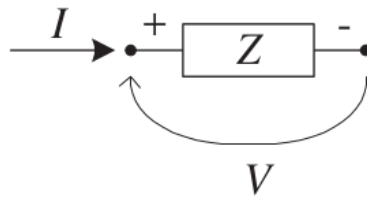


Figura 3.6: Rappresentazione schematica di un'impedenza

Nei casi dei tre bipoli presi in considerazione le impedenze sono differenti fra loro, infatti si ha che nel caso di:

$$\text{un resistore} \longleftrightarrow Z(f) = R \quad (3.19)$$

$$\text{un'induttanza} \longleftrightarrow Z(f) = j2\pi f L \quad (3.20)$$

$$\text{un condensatore} \longleftrightarrow Z(f) = \frac{1}{j2\pi fL} \quad (3.21)$$

L'impedenza Z è una grandezza complessa: la sua parte reale è la resistenza R , mentre la parte immaginaria prende il nome di reattanza X .

3.2.3 Risposta in frequenza

La **risposta in frequenza** $H(f)$ di un circuito è definita come il rapporto fra i segnali di uscita e di ingresso nel dominio della frequenza, ossia come

$$H(f) = \frac{X_o(f)}{X_i(f)}, \quad (3.22)$$

dove con $X_i(f)$ e $X_o(f)$ sono indicate le trasformate di Fourier dei segnali in ingresso ed in uscita da un circuito. Solitamente la risposta in frequenza (che è una quantità complessa) viene espressa in termini di modulo $|H(f)|$ e fase $\angle H(f)$, ossia in coordinate polari nel piano complesso: i diagrammi di Nyquist sono la rappresentazione della traiettoria di $H(f)$ nel piano complesso.

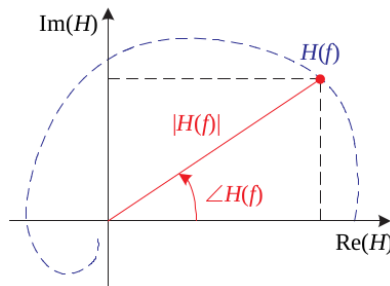


Figura 3.7: Esempio di diagramma di Nyquist

Notiamo che se l'ingresso è unitario, l'uscita coinciderà con la risposta in frequenza: dato che $X_i(f) = 1$ se $x_i(t) = \delta(t)$, concludiamo che $H(f)$ è la trasformata di Fourier della risposta ad un impulso (risposta impulsiva).

Diagrammi di Bode

Per rappresentare graficamente $H(f)$ si utilizzano i **diagrammi di Bode**. Tali grafici sono di due tipi:

- per le **ampiezze**, dove in ascissa si riporta la frequenza f in scala logaritmica, mentre in ordinata il modulo del guadagno in decibel.
- per la **fase**, che è analogo al precedente per quanto riguarda le scisse, mentre in ordinata riporta lo sfasamento.

3.2.4 Circuito RC passa-basso

Un filtro passa-basso è un sistema che permette il passaggio di frequenze al di sotto di una data soglia, detta frequenza di taglio, bloccando le alte frequenze. Un esempio

di circuito passa-basso passivo è il circuito RC presente in Figura 3.8, dove il segnale di output v_{out} è preso fra il resistore ed il condensatore.

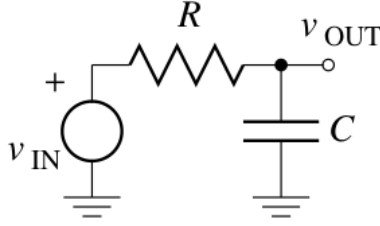


Figura 3.8: Rappresentazione schematica di un circuito RC passa-basso.

Nel dominio delle frequenze è possibile ricavare la corrente passante nella maglia come

$$I = \frac{V_{in}}{Z_R + Z_C} = \frac{V_{in} \cdot j2\pi fC}{1 + j2\pi fRC}, \quad (3.23)$$

lavorando quindi con l'impedenza totale del circuito, data in questo caso dalla somma di quelle dei due elementi circuitali. La tensione in uscita è pari alla differenza di potenziale ai capi del condensatore, che è nuovamente possibile ottenere ragionando in termini di impedenza

$$V_{out} = Z_C I = \frac{V_{in}}{1 + j2\pi fRC}. \quad (3.24)$$

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per procedere con il calcolo della risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}, \quad (3.25)$$

da cui con semplici passaggi algebrici possiamo determinare i diagrammi di Bode.

