Il modello di Ising

Simulazione di Materia Condensata e Biosistemi

Filippo Negrini (Matricola: 47127A)

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI MILANO

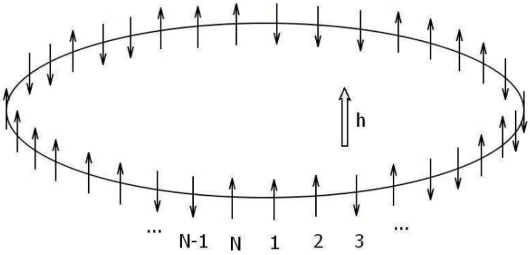
Table of Contents

Hamiltoniana

1 Introduzione

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

- Interazione fra primi vicini
- Accoppiamento con un campo esterno



Modello di Ising 1D con condizioni periodiche.

- Teoria di campo medio
- Sistema presenta una transizione di fase a $T_c \neq 0$

$$m = \tanh\left[\beta\left(h + J n_{nn} m\right)\right]$$

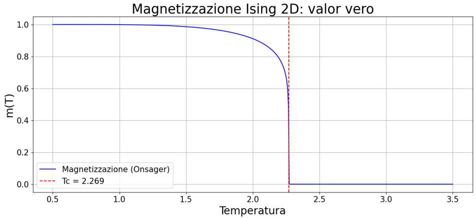
- Soluzione analitica
- Sistema disordinato per ogni $T \neq 0$ a campo esterno nullo

$$m = \frac{\sinh\left(\beta h\right)}{\sqrt{e^{-4\beta J} + \sinh^2\left(\beta h\right)}}$$

Modello di Ising 2D

- Soluzione analitica per $h \neq 0$
- Sistema presenta una transizione di fase a $T_c \neq 0$

$$m(\beta, h = 0) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{1}{\sinh^4(2\beta J)}\right]^{\frac{1}{8}} & T < T_c \\ 0 & T > T_c \end{cases}$$



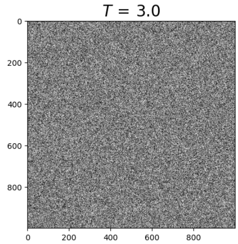


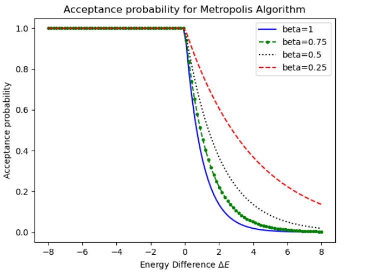
Table of Contents

Metropolis vs Wolff

2 Metodi numerici

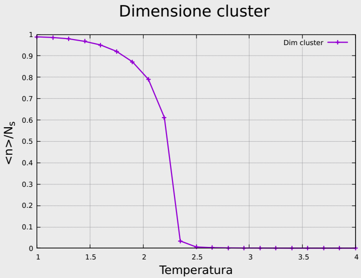
Metropolis

- Tentata inversione di un singolo spin
- $A(\nu \mid \mu) = \min\left[1,\, e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}\right]$
- Ottimo per $T \ll T_c$ oppure $T \gg T_c$



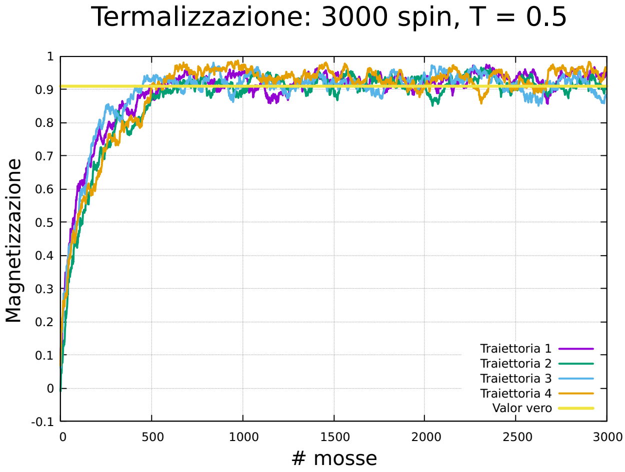
Wolff

- Algoritmo di clustering
- $P_{add} = 1 - \exp(-2\beta J)$
- Ottimo per $T \simeq T_c$



Termalizzazione

2 Metodi numerici

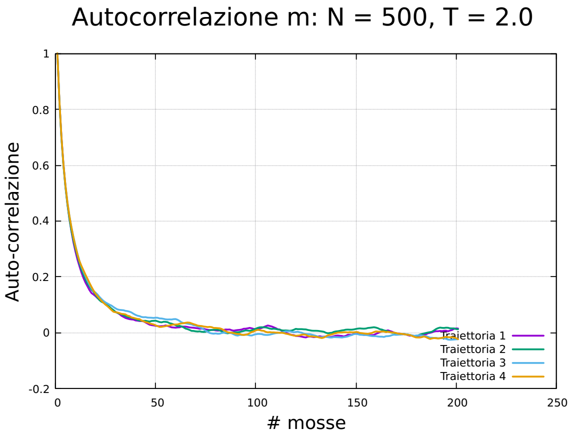


Termalizzazione per modello di Ising 1D.

