



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Triennale in Fisica

STUDIO DEL TRONCAMENTO DI DISCHI CIRCUM-SELLARI: ANALISI DELLA DIPENDENZA DAI PARAMETRI DELLA BINARIA

Relatore:

Prof. Giovanni Pietro Rosotti

Correlatore:

Prof. Enrico Ragusa

Tesi di Laurea di:

Negrini Filippo

Matricola: 965085

Anno Accademico 2022-2023

Sommario

L’obiettivo di questo lavoro di tesi è valutare le dimensioni e le eccentricità dei dischi proto-planetari in dipendenza dei parametri del sistema binario che li ospita. L’analisi da noi effettuata si concentra sul mass-ratio q , sull’eccentricità della binaria e e sulla viscosità del materiale, determinata mediante il parametro adimensionale α . La dinamica dei dischi d’accrescimento facenti parte di un sistema multiplo è fortemente influenzata dalla presenza dei compagni del corpo attorno al quale orbitano: abbiamo studiato numericamente questo fenomeno per mezzo di FARGO3D. I risultati ottenuti evidenziano come le dimensioni dei dischi d’accrescimento diminuiscano all’aumentare dell’eccentricità del sistema: osserviamo che le estensioni maggiori ad e fissata si presentano per quegli oggetti che orbitano attorno alle stelle costituenti la maggior frazione di massa del sistema binario. L’approccio quantitativo per la determinazione dell’eccentricità del disco e_{disco} implementato in questo lavoro di tesi consente di verificare come e_{disco} scali con l’eccentricità del sistema binario ospitante. Il confronto delle estensioni dei dischi simulati con i valori presenti in letteratura consente di verificare un buon accordo fra risultati numerici e previsioni teoriche, con scarti massimi del 20%. Il lavoro di tesi presente propone nuovi sviluppi come un’estensione dell’analisi del fenomeno a nuove regioni dello spazio dei parametri.

Indice

Sommario	i
1 Introduzione	1
1.1 Struttura della tesi	2
2 Fisica dei dischi proto-planetari	5
2.1 Modellizzazione del disco	7
2.1.1 Viscosità	8
2.1.2 Struttura verticale	9
2.1.3 Profilo di temperatura	11
2.2 Evoluzione del disco	13
2.2.1 Caso particolare: spreading ring	15
2.2.2 Caso particolare: self similar solution	16
3 Dischi in sistemi binari	19
3.1 Cenni sul problema di Keplero	20
3.2 Fisica del troncamento	23
3.2.1 Troncamento mareale	24
3.2.2 Troncamento risonante	25
3.2.3 Stable invariant loops	29
3.2.4 Dimensioni del disco	31
4 Metodi numerici	33
4.1 Mesh codes	33
4.1.1 Metodo alle differenze finite	34
4.1.2 Condizione CFL	36
4.2 Fargo3D	36
4.2.1 FARGO algorithm	36
4.2.2 Griglia e campi	38
4.2.3 Condizioni al contorno	39
4.2.4 N-body solver	41

4.2.5	Viscosità ed equazione di stato	41
4.2.6	Test idrodinamici: spreading ring	41
5	Simulazioni numeriche e metodologie per l'analisi dati	43
5.1	Setup simulativo	43
5.1.1	Condizione iniziale	44
5.1.2	Condizioni al contorno	45
5.1.3	Utilizzo del damping	48
5.2	INDACO	49
5.2.1	Efficienza di parallelizzazione	49
5.3	Campionamento dello spazio dei parametri	51
5.4	Metodi numerici per l'analisi dei risultati simulativi	52
5.4.1	Calcolo del raggio di troncamento	54
5.4.2	Calcolo del semiasse maggiore di troncamento	55
5.4.3	Calcolo dell'eccentricità del disco	56
5.5	Simulazioni di convergenza	57
5.5.1	Run Lunga	58
5.5.2	Raggio minimo	59
5.5.3	Alta risoluzione	60
6	Risultati	61
6.1	Dimensioni del disco	61
6.1.1	Raggi di troncamento	62
6.1.2	Semiassi di troncamento	64
6.2	Eccentricità del disco	66
6.3	Confronto con i risultati teorici	69
6.3.1	Raggi di troncamento	70
6.3.2	Semiassi di troncamento	76
7	Conclusioni	81
7.1	Dimensioni del disco	81
7.2	Eccentricità del disco	82
7.3	Sviluppi futuri	83
A	Parametri per la determinazione del raggio di troncamento	85
B	Risultati sul troncamento	86
C	Dimensioni della griglia	87
D	Dimensioni dei dischi	88

E Eccentricità dei dischi	92
F Parametri per il confronto	94
Bibliografia	97
Ringraziamenti	102

Capitolo 1

Introduzione

I dischi circum-stellari sono delle strutture sottili costituite da gas e polveri che orbitano attorno ad una stella giovane e costituiscono una componente fondamentale del processo di formazione stellare. In primo luogo è attraverso il disco che il corpo centrale accresce gran parte della sua massa: questo avviene per mezzo di processi che determinano la ridistribuzione di momento angolare all'interno della struttura orbitante, consentendo al materiale che la costituisce di fluire verso l'interno. Un secondo ruolo importante svolto dai dischi circumstellari è che sono il luogo dove avviene la formazione planetaria grazie all'aggregazione dei planetesimi: per tale motivo sono detti *proto-planetari*.

La dinamica dei dischi d'accrescimento è fortemente influenzata dalla presenza di corpi perturbanti. In Figura 1.1 è riportata un'immagine nel continuo di dischi d'accrescimento osservati grazie ad ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array).

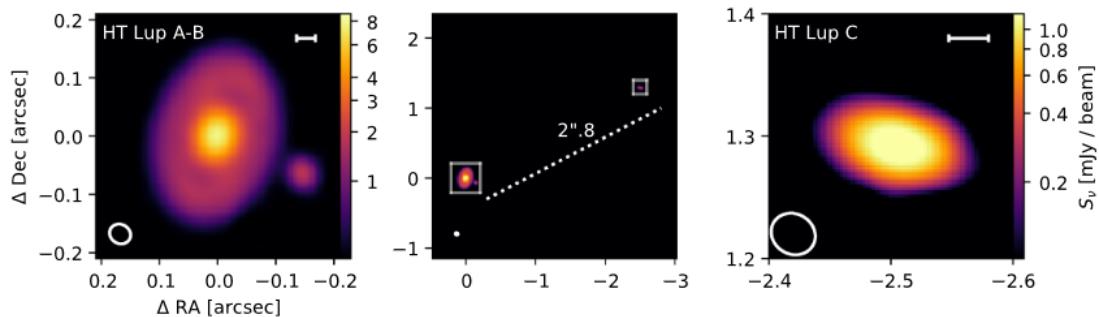


Figura 1.1: Immagine nel continuo del sistema HT Lup. La figura centrale mostra la separazione spaziale fra i tre dischi, mentre quella di sinistra evidenzia la struttura dei dischi HT Lup A-B. L'immagine di destra è dedicata a HT Lup C. L'origine del sistema di coordinate è posto nel picco di flusso del disco A (Kurtovic et al. 2018).

In un sistema binario, ossia formato da due stelle che interagiscono gravitazionalmente fra loro, è possibile osservare tre diversi dischi d'accrescimento: due circum-stellari ed uno circum-binario. Determinare l'estensione spaziale di un disco proto-planetario in un sistema multiplo è una problematica che richiede lo studio dell'interazione fra un corpo perturbante ed un anello di gas. Approcci semi-analitici come quello di Papaloizou e Pringle (1977), focalizzato sull'analisi delle forze di marea causate dalla presenza del compagno, e quello di Goldreich e Tremaine (1980), basato sulle risonanze fra le orbite del disco e della binaria, hanno consentito di determinare che la posizione in cui avviene il troncamento dipende dall'eccentricità e del sistema binario, dal mass-ratio q , dal parametro adimensionale α che regola la viscosità del materiale orbitante e dalla temperatura T del disco. Una metodologia alternativa per lo studio del troncamento è quella delle *test particles* (Pichardo, Sparke e Aguilar 2005): il loro approccio è focalizzato su effetti puramente dinamici e non consente di studiare i fenomeni di natura viscosa che regolano l'evoluzione del disco. Una trattazione più rigorosa del troncamento consiste nel considerare tutta la fisica del problema mediante simulazioni numeriche dell'evoluzione del disco (Artymowicz e Lubow 1994): a causa dell'elevato costo computazionale una vasta regione dello spazio dei parametri resta ad oggi inesplorata. Questo lavoro di tesi si propone di colmare alcune delle lacune presenti studiando il fenomeno del troncamento nei dischi circumstellari facenti parte di un sistema binario in dipendenza di α , e e q .

1.1 Struttura della tesi

La tesi è organizzata nei seguenti 7 capitoli:

1. In questo capitolo abbiamo introdotto il problema fisico che vogliamo trattare ed il contesto in cui si presenta.
2. Nel Capitolo 2 forniamo un riepilogo della fisica dei dischi proto-planetari, concentrandoci sulla modellizzazione del sistema fisico e sull'evoluzione del disco nel tempo.
3. Nel Capitolo 3 analizziamo la casistica dei dischi ospitati in sistemi binari. È presente un breve riepilogo sul problema di Keplero e sono riportati i diversi approcci presenti in letteratura riguardanti il problema del troncamento.
4. Nel Capitolo 4 vengono presentati i metodi numerici utilizzati in questo lavoro di tesi. L'esposizione è incentrata su FARGO3D, codice euleriano a griglia sviluppato per lo studio computazionale della fisica dei dischi d'accrescimento.

5. Il Capitolo 5 è incentrato sulle simulazioni che abbiamo effettuato in questo lavoro di tesi: spieghiamo quale sia il setup simulativo e quali condizioni abbiamo deciso di imporre. Una sezione è dedicata all'esposizione di tutte le tecniche numeriche necessarie per l'analisi dei dati prodotti mediante FARGO3D.
6. Nel Capitolo 6 sono riportati i risultati ottenuti. La prima sezione riguarda le dimensioni dei dischi, mentre la seconda le eccentricità degli stessi. Nella parte finale del capitolo effettuiamo un confronto con il modello teorico proposto da Manara, Tazzari et al. (2019).
7. Nel Capitolo 7 riassumiamo i risultati ottenuti e discutiamo i limiti ed i possibili sviluppi futuri di questo lavoro.

Capitolo 2

Fisica dei dischi proto-planetari

I dischi proto-planetari sono delle strutture costituite da gas e polveri che orbitano attorno a stelle giovani (\sim Myr). Tali stelle si formano in dense nubi molecolari, che sono delle regioni di spazio ($\sim 10 - 100$ pc) riempite da gas e polveri (massa $\sim 10^4 - 10^6 M_\odot$). Questi complessi possono essere osservati mediante l'utilizzo di traccianti molecolari come per esempio: CO, ^{13}CO ed NH₃. I composti appena nominati possono essere utilizzati con una doppia finalità:

- determinare la struttura della nube
- ricavare informazioni riguardo i movimenti del materiale

I traccianti molecolari hanno consentito di stabilire che le "molecular clouds" hanno momento angolare non nullo in quanto il rapporto fra energia rotazionale ed energia gravitazionale è diverso da zero (Goodman et al. 1993). Dato che

$$\beta \equiv \frac{E_{rot}}{|E_{grav}|} \sim 0.02, \quad (2.1)$$

le strutture che stiamo prendendo in considerazione sono caratterizzate da lenti movimenti rotatori. Alcune regioni di queste nubi, dette cores, sono gravitazionalmente instabili e possono collassare sotto azione della propria gravità: questo processo darà luogo alla formazione di una nuova stella (vedi Figura 2.1). Dato che il materiale possiede momento angolare non nullo, il collasso in questione non potrà avvenire radialmente.

Consideriamo un elemento di fluido facente parte di un core, che supponiamo avere asse di rotazione lungo z. Su tale elemento agisce una forza centrifuga che bilancia la componente radiale dell'attrazione gravitazionale. L'altra componente, ossia quella verticale, agisce senza essere contrastata: questo comporta la formazione di un disco sottile attorno alla proto-stella. L'ultima fase della formazione stellare ($\sim 10^6$ yr) è caratterizzata da un graduale accrescimento di materiale sul corpo centrale.

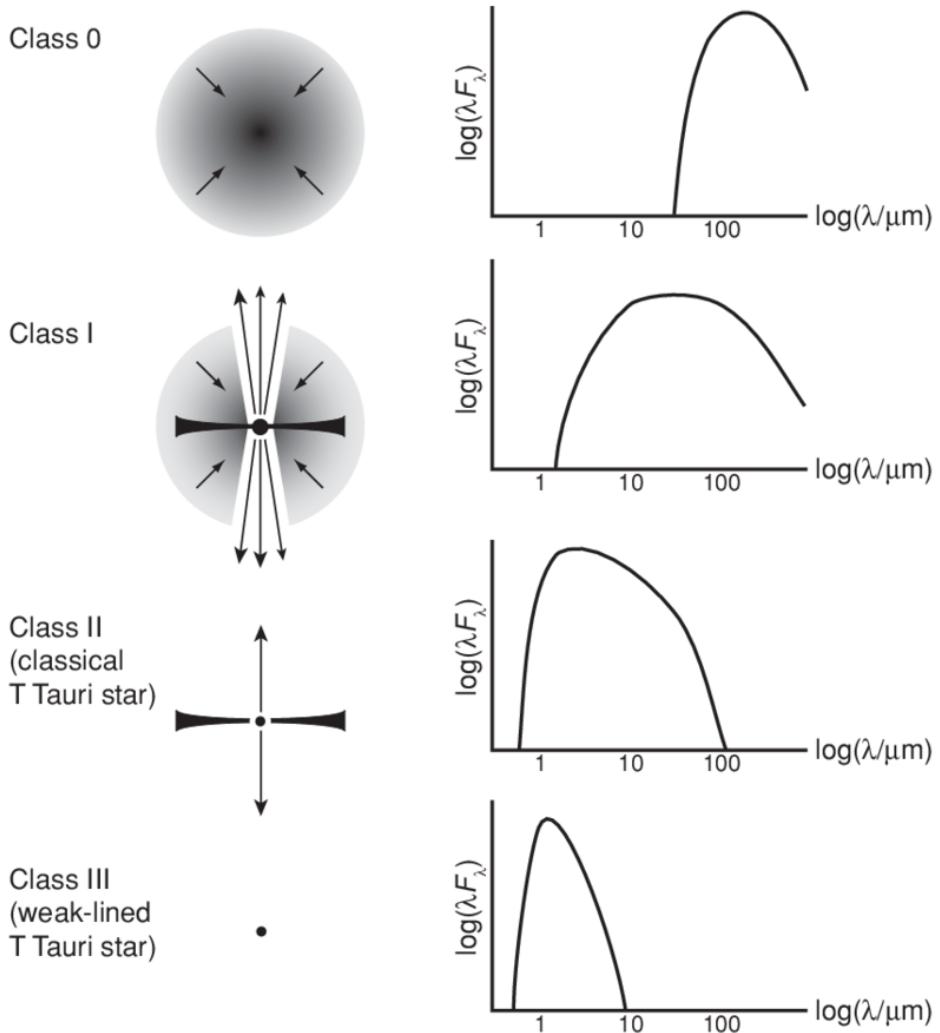


Figura 2.1: Schema riassuntivo delle fasi evolutive dei sistemi stellari giovani (YSO). Analizzando lo spettro d'emissione è possibile comprendere a che classe appartenga un generico 'young stellar object'.

Questo processo è regolato da meccanismi che determinano una ridistribuzione del momento angolare e la cui natura è ancora argomento di discussione. Uno dei modelli proposti identifica in fenomeni di natura viscosa ciò che sta alla base del trasporto di momento angolare (Lynden-Bell e Pringle 1974). Proposte alternative riguardano venti magnetici che sono in grado di rimuovere momento angolare, favorendo il processo d'accrescimento del materiale sulla stella (Manara, Ansdell et al. 2023). In questa tesi lavoreremo con il modello viscoso.

2.1 Modellizzazione del disco

L'evoluzione e la struttura di un disco di accrescimento possono essere descritte utilizzando le leggi fondamentali della fluido-dinamica e della gravitazione. Il seguente set di equazioni consente di effettuare una trattazione generale del problema che stiamo affrontando:

$$\partial_t \rho + \partial_j (\rho u^j) = 0, \quad (2.2)$$

$$\partial_t u^i + \partial_j (u^i u^j) = -\frac{\partial_i P}{\rho} - \partial_i \phi + f^i, \quad (2.3)$$

$$\partial_t (\rho e) + \partial_j (\rho e u^j) = -P \partial_j u^j + \rho \dot{Q}, \quad (2.4)$$

$$\partial_j \partial_j \phi = -4\pi G [\rho + M_* \delta(r)], \quad (2.5)$$

dove ρ è la densità del materiale costituente il disco, u è la velocità, M_* la massa della stella ed f è legato ai fenomeni di natura viscosa. La (2.2) è l'equazione di continuità: essa afferma che non sono presenti né sorgenti né pozzi di densità, con conseguente conservazione della massa. La (2.3) è l'equazione di conservazione del momento, anche nota con il nome di equazione di Navier-Stokes. Il primo membro è analogo a quello dell'equazione di continuità, mentre il secondo descrive le varie forze che agiscono sull'elemento di fluido considerato. I termini a secondo membro rappresentano rispettivamente:

- forze di pressione
- forze di natura gravitazionale
- forze di natura viscosa

Per conoscere l'espressione analitica del potenziale gravitazionale ϕ è necessario risolvere l'equazione (2.5), dove figura anche la densità ρ del materiale costituente il disco. La presenza di tale termine a secondo membro è necessaria poiché il disco potrebbe essere abbastanza massivo da fornire un contributo non trascurabile a ϕ . L'equazione (2.4) è infine una riformulazione del primo principio della termodinamica che descrive la conservazione dell'energia e contiene un termine \dot{Q} per tenere conto di ogni altra possibile sorgente di calore. In aggiunta alle relazioni precedenti la pressione P , la densità ρ ed e sono legate fra loro dall'equazione di stato

$$P = (\gamma - 1) \rho e, \quad (2.6)$$

dove γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica.

La risoluzione del problema appena presentato è difficoltosa e richiederebbe elevate risorse computazionali: è possibile fare delle assunzioni che consentono di semplificare notevolmente la casistica considerata.

Il disco che tratteremo sarà:

- simmetrico per rotazioni attorno all'asse z
- non auto-gravitante
- sottile
- composto da gas ideale
- in equilibrio idrostatico lungo z
- verticalmente isotermo

Un disco proto-planetario viene detto sottile se l'estensione verticale caratteristica h è molto minore della dimensione radiale cilindrica r . Per i dischi circum-stellari si ha solitamente che $h/r \simeq 0.1$: l'approssimazione che vogliamo introdurre è verificata in natura. La condizione di disco sottile ci consente di semplificare notevolmente il problema originale: possiamo infatti integrare lungo la direzione verticale le equazioni di partenza passando da un sistema tridimensionale ad uno bidimensionale. È possibile mostrare che lavorare con $h/r \ll 1$ equivale a richiedere che la velocità del suono c_s sia molto minore della velocità di rotazione v_θ del materiale. Il disco che stiamo studiando è quindi dinamicamente freddo, ossia è caratterizzato da una dinamica super-sonica.

Vogliamo inoltre limitarci allo studio di dischi non auto-gravitanti: la densità ρ non comparirà più a secondo membro dell'equazione di Poisson per la determinazione del potenziale gravitazionale ϕ . La (2.5) assumerà quindi la forma

$$\partial_j \partial_j \phi = -4\pi G M_* \delta(r), \quad (2.7)$$

con soluzione

$$\phi(r, z) = -G \frac{M_*}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (2.8)$$

Sfruttando che $h/r \ll 1$ è possibile trascurare la presenza di z^2 ad argomento della radice, ottenendo un potenziale gravitazionale con dipendenza solo sulla coordinata radiale cilindrica.

2.1.1 Viscosità

Prima di discutere in dettaglio le caratteristiche dei dischi è necessario investigare la natura dei fenomeni viscosi. La viscosità molecolare in questi sistemi è trascurabile, poiché i tempi d'evoluzione se essa fosse l'unica forma di viscosità presente sarebbero dell'ordine di 10^{13} anni, ossia milioni di volte superiori a quanto osservato. Le turbolenze presenti all'interno del disco possono fornire delle viscosità efficaci nettamente più intense di quella molecolare (Shakura e Sunyaev 1973).

Per turbolenze isotrope, la massima scala su cui esse si possono sviluppare è dello stesso ordine di grandezza della dimensione verticale del disco h . La massima velocità dei movimenti turbolenti sarà la velocità del suono, perché avere $u > c_s$ porterebbe a shock associati a rapida dissipazione dell'energia in calore. Queste considerazioni motivano la parametrizzazione

$$\nu = \alpha c_s h, \quad (2.9)$$

dove α è un parametro adimensionale che indica quanto efficiente sia il trasporto del momento angolare. Per i dischi i valori di α universalmente accettati variano da 10^{-4} fino a 10^{-2} : il range appena indicato è quello che procederemo ad analizzare in questa tesi.

2.1.2 Struttura verticale

Il profilo di densità verticale si ricava a partire dall'assunzione di equilibrio idrostatico lungo la direzione z . Consideriamo un elemento di fluido posto a distanza radiale r e ad altezza z rispetto al piano equatoriale. Tale porzione del disco è in equilibrio lungo l'asse z se la forza di pressione e quella di gravità si bilanciano

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g_z. \quad (2.10)$$

La componente verticale dell'accelerazione di gravità si ottiene con delle semplici considerazioni geometriche (vedi Figura 2.2):

$$g_z = \frac{GM_*}{r^2 + z^2} \sin(\theta) = \frac{GM_*}{d^3} z \quad (2.11)$$

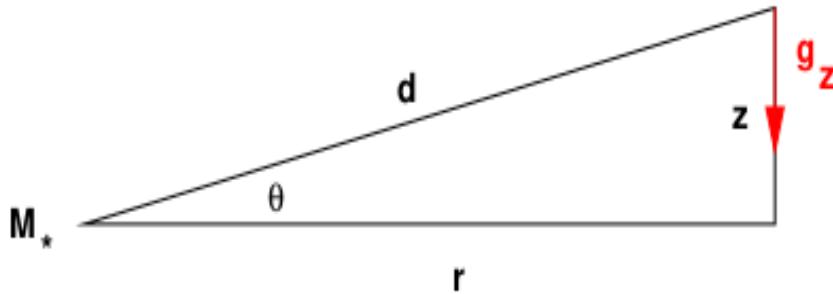


Figura 2.2: Costruzione geometrica per la determinazione del profilo di densità verticale

Nel limite in cui $z \ll r$ è possibile approssimare l'espressione precedente sfruttando che $r \sim d$. Sostituendo la coordinata radiale al posto della distanza fra l'elemento di fluido considerato e la stella, otteniamo una relazione in cui è possibile riconoscere la velocità angolare kepleriana Ω .

$$g_z \simeq \frac{GM_*}{r^3} z = \Omega^2 z \quad (2.12)$$

Supponiamo ora per semplicità che il disco sia verticalmente isotermo: l'equazione di stato che lega la pressione alla densità del gas è di conseguenza

$$P = \rho c_s^2, \quad (2.13)$$

dove c_s indica la velocità del suono. Sostituendo le relazioni per la pressione e la componente verticale dell'accelerazione gravitazionale nell'equazione per l'equilibrio idrostatico (2.10) è possibile ricavare l'equazione differenziale

$$\frac{d\rho}{dz} = -\rho \left(\frac{\Omega}{c_s} \right)^2 z. \quad (2.14)$$

La soluzione di (2.14) è una gaussiana:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left(-\frac{z^2}{2h^2} \right) \quad (2.15)$$

dove $h = c_s/\Omega$ indica la scala d'altezza verticale. Può risultare utile dividere h per la coordinata radiale: il rapporto che si ottiene è detto aspect-ratio ed esplicita come vari la scala d'altezza in funzione della distanza dalla stella.

$$\frac{h}{r} = \frac{c_s}{v_\theta} \quad (2.16)$$

L'aspect-ratio consente di dividere i dischi in due categorie:

- dinamicamente freddi, caratterizzati da $h/r < 1$
- dinamicamente caldi, dove invece $h/r \gtrsim 1$

I primi sono caratterizzati da una dinamica super-sonica, con onde sonore che si propagano a velocità inferiori di quelle di movimento del gas. La dinamica nei dischi del secondo tipo è invece di natura sub-sonica.