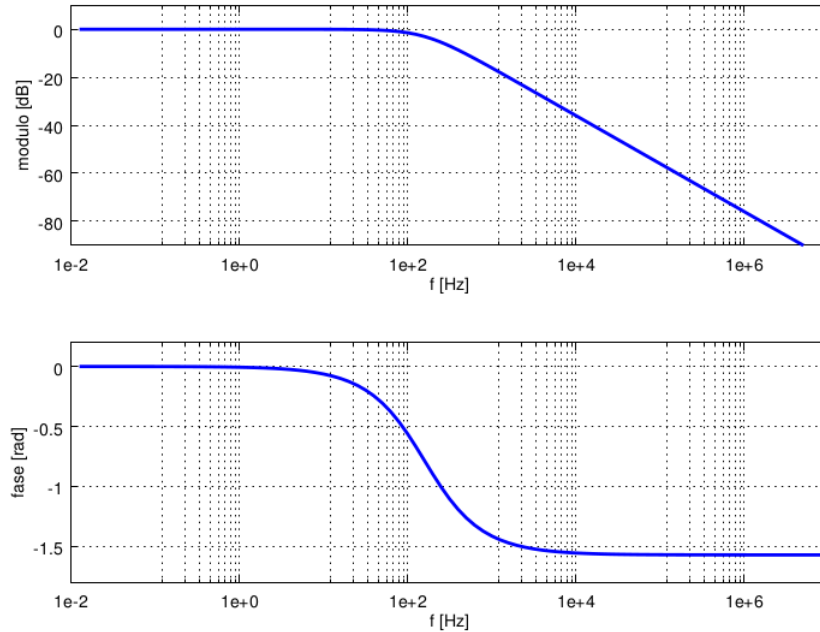


Figura 3.9: Diagrammi di Bode del circuito RC passa-basso.

3.2.5 Circuito RC passa-alto

L'RC passa alto (vedi Figura 3.10) è un esempio di filtro passa-alto, ossia è un circuito elettrico che permette solo il passaggio di frequenze al di sopra di un dato valore detto frequenza di taglio.

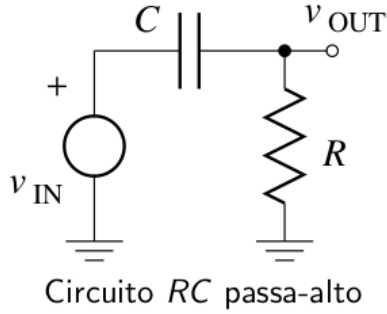


Figura 3.10: Rappresentazione schematica di un circuito RC passa-alto.

Il ragionamento che porta alla determinazione della risposta in frequenza è analogo a quello fatto nella sezione precedente. Partendo dalla corrente I nella maglia, data anche in questo caso dalla relazione (3.23) è possibile ricavare il segnale in uscita come

$$V_{out} = RI = \frac{V_{in} \cdot j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}, \quad (3.26)$$

con conseguente risposta in frequenza pari a

$$H(f) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}. \quad (3.27)$$

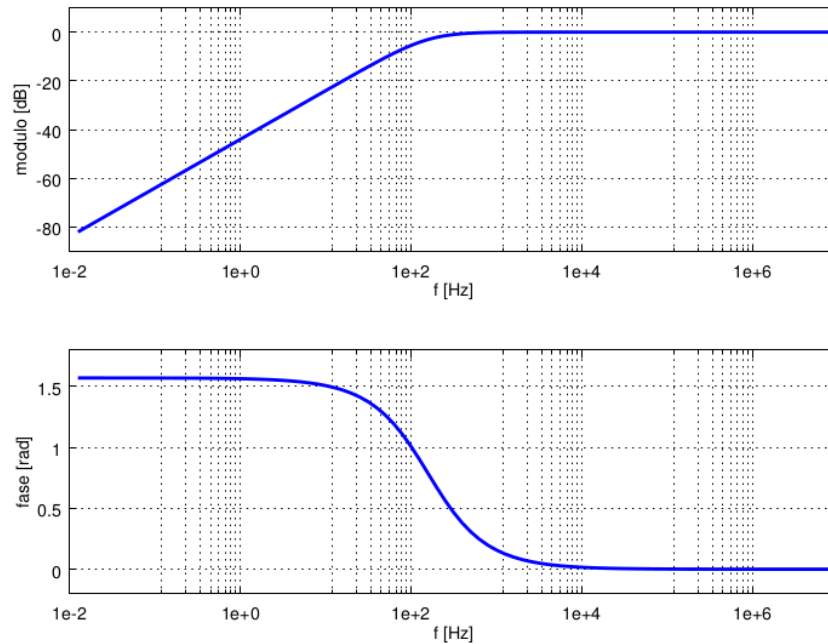


Figura 3.11: Diagrammi di Bode del circuito *RC* passa-alto.