- Giungere all'equilibrio termodinamico
- Attenzione a stati metastabili
- Dipendenza dalla condizione iniziale

Auto-correlazione

2 Metodi numerici



Autocorrelazione per modello di Ising 2D.

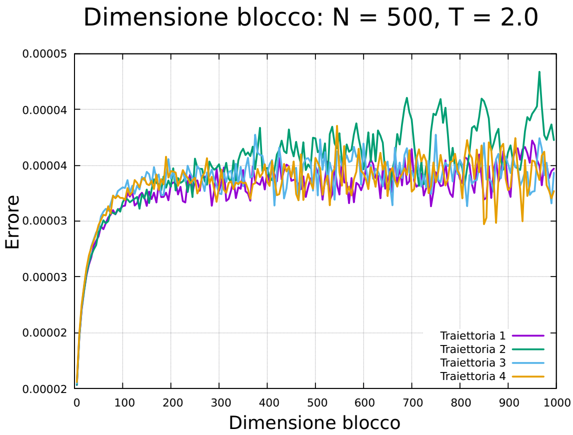
Definizione

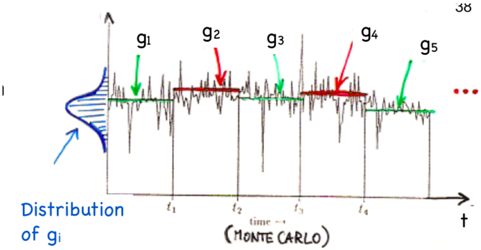
$$\chi(t) = \frac{\langle m(t')m(t'+t)\rangle_{t'} - \langle m\rangle^2}{\sigma_m^2}$$

- $\chi(t) \propto e^{-t/t_c}$
- Indipendenza statistica fra configurazioni
- $n_{max} = \frac{t_{max}}{2t_c}$

Data-blocking

2 Metodi numerici





Analisi per dimensione blocchi nel caso di un modello di Ising 2D.

- Dati raggruppati in blocchi
- Errore satura quando raggiunta l_{lim}

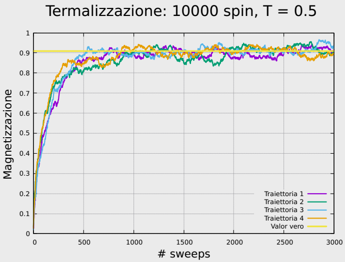
Table of Contents

Caratterizzazione

3 Simulazioni modello di Ising1D

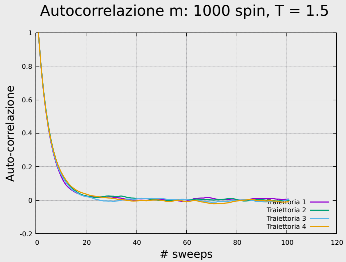
Termalizzazione

- Maggiore T, minore t_{term}
- $t_{term}^{max} \simeq$ 600 sweeps



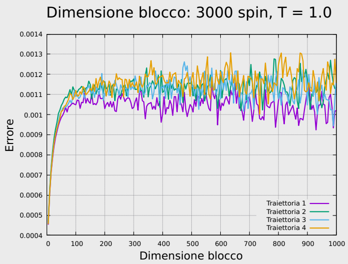
Auto-correlazione

- Maggiore T, minore t_c
- $t_c^{max} \simeq$ 500 sweeps



Blocchi

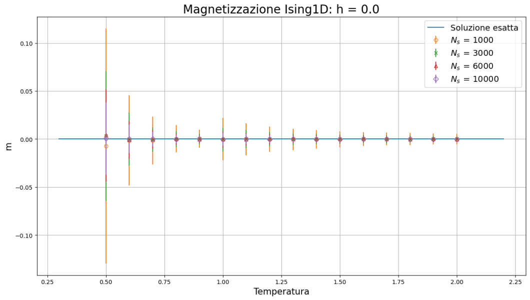
- Maggiore T, minore l_{blk}
- $l_{blk}^{max} \simeq$ 1000 sweeps



Magnetizzazione

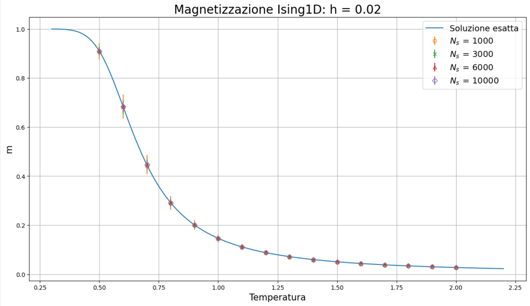
3 Simulazioni modello di Ising1D

$h = 0.0$



- $m = 0$ per ogni $T \neq 0$

$h = 0.02$



- campo magnetico impone ordine