La discussione precedente ha consentito di esplicitare un legame fra lo spessore del disco e la temperatura T del materiale: si ha infatti che

$$c_s \propto \sqrt{T}. \quad (2.17)$$

L'origine fisica di questa dipendenza è dovuta al fatto che il gradiente di pressione contrasta l'effetto della gravità consentendo un'estensione verticale più grande: più caldo è il disco, maggiore è l'effetto che si ottiene. La determinazione della forma del disco è possibile solamente se è noto il legame fra T ed r .

2.1.3 Profilo di temperatura

Per ottenere il profilo di densità verticale abbiamo lavorato assumendo il disco verticalmente isotermo: T può ancora essere funzione della coordinata radiale. Le fonti di riscaldamento del disco sono principalmente due:

- luce stellare intercettata dal disco (solitamente dalle polveri che ne fanno parte)
- dissipazione di energia potenziale gravitazionale, poiché si ha accrescimento di materiale sulla stella

I dischi per i quali il processo principale è il primo sono detti dischi passivi. Se a dominare è invece il secondo fenomeno, il disco è detto attivo. Questa distinzione è una chiara semplificazione di quanto accada in realtà. La sorgente principale di calore per un disco è una funzione sia del tempo che della posizione: ci aspettiamo che nelle fasi iniziali dell'evoluzione e a piccoli raggi dominino meccanismi di riscaldamento interno, mentre a tempi successivi e in punti più esterni sia fonte principale la luce della stella. Il meccanismo che determina il raffreddamento del disco è l'emissione di corpo nero da parte della polvere.

I tempi caratteristici per il raggiungimento dell'equilibrio termico sono molto più brevi di quelli caratterizzanti l'evoluzione del disco oppure della stella. Il profilo di temperatura è allora determinato dal bilanciamento fra assorbimento ed emissione di calore.

Riscaldamento radiativo

Il profilo di temperatura di un disco passivo è strettamente legato all'estensione spaziale del disco stesso: al variare della forma, cambia anche la quantità di radiazione stellare che può essere intercettata. Limitiamoci allo studio di un sistema costituito da un disco piatto e sottile che assorba tutta la radiazione che lo colpisce e che localmente emetta come se fosse un corpo nero. Lavoriamo con un sistema di riferimento sferico e con una stella modellizzata come una sfera di raggio R_* con temperatura efficace T_* costante nel tempo. Per un tale corpo celeste la brillanza superficiale I_* risulta

$$I_* = \sigma T_*^4, \quad (2.18)$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann.

Per poter determinare l'andamento di $T_{disco}(r)$ dobbiamo ora valutare quale sia il flusso di radiazione incidente. Lavorando con coordinate polari sferiche, come mostrato in Figura 2.3, il flusso passante per un elemento di superficie a distanza r dalla stella è pari a

$$F = \int I_* \sin \theta \cos \phi d\Omega. \quad (2.19)$$

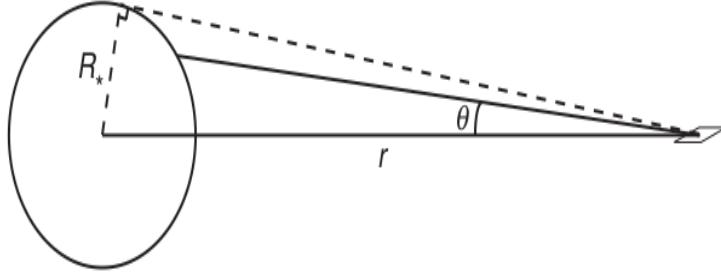


Figura 2.3: Costruzione geometrica utilizzata per calcolare il flusso incidente su un disco piatto e sottile (Armitage 2007)

Dato che il problema che stiamo considerando è simmetrico rispetto al piano equatoriale, consideriamo solamente la radiazione emessa dalla metà superiore della stella. I limiti di integrazione sono quindi:

$$-\pi/2 < \phi \leq \pi/2, \quad (2.20)$$

$$0 < \theta < \arcsin\left(\frac{R_*}{r}\right) \quad (2.21)$$

Svolgendo l'integrale (2.19) si ottiene che

$$F = I_* \left[\arcsin\left(\frac{R_*}{r}\right) - \frac{R_*}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2} \right]. \quad (2.22)$$

Dato che il disco si trova all'equilibrio termico, uguagliamo F all'emissione di corpo nero σT_{disco}^4 ottenendo che

$$T_{disco}(r) = \left\{ \frac{I_*}{\sigma} \left[\arcsin\left(\frac{R_*}{r}\right) - \left(\frac{R_*}{r}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2} \right] \right\}^{1/4}. \quad (2.23)$$

Notiamo che per $R_*/r \ll 1$ la relazione fra temperatura del disco e coordinata radiale è del tipo $T_{disco} \propto r^{-3/4}$.

Riscaldamento viscoso

Per determinare $T_{disco}(r)$ nel caso di un disco attivo dobbiamo studiare i fenomeni di natura viscosa che determinano la dissipazione di energia potenziale gravitazionale. Consideriamo un anellino di spessore Δr . Il momento torcente netto su tale regione del disco sprigiona una potenza pari a

$$\Omega \frac{\partial G}{\partial r} \Delta r \equiv \left[\frac{\partial}{\partial r} (G\Omega) - G \frac{d\Omega}{dr} \right] \Delta r. \quad (2.24)$$

Supponiamo ora di considerare l'intero disco, ossia di integrare rispetto ad r la (2.24). Notiamo che il primo termine del secondo membro sarebbe determinato solamente dai valori assunti agli estremi di integrazione: identifichiamo questo termine con il trasporto di energia associato ai momenti torcenti viscosi. Il secondo termine è di natura dissipativa e rappresenta il tasso di trasmissione di energia al gas. Assumiamo che questa venga convertita in calore e irradiata, così che il tasso di dissipazione per unità di area del disco risulti essere

$$D(r) = \frac{G}{4\pi r} \frac{d\Omega}{dr} = \frac{9}{8} \nu \Sigma \Omega^2, \quad (2.25)$$

dove abbiamo assunto un profilo di velocità Kepleriano. Per un corpo nero sappiamo che $D(r) = \sigma T_{disco}^4$. Imponendo l'equilibrio otteniamo

$$T_{disco}^4 = \frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}} \right), \quad (2.26)$$

dove \dot{M} indica il tasso di accrescimento sulla stella. Notiamo che il profilo di temperatura che abbiamo ottenuto non ha alcuna dipendenza dalla viscosità del disco, ma è legato a \dot{M} . Come nel caso precedentemente analizzato, per $R_*/r \ll 1$ si ha che: $T_{disco} \propto r^{-3/4}$

È necessario sottolineare che i risultati esposti in precedenza non sono auto-consistenti. Per semplificare la casistica trattata abbiamo lavorato con dei dischi piatti ottenendo che $T_{disco} \propto r^{-3/4}$: questa dipendenza fa sì che la velocità del suono $c_s \propto r^{-3/8}$. Utilizzando la (2.16) notiamo che $h/r \propto r^{1/8}$: il disco tenderà ad espandersi maggiormente nelle regioni esterne andando ad intercettare più luce. Le zone a grandi raggi presenteranno quindi una fonte di calore maggiore: il profilo di temperatura non potrà avere una caduta così repentina. È stato verificato che in un disco passivo 'flared' la temperatura a grandi distanze ha un andamento del tipo $T(r) \propto r^{-1/2}$ (Kenyon e Hartmann 1987)

2.2 Evoluzione del disco

I dischi non sono delle strutture statiche, ma evolvono lentamente nel tempo. Per un disco geometricamente sottile la velocità angolare è essenzialmente quella di un orbita Kepleriana. Questo implica che il momento angolare specifico $l = \sqrt{GM_*r}$ è una funzione crescente del raggio: per far sì che il materiale possa fluire verso l'interno deve necessariamente perdere momento angolare. Secondo il modello viscoso, l'evoluzione di $\Sigma(r, t)$ può essere determinata (Pringle 1981) componendo l'equazione di continuità

$$r \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma v_r) \quad (2.27)$$

con l'equazione per la conservazione del momento angolare

$$r \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \Omega \Sigma) + \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \Omega \Sigma v_r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial r}. \quad (2.28)$$

La (2.28) deriva direttamente dalla componente azimutale dell'equazione di Navier-Stokes. Per un fluido viscoso il momento torcente G applicato su un anellino è dato dal prodotto fra la circonferenza, la forza viscosa per unità di lunghezza ed il braccio della forza. Possiamo allora esplicitare G come

$$G = 2\pi r \cdot \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr} \cdot r, \quad (2.29)$$

dove ν è la viscosità cinematica. Procediamo ora combinando la (2.27) con la (2.28) con l'obiettivo di eliminare la velocità radiale v_r . Concentrandosi su un potenziale di tipo Kepleriano, ossia tale per cui $\Omega \propto r^{-3/2}$, è possibile ottenere una relazione che descriva l'evoluzione della densità superficiale di un disco geometricamente sottile:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{1/2}) \right] \quad (2.30)$$

La (2.30) è un'equazione di diffusione. Una volta effettuato il seguente cambio di variabili

$$X \equiv 2r^{1/2} \quad (2.31)$$

$$f \equiv \frac{3}{2} \Sigma X \quad (2.32)$$

si presenta infatti nella tipica forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (2.33)$$

con coefficiente di diffusione

$$D = \frac{12\nu}{X^2}. \quad (2.34)$$

In generale ν sarà una funzione delle condizioni locali del disco. Soluzioni analitiche sono possibili se ν presenta una dipendenza polinomiale nei confronti della coordinata radiale (Lynden-Bell e Pringle 1974). Nel caso in cui la viscosità cinematica dipenda dalla densità superficiale Σ allora l'equazione di evoluzione diventa non lineare e più problematica da risolvere.

2.2.1 Caso particolare: spreading ring

Lavoriamo con ν costante. Supponiamo che la condizione iniziale consista in un anello infinitesimalmente sottile di massa m . La densità superficiale è allora descritta da una δ centrata in una certa posizione radiale R_0 :

$$\Sigma(r, t = 0) = \frac{m}{2\pi R_0} \delta(r - R_0). \quad (2.35)$$

È possibile mostrare (Lynden-Bell e Pringle 1974) che la soluzione dell'equazione di evoluzione diffusiva è

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m}{\pi r_0^2} \frac{1}{\tau} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{1+x^2}{\tau}\right) I_{1/4}\left(\frac{2x}{\tau}\right), \quad (2.36)$$

dove $x \equiv r/R_0$, $\tau \equiv 12\nu R_0^{-2}t$ ed $I_{1/4}$ è una funzione di Bessel modificata del primo tipo. L'evoluzione del profilo di densità radiale è riportato in Figura 2.4. Sotto l'azione di forze di natura viscosa il disco si espande sia verso l'interno che verso l'esterno. L'allargamento verso l'esterno è necessario per la conservazione del momento angolare.

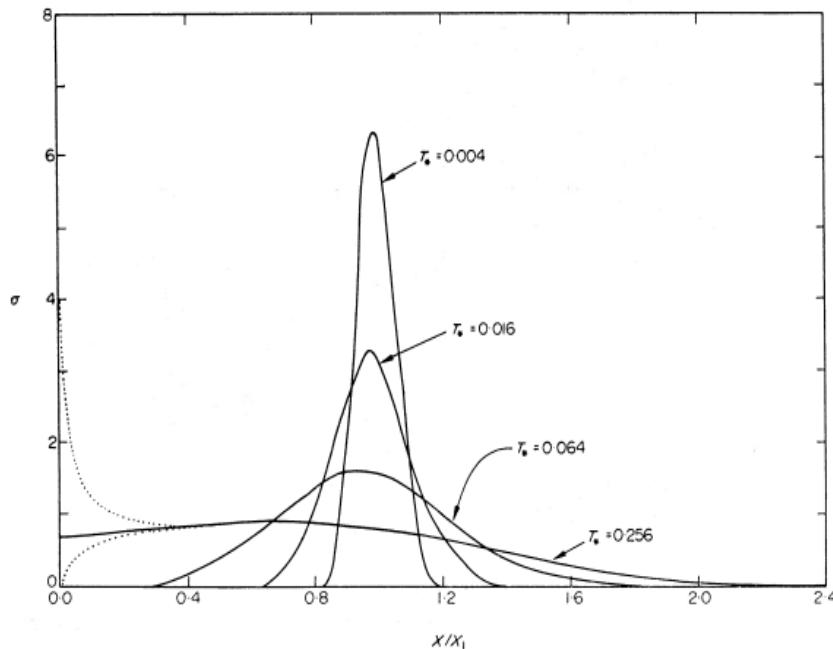


Figura 2.4: Soluzione dell'equazione di evoluzione del disco con $\nu = const$. Si nota l'allargamento dell'anello inizialmente orbitante al raggio $R = R_0$. Sono riportati profili di densità a quattro tempi differenti: $\tau = 0.004$, $\tau = 0.016$, $\tau = 0.064$, $\tau = 0.256$. (Lynden-Bell e Pringle 1974)

Per $t \rightarrow \infty$ si ha che:

- la massa si sposta verso $r = 0$, con conseguente accrescimento del materiale sul corpo centrale.
- il momento angolare, trasportato da una frazione di massa trascurabile, viene portato verso $r = \infty$. Durante l'evoluzione viscosa del disco L è conservato.

2.2.2 Caso particolare: self similar solution

Consideriamo un disco con viscosità $\nu \propto r^\gamma$. Supponiamo che la densità di materiale al tempo $t = 0$ sia quella dello stato stazionario fino ad $r/r_1 = \tilde{r} = 1$ e che per posizioni radiali oltre r_1 presenti un cut-off di tipo esponenziale:

$$\Sigma(t = 0) = \frac{C}{3\pi\nu(r_1)\tilde{r}^\gamma} \exp(-\tilde{r}^{2-\gamma}). \quad (2.37)$$

La soluzione dell'equazione di evoluzione del disco (2.30) è graficata in Figura 2.5

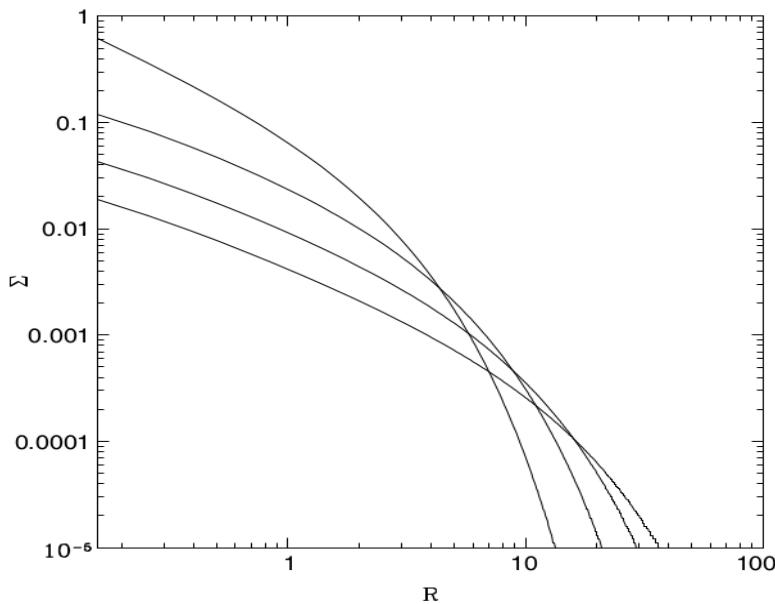


Figura 2.5: Soluzione dell'equazione di evoluzione del disco con $\nu = r^\gamma$. Si nota l'aumento della scala caratteristica del disco al passare del tempo (Lodato 2008).

ed ha espressione analitica

$$\Sigma(\tilde{r}, T) = \frac{C}{3\pi\nu(r_1)\tilde{r}^\gamma} T^{-(5/2-\gamma)/(2-\gamma)} \exp\left(-\frac{\tilde{r}^{2-\gamma}}{T}\right), \quad (2.38)$$

dove:

$$T \equiv \frac{t}{t_s} + 1 \quad (2.39)$$

$$t_s \equiv \frac{1}{3(2 - \gamma)^2} \frac{r_1^2}{\nu(r_1)} \quad (2.40)$$

È possibile osservare come la massa del disco diminuisca a causa dell'accrescimento di materiale sulla stella, mentre l'estensione spaziale dello stesso aumenta in modo tale da conservare il momento angolare.

Capitolo 3

Dischi in sistemi binari

Il collasso dei cores nelle nubi molecolari porta nel 50% dei casi (Offner et al. 2023) alla formazione di sistemi multipli, ossia composti da più stelle che orbitano attorno al centro di massa totale. Questi studi sono rilevanti perché in questo lavoro di tesi ci focalizzeremo sui sistemi binari, che sono formati da due stelle che interagiscono gravitazionalmente fra loro.

Per studiare l'evoluzione di una binaria è necessario il concetto di *Roche lobe*, che è la regione di spazio all'interno della quale il materiale orbitante è gravitazionalmente legato alla stella selezionata. Il raggio di Roche-Lobe R_L dipende solamente dal mass-ratio $q = m_2/m_1$ e dal semiasse maggiore dell'orbita a (Eggleton 1983):

$$R_L = a \cdot \frac{0.49 \cdot q^{-2/3}}{0.6 \cdot q^{-2/3} + \ln(1 + q^{-1/3})}. \quad (3.1)$$

Sono allora possibili tre configurazioni per un sistema binario:

- 'detached binary', in cui nessuna delle due stelle riempie il proprio Roche-Lobe
- 'semi-detached binary', in cui una delle due stelle riempie il proprio Roche-Lobe
- 'contact binary', in cui entrambe le stelle riempiono il loro Roche-Lobe. In questo caso il sistemastellare appare come un singolo oggetto caratterizzato dalla presenza di due cores stellari legati insieme da uno strato comune.

In Figura 3.1 è riportato il caso di un sistema in cui nessuno dei due Roche-Lobe è pienamente occupato.

Un sistema binario può presentare tre dischi proto-planetari separati: due circum-stellari (ognuno attorno ad una stella) ed uno circum-binario, che orbita attorno al centro di massa della binaria. La casistica dei dischi è rilevante solo per le binarie che non riempiono il proprio *Roche-Lobe*. In un tale sistema le par-

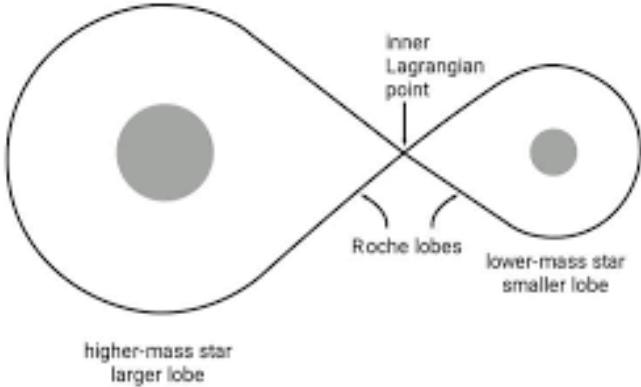


Figura 3.1: In questo esempio entrambe le stelle si trovano all'interno del loro Roche-Lobe (tracciato in nero). Notiamo che le due regioni delimitate dalla linea continua si incontrano nel punto di Lagrange posizionato lungo la congiungente fra i due corpi. Tale posizione è quella in cui le attrazioni gravitazionali da parte delle due stelle si elidono a vicenda.

ti esterne dei dischi circum-stellari sono influenzate da effetti mareali dovuti alla presenza dell'altro corpo: tali interazioni solitamente portano al troncamento del disco. Questo fenomeno è causato dal fatto che in sistemi a più corpi le interazioni dinamiche fra materiale gassoso e stelle determinano lo svuotamento di certe regioni spaziali. Dal punto di vista osservativo i dischi in sistemi multipli sono fonte di emissioni più deboli (nel sub-millimetrico) rispetto a quelli nei sistemi singoli (Long et al. 2019). Il disco circum-primario è solitamente più massivo e più luminoso del disco circum-secondario. In Figura 3.2 sono riportate delle osservazioni di dischi circumstellari in sistemi binari appartenenti alla nebulosa del Toro.

3.1 Cenni sul problema di Keplero

Il problema fisico che andiamo ad affrontare è quello di due punti materiali di massa m_1 ed m_2 rispettivamente posti in \vec{x}_1 ed \vec{x}_2 , che interagiscono tra loro con una forza diretta lungo la congiungente e dipendente solo dalla loro distanza. La lagrangiana del sistema usando coordinate cartesiane è:

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2) = \frac{1}{2}m_1 |\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2 |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 - V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \quad (3.2)$$

Notiamo che la (3.2) è invariante per traslazioni rigide poiché il potenziale dipende solamente da $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$: conviene utilizzare un sistema di riferimento che renda

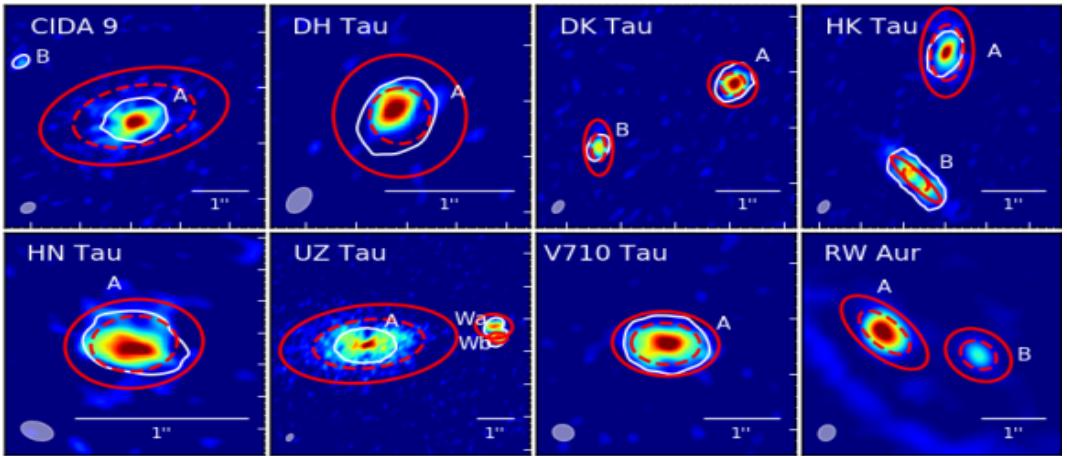


Figura 3.2: Immagini delle emissioni di ^{12}CO di dischi attorno a sistemi multipli nella nebulosa del Toro. Sono riportati gli ellissi che racchiudono il 68 % (linea tratteggiata) ed il 95 % del flusso totale (linea continua). In ogni figura è presente una barra, di lunghezza 1'' (Rota et al. 2022).

più evidente questa simmetria. Definiamo allora la coordinata relativa \mathbf{x}_{rel} , dalla quale dipenderà il potenziale V e la coordinata del centro di massa \mathbf{x}_{CM} :

$$\mathbf{x}_{rel} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Applicando il precedente cambio di coordinate è possibile scrivere la lagrangiana di partenza come somma di una parte baricentrale ed una relativa

$$L(\dot{\mathbf{x}}_{CM}, \mathbf{x}_{rel}, \dot{\mathbf{x}}_{rel}) = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{x}}_{CM}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{x}}_{rel}|^2 - V(\mathbf{x}_{rel}), \quad (3.5)$$

dove $M = m_1 + m_2$ e μ è la massa ridotta. Notiamo che non è presente alcuna dipendenza su \mathbf{x}_{CM} : per il teorema di Noether i momenti associati a tale coordinata sono conservati. Le informazioni importanti riguardo l'evoluzione del sistema sono da ricercare nella lagrangiana relativa:

$$L_{rel}(\mathbf{x}_{rel}, \dot{\mathbf{x}}_{rel}) = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{x}}_{rel}|^2 - V(\mathbf{x}_{rel}). \quad (3.6)$$

La (3.6) può essere ridotta ad un solo grado di libertà lavorando in un sistema di riferimento polare. Consideriamo il cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x_{rid} = r \cos \varphi \sin \theta \\ y_{rid} = r \sin \varphi \sin \theta \\ z_{rid} = r \cos \theta \end{cases} \quad (3.7)$$

ottenendo per la lagrangiana ridotta l'espressione

$$\tilde{L}_{rid}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r). \quad (3.8)$$

Il potenziale $V(r)$ è centrale e di conseguenza il momento angolare \mathbf{L} del sistema è conservato. Detto J il momento angolare iniziale, è possibile mostrare che la (3.8) può essere scritta in dipendenza della sola coordinata radiale

$$\tilde{L}_{rid}(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V_J(r), \quad (3.9)$$

dove il $V_J(r)$ assume la forma

$$V_J(r) = \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r). \quad (3.10)$$

Un potenziale di questo genere può comportare orbite aperte oppure chiuse in dipendenza dei parametri che caratterizzano il moto dei corpi. In Figura 3.3 è riportato il ritratto in fase per $J \neq 0$. Notiamo che possiamo avere tre tipi di orbite:

- circolari in corrispondenza del minimo
- limitate per valori di energia tali per cui $V_J(r_{min}) < E < 0$
- illimitate per $E \geq 0$

Le orbite limitate per il problema in questione sono o circonferenze o ellissi in cui il centro di massa del sistema occupa uno dei due fuochi. I parametri che consentono di descrivere le traiettorie sono l'eccentricità e ed il semi-asse maggiore a : noti momento angolare L ed energia E del sistema è possibile ricavarli come

$$a = -\frac{Gm_1 m_2}{2E_{tot}}, \quad (3.11)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{J^2}{GMa\mu^2}}. \quad (3.12)$$

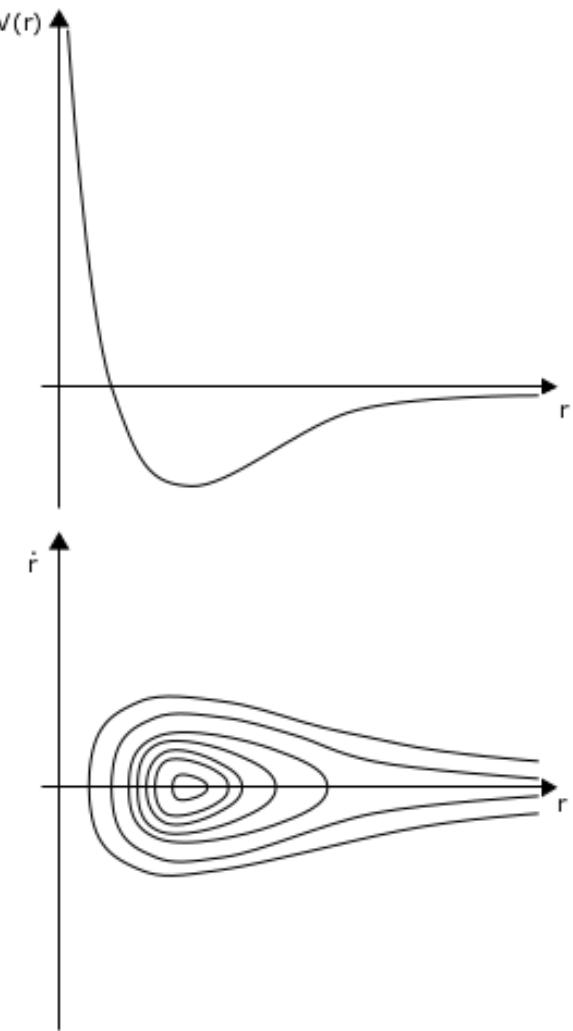


Figura 3.3: Ritratto in fase per il sistema studiato. Il potenziale efficace $V_{eff}(r)$ presenta un minimo globale che corrisponde ad un moto circolare uniforme. Per energie negative l'orbita è chiusa, ma con velocità radiale variabile nel tempo.

3.2 Fisica del troncamento

Le interazioni fra un disco gassoso ed un compagno perturbante possono essere studiate con approcci differenti:

- in termini di forze di marea (Papaloizou e Pringle 1977), lavorando con l'*impulse approximation* (Lin e Papaloizou 1979)

- assumendo che le interazioni vengano eccitate in particolari posizioni spaziali, dette risonanze
- considerando le orbite di particelle test e la loro stabilità

3.2.1 Troncamento mareale

Vogliamo valutare gli effetti delle perturbazioni mareali su un disco d'accrescimento orbitante attorno alla stella primaria (massa m_1), dovute alla presenza del secondo corpo di massa m_2 . Lavoriamo assumendo che il mass ratio del sistema considerato sia piccolo: l'interazione di natura mareale presa in considerazione è debole. Quando $m_2/m_1 \ll 1$ la forza attrattiva della secondaria viene percepita dal gas orbitante attorno ad m_1 solo quando m_2 è vicina: le particelle che risentono della presenza del secondo corpo sono solamente quelle al bordo del disco. La traiettoria di un elemento viene deviata sotto l'azione della forza di marea di un angolo tale che

$$\cot^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{v^4 b^2}{G^2 m_2^2}, \quad (3.13)$$

dove v è la velocità relativa fra stella e gas, mentre b è il parametro d'impatto. Dato che le particelle stanno orbitando attorno ad m_1 con una frequenza angolare Ω ed il periodo d'orbita della binaria è dato da $2\pi/\omega$ possiamo esplicitare $v = (\Omega - \omega)R$, dove con R si intende l'estensione spaziale del disco finora ignota. Per la casistica in analisi è possibile ricavare il tasso di trasferimento di momento angolare specifico \dot{h} (Lin e Papaloizou 1979), che risulta

$$\dot{h} = \frac{G^2 m_2^2}{\pi R^2 b^2 (\Omega - \omega)^2}. \quad (3.14)$$

Lavorando con un espansione di Taylor per Ω è possibile valutare il tasso di trasporto del momento angolare sull'intero disco

$$\dot{H} = \frac{2G^2 m_2^2 R \Sigma}{R^2 (d\Omega/dR)^2} \int_B^\infty \frac{db}{b^4} = \frac{2G^2 m_2^2 \Sigma}{3RB^3 (d\Omega/dR)^2}, \quad (3.15)$$

dove Σ è la densità superficiale e B il minimo valore che viene assunto da b . Possiamo ora determinare il tempo caratteristico per i fenomeni di natura mareale

$$\tau_{mar} = \frac{27\pi}{8} \left(\frac{B}{R}\right)^3 \frac{1}{\Omega q^2} \frac{9\pi}{8q\Omega}. \quad (3.16)$$

Il passaggio della secondaria causa un cambiamento nelle orbite percorse dal materiale costituente il disco: esse da circolari diventano eccentriche. Dopo un incontro ravvicinato con la binaria la forza di marea diventa molto debole: se i fenomeni

viscosi sono abbastanza intensi il momento angolare verrà ridistribuito all'interno del disco per giungere nuovamente allo stato a minima energia del sistema con conseguente ricircolarizzazione delle orbite. Dato che $m_2 \ll m_1$ nella regione di spazio vicino alla primaria è possibile trascurare le interazioni di marea: l'evoluzione del disco è di natura viscosa ed il materiale accresce sulla stella primaria poiché il momento angolare L_{disco} viene portato verso l'esterno. I tempi scala dei fenomeni viscosi dipendono linearmente dal numero di Reynolds:

$$\tau_{visc} = \frac{R}{\Omega}. \quad (3.17)$$

Il trasporto viscoso di momento angolare all'interno del disco comporta l'allontanamento di una certa frazione della massa dalla protostella centrale: tale fenomeno prosegue fino a quando L_{disco} viene portato al bordo esterno del disco. All'outer edge può succedere che:

- $\tau_{mar} > \tau_{visc}$, ossia gli effetti di natura viscosa sono ancora dominanti. In questo caso il disco continuerebbe ad espandersi.
- $\tau_{mar} < \tau_{visc}$, ossia la forza di marea è più efficiente dei fenomeni viscosi. In questo caso l'espansione del disco si blocca e l'eccesso di momento angolare viene donato alla binaria per mezzo dell'interazione di marea. Il disco viene troncato.

Il raggio di troncamento viene quindi individuato imponendo che $\tau_{mar} = \tau_{visc}$. Osserviamo dalle relazioni (3.16), (3.17) che $\tau_{mar} \propto 1/R^3$ e $\tau_{visc} \propto R$: cambiare la viscosità ν non comporterà un grande cambiamento del raggio di troncamento.

3.2.2 Troncamento risonante

Un approccio differente e più accurato rispetto a quello dell' *impulse approximation* consiste nel lavorare considerando le interazioni fra disco e corpo perturbante come eccitate in regioni specifiche dello spazio (Goldreich e Tremaine 1980). La teoria del troncamento risonante presuppone che le perturbazioni al potenziale centrale della stella attorno a cui orbita il disco circumstellare siano piccole, ossia che il disco si trovi lontano dal corpo perturbante. Tale assunzione non è sempre verificata, poiché è possibile avere interazioni intense in *close interacting binary systems*. Il potenziale di un sistema binario determinato dalla presenza di due stelle a simmetria sferica rispettivamente poste in \vec{r}_1 ed \vec{r}_2 risulta pari a

$$\phi(r, \theta, t) = - \sum_{j=1}^2 \mu_j \frac{GM}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad (3.18)$$

dove \mathbf{r} indica la regione in cui viene calcolato il potenziale, \mathbf{r}_j è la posizione del j -esimo corpo, $\mu_1 = 1 - \mu$ e $\mu_2 = \mu$. L'assunzione di piccole perturbazioni ci permette di lavorare con metodi perturbativi lineari espandendo il potenziale (3.18) in serie di Fourier (Goldreich e Tremaine 1980) come

$$\phi(r, \theta, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{l,m}(r) \exp [i(m\theta - l\Omega_B t)], \quad (3.19)$$

dove l è il numero caratteristico dei modi normali temporali, $m \geq 0$ è il numero azimutale, $\phi_{l,m}(r)$ è la componente potenziale ed $\Omega_B = (GM/a^3)^{1/2}$ è la velocità angolare media della binaria (M è la massa totale del sistema, mentre a denota il semiasse maggiore). Notiamo che le singole armoniche del potenziale binario ruotano uniformemente con velocità angolare di pattern $\Omega_P = (l/m)\Omega_B$.

Invertendo la (3.19) è possibile determinare $\phi_{l,m}$ (Artymowicz e Lubow 1994) come

$$\phi_{m,l} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d(\Omega_B t) \int_0^{2\pi} d\theta \phi \cos(m\theta - l\Omega_B t). \quad (3.20)$$

Ogni armonica $\phi_{m,l}$ può dare origine a tre risonanze:

- una risonanza corotazionale, che si verifica per quel raggio tale per cui $\Omega(r) = (l/m) \cdot \Omega_B$
- due risonanze di Lindblad LR (una interna ILR ed una esterna OLR) per quelle posizioni radiali tali per cui $m(\Omega(r) - \Omega_p) = \mp k$

Una risonanza è detta di Lindblad se la forzante su una particella che si muove su un orbita imperturbata agisce alla frequenza epiciclica. Dato che stiamo lavorando con un disco quasi-Kepleriano le risonanze si sviluppano ad

$$r_{CR} = (m/l)^{2/3} \mu_*^{1/3} a, \quad (3.21)$$

$$r_{LR} = [(1 \pm m)]^{2/3} \mu_*^{1/3} a, \quad (3.22)$$

dove il segno + corrisponde alla *Outer Lindblad Resonace*, il - alla ILR e μ_* corrisponde alla frazione della massa della binaria presente al centro del disco. Notiamo che alcune risonanze non sono presenti in alcun possibile disco: le ILR $(m, l) = (1, l)$ sono poste a $r = 0$, mentre le OLR $(m, l) = (m, 0)$ dovrebbero essere poste ad infinito. Può essere verificato che le risonanze appena presentate non siano importanti per la determinazione del bordo del disco.

Conviene ora definire il parametro $k = m - l$. Si può dimostrare che il momento torcente associato alle risonanze IRL/OLR dipende dal quadrato del potenziale perturbante. Dato che $\phi_{m,m-k} \sim e^{|k|}$ (Goldreich e Tremaine 1980),

i momenti torcenti risonanti scalano con l'eccentricità del sistema binario come $T_{l,m} \sim e^{2|k|}$: i valori maggiori si hanno per $k = m - l = 0$. Notiamo che le risonanze 'eccentriche' con $|k| > 0$ diventeranno progressivamente più intense all'aumentare di e . In Figura 3.4 vengono indicate le posizioni delle risonanze più importanti presenti nei dischi circumstellari: la scelta $l + m/10$ serve solamente per separare le coppie (m, l) fra loro e non ha alcun significato fisico.

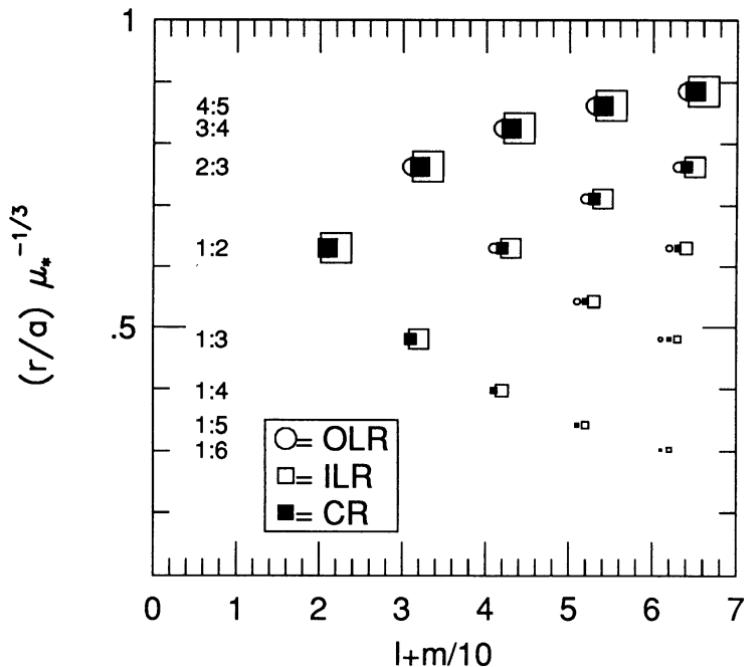


Figura 3.4: Posizioni delle LR e delle risonanze corotazionali in un disco circumstellare per diverse combinazioni (m, l) tali da soddisfare la condizione $|k| = |m - l| < 5$. Le risonanze più intense sono rappresentate dai simboli più grandi: la diminuzione delle loro dimensioni è dovuta alla diminuzione in intensità delle perturbazioni. Il disco circumstellare è posto attorno alla stella caratterizzata da μ_* (Artymowicz e Lubow 1994).

Notiamo che sono presenti delle ILR molto intense oltre alla commensurabilità $1 : 2$: tali risonanze non sono importanti per le binarie con mass-ratio non estremi perché sono solitamente troppo intense e rimuovono sempre il materiale in corrispondenza della loro posizione spaziale. Nei dischi circumstellari giocano un ruolo importante le risonanze caratterizzate da $m = 2$, poiché sono le più interne.

Criteri per il gap-opening

Il criterio per il *gap opening* sviluppato da Artymowicz e Lubow (1994) consiste nel valutare l'equilibrio fra i momenti torcenti di natura viscosa e quelli dovuti al corpo perturbante. Per far sì che un disco venga troncato in una determinata posizione si deve avere che

$$3\pi\alpha \left(\frac{h}{r}\right)^2 \leq \frac{T}{\sigma\Omega^2 r^4}, \quad (3.23)$$

dove T è il momento torcente esterno e σ è la densità superficiale del disco nell'intorno del gap. Il primo membro della condizione appena riportata è l'inverso del numero di Reynolds R^{-1} del materiale orbitante moltiplicato per il fattore 3π , mentre il secondo membro è un momento torcente risonante specifico. Ricordiamo che in generale il gas costituente il disco ha $R \in \{10^4, 10^6\}$. Oltre il verificarsi della condizione (3.23) è necessario che il tempo caratteristico per l'apertura del gap t_{open} sia molto inferiore rispetto agli altri tempi caratteristici della binaria. Il criterio per il gap opening può essere riformulato (Artymowicz e Lubow 1994) come

$$\alpha^{1/2} \left(\frac{h}{r}\right) \leq \left(\frac{a|\phi_{lm}|}{GM}\right) \frac{(\pi m)^{1/2}(m \pm 1)^{1/6}|\lambda \mp 2m|}{3\mu_*^{2/3}l^{2/3}}, \quad (3.24)$$

dove $\lambda = [d \ln \phi_{l,m} / d \ln r]_{LR}$.

Dimensioni dei dischi circumstellari

Consideriamo la casistica di binaria circolare: vogliamo valutare quale rapporto fra le masse dei due corpi consenta di avere il disco troncato alla ILR caratterizzata da $(m, l) = (2, 2)$. La componente $\phi_{2,2}(r)$ può essere espressa (Artymowicz e Lubow 1994) come

$$\phi_{22}(r) \simeq -\frac{3(1 - \mu_*)GM}{4a} \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad (3.25)$$

il che fornisce una condizione di bilanciamento dei momenti torcenti pari a

$$\alpha^{1/2} \left(\frac{h}{r}\right) = \frac{3\pi^{1/2}}{2^{5/2}}(1 - \mu_*). \quad (3.26)$$

Il numero di Reynolds caratteristico del materiale costituente un disco protoplanetario è $R \sim 10^5$ e l'aspect-ratio tipico è $h/r \sim 0.1$ (vedi Sezione 2.1): per far sì che l'uguaglianza (3.26) sia rispettata, è necessario che $1 - \mu_* \lesssim 10^{-2}$. Solitamente tali valori di $1 - \mu$ sono verificati con pianeti giganti orbitanti attorno alla propria stella. I dischi in sistemi binari saranno di dimensioni nettamente inferiori. In Figura 3.5 sono riportate le dimensioni dei dischi circumstellari per $\mu = 0.3$ al variare del numero di Reynolds: l'estensione dei corpi rotanti sono determinate valutando il criterio del gap-opening per le risonanze $(m, l) = (2, l)$.

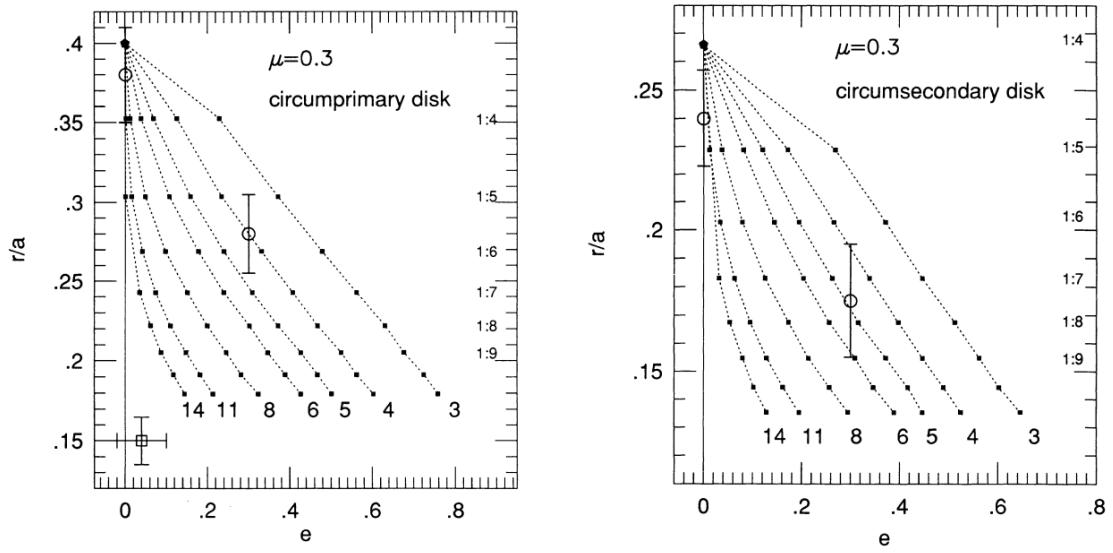


Figura 3.5: In figura sono riportati i valori dei raggi dei dischi circumstellari per $\mu = 0.3$, basati sulle posizioni delle varie risonanze. Le linee tratteggiate sono 7 e collegano i dati caratterizzati dallo stesso valore del numero di Reynolds: alla fine delle righe è riportato il valore di $\log R$. I cerchi con le barre d'errore sono i valori simulativi ottenuti da Artymowicz e Lubow (1994). Notiamo come al variare del numero di Reynolds, per avere il disco troncato nella stessa posizione è necessario che cambi l'eccentricità della binaria considerata (Artymowicz e Lubow 1994).

3.2.3 Stable invariant loops

Il metodo degli *stable invariant loops* si focalizza sui cammini percorsi dalle particelle di gas: in un disco stabile tali traiettorie non devono intersecarsi fra loro o autointersecarsi. Il metodo sviluppato da Pichardo, Sparke e Aguilar (2005) è focalizzato solamente su effetti di natura dinamica dell'interazione fra corpo perturbante ed anello di gas: tale approccio non consente di studiare gli effetti legati alla pressione ed alla viscosità del materiale orbitante. Un *stable invariant loop* consiste in un contorno chiuso nello spazio delle configurazioni tale per cui ogni punto inizialmente all'interno dello stesso evolve nel tempo ritornando nella condizione iniziale dopo un periodo della binaria. Quando tali regioni di spazio non si intersecano fra loro possono essere riempite di gas: se il materiale guadagna o perde momento angolare può attraversare diverse sequenze di invariant loops.

Un modo per identificare *stable loops* consiste nell'effettuare delle simulazioni numeriche (Pichardo, Sparke e Aguilar 2005). Procedendo in questo modo è possibile individuare diverse tipologie di traiettorie:

- orbite circumstellari

- orbite circumbinarie
- orbite che comportano l'allontanamento della particella dal sistema binario
- orbite che portano il materiale ad accrescere su una delle due stelle

Molto vicino alle stelle i *stable loops* sono delle orbite circolari dovute alla presenza del corpo centrale: l'influenza della seconda componente della binaria può essere trascurata totalmente. Allontanandosi dal centro del sistema di riferimento considerato, le orbite tendono ad aumentare in eccentricità e a presentare una forma più allungata. In Figura 3.6 è riportato un esempio di calcolo dei stable loops.

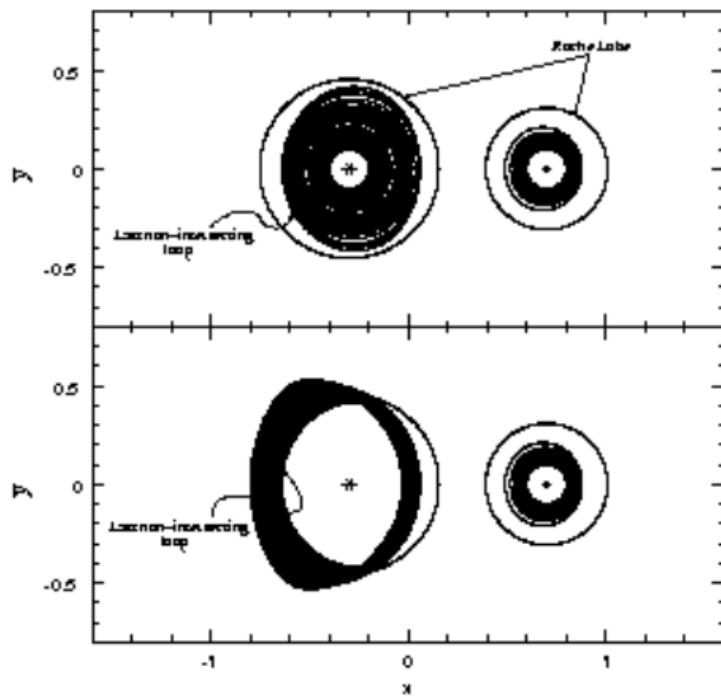


Figura 3.6: Plot che riporta gli *invariant loops* circumstellari per una binaria con: $q = 0.2$, $e = 0.0$. Nella parte superiore sono riportati tutti quei cicli fino all'ultimo non intersecante, mentre in quella inferiore sono riportati i *loops* dal primo intersecante all'ultimo trovato. Notiamo come il passaggio da non intersecanti ad intersecanti avvenga intorno al raggio del Roche-lobe. (Pichardo, Sparke e Aguilar 2005)

I dischi circumbinari presentano un comportamento opposto: a grandi distanze dalla binaria, ossia per $r \gg a$ i *stable loops* risultano essere circolari poiché con buona approssimazione è possibile considerare tutta la massa del sistema come posta nel centro di massa dello stesso. Avvicinandosi alla binaria, l'approssimazione

precedentemente utilizzata non è più accurata, determinando dei *loops* di forma maggiormente troncata.

I dischi protoplanetari possono occupare le regioni in cui gli *invariant stable loops* non si intersecano fra loro: note le posizioni dei *loops* è possibile ricavare quali siano le dimensioni dei dischi troncati. Tali valori sono riportati in Appendice B

3.2.4 Dimensioni del disco

Gli approcci presentati nelle tre Sottosezioni precedenti sono tutti approssimativi. Il metodo delle *Test particles* sviluppato da Pichardo, Sparke e Aguilar (2005) consente di studiare in profondità i fenomeni dinamici che influenzano l’evoluzione di un disco circumstellare, ma ignora gli effetti legati alla pressione ed alla viscosità. Il criterio delle interazioni risonanti sviluppato da Goldreich e Tremaine (1980) consente di ricavare risultati analiticamente accurati per sistemi debolmente interagenti nell’intorno della regione di troncamento: tale assunzione non è sempre verificata. Il troncamento in termini di forze di marea, allo stesso modo, è determinato considerando l’influenza del corpo perturbante solamente nel momento in cui esso si trova accanto al materiale costituente il disco. Manara, Tazzari et al. (2019) hanno proposto una formula analitica per la determinazione del raggio di troncamento

$$r_t = R_L(ae^b + c\mu^d), \quad (3.27)$$

dove R_L è la dimensione spaziale del Roche-Lobe riportata in (3.1). La (3.27) è composta da due termini: il primo contiene la dipendenza dall’eccentricità e , mentre il secondo esplicita una dipendenza dalla massa ridotta μ . I parametri $c = 0.88$ e $d = 0.01$ sono stati determinati fittando i risultati ottenuti da Papaloizou e Pringle (1977). I restanti due, ossia a e b sono stati calcolati fittando i risultati numerici ottenuti da Artymowicz e Lubow (1994): i valori sono riportati in Tabella A.1 presente in Appendice.

Capitolo 4

Metodi numerici

Nei due capitoli precedenti abbiamo analizzato i fenomeni che regolano l'evoluzione dei dischi circum-stellari. Per studiare il troncamento in dipendenza dei parametri della binaria, vogliamo ora risolvere numericamente le equazioni differenziali che descrivono il fenomeno in analisi. I metodi che vengono utilizzati per effettuare simulazioni idrodinamiche possono essere suddivisi in due macro-categorie:

- Euleriani
- Lagrangiani

Il criterio di suddivisione è il formalismo con cui vengono trattati i fluidi. Il primo dei due approcci consiste nel descrivere il materiale per mezzo di grandezze che dipendono dalle coordinate spaziali e dal tempo, come per esempio: $\rho(\vec{x}, t)$ ed $u(\vec{x}, t)$. I campi che sono soluzioni del problema idrodinamico nel caso euleriano consentono una descrizione del fluido in un sistema di riferimento che in generale non coincide con quello del fluido. Fissata una posizione \vec{x}_p nello spazio, il valore che assume una generica proprietà del fluido $a(\vec{x}_p, t)$ varia al passare del tempo perché le condizioni nell'intorno di \vec{x}_p ne determinano un cambiamento locale. Il secondo approccio focalizza invece l'attenzione sulle proprietà del singolo elemento di fluido. Il punto di vista utilizzato è quello del materiale stesso, che viene considerato come costituito da un insieme di particelle lagrangiane: le proprietà del flusso sono funzione del particolare elemento.

4.1 Mesh codes

I metodi numerici che impiegheremo in questa tesi adottano il punto di vista euleriano: la regione simulata viene suddivisa mediante una griglia effettuando il passaggio dal continuo al discreto.

Studiamo per il momento un problema monodimensionale dove indichiamo con x la posizione. Il dominio spaziale viene diviso in n intervalli della stessa dimensione: una funzione $f(x, t)$ a tempo t fissato assumerà n valori, in corrispondenza delle posizioni presenti nella griglia. Per valutare l'evoluzione della funzione nel tempo è necessario lavorare con intervalli Δt finiti. I time-step non possono essere grandi a piacimento, ma devono rispettare la condizione CFL che pone un limite superiore a Δt (vedi Sottosezione 4.1.2).

La discretizzazione nel tempo e nello spazio del problema in analisi comporta che

$$x \in \mathbf{R} \quad \rightarrow \quad x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad (4.1)$$

$$t \in \mathbf{R} \quad \rightarrow \quad t \in \{t^1, t^2, \dots, t^m\}, \quad (4.2)$$

$$f(x, t) \quad \rightarrow \quad \{f_1^1, f_2^1 \dots f_n^1\} \dots \{f_1^m, f_2^m \dots f_n^m\}, \quad (4.3)$$

dove abbiamo indicato con x_i il centro della i -esima cella. Nella (4.3) l'indice a pedice indica la posizione in cui è stata valutata $f(x, t)$, mentre l'apice indica il tempo a cui è stata effettuata la stima.

4.1.1 Metodo alle differenze finite

Il metodo alle differenze finite è una tecnica numerica di risoluzione di equazioni differenziali che si basa sull'approssimazione delle derivate di $f(x, t)$. Vogliamo discretizzare la derivata fatta rispetto alla coordinata spaziale: per ottenere questo risultato sfruttiamo il fatto che $\partial f / \partial x$ è definita come il limite del rapporto incrementale in x . Dato che la coordinata spaziale $x \in \{x_1, x_2 \dots x_n\}$, possiamo approssimare la derivata di $f(x, t)$ sul bordo di una cella come

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+1/2}^j = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{x_{i+1} - x_i}. \quad (4.4)$$

Assumiamo che la derivata ottenuta con il metodo delle differenze finite è la miglior stima di $\partial f / \partial x$ nel punto medio fra quelli utilizzati per calcolarla: l'indice $1/2$ nella (4.4) indica che la derivata è valutata sulla superficie di separazione fra due celle adiacenti. La derivata può essere determinata nel centro di una cella considerando i valori che $f(x, t)$ assume nelle due adiacenti:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^j = \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (4.5)$$

La discretizzazione del problema comporta l'insorgere di errori di troncamento: per determinarne l'entità lavoriamo con delle opportune espansioni di Taylor per una generica funzione $g(x)$.

La 'forward derivative' è accurata al primo ordine: in questo caso la derivata è valutata ad uno dei due estremi utilizzati per calcolarla. Considerando l'espansione di Taylor per $g(x + \Delta x)$ opportunamente riorganizzata

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_x = \frac{g(x + \Delta x) - g(x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (4.6)$$

osserviamo come l'errore di troncamento sia $O(\Delta x)$.

Lavoriamo ora con le espansioni per $g(x + \Delta x)$ e $g(x - \Delta x)$ arrestate al secondo ordine:

$$g(x + \Delta x) = g(x) + g'(x)\Delta x + O(\Delta x^2), \quad (4.7)$$

$$g(x - \Delta x) = g(x) - g'(x)\Delta x + O(\Delta x^2), \quad (4.8)$$

dove ' indica una derivazione rispetto alla variabile x . Effettuando la differenza fra le due otteniamo

$$g'(x) = \frac{g(x + \Delta x) - g(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.9)$$

La (4.9) è valutata nel punto medio fra i due utilizzati per calcolarla: è detta derivata centrale ed è accurata al secondo ordine. Un analogo ragionamento può essere applicato alla derivata rispetto alla coordinata temporale.

L'algoritmo di Verlet è un tipico esempio di metodo alle differenze finite. Supponiamo di avere un sistema con configurazione $\vec{r}(t)$ e di volerne determinare l'evoluzione al tempo $t + \delta t$. Proseguiamo come in precedenza considerando le seguenti espansioni di Taylor:

$$\vec{r}(t + \delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\delta t^2 + \frac{1}{6}\dot{\vec{a}}(t)\delta t^3 + O(\delta t^4), \quad (4.10)$$

$$\vec{r}(t - \delta t) = \vec{r}(t) - \vec{v}(t)\delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\delta t^2 - \frac{1}{6}\dot{\vec{a}}(t)\delta t^3 + O(\delta t^4), \quad (4.11)$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni ricaviamo che

$$\vec{r}(t + \delta t) \simeq 2\vec{r}(t) - \vec{r}(t - \delta t) + \vec{a}(t)\delta t^2 + O(\delta t^4). \quad (4.12)$$

L'errore di troncamento dell'algoritmo presentato è $O(\delta t^4)$: l'elevata precisione è dovuta all'utilizzo sia della configurazione al tempo t che quella al tempo $t - \delta t$ per la determinazione della posizione successiva. Oltre che per le ODE, il metodo può essere utilizzato per le PDE poiché il campo è noto in tutto il dominio simulato. Per una *partial differential equation* il valore della posizione al tempo $t + \delta t$ non viene infatti determinato mediante la sola dipendenza temporale, ma anche in base ai valori del campo nell'intorno del sito considerato al tempo t .

4.1.2 Condizione CFL

La condizione di Courant-Friedrichs-Lowy fornisce un limite superiore all'intervallo temporale che può essere utilizzato per effettuare l'evoluzione del sistema: tale restrizione è necessaria per avere la convergenza delle soluzioni alle equazioni differenziali. Il Δt deve rispettare la condizione

$$\Delta t < C \frac{\Delta x}{u}, \quad (4.13)$$

dove C è un numero reale detto *numero di Courant* e Δx è l'estensione spaziale della singola cella. La condizione che abbiamo appena introdotto è evidentemente locale, dato che la velocità del fluido solitamente varia nel dominio considerato. Per ottenere il corretto intervallo che garantisca la convergenza della soluzione si valuta Δt per ogni cella, per poi scegliere come fattore limitante il minore di tutti.

4.2 Fargo3D

FARGO3D è un codice magneto-idrodinamico sviluppato con l'obiettivo di studiare la fisica dei dischi proto-planetari e le loro interazioni con pianeti in formazione. Le equazioni differenziali caratteristiche del problema (vedi Sezione 2.1) sono risolte utilizzando una griglia euleriana, che può essere applicata a sistemi di coordinate cartesiani, cilindrici o sferici. Le tecniche numeriche di risoluzione utilizzate sono il metodo alle differenze finite (esposto nella Sottosezione 4.1.1) ed il metodo ai volumi finiti.

4.2.1 FARGO algorithm

Per risolvere le equazioni idrodinamiche ed aggiornare il sistema FARGO3D utilizza un metodo time-explicit, implementando tecniche di 'operator splitting' ed 'upwind' (Benítez-Llambay e Masset 2016): l'algoritmo utilizzato è iterativo e consente di calcolare esplicitamente le quantità al tempo $t + \Delta t$ in dipendenza del loro valore al tempo t .

Le equazioni differenziali idrodinamiche si presentano come equazioni di conservazione

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot (Q \mathbf{v}) = S(Q, \mathbf{v}, t), \quad (4.14)$$

dove Q può essere una qualsiasi quantità ed S indica le sorgenti o i pozzi di Q . La tecnica di 'operator splitting' consiste nella separazione della (4.14) in due parti ciascuna delle quali viene risolta in uno step ad essa dedicata:

- il *source step*, effettuato con tecniche alle differenze finite

- il *transport step*, gestito con metodi numerici a volumi finiti

La variabile $Q_0 = Q(t_0)$ viene aggiornata a Q_1 durante il 'source step', descritto da

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = S(Q, \mathbf{v}, t). \quad (4.15)$$

Il valore $Q_2 = Q(t_0 + \Delta t)$ viene ottenuto partendo da Q_1 mediante il 'transport step', che è strutturato come:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot (Q \mathbf{v}) = 0. \quad (4.16)$$

In Figura 4.1 è riportato il processo di update delle varie quantità caratteristiche del fluido: dato che il codice è stato sviluppato per trattare problemi di magneto-idrodinamica sono presenti dei sub-step riguardanti la gestione dei fenomeni magnetici. Il sesto substep è fondamentale per quanto riguarda la convergenza delle soluzioni perché viene imposta la 'CFL condition'. L'intervallo Δt selezionato ha una dipendenza sulla risoluzione della griglia: più piccole sono le celle utilizzate, più stringente sarà la condizione sul time step. Inoltre il materiale costituente il disco orbita con velocità azimutali maggiori più vicino si trova alla stella: utilizzare r_{min} troppo piccoli potrebbe risultare computazionalmente pesante, poiché la velocità u a denominatore della (4.13) potrebbe risultare troppo elevata. I dischi d'accrescimento con aspect-ratio minore di uno sono caratterizzati da una dinamica super-sonica come evidenziato nella Sottosezione 2.1.2: dato che $v_\varphi \gg c_s$ la condizione CFL renderebbe inefficiente la simulazione.

FARGO3D, acronimo di *Fast Advection in Rotating Gaseous Objects 3D*, è stato sviluppato con l'obiettivo di migliorare le performance del *trasport step* per trattare oggetti in rapida rotazione.

L'idea alla base delle 'orbital advection techniques' è di decomporre per ogni anello di celle a raggio e colatitudine fissati la velocità azimutale v in due componenti:

- v^0 , che è una velocità uniforme in tutto l'anello considerato
- δv , che è una velocità residua (più piccola di v^0)

Questo modo di procedere consente di trattare ogni singolo anello dal punto di vista di un sistema quasi co-rotante con l'anello stesso: nella condizione di Courant verranno allora considerate solo le velocità δv e v_r , consentendo l'utilizzo di Δt maggiori.

4.2.2 Griglia e campi

La griglia è formata da n_x celle in X, $n_y + 2 \cdot n_{ghy}$ celle in Y ed $n_z + 2 \cdot n_{ghz}$ celle in Z. I termini n_{ghy} ed n_{ghz} indicano il numero di 'ghost cells' poste accanto alla regione effettivamente simulata: queste celle sono fondamentali per l'implementazione delle

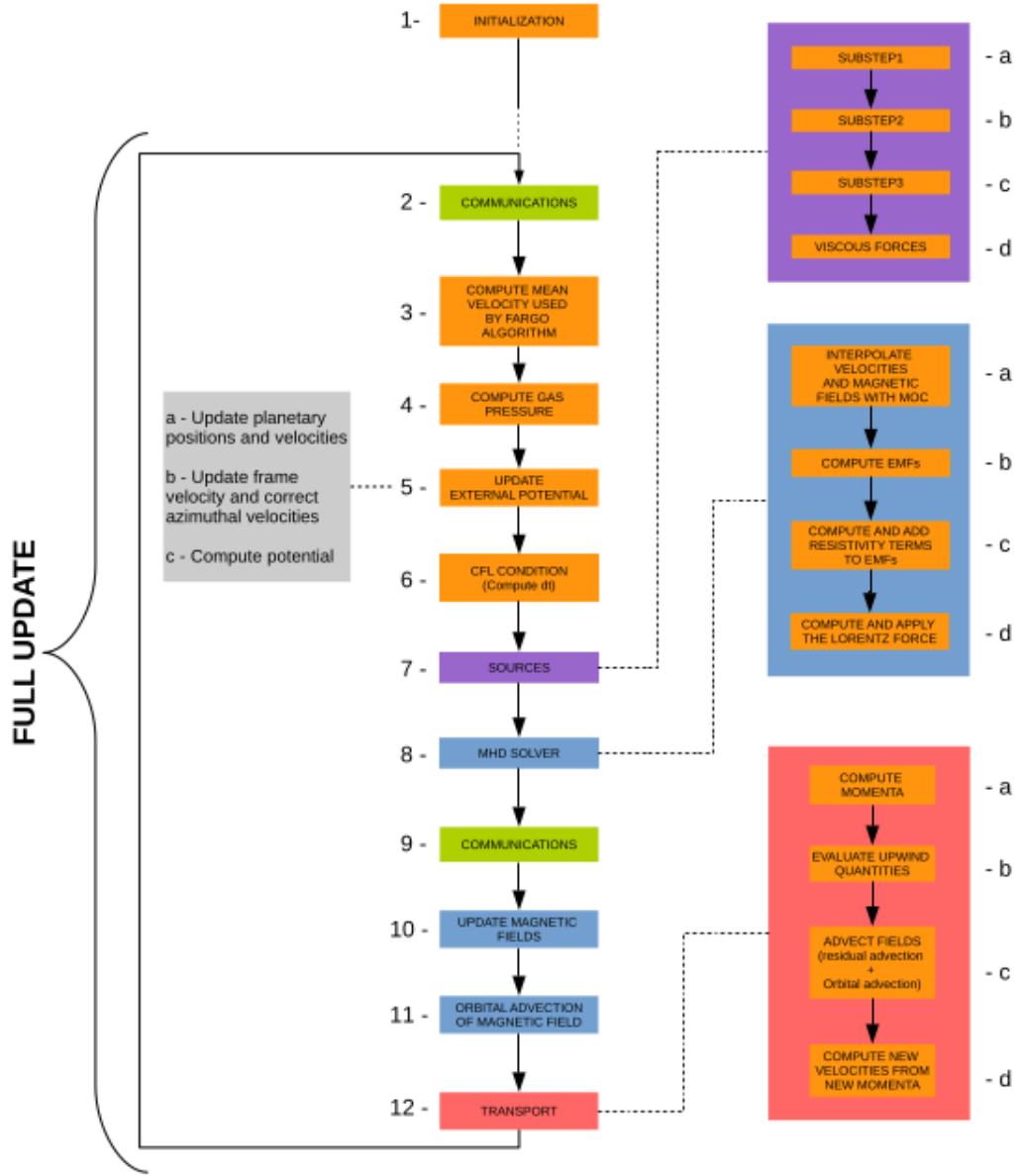


Figura 4.1: Schema riassuntivo delle operazioni performate in successione durante un update del sistema. Le parti con sfondo blu riguardano il caso di simulazioni magneto-idrodinamiche MHD (Benítez-Llambay e Masset 2016).

condizioni al contorno. Quando il codice viene eseguito in parallelo la griglia viene divisa in sotto-griglie in modo tale che ogni processore ne gestisca una: la regione simulata è sezionate in modo tale da rendere il più efficiente possibile l'esecuzione del programma. La griglia può essere creata con coordinate cartesiane, cilindriche o sferiche:

Coordinate	Variabile X	Variabile Y	Variabile Z
Cartesiane	x	y	z
Cilindriche	azimuth	raggio	z
Sferiche	azimuth	raggio	colatitudine

Tabella 4.1: Corrispondenza fra nome delle variabili e coordinate nelle varie geometrie (Benítez-Llambay e Masset 2016).

I campi sono delle strutture di dimensione analoga a quella della griglia e consentono di memorizzare le variabili di interesse per la simulazione. I campi si dividono in due categorie:

- centrati, ossia che assumono valore al centro della cella
- sfalsati, ossia che contengono variabili definite sulle frontiere delle singole cellette.

Una cella di una tipica griglia di FARGO3D si presenta come in Figura 4.2.

4.2.3 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno possono essere selezionate solo per le direzioni Y e Z. La direzione X è sempre considerata periodica perché FARGO3D è stato sviluppato per studiare i dischi d'accrescimento: lavorando in coordinate cilindriche X è l'azimuth e la richiesta di periodicità è necessaria per la definizione del setup. La griglia, oltre alle celle attive, presenta anche delle celle fantasma che non fanno parte della regione simulata: queste 'ghost cells' vengono utilizzate per imporre le condizioni al contorno. Le 'boundary condition BC' riguardano tutti i campi fondamentali e possono influenzare fortemente la dinamica del sistema simulato. Le condizioni al contorno standard sono:

- *Symmetric*, in cui il valore contenuto nella cella reale è copiato in quella fantasma. Tale BC è implementata sia per campi centrali che per campi sfalsati
- *Antisymmetric*, che è implementata solo per i campi sfalsati. Questa BC determina una riflessione, poiché nella ghost-cell viene memorizzato l'opposto di quanto presente nella cella attiva

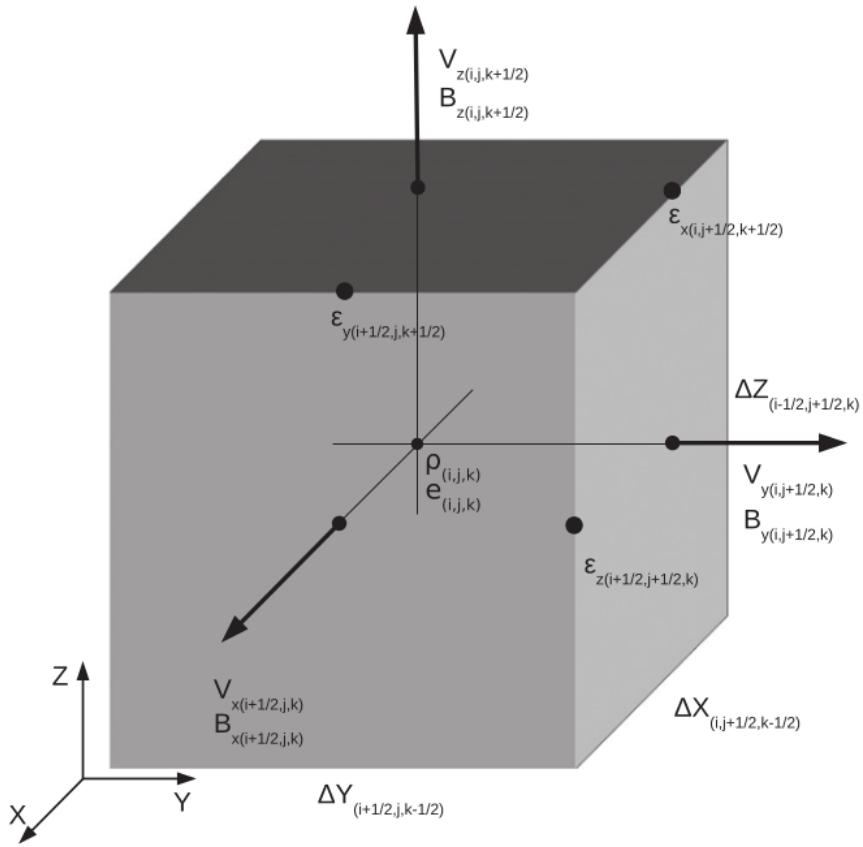


Figura 4.2: Esempio di una cella in FARGO3D: le quantità vettoriali come la velocità sono poste sulle facce, mentre le quantità scalari come la densità sono poste al centro della cella (Benítez-Llambay e Masset 2016).

- *No boundary*, che consiste in una casistica senza BC.

Sono implementate anche delle condizioni al contorno specificatamente per il caso di disco kepleriano bidimensionale. Queste BC sono:

- *Keplerian2Ddens*, che consiste in un'estensione analitica del profilo di densità alle celle adiacenti la griglia simulativa.
- *Keplerian2Dvazim*, che consente di estrapolare il profilo di velocità Kepliano

Un'ulteriore condizione al contorno è *open*, implementata per la velocità radiale v_r ai limiti della griglia: il materiale può uscire dalla regione simulata, ma non entrarvi.

Damping

In FARGO3D è possibile specializzare delle zone della griglia in modo tale che si oppongano alla formazione di onde e perturbazioni di densità. Le regioni in cui viene applicato il damping sono adiacenti alle frontiere: due parametri consentono di aumentarne oppure ridurne le dimensioni. Lo smorzamento avviene con un tempo caratteristico τ_D : più alto sarà il suo valore, minore sarà l'effetto totale.

Il damping agisce sulla densità e sulle velocità per imporre nuovamente le condizioni iniziali. Lo smorzamento non avviene ovunque con la stessa intensità, ma è massimo ad r_{min} ed r_{max} , per poi diminuire con continuità fino agli altri limiti delle dumping zones.

4.2.4 N-body solver

In FARGO3D è possibile includere nella simulazione (non necessariamente nel dominio simulato) delle masse puntiformi che possono interagire sia fra sé stesse che con il gas. È necessario specificare la distanza d del pianeta dall'origine del sistema di riferimento e la sua massa: nel caso di orbita eccentrica d corrisponde al semiasse maggiore.

I pianeti sono inizializzati al tempo $t = 0$ tutti con la stessa eccentricità e nella posizione che corrisponde al loro apoastro.

4.2.5 Viscosità ed equazione di stato

FARGO3D consente di lavorare con due moduli differenti per quanto riguarda la viscosità: *Viscosity* ed *Alphaviscosity*. Il primo dei due utilizza ν per riferirsi alla viscosità del materiale simulato, mentre il secondo consente di lavorare con α (vedi Sottosezione 2.1.1).

Ulteriori specifiche per la definizione del setup riguardano l'equazione di stato. Anche in questo caso le possibili scelte sono due: *Adiabatic* e *Isothermal*. Nel primo caso si utilizza l'equazione di stato (2.6): il campo energia corrisponde all'energia interna per unità di volume e . Lavorando con *Isothermal* l'equazione di stato assume invece la forma (2.13) ed il campo energia conterrà in realtà la velocità del suono nel fluido.

4.2.6 Test idrodinamici: spreading ring

In Figura 4.3 è riportato uno dei test effettuati dagli sviluppatori di FARGO3D per verificare la validità del modello viscoso utilizzato. Tale verifica consiste nel risolvere numericamente il problema della diffusione di un anello gassoso (vedi

sezione 2.2.1). Al tempo $t = 0$ il materiale si trova in un anello Kepleriano simmetrico rispetto a rotazioni attorno all'asse z: la viscosità cinematica utilizzata è $\nu = 10^{-5}$. L'estensione radiale della griglia è $0.1 \leq r \leq 1.6$: vengono usate 512 celle equamente spaziate. Il profilo di densità riportato in Figura 4.3 presenta un buon accordo con l'espressione analitica confermando la solidità del codice FARGO3D.

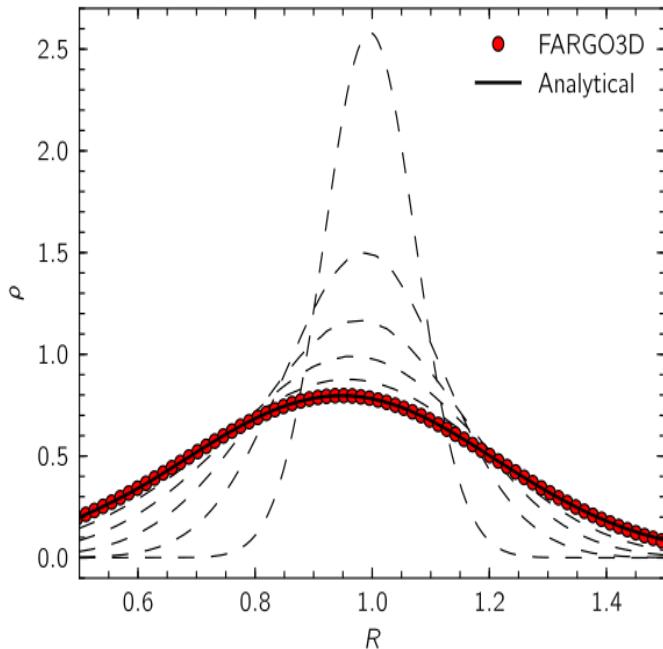


Figura 4.3: Test del modulo viscoso: evoluzione di un anello di materiale gassoso. Le linee tratteggiate corrispondono ai risultati numerici per tempi $t = 100, 300, 500, 700, 900$. La linea continua è la soluzione rappresenta la soluzione analitica a tempo $t = 1100$, mentre i punti rossi sono i risultati numerici allo stesso istante di tempo (Benítez-Llambay e Masset 2016).

Capitolo 5

Simulazioni numeriche e metodologie per l'analisi dati

5.1 Setup simulativo

L'obiettivo di questa tesi è studiare l'evoluzione dei dischi circum-stellari al variare dei parametri della binaria. Per questo motivo le simulazioni effettuate prendono in considerazione solamente un disco alla volta, mentre il secondo corpo è posto oltre i confini della regione simulata.

Le coordinate utilizzate per le simulazioni sono quelle cilindriche, con sistema di riferimento fisso (ossia dotato di velocità angolare $\Omega_R = 0$) centrato sulla stella attorno alla quale orbita il disco. Lavoriamo con un sistema di unità scale-free: la massa del corpo centrale M_* e la costante di gravitazione universale G assumono sempre valori pari ad uno. È necessario utilizzare una risoluzione spaziale elevata in modo tale che le equazioni differenziali caratteristiche del problema in analisi vengano risolte con elevata precisione: il numero di divisioni radiali n_r che abbiamo utilizzato sono 384, mentre quelle angolari n_φ 1152. Entrambe le partizioni sono lineari.

L'estensione della griglia in unità di semiasse maggiore della binaria a varia a seconda dell'oggetto che stiamo prendendo in considerazione: vogliamo lasciare che il disco abbia spazio per espandersi e raggiungere le proprie dimensioni caratteristiche, ma vorremmo evitare che gran parte del dominio simulato risulti vuoto in quanto FARGO3D fa fatica a gestire regioni con densità molto basse ($\sigma \sim 10^{-40}$). Per questo motivo è necessario modificare il raggio massimo (a volte anche quello minimo) della griglia per ogni simulazione: per determinare i valori di r_{min} ed r_{max} abbiamo effettuato delle run di 20 orbite a bassa risoluzione. Le dimensioni delle griglie utilizzate sono riportate in Appendice C. Per tutte le simulazioni effettuate abbiamo lavorato con aspect-ratio costante $h/r = 0.05$, valore coerente con le

osservazioni (vedi Sezione 2.1).

5.1.1 Condizione iniziale

Il sistema deve essere inizializzato a $t = 0$. Dato che FARGO3D non è in grado di gestire regioni spaziali vuote, è necessario che la densità sia diversa da zero in tutta la griglia. Per tempi successivi all’istante iniziale, il sistema attraversa una fase di transitorio durante la quale la condizione a $t = 0$ viene modificata per giungere, dopo alcune orbite della binaria, ad una configurazione quasi stabile. Siamo interessati a determinare quale sia la condizione iniziale computazionalmente ottimale che consenta di ridurre al minimo i tempi d’esecuzione.

Una possibile scelta per il profilo di densità $\sigma(r, t = 0)$ potrebbe essere quella di avere densità costante in tutta la regione simulata. Dato che alcune zone della griglia devono svuotarsi, lavorare con una tale condizione iniziale comporterebbe la formazione di spirali ed onde di densità intense: tali perturbazioni sono delicate da gestire e richiedono tempi di esecuzione più lunghi a causa dei limiti stringenti imposti dalla *Courant condition* (vedi Sottosezione 4.1.2).

Un modo per evitare tali problematiche consiste nello specializzare il profilo di densità facendo sì che ci sia più materiale a raggi piccoli: tale regione sarà quella che poi ospiterà il disco. Una possibile scelta per $\sigma(r, t = 0)$ è:

$$\sigma(r, 0) = \begin{cases} \sigma_0 & r < r_0 \\ \sigma_0 \cdot 10^{-5} & r \geq r_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

dove σ_0 è una densità costante pari a 10^{-4} . In Figura 5.1 è riportato l’andamento di $\sigma(r, 0)$: notiamo la presenza di un netto gradino per $r = r_0$. Una seconda scelta possibile consiste in un profilo di densità continuo che non presenti gradienti infiniti come il caso precedente. Fissato un certo valore di raggio r_0 , la densità iniziale $\sigma(r, 0)$ è data da:

$$\sigma(r, 0) = \begin{cases} \sigma_0 \cdot (1 + 10^{-5}) & r < r_0 \\ \sigma_0 \cdot \{\exp[-(r - r_0)^3] + 10^{-5}\} & r \geq r_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

In (5.2) è necessaria la presenza del termine 10^{-5} per far sì che il profilo di densità non sia eccessivamente troncato all’outer edge della griglia. In Figura 5.2 è riportato un esempio di condizione iniziale con profilo continuo e derivabile.

Abbiamo effettuato dei test per determinare quale fosse la scelta migliore fra le due opzioni precedentemente esposte: abbiamo osservato che situazioni caratterizzate dalla presenza di gradienti infiniti (o comunque molto elevati) come la condizione iniziale a gradino generavano più artefatti transienti con un aumento dei tempi d’esecuzione. Di conseguenza abbiamo optato per la $\sigma(r, 0)$ dettata dalla (5.2), che è stata utilizzata per tutte le simulazioni presenti in questa tesi.

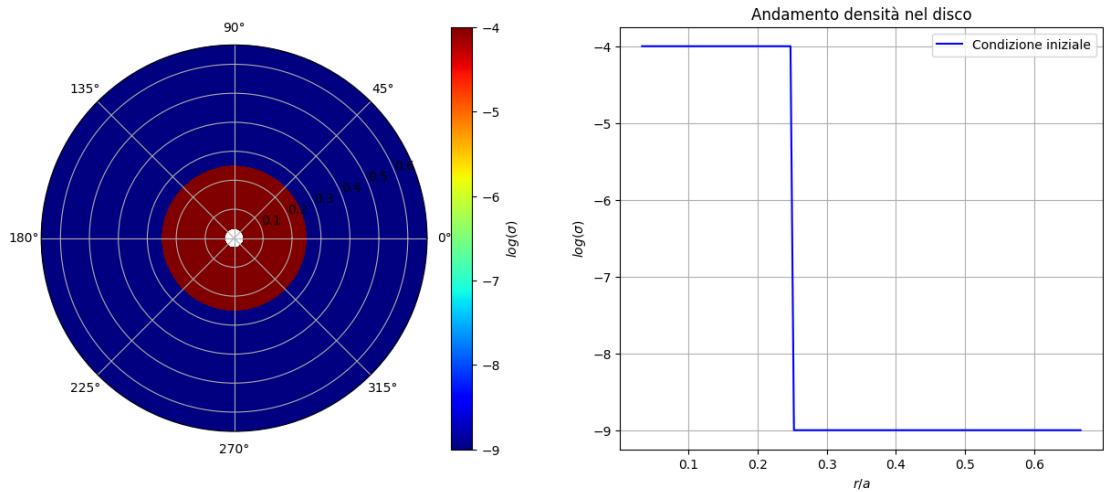


Figura 5.1: Esempio di condizione iniziale del sistema: si nota un netto gradino per $r = r_0$.

5.1.2 Condizioni al contorno

La griglia presenta due frontiere:

- interna, per $r = r_{min}$;
- esterna, per $r = r_{max}$

È necessario lavorare con delle condizioni al contorno che siano tali da non influenzare il fenomeno in analisi e che abbiano una giustificazione di natura fisica: cruciale è la scelta della boundary condition per v_r .

Frontiera interna

È fondamentale scegliere correttamente la condizione all'inner boundary perché non deve interferire con il troncamento. Ricordiamo che r_{min} non deve essere scelto troppo piccolo per evitare che le condizioni sul singolo time-step evolutivo siano troppo stringenti, rendendo inefficiente dal punto di vista computazionale la simulazione (vedi Sottosezione 4.2.1).

Alla frontiera interna abbiamo utilizzato una BC *open* per la velocità radiale: tale scelta è migliore rispetto ad una 'inner boundary' antisimmetrica poiché non comporta la riflessione di materiale al bordo griglia ed evita la produzione di onde di densità artificiali, che possono risultare problematiche per lo studio del troncamento. L'utilizzo di una condizione *open* ad r_{min} comporta la formazione di una cavità artificiale all'interno del disco (vedi Figura 5.3). Il materiale che si muove

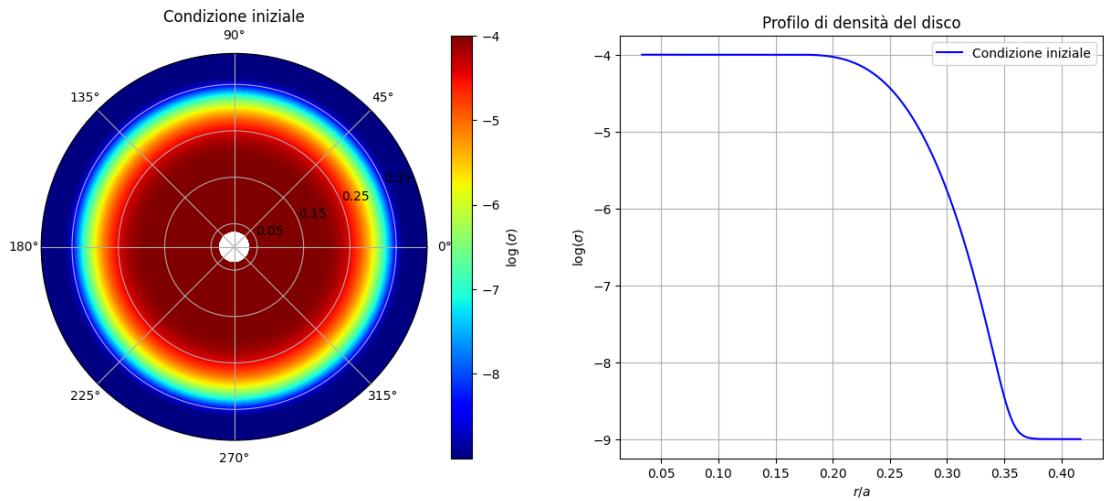


Figura 5.2: Esempio di condizione iniziale del sistema: si nota il profilo di densità continuo caratterizzato dall'assenza di gradienti infiniti.

secondo orbite ellittiche viene tolto dalla regione simulata a periastro determinando la presenza di una regione svuotata ad apoastro. Questo svuotamento della porzione di griglia adiacente alla frontiera interna non costituisce una problematica per le simulazioni che vogliamo effettuare. La cavità artificiale non influenza le proprietà globali del disco, cosa che succederebbe con le onde di densità che si creerebbero nel caso di BC antisimmetrica. La condizione utilizzata per la densità è *Keplerian2Ddens*, mentre per la velocità azimutale è *Keplerian2Dvazim*.

Frontiera esterna

Come nel caso della frontiera interna, anche nel caso di quella esterna è necessario imporre una 'boundary condition' per v_r che non influenzi l'evoluzione dinamica del sistema: abbiamo lavorato con una condizione *open* anche ad r_{max} .

Per poter procedere in questo senso abbiamo dovuto implementare una nuova BC che abbiamo nominato *OPENOUTER*.

OPENOUTER:

$$\text{Staggered: } |(a > 0.0? a : 0.0)|(a > 0.0? a : 0.0)|a|$$

dove la velocità radiale viene posta a zero nelle ghost-cell se negativa nella cella reale: ciò accade perché v_r , per essere uscente dalla griglia ad r_{max} , deve essere positiva. La condizione che abbiamo implementato dovrebbe lavorare analogamente a quella *open* ad r_{min} , ossia consentire l'uscita di materiale dalla regione simulata,

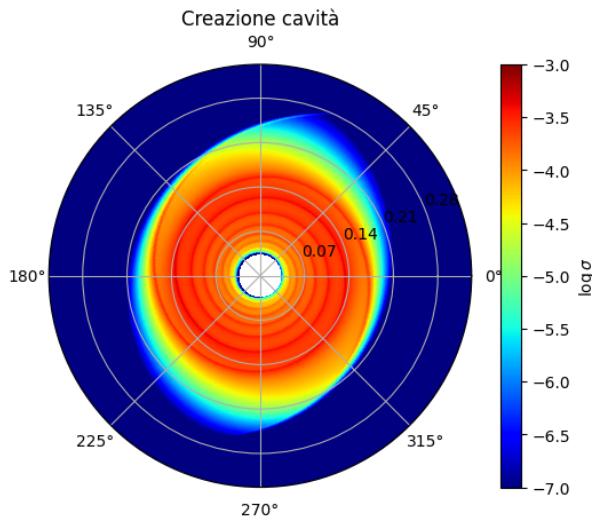


Figura 5.3: Utilizzo della condizione interna open. La regione adiacente ad r_{min} è di colorazione blu, che corrisponde a valori di densità bassi.

ma non permetterne l'entrata.

Per verificare che *OPENOUTER* effettivamente funzionasse correttamente abbiamo effettuato una simulazione di prova della lunghezza di cento orbite della binaria, andando a calcolare la massa del disco m_{disco} ogni quarto di orbita (vedi Figura 5.4). Per isolare gli effetti della sola frontiera esterna abbiamo utilizzato una condizione antisimmetrica ad r_{min} : le variazioni di m_{disco} sono dovute solo ad *OPENOUTER*.

Abbiamo effettuato un test per determinare quale fosse la combinazione di BC computazionalmente più efficace facendo evolvere lo stesso sistema per un numero fissato di orbite della binaria, variando solamente le condizioni al contorno su v_r .

	OpenInner	Anti-simmetrico
OpenOuter	1h 34min 56s	1h 41min 13s
Anti-simmetrico	2h 3min 18s	2h 13min 20s

Tabella 5.1: Confronto fra le tempistiche d'esecuzione utilizzando diverse combinazioni di BC per la velocità radiale v_r . Le righe indicano le diverse scelte ad r_{max} , mentre le colonne quelle ad r_{min} .

Osserviamo che l'accoppiata *open-open*, oltre ad essere fisicamente corretta, implica i tempi d'esecuzione minori.

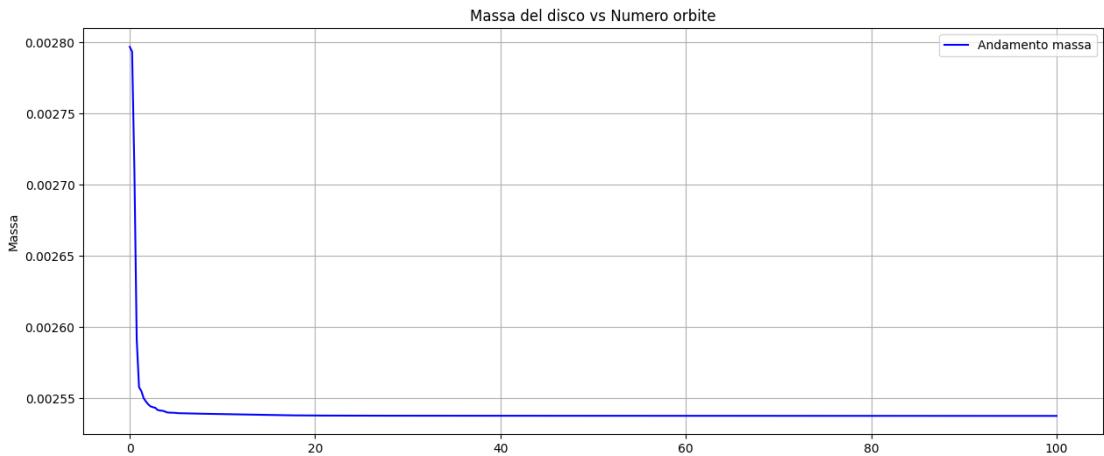


Figura 5.4: Andamento della massa del disco in funzione del numero di orbite. Notiamo che la perdita di massa avviene solamente durante le prime rivoluzioni del sistema binario: questo accade perché ad r_{max} giungono delle spirali di materiale lanciate dal corpo perturbante mentre il disco caratterizzato dal profilo di densità $\sigma(r, 0)$ viene distrutto.

5.1.3 Utilizzo del damping

Nelle simulazioni effettuate con Fargo3D è possibile utilizzare una condizione al contorno che smorzi le perturbazioni di densità che si vengono a creare nelle regioni limitrofe alle frontiere della griglia (vedi sezione 4.2.3).

L'utilizzo del damping nelle simulazioni che vogliamo effettuare è rischioso poiché uno dei campi su cui esso agisce è la velocità azimutale del materiale costituente il disco. Modificare il valore di v_θ equivale ad applicare una coppia di forze: dato che il troncamento è determinato dall'equilibrio fra momenti torcenti, non vogliamo introdurne di artificiali. Per verificare che il damping non dovesse essere utilizzato abbiamo effettuato due run, entrambe di lunghezza 20 orbite del sistema binario, simulando l'evoluzione del disco circum-secondario posto attorno ad una stella di massa pari ad $1/3$ di quella della primaria. Notiamo (vedi Figura 5.5) come i risultati che otteniamo siano differenti nelle due casistiche. L'immagine di sinistra presenta una corona circolare limitrofa alla frontiera esterna con densità maggiore rispetto a quella della regione svuotata attorno al disco. Questo accade perché il damping oltre a porre delle condizioni sulle velocità del materiale, agisce anche sulla densità alterandone i valori. Una conseguenza evidente dello smorzamento è la mancata formazione di un bordo netto del disco: mentre nella figura di destra la regione occupata dal gas risulta evidente, in quella di sinistra la parte esterna non è chiaramente delineata. Decidiamo quindi di lavorare senza damping.

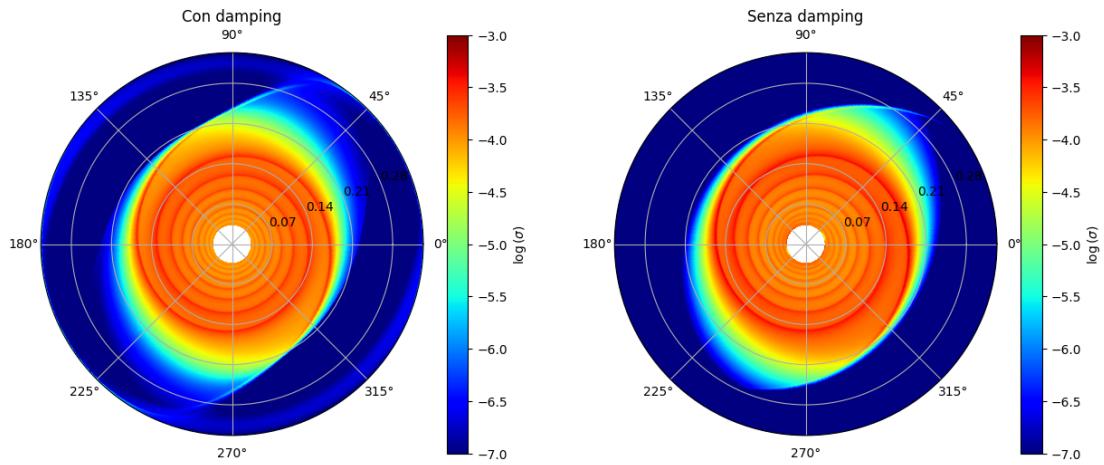


Figura 5.5: Confronto fra utilizzo e mancato utilizzo del damping. Notiamo che il disco quando viene applicato lo smorzamento non presenta una delimitazione precisa.

5.2 INDACO

Le simulazioni necessarie per determinare le caratteristiche dei dischi circumstellari richiedono l'utilizzo di un'elevata capacità computazionale: per questo motivo abbiamo utilizzato INDACO.

INDACO, acronimo di 'INfrastruttura di calcolo per il trattamento di DAti COmplessi', è un centro di calcolo messo a disposizione dall'Università di Milano come supporto alla ricerca scientifica. Il supercomputer è organizzato in cluster di nodi che differiscono fra loro per potenza computazionale e per memoria disponibile. Nell'ambito di questa tesi abbiamo utilizzato i nodi 'light', ciascuno dei quali è costituito da due CPU da 16 cores 'Intel E5-2683V4 2.1 GHz' ciascuna.

INDACO utilizza 'slurm' come scheduler: il sistema di coda gestisce le richieste d'esecuzione ed assegna le risorse computazionali quando disponibili.

5.2.1 Efficienza di parallelizzazione

Supponiamo di eseguire un programma in parallelo su un numero n di processori. Per quantificare quanto più rapida sia l'esecuzione parallela rispetto a quella sequenziale è possibile definire lo speedup s_n come

$$s_n = \frac{T_1}{T_n}, \quad (5.3)$$

dove T_1 è il tempo d'esecuzione nel caso di utilizzo di un solo processore, mentre T_n contempla la casistica con n processori. Per valutare quanto sia efficiente la

parallelizzazione, è possibile definire l'efficienza di parallelizzazione e_{par}

$$e_{par} = \frac{s_n}{n} \quad (5.4)$$

Per determinare su quanti processori eseguire le simulazioni, abbiamo effettuato un test per valutare e_{par} sui nodi *Light* di INDACO. Noi vogliamo valutare lo strong scaling, che consiste nel determinare quanto efficiente sia la parallelizzazione mantenendo fissata la dimensione del problema in analisi all'aumentare del numero di processori utilizzati. La casistica opposta allo strong scaling è quella del weak scaling, che è ciò che si verifica se incrementando il numero di cores, la dimensione del problema affidata ad ogni singolo core rimane la stessa.

Per prima cosa abbiamo lanciato una run di controllo su un singolo core della durata di un'ora: mantenendo lo stesso problema, abbiamo poi aumentato il numero di cores utilizzati. In Figura 5.6 è riportato l'andamento osservato. Per

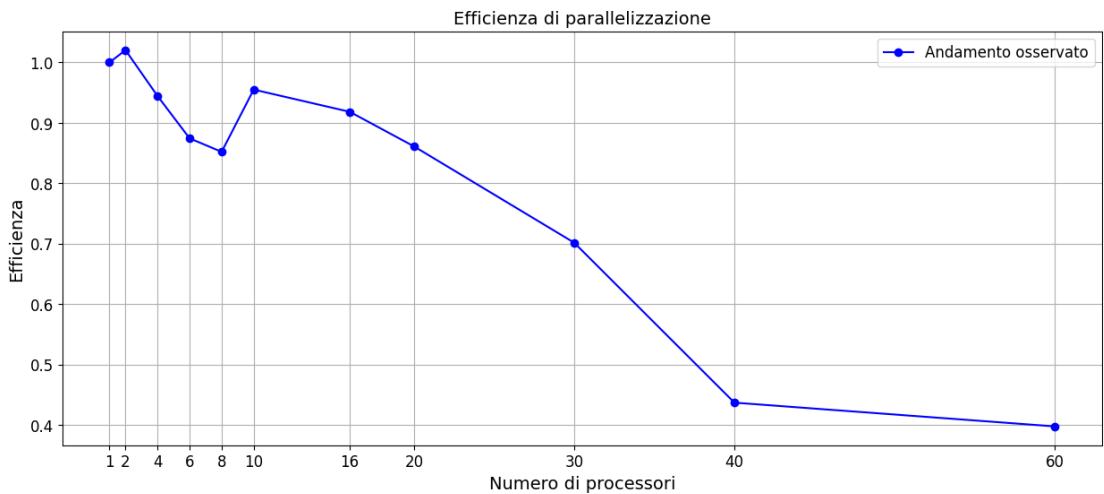


Figura 5.6: Test di parallelizzazione effettuato su INDACO: stiamo testando lo strong scaling. Notiamo come dopo i 16 processori l'efficienza di parallelizzazione crolli drasticamente per assestarsi su valori del 40%: questo è dovuto alla maggiore complessità delle comunicazioni richieste, dettata dalla struttura dei nodi di INDACO.

come sono strutturati i nodi *Light*, il programma viene eseguito sulla stessa CPU fino a quando il numero di cores selezionati è al massimo 16. Fra i 16 ed i 32 microprocessori utilizzati, i calcoli avvengono su un singolo nodo, ma coinvolgono entrambe le CPU delle quali è costituito. Infine se si impiegano più di 32 cores il programma viene eseguito su nodi differenti: le comunicazioni saranno più dispendiose e richiederanno maggior tempo. Notiamo che per l'utilizzo di pochi cores

la parallelizzazione non è molto efficiente: supponiamo che questo andamento sia dovuto al fatto che le sotto-griglie in cui viene suddiviso il dominio di simulazione presentino delle grandi regioni di contatto, il che rallenta l'esecuzione del codice. È evidente un calo di prestazione fra i 16 ed i 32 cores: questo accade poiché è necessaria la comunicazione fra due parti differenti dello stesso nodo, che richiedono più tempo. Oltre i 32 cores l'efficienza di parallelizzazione si stabilizza sul 40%: i nodi coinvolti sono due, il che porta ad un aumento nella complessità delle comunicazioni. Il numero di microprocessori è ormai elevato ed è possibile che le sotto-griglie siano ormai troppo piccole per consentire un'esecuzione efficace del programma. I motivi per cui abbiamo scelto di lavorare su 16 processori sono principalmente due:

- l'efficienza è superiore al 90%
- i programmi che possiamo eseguire simultaneamente su un singolo nodo di INDACO sono due. Questo ci consente di utilizzare tutta la potenza di calcolo ed al contempo di lavorare in modo efficiente

5.3 Campionamento dello spazio dei parametri

I parametri a cui siamo interessati per questo studio sono tre:

- la viscosità α del disco
- il rapporto fra le masse dei corpi costituenti la binaria $q = m_2/m_1$, dove m_2 è la massa della stella secondaria, mentre m_1 è quella della primaria.
- l'eccentricità della binaria e

Abbiamo deciso di valutare la dipendenza dalla viscosità del disco lavorando con:

$$\alpha = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} \quad (5.5)$$

L'intervallo che ci siamo posti di esplorare è quello universalmente accettato come caratteristico dei dischi proto-planetari (vedi Sottosezione 2.1.1). Abbiamo lavorato con tre possibili scelte di e , rappresentanti le casistiche di binaria circolare, mediamente eccentrica e ad eccentricità elevata:

$$e = 0.0, 0.3, 0.6 \quad (5.6)$$

I valori di q che abbiamo esplorato sono 4:

$$q = 0.1, 0.33, 0.5, 1 \quad (5.7)$$

A viscosità fissata bisogna effettuare 21 simulazioni per studiare le caratteristiche dei dischi circum-stellari al variare di q ed e . I tempi d'esecuzione t_{es} dipendono fortemente dalla casistica considerata: abbiamo osservato che all'aumentare dell'eccentricità della binaria incrementa anche t_{es} . Fra le simulazioni caratterizzate da $e = 0.0$ e quelle da $e = 0.6$ i valori del tempo d'esecuzione aumentano di un fattore moltiplicativo ~ 3 . Una simulazione su 16 processori viene effettuata in media in 16 ore.

5.4 Metodi numerici per l'analisi dei risultati simulativi

In questa sezione presentiamo i metodi numerici che sono stati utilizzati per analizzare i dati prodotti dalle simulazioni. In primo luogo è necessario discutere le tecniche utilizzate per determinare massa, energia e momento angolare del disco. Per evitare di introdurre errori numerici, è necessario ricordare le caratteristiche dei campi in FARGO3D: le grandezze scalari sono definite a centro cella, mentre quelle vettoriali ai bordi (vedi Sottosezione 4.2.2).

Calcolo della massa

Per determinare la massa di gas contenuta nella griglia lavoriamo con $\sigma(r, t)$. In primo luogo dobbiamo valutare quale sia l'area delle singole celle A_{cella} : per effettuare questo calcolo sfruttiamo la simmetria della partizione utilizzata. Le celle sono poste su anelli concentrici: A_{cella} può essere calcolata una volta nota l'area della corona circolare A_{cor} alla quale appartiene.

I limiti delle varie corone circolari possono essere individuati generando linearmente (dato che stiamo utilizzando una divisione lineare in r , vedi Sezione 5.1) 385 valori fra r_{min} ed r_{max} compresi: così facendo le celle radiali saranno 384. Notiamo che gli estremi è possibile valutare A_{cor} come

$$A_{cor} = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2), \quad (5.8)$$

dove r_{i+1} ed r_i sono gli estremi radiali della regione considerata. Ricavate le aree delle corone, le singole celle che le costituiscono avranno A_{cella} pari a $A_{cor}/1152$ poiché la partizione della coordinata angolare è anch'essa lineare. Notiamo che A_{cella} non è la stessa per ogni cella facente parte della griglia, ma ha una dipendenza sulla coordinata radiale.

Una volta note le varie aree è immediato il calcolo della massa di materiale, poiché basta sfruttare la definizione di densità

$$m_{cella} = \sigma_{cella} \cdot A_{cella}. \quad (5.9)$$

Il valore di m_{cella} ha una dipendenza sul tipo di partizione radiale utilizzata: in Figura 5.7 riportiamo un esempio di calcolo del profilo di densità del disco, dove la dipendenza dall'area delle cellette utilizzate nella griglia non è presente.

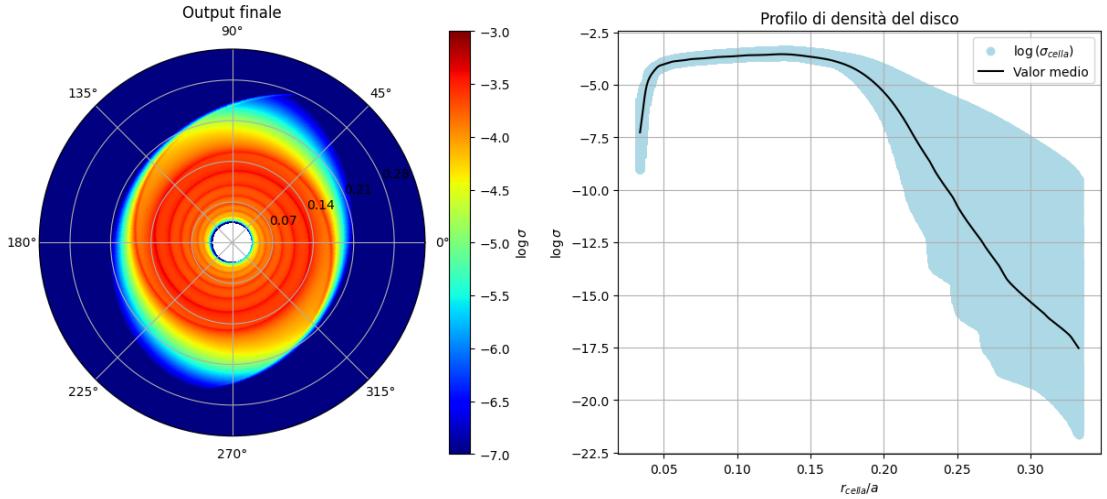


Figura 5.7: Calcolo del profilo di densità per il disco circum-secondario con $q = 0.33$, $e = 0.0$. L'output analizzato è quello alla cinquantesima orbita della binaria. La figura di sinistra mostra che valori assume il logaritmo di σ nelle varie regioni della griglia. La Figura di destra riporta sovrapposti un grafico a disperisione di $\log(\sigma_{cella})$ ed il valor medio di tale quantità nelle varie corone circolari. Notiamo come nella regione più esterna della griglia l'intervallo in cui varia l'ordine di grandezza di σ_{cella} è nettamente più ampio rispetto quanto accada per piccoli r . Per $r \simeq r_{min}$ il profilo di densità presenta un drop, dovuto alla presenza dello svuotamento artificiale.

Energia meccanica

L'energia meccanica per le celle viene calcolata come

$$E_{cella} = \frac{1}{2}m_{cella} \cdot (u_r^2 + u_\theta^2) - \frac{m_{cella}}{r_{cella}} \quad (5.10)$$

dove E_{cella} è l'energia della singola cella ed r_{cella} è la coordinata radiale del centro della cella. Nella (5.10) M_* e G non compaiono poiché sono pari ad uno: il contributo potenziale dovuto al secondo corpo è trascurato poiché stiamo lavorando nella Roche-Lobe della stella al centro della griglia. In Figura 5.8 è riportato un esempio di calcolo di E_{cella} : la quantità graficata è l'energia per unità di massa E_{cella}/m_{cella} .

Momento angolare

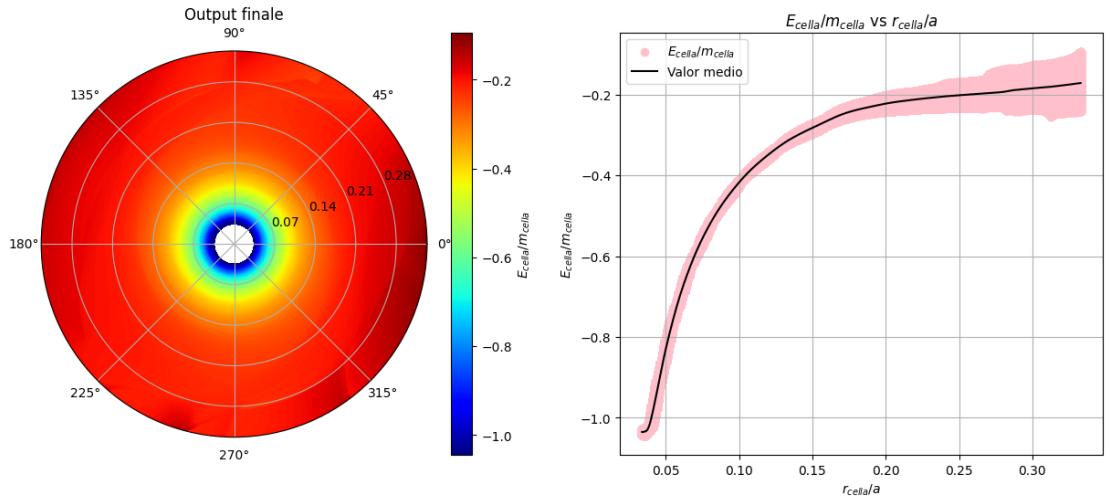


Figura 5.8: Calcolo dell’energia meccanica per unità di massa nel caso di disco circum-secondario con $q = 0.33$, $e = 0.0$. L’output analizzato è quello alla cinquantesima orbita della binaria. La figura di sinistra mostra che valori assume E_{cella}/m_{cella} nella griglia. La Figura di destra riporta sovrapposti un grafico a dispersione di E_{cella}/m_{cella} ed il valor medio nelle varie corone circolari. Notiamo che l’energia specifica è minore nella regione in cui è presente il materiale, poiché il gas è gravitazionalmente legato alla stella posta al centro della griglia.

Il momento angolare della singola cella L_{cella} viene calcolato tenendo conto della sola velocità azimutale come

$$L_{cella} = m_{cella} \cdot u_\theta \cdot r_{min-cell} \quad (5.11)$$

dove $r_{min-cell}$ è la coordinata radiale del bordo della cella a raggio minore. Lavorare con $r_{min-cell}$ è necessario poiché la velocità è un campo sfalsato in FARGO3D. In Figura 5.9 è riportato un esempio di calcolo di L_{cella} .

Vogliamo ora definire dei criteri che ci consentano di studiare le caratteristiche dei dischi: siamo in particolare interessati alle loro dimensioni ed alle loro eccentricità.

5.4.1 Calcolo del raggio di troncamento

Dobbiamo determinare un criterio che ci consente di valutare le dimensioni della regione spaziale occupata dal disco: consideriamo come raggio di troncamento r_T il semidiametro di quel cerchio centrale nell’origine del sistema di riferimento che contiene il 99.9% della massa di gas presente nel dominio simulato. Per calcolare tale raggio lavoriamo con le corone circolari concentriche che costituiscono la

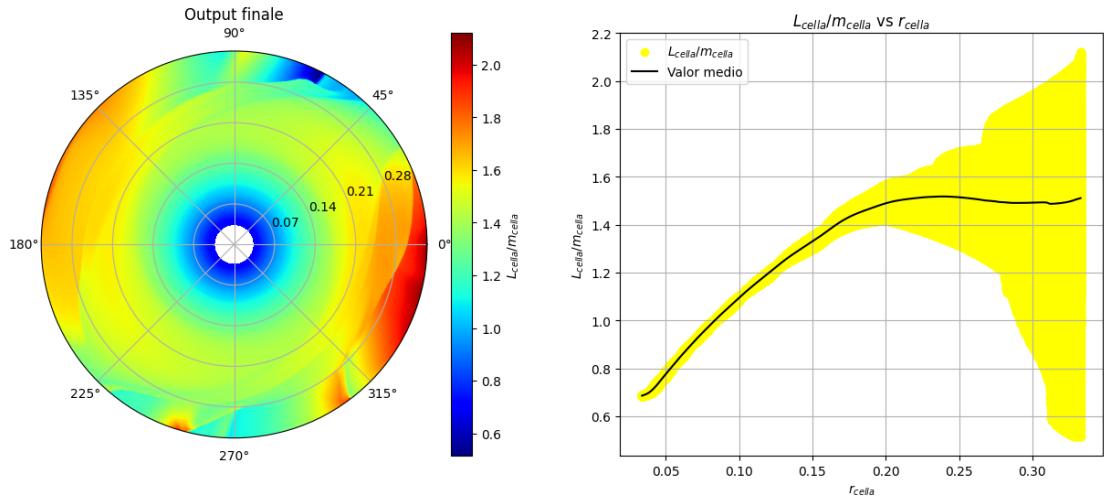


Figura 5.9: Calcolo del momento angolare per unità di massa nel caso di disco circum-secondario con $q = 0.33$, $e = 0.0$. L'output analizzato è quello alla cinquantesima orbita della binaria. La figura di sinistra mostra che valori assume L_{cella}/m_{cella} nella griglia. La Figura di destra riporta sovrapposti un grafico a dispersione di L_{cella}/m_{cella} ed il valor medio nelle varie corone circolari. Notiamo che a raggi $r_{cella} \geq 0.18 a$ si hanno diversi valori di momento angolare per posizioni radiali fissate: possiamo pensare che lavorare in termini di semiassi maggiori d'orbita sia più corretto.

griglia. Valutiamo la massa progressiva come

$$M(R) = \sum_{r_{cella} < R} m_{cella}, \quad (5.12)$$

dove R è un certo valore limite. Quando nella regione caratterizzata da $r_{cella} < R$ viene raggiunto il valore prefissato di massa abbiamo determinato il raggio di troncamento. In Figura 5.10 è riportato un esempio di calcolo di r_T .

5.4.2 Calcolo del semiasse maggiore di troncamento

Alcuni dischi circumstellari sono eccentrici: procedere con un metodo come quello esposto precedentemente implica commettere degli errori nella determinazione dell'effettiva dimensione del disco. Per ovviare a queste problematiche abbiamo calcolato il semiasse maggiore di troncamento a_T come segue. In primo luogo si determina il valore del semiasse per ogni cella costituente la griglia. Dato che stiamo lavorando all'interno del Roche-Lobe, in prima approssimazione è possibile trascurare il contributo all'energia dovuto al corpo perturbante: per determinare E_{cella}

possiamo utilizzare i risultati ottenuti durante l'analisi del problema di Keplero (vedi Sezione 3.1). Il semiasse dell'orbita caratteristica del materiale contenuto nella singola cella è allora:

$$a_{cella} = -\frac{m_{cella}}{2 \cdot E_{cella}} \quad (5.13)$$

Una volta calcolati tutti gli a_{cella} si valuta la massa progressiva all'aumentare del semiasse limite a_{lim} : quando la regione interna ad a_{lim} contiene il 99.9% del materiale presente nel dominio simulato abbiamo determinato il semiasse maggiore di troncamento. In Figura 5.10 è riportato un esempio di calcolo del semiasse di troncamento

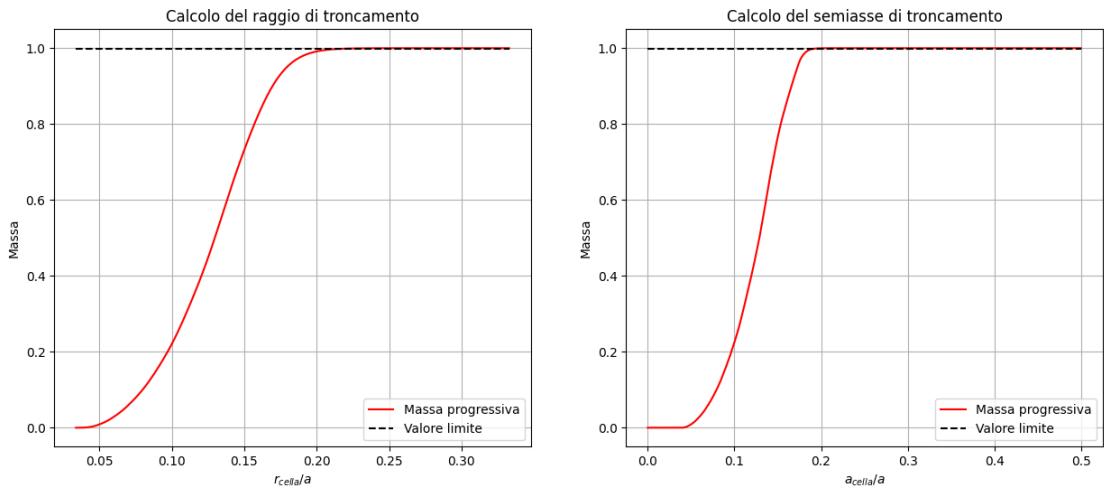


Figura 5.10: Calcolo delle dimensioni del disco circum-secondario con $q = 0.33$, $e = 0.0$. L'output analizzato è quello alla cinquantesima orbita della binaria. La figura di sinistra riporta la massa cumulativa per la determinazione del raggio di troncamento. Per il disco analizzato abbiamo che $r_T = 0.222 a$. La figura di destra riporta la massa cumulativa per la determinazione del semiasse maggiore di troncamento. Per il disco analizzato abbiamo che $a_T = 0.193 a$.

5.4.3 Calcolo dell'eccentricità del disco

Un'informazione aggiuntiva sul disco può essere ricavata una volta note l'energia ed il momento angolare in tutta la griglia, come visto in Sezione 3.1. L'eccentricità dell'orbita viene calcolata come se la cella di materiale fosse una particella test ($m_{cella} \ll M_*$)

$$e_{cella} = \sqrt{1 - \frac{(r_{cella} \cdot u_\theta)^2}{a_{cella}}}, \quad (5.14)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $M_* = 1$. Definiamo e_{disco} come il valore medio di e_{cella} nell'intorno di a_T , ossia consideriamo solamente quelle celle che hanno a_{cella} confrontabile con il semiasse maggiore del disco. In Figura 5.11 è riportato un esempio di calcolo dell'eccentricità del disco.

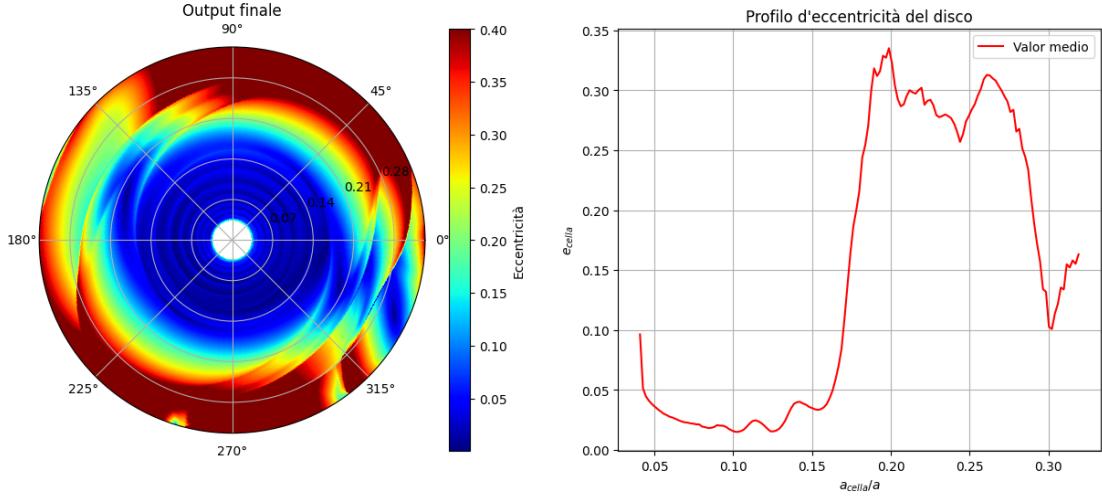


Figura 5.11: Calcolo dell'eccentricità del disco circum-secondario con $q = 0.33$, $e = 0.0$. L'output analizzato è quello alla cinquantesima orbita della binaria. La figura di sinistra riporta i valori di eccentricità assunti dalle varie celle della griglia: abbiamo posto come limite massimo della scala di colore $e_{max} = 0.4$. Notiamo che la regione ospitante la parte centrale del disco è caratterizzata da basse eccentricità, mentre il bordo dello stesso presenta valori di e_{cella} maggiori. La Figura di destra riporta il profilo d'eccentricità del disco.

5.5 Simulazioni di convergenza

Come esposto in Sezione 5.1, le simulazioni presenti in questo lavoro di tesi sono della lunghezza di 50 orbite della binaria. La definizione che abbiamo deciso di adottare è di 384 celle radiali e 1152 angolari, entrambe con spacing lineare. Le dimensioni della griglia che abbiamo utilizzato sono riportate in Tabella C.1.

Per determinare che le condizioni simulative con cui abbiamo lavorato non comportino la comparsa di errori sistematici, abbiamo effettuato tre tipi di run di convergenza per ogni valore del parametro α utilizzato. Ci siamo concentrati su:

- lunghezza della simulazione
- dimensioni del raggio minimo della griglia
- definizione utilizzata

5.5.1 Run Lunga

Per verificare che cinquanta orbite del sistema binario fossero abbastanza per superare la fase di transitorio in cui si assiste alla distruzione della condizione iniziale, abbiamo effettuato tre simulazioni (una per ogni viscosità del materiale) dell’evoluzione del sistema per 500 periodi d’orbita delle due stelle. Il disco d’accrescimento che abbiamo preso in considerazione è il circumsecondario caratterizzato da $m_2/m_1 = 0.33$ ed $e = 0.0$: abbiamo osservato che la variazione delle dimensioni del disco è nell’ordine del 2/5 %. I risultati ottenuti, riportati in Tabella 5.2, sostengono la metodologia di lavoro che abbiamo implementato in questa tesi.

Viscosità	Raggi		Semiassi	
α	50 orb.	500 orb.	50 orb.	500 orb.
$\alpha = 10^{-2}$	0.240 a	0.255 a	0.219 a	0.221 a
$\alpha = 10^{-3}$	0.222 a	0.217 a	0.194 a	0.192 a
$\alpha = 10^{-4}$	0.209 a	0.220 a	0.185 a	0.196 a

Tabella 5.2: Confronto fra le dimensioni dei dischi per 50 e 500 orbite.

In Figura 5.12 è riportato il valore del raggio di troncamento in funzione delle orbite effettuate dalla binaria per $\alpha = 10^{-3}$: notiamo che la fase di equilibrio quasi-stabile viene raggiunta dopo le prime venti orbite.

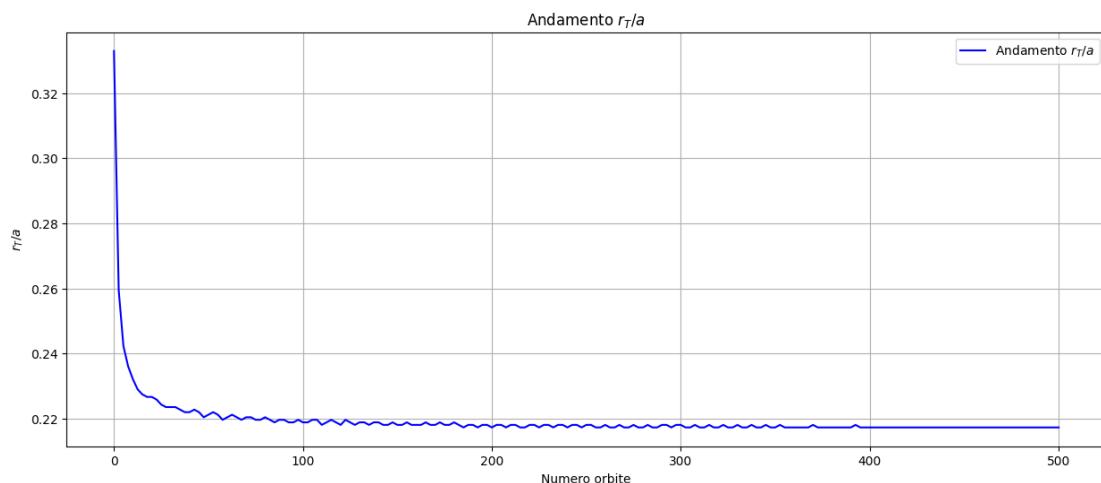


Figura 5.12: Esempio di dipendenza del raggio di troncamento dal numero di orbite della binaria: notiamo che il transitorio iniziale si esaurisce nelle prime venti orbite.

5.5.2 Raggio minimo

Notiamo che i dischi circum-secondari facenti parte dei sistemi binari ad elevata eccentricità sono di piccole dimensioni: vogliamo capire se lavorare con r_{min} confrontabile con le dimensioni del disco stesso è un problema dal punto di vista numerico. Abbiamo effettuato tre simulazioni (una per ogni α) del disco circum-secondario caratterizzato da $m_2/m_1 = 0.1$ ed $e = 0.6$ utilizzando come valore di $r_{min} = 0.033 a$. Le dimensioni dei dischi nelle differenti casistiche analizzate sono riportate in Tabella 5.3.

Viscosità	Raggi		Semiassi	
α	$r_{min}/2$	r_{min}	$r_{min}/2$	r_{min}
$\alpha = 10^{-2}$	0.073 a	0.075 a	0.061 a	0.062 a
$\alpha = 10^{-3}$	0.069 a	0.066 a	0.071 a	0.071 a
$\alpha = 10^{-4}$	0.060 a	0.064 a	0.056 a	0.058 a

Tabella 5.3: Confronto fra le dimensioni dei dischi per diversi raggi minimi della griglia simulativa.

In Figura 5.13 sono riportati gli output finali per i differenti r_{min} per $\alpha = 10^{-4}$

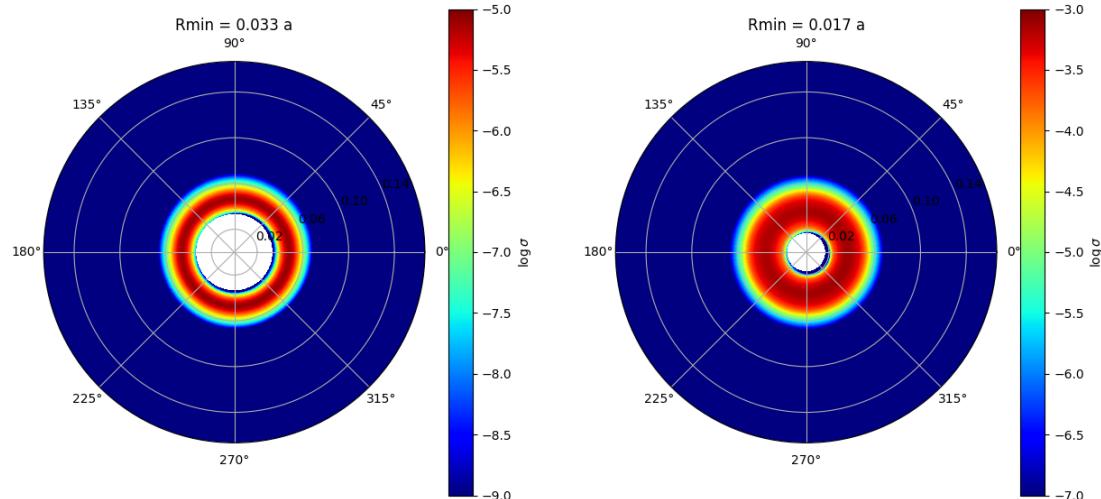


Figura 5.13: Confronto fra il pattern di densità per $r_{min} = 0.033 a$ (figura di sinistra) ed $r_{min}/2 = 0.017 a$ (figura di destra). Notiamo che, sebbene il disco simulato nella griglia con la frontiera interna posta ad r_{min} risulti molto meno denso, la struttura dell'oggetto orbitante è la stessa ed i risultati ottenuti per le due simulazioni sono analoghi.

5.5.3 Alta risoluzione

La terza caratteristica a cui siamo interessati con le run di convergenza è lo studio della definizione alla quale abbiamo lavorato. Per questo motivo effettuiamo tre simulazioni (una per ogni α) ad una risoluzione più elevata, lavorando con $n_r = 768$ ed $n_\varphi = 2304$: abbiamo raddoppiato il numero di cellette sia per la coordinata radiale che per quella angolare. Il disco su cui ci concentriamo è il circum-secondario caratterizzato da $m_2/m_1 = 0.33$ ed $e = 0.0$. Le dimensioni ottenute sono riportate in Tabella 5.4: dato che i risultati sono confrontabili, decidiamo di lavorare con $n_r = 384$ e $n_\varphi = 1152$ poiché è la scelta computazionalmente più efficace.

Viscosità	Raggi		Semiassi	
α	Normale	Alta	Normale	Alta
$\alpha = 10^{-2}$	$0.240a$	$0.243a$	$0.218a$	$0.222a$
$\alpha = 10^{-3}$	$0.222a$	$0.229a$	$0.194a$	$0.200a$
$\alpha = 10^{-4}$	$0.212a$	$0.220a$	$0.185a$	$0.193a$

Tabella 5.4: Confronto fra le dimensioni dei dischi per diverse definizioni.

In Figura 5.14 riportiamo un esempio di configurazione finale nel caso della run ad alta risoluzione effettuata con $\alpha = 10^{-2}$.

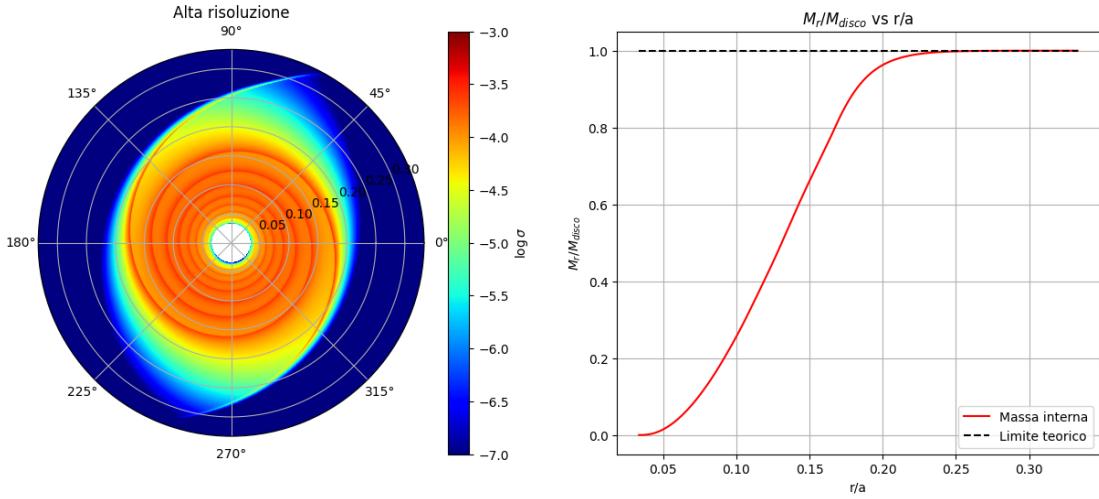


Figura 5.14: Configurazione finale per la run ad alta definizione con $\alpha = 10^{-2}$.

Capitolo 6

Risultati

Negli scorsi due capitoli abbiamo presentato i metodi utilizzati per studiare numericamente l’evoluzione dei dischi circumstellari in sistemi binari. Le caratteristiche del disco a cui siamo interessati sono due:

- le dimensioni dell’oggetto
- l’eccentricità delle orbite percorse dal materiale presente nell’intorno della regione di troncamento

Per questo motivo il seguente capitolo è organizzato in due macro-sezioni, ciascuna delle quali è dedicata ad uno dei due parametri a cui siamo interessati. L’estensione del disco è trattata in Sezione 6.1, mentre la 6.2 è dedicata allo studio di e_{disco} . L’ultima parte di questo capitolo è dedicata al confronto con le predizioni teoriche ottenute da Manara, Tazzari et al. (2019) (vedi Sezione 3.2)

6.1 Dimensioni del disco

Abbiamo determinato le estensioni dei dischi secondo due approcci differenti: il metodo dei raggi ed il metodo dei semiassi maggiori (vedi Sezione 5.4). Le simulazioni effettuate sono tutte della lunghezza di 50 orbite del sistema binario: notiamo che dopo le prime 10 orbite, come in Artymowicz e Lubow (1994) viene raggiunta una configurazione quasi-stabile, che varia lentamente al passare del tempo. In accordo con quanto fatto da Artymowicz e Lubow (1994), i risultati che presentiamo nelle seguenti sottosezioni sono i valori di r_T/a e a_T/a mediati nel tempo dalla trentesima alla cinquantesima orbita del sistema binario: lavorando in questo modo otteniamo dei valori che non dipendono dalla singola configurazione del sistema, ma che invece fanno riferimento ad un suo comportamento medio. I risultati ottenuti sono riportati in Appendice D.

6.1.1 Raggi di troncamento

Le Figure 6.1, 6.2, 6.3 riportano quanto abbiamo trovato per i raggi dei dischi nelle tre casistiche di viscosità analizzate. Sull'ascissa dei grafici è posto il rapporto m_{cen}/m_{per} , dove m_{cen} indica la massa della stella posta al centro della griglia, mentre m_{per} quella del corpo perturbante. Sulle ordinate è riportata l'eccentricità e della binaria.

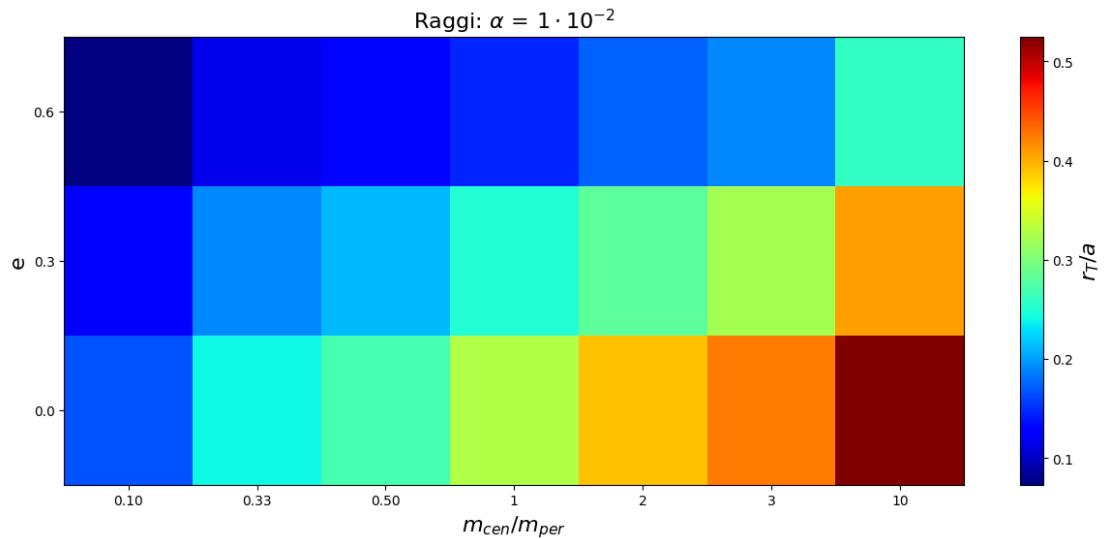


Figura 6.1: Raggi di troncamento dei dischi circumstellari con $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$.

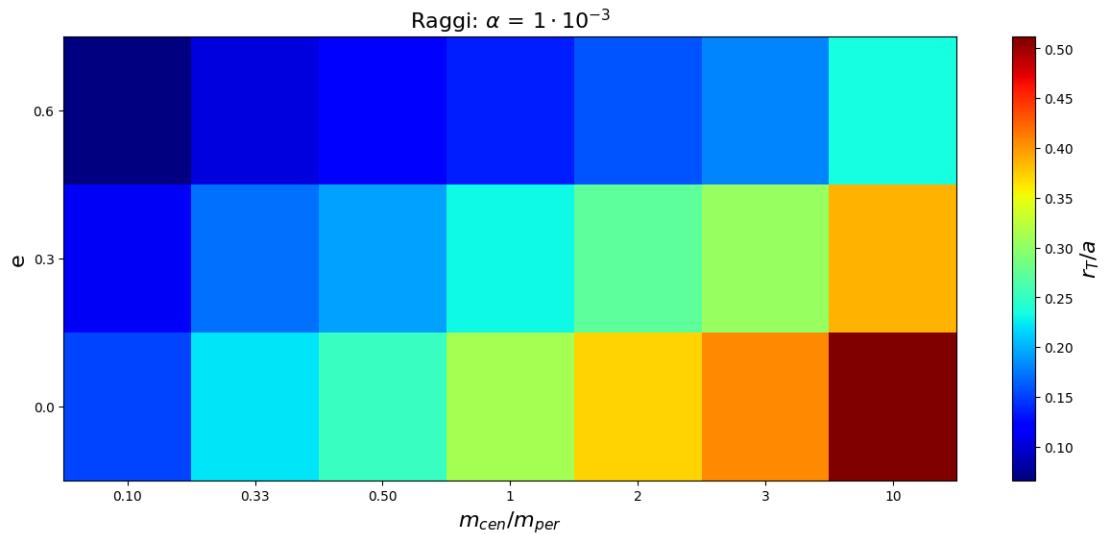


Figura 6.2: Raggi di troncamento dei dischi circumstellari con $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$

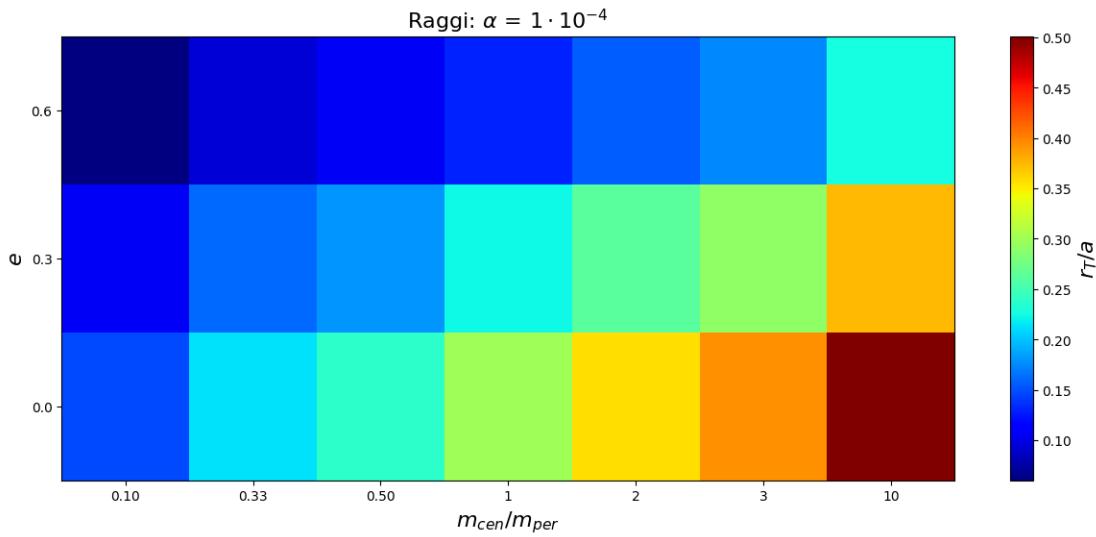


Figura 6.3: Raggi di troncamento dei dischi circumstellari con $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$

La dimensione del disco ad e ed m_{cen}/m_{per} fissati è data dal colore della rispettiva cella nel grafico: la scala ha come estremi il valor minimo ed il valore massimo di r_T .

Notiamo che ad eccentricità della binaria fissata, i valori maggiori di r_T vengono assunti in corrispondenza di rapporti m_{cen}/m_{per} elevati: questo accade poiché le dimensioni dei *Roche Lobe* sono maggiori tanto più grande è la frazione della massa totale del sistema $M = m_{cen} + m_{per}$ contenuta al loro interno. Nel caso di $m_{cen}/m_{per} = 10$, sebbene il gas si trovi a $r/a \sim 0.5$, risulta ancora gravitazionalmente legato alla stella posta al centro della griglia simulativa.

Supponiamo ora di fissare m_{cen}/m_{per} e di variare invece l'eccentricità della binaria: notiamo una netta diminuzione del valore assunto dal raggio del disco. All'aumentare di e , l'intensità delle risonanze eccentriche risulta essere più elevata (Artymowicz e Lubow 1994) e la regione in cui avviene il troncamento cambia.

Osserviamo anche una leggera dipendenza sulla viscosità del materiale costituente il disco: maggiore è α , maggiori sono le dimensioni che vengono raggiunte dal corpo orbitante attorno alla stella. Tale andamento era noto in letteratura per i dischi ospitati in sistemi binari eccentrici, ma non per quanto riguarda quelli circolari. Nella seguente tabella riportiamo le massime e minime estensioni ottenute per i tre α :

Tipo	$\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$	$\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$	$\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$
Maggiore	$0.525 a$	$0.512 a$	$0.501 a$
Minore	$0.073 a$	$0.066 a$	$0.060 a$

6.1.2 Semiassi di troncamento

Nelle Figure 6.4, 6.5, 6.6 abbiamo riportato quanto ottenuto per i tre α analizzati: i grafici sono dello stesso tipo di quelli della sezione precedente.

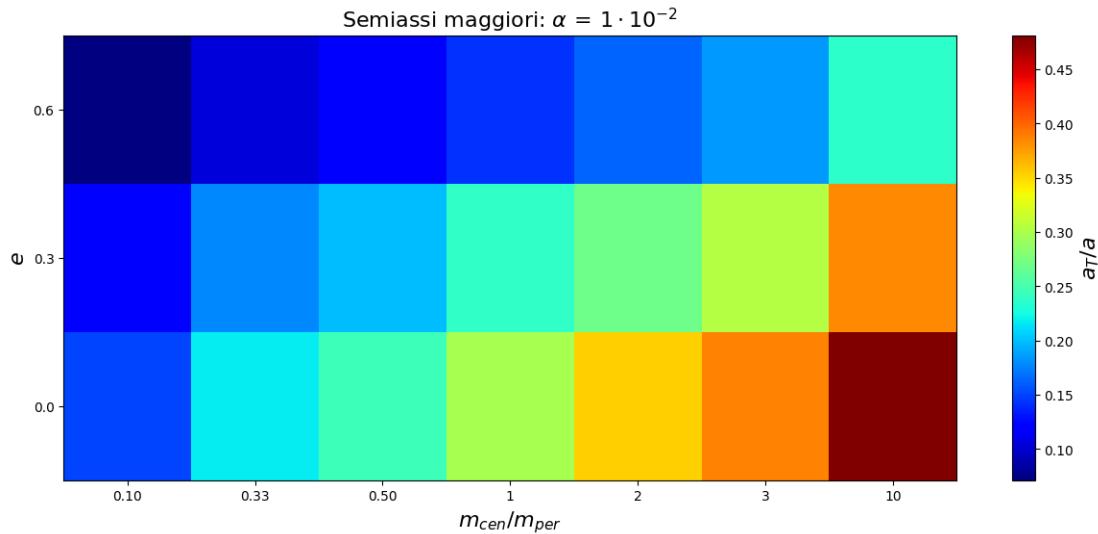


Figura 6.4: Semiassi maggiori dei dischi circumstellari con $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$.

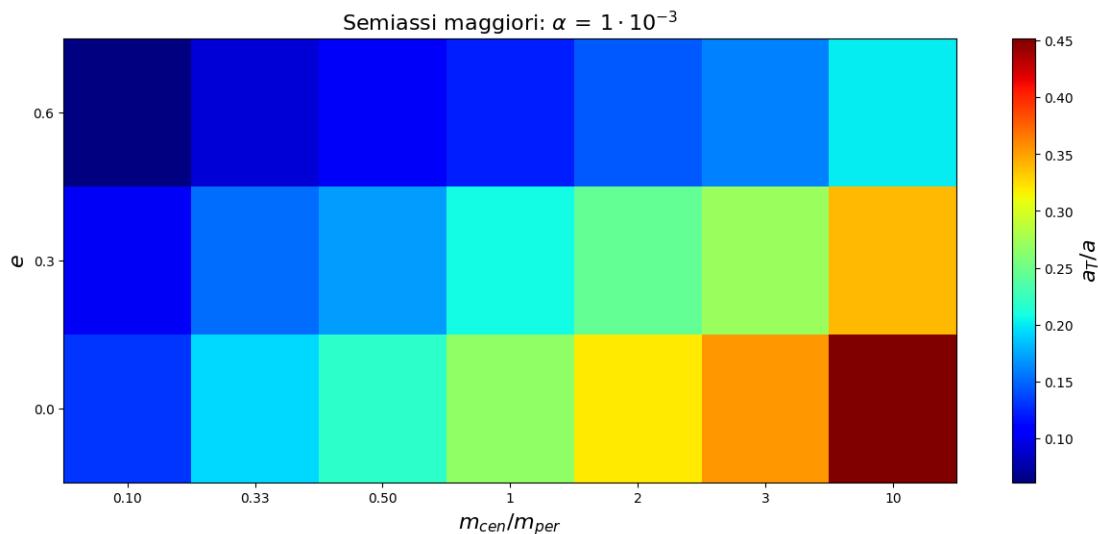


Figura 6.5: Semiassi maggiori dei dischi circumstellari con $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$.

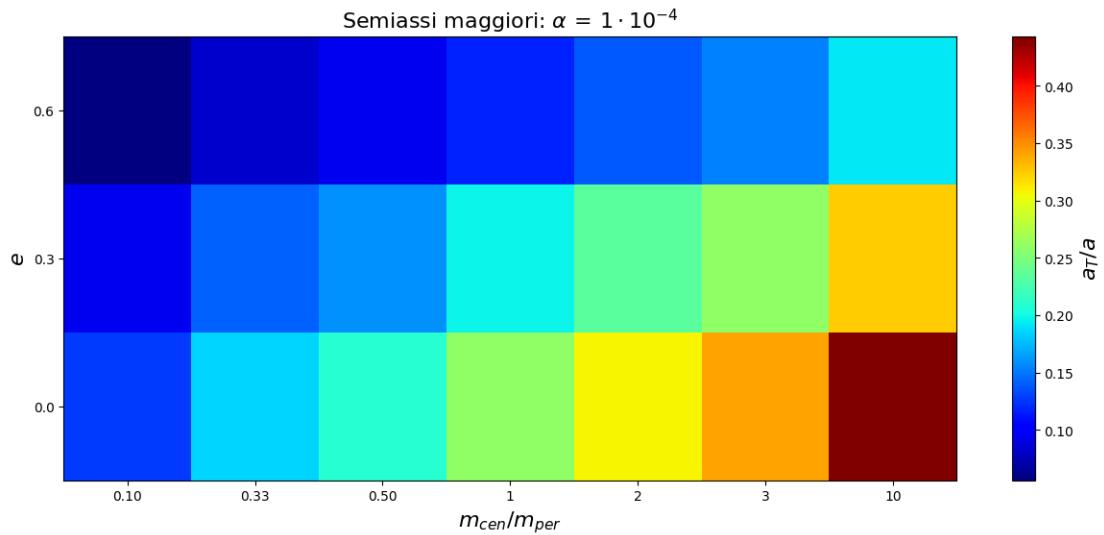


Figura 6.6: Semiassi maggiori dei dischi circumstellari con $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$.

Osserviamo gli stessi andamenti presenti nel caso dei raggi di troncamento: il valore di a_T/a è fortemente dipendente da m_{cen}/m_{per} e dall'eccentricità della binaria. Notiamo che anche per il metodo dei semiassi a valori più elevati di viscosità corrispondono estensioni spaziali dei dischi maggiori.

Confronto con i raggi

La necessità di lavorare in termini di semiasse maggiore del disco è evidenziata dalla Figura 5.9: notiamo che a raggio fissato i valori di momento angolare specifico assunti nelle singole cellette spaziano un ampio intervallo. Questa evidenza numerica non è in accordo con il modello di disco costituito da materiale orbitante lungo traiettorie circolari necessario per la determinazione di r_T .

Il metodo dei raggi di troncamento porta a una sovrastima delle effettive dimensioni del disco, poiché il materiale gassoso durante la sua orbita attorno alla stella spende più tempo ad apoastro: i valori di a_T/a ottenuti sono inferiori rispetto a quelli di r_T/a . La discrepanza è dovuta al fatto che i dischi sono eccentrici: questa particolarità non è trascurabile.

La Figura 6.7 evidenzia come la differenza fra il metodo dei raggi e quello dei semiassi non sia trascurabile: dato che a seconda delle applicazioni si può essere interessati ad a_T oppure ad r_T , è necessario tener conto delle loro differenze. Sull'asse delle ascisse è posta la dimensione del semiasse, mentre su quello delle ordinate la variazione percentuale con il corrispondente valore di r_T . Notiamo che la discrepanza fra i valori ottenuti con i due metodi oscilla fra il 10% ed il 20%:

questo accade poiché i dischi presentano delle eccentricità e_{disco} che variano di caso in caso.

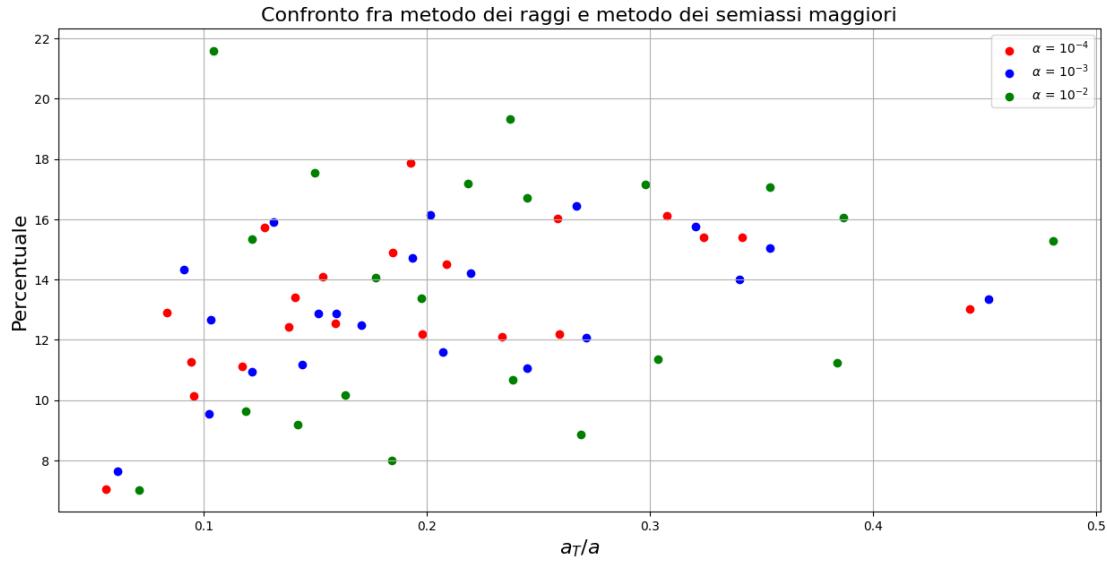


Figura 6.7: Confronto fra il metodo dei raggi ed il metodo dei semiassi per la determinazione delle dimensioni del disco. Notiamo come le variazioni non abbiano una dipendenza evidente sulla viscosità α e oscillino fra il 10% ed il 20%.

6.2 Eccentricità del disco

Abbiamo definito e_{disco} come il valore medio dell'eccentricità delle orbite nell'intorno del semiasse di troncamento (vedi Sezione 5.4). Come per le dimensioni del disco, le stime d'eccentricità che forniamo per i sistemi analizzati sono le medie temporali effettuate fra la trentesima e la cinquantesima orbita del sistema binario. In Figura 6.8, 6.9 ed 6.10 sono riportati i risultati delle analisi che abbiamo effettuato: i valori numerici possono essere consultati in Appendice E. I grafici con cui presentiamo i risultati sono analoghi a quelli utilizzati in precedenza per le dimensioni dei dischi: sulle ascisse è posto il rapporto m_{cen}/m_{per} , dove m_{cen} indica la massa della stella posta al centro della griglia, mentre m_{per} quella del corpo perturbante. Sulle ordinate si trova l'eccentricità e della binaria. Il colore delle celle è dettato dal valore di e_{disco} dell'oggetto in analisi: gli estremi della scala sono la massima e la minima eccentricità ottenuta.

Abbiamo osservato che tutti i valori numerici appartengono all'intervallo $e_{disco} \in [0.05, 0.42]$. Le maggiori e_{disco} sono quelle dei dischi circum-secondari: supponiamo che la spiegazione di questo fenomeno siano le forze mareali più intense causate dal corpo principale della binaria.

Notiamo che l'eccentricità dei dischi diminuisce in media all'aumentare di e : il maggior troncamento che subiscono i dischi in un sistema binario altamente eccentrico fa sì che non sia presente materiale in corrispondenza delle risonanze che eccitano e_{disco} . Il risultato è la presenza di strutture orbitanti più circolari.

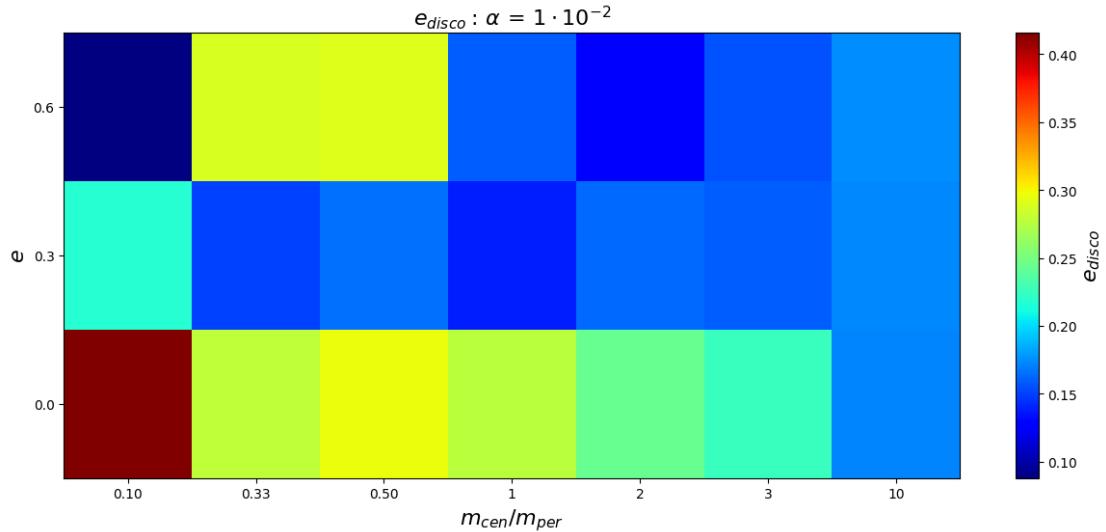


Figura 6.8: Valori di e_{disco} per $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$

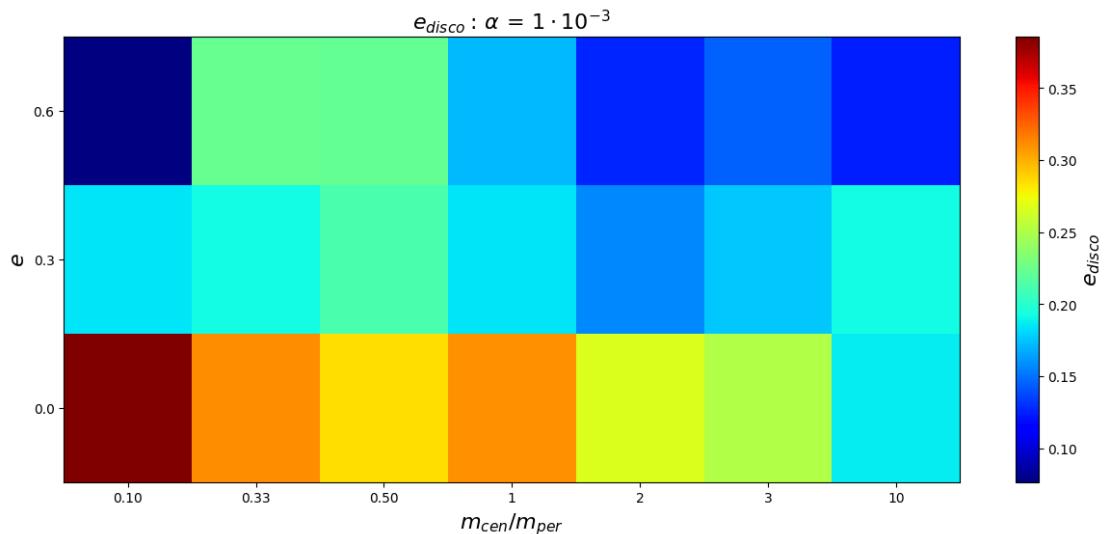


Figura 6.9: Valori di e_{disco} per $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$

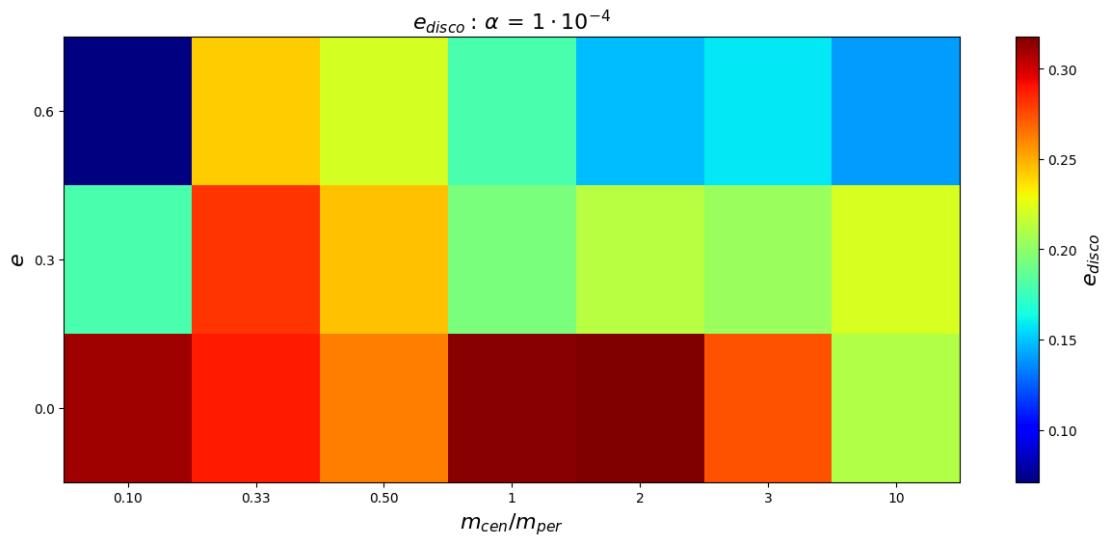


Figura 6.10: Valori di e_{disco} per $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$

In Figura 6.11 è resa più evidente la dipendenza dall'eccentricità della binaria. Sulle ascisse del grafico è posta la dimensione del disco a_T/a , mentre le ordinate ospitano i valori di e_{disco} . I punti costituenti il grafico a dispersione sono colorati in base all'eccentricità del sistema binario al quale appartengono: è evidente come i massimi valori di e_{disco} siano ottenuti per $e = 0.0$

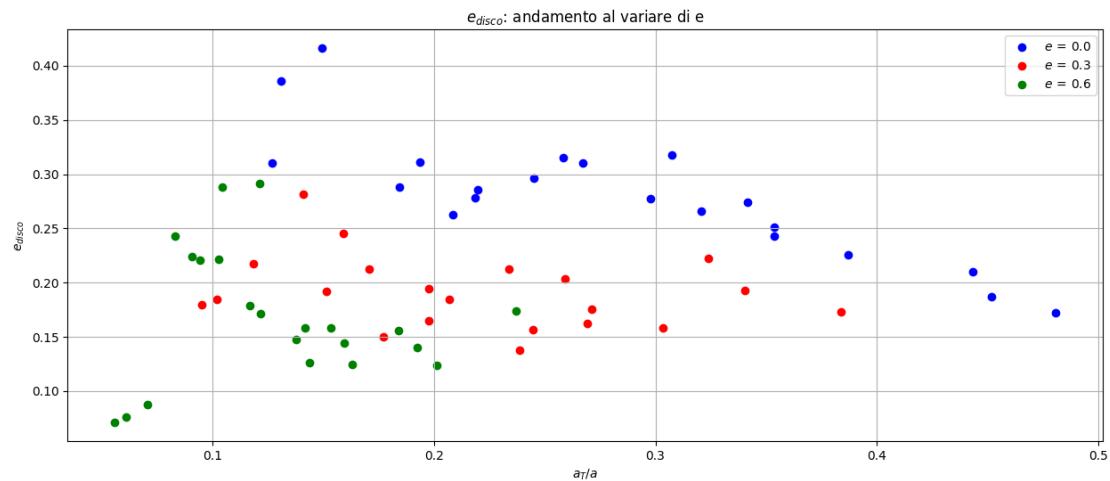


Figura 6.11: Grafico riassuntivo delle stime di e_{disco} effettuate: è evidente una dipendenza sull'eccentricità del sistema binario considerato. Oltre a diminuire in dimensione, i dischi in analisi presentano eccentricità inferiori all'aumentare di e .

6.3 Confronto con i risultati teorici

In questa sezione effettuiamo il confronto con le predizioni teoriche del modello di Manara, Tazzari et al. (2019). La formula (3.27) presenta quattro parametri: i primi due, ossia a e b , hanno una dipendenza sulla viscosità del materiale costituente il disco. In questo lavoro di tesi abbiamo lavorato con tre diversi parametri adimensionali $\alpha \in \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$. È possibile valutare i corrispondenti numeri di Reynolds secondo

$$R = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{h}{r} \right)^{-2}, \quad (6.1)$$

dove in h/r riconosciamo l'aspect-ratio del disco. I corrispettivi R sono: $4 \cdot 10^4$, $4 \cdot 10^5$, $4 \cdot 10^6$. I valori di a, b sono stati forniti da Manara, Tazzari et al. (2019) (vedi Appendice A) per $R = 10^4, 10^5, 10^6$: per effettuare un confronto più corretto abbiamo extrapolato linearmente i parametri per $R = 4 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^5$. L'extrapolazione fornisce risultati errati per $R = 4 \cdot 10^6$ poiché è un numero di Reynolds esterno al range campionario: per tali dati utilizziamo come a, b di riferimento quelli proposti da Manara, Tazzari et al. (2019) nel caso di $R = 10^6$. I valori ottenuti in questa fase dell'analisi sono riportati in Tabella F.1.

A viscosità del materiale fissata a, b dipendono dalla massa ridotta $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$: dato che i valori da noi utilizzati non corrispondono con quelli riportati nel paper di Manara, Tazzari et al. (2019), effettuiamo una seconda extrapolazione su μ . I parametri definitivi a, b che abbiamo utilizzato per effettuare i confronti sono riportati in Tabella F.2.

La relazione (3.27) consente di determinare le dimensioni del raggio di troncamento: abbiamo deciso di effettuare il confronto sia per i valori di r_T che abbiamo individuato, che per quelli di a_T . Il motivo per cui abbiamo deciso di confrontare gli a_T da noi determinati con i risultati forniti dalla relazione individuata da Manara, Tazzari et al. (2019) è che vogliamo investigare se il formalismo dei semiassi maggiori fornisca dei riscalamenti al variare di m_2/m_1 analoghi a quelli dei raggi di troncamento.

I grafici con cui presentiamo il confronto con la legge analitica per la determinazione di r_T sono tutti dello stesso tipo: sulle ascisse abbiamo posto la coordinata radiale riscalata in unità del semiasse maggiore della binaria, mentre sulle ordinate si trova il rapporto m_2/m_1 fra le masse della stella secondaria e di quella principale. Le predizioni teoriche sono riportate in colore nero, la regione colorata di azzurro e delimitata da delle linee blu è quella occupata dal disco circum-primario, mentre il colore rosso definisce l'estensione spaziale del disco circum-secondario.

6.3.1 Raggi di troncamento

Abbiamo definito r_T come il raggio del cerchio centrato nell'origine della griglia di simulazione contenente il 99.9% della massa presente nella regione considerata. Il criterio che abbiamo fornito è differente da quello di Artynowicz e Lubow (1994), che consideravano il disco troncato nella posizione spaziale dove la densità del materiale orbitante era metà di quella massima. Notiamo che le estensioni spaziali dei dischi da noi ottenute risultano in