3.3 L'amplificatore operazionale

I generatori di tensione possono essere di due tipologie:

- indipendenti, ossia generano grandezze elettriche indipendentemente da qualsiasi altra grandezza presente nel circuito.
- dipendenti, ossia la grandezza elettrica generata (tensione o corrente) ha un valore che è funzione di un'altra grandezza elettrica presente nel circuito.

L'amplificatore operazionale (detto anche **OpAmp**) è un generatore di tensione controllato in tensione che amplifica la differenza di tensione tra i due segnali di ingresso V^+ e V^- : con '+' viene indicato l'ingresso '*non invertente*', mentre con '-' l'ingresso '*invertente*'.

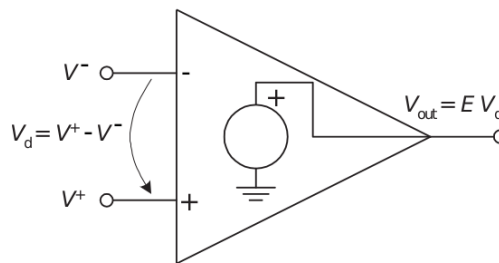


Figura 3.12: Rappresentazione schematica dell'amplificatore operazionale.

Il guadagno di tensione dell'OpAmp è infinito, ossia

$$V_{out} = EV_d = E(V^+ - V^-) \quad \text{con} \quad E \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Solitamente l'amplificatore viene utilizzato in *configurazione retroazionata*: il segnale in uscita è riportato all'ingresso mediante una rete di retroazione costituita da elementi passivi come per esempio resistori. Sono possibili due tipologie di retroazione:

- positiva, con segnale d'uscita riportato all'ingresso non invertente.
- negativa, con segnale d'uscita riportato all'ingresso invertente.

I circuiti retroazionati hanno un comportamento simile a quello di una pallina appoggiata ad una superficie curva: possono essere stabili oppure instabili.

3.3.1 Amplificatore invertente

Il circuito che stiamo prendendo in considerazione presenta un solo amplificatore operazionale ideale: la rete di retroazione riporta il segnale all'ingresso invertente (ossia identificato con il segno meno sullo schema dell' OpAmp).

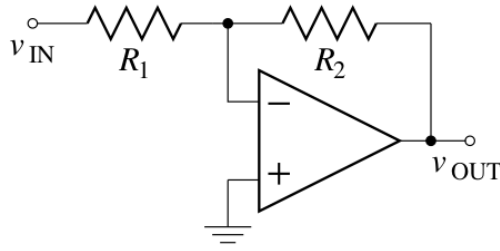


Figura 3.13: Rappresentazione schematica dell'amplificatore invertente.

Il circuito preso in analisi può essere descritto mediante il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} V_{in} - V^- = R_1 I_1 \\ V^- - V_{out} = R_2 I_2 \\ I_1 = I_2 \\ V_{out} = E(V^+ - V^-) = -EV^- \end{cases} \quad (3.29)$$

Dato che il guadagno E dell'amplificatore operazionale ideale è infinito, l'ultima equazione è risolvibile solamente se assume la forma indeterminata $\infty \cdot 0$: in tal caso il prodotto può assumere un valore finito. Sfruttando ora l'uguaglianza fra le due correnti è possibile verificare come

$$V_{out} = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}, \quad (3.30)$$

evidenziando come in questo circuito il guadagno dipenda solamente dal rapporto fra le due resistenze: la presenza del meno giustifica la qualifica di *invertente*.

3.3.2 Amplificatore non invertente

Un amplificatore che produce in uscita un segnale amplificato, avente una fase simile a quella dell'ingresso applicato, è detto amplificatore non invertente.

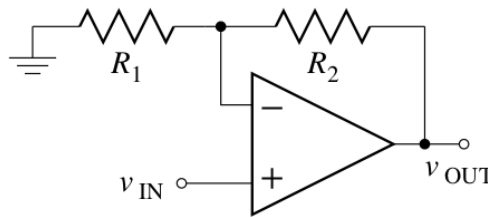


Figura 3.14: Rappresentazione schematica dell'amplificatore non invertente.

La rete di retroazione è identica al caso precedente: dato che la retroazione è negativa possiamo nuovamente applicare il principio di terra virtuale, ossia:

$$\begin{cases} V^- = V^+ = V_{in} \\ I^- = I^+ = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Andando nuovamente ad uguagliare le correnti passanti nelle due resistenze ricaviamo che

$$-\frac{V_{in}}{R_1} = \frac{V_{in} - V_{out}}{R_2}, \quad (3.32)$$

da cui banalmente segue che

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \quad (3.33)$$