# Il modello di Ising

## Simulazione di Materia Condensata e Biosistemi

**Filippo Negrini** (Matricola: 47127A)

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI MILANO

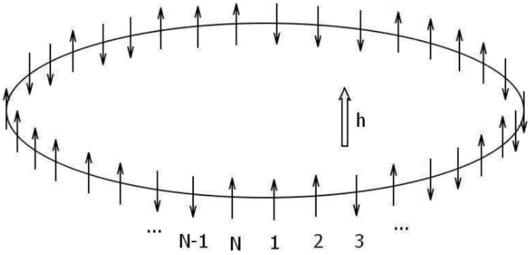
# Table of Contents

# Hamiltoniana



$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

- Interazione fra primi vicini
- Accoppiamento con un campo esterno




Modello di Ising 1D con condizioni periodiche.

- Teoria di campo medio
- Sistema presenta una transizione di fase a $T_c \neq 0$

$$m = \tanh\left[\beta\left(h + Jn_{nn}m\right)\right]$$

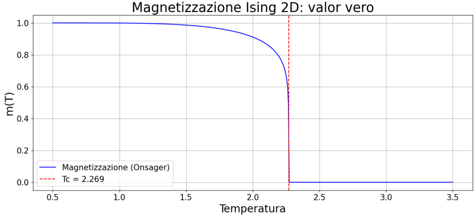
- Soluzione analitica
- Sistema disordinato per ogni $T \neq 0$ a campo esterno nullo

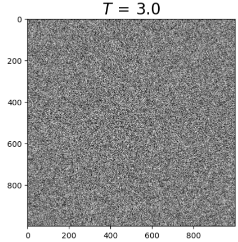
$$m = \frac{\sinh\left(\beta h\right)}{\sqrt{e^{-4\beta J} + \sinh^2\left(\beta h\right)}}$$

# Modello di Ising 2D


- ◇ Soluzione analitica per $h \neq 0$
- ◇ Sistema presenta una transizione di fase a $T_c \neq 0$

$$m(\beta,\, h = 0) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{1}{\sinh^4(2\beta J)}\right]^{\frac{1}{8}} & T < T_c \\ 0 & T > T_c \end{cases}$$



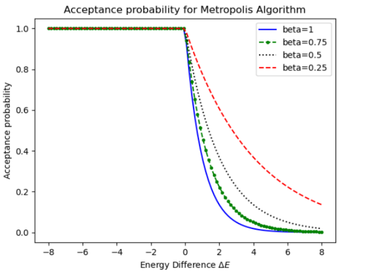
# Table of Contents

# Metropolis vs Wolff

2 Metodi numerici

## Metropolis

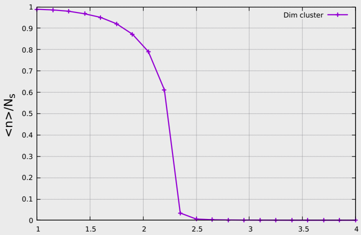
- Tentata inversione di un singolo spin
- $A(\nu \mid \mu) = \min\left[1, e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}\right]$
- Ottimo per $T \ll T_c$ oppure $T \gg T_c$



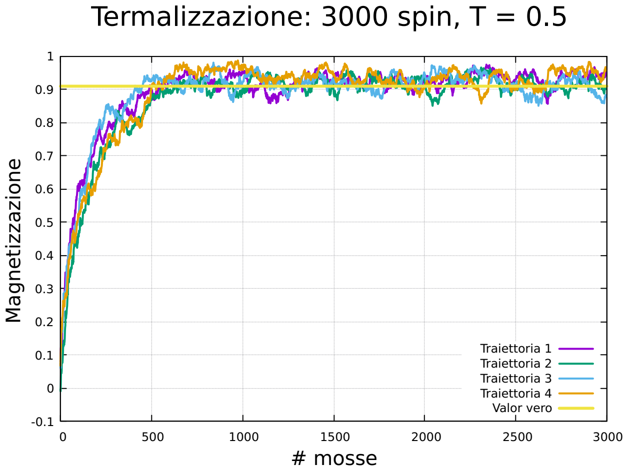

## Wolff

- Algoritmo di clustering
- $P_{add} = 1 - \exp(-2\beta J)$
- Ottimo per $T \simeq T_c$

Dimensione cluster



# Termalizzazione

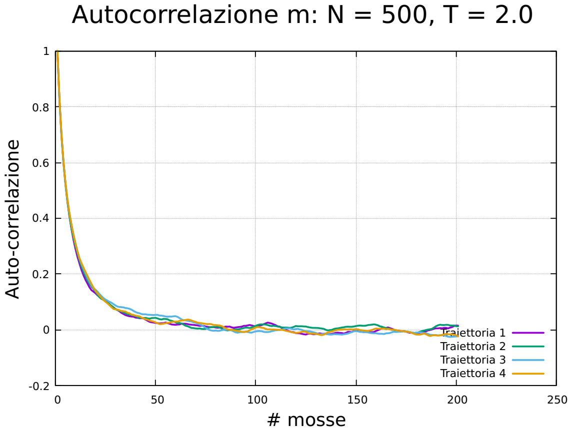



Termalizzazione per modello di Ising 1D.

- Giungere all'equilibrio termodinamico
- Attenzione a stati metastabili
- Dipendenza dalla condizione iniziale

# Auto-correlazione






Autocorrelazione per modello di Ising 2D.

**Definizione**

$$\chi(t) = \frac{\langle m(t')m(t'+t)\rangle_{t'} - \langle m\rangle^2}{\sigma_m^2}$$

- $\chi(t) \propto e^{-t/t_c}$
- Indipendenza statistica fra configurazioni
- $n_{max} = \frac{t_{max}}{2t_c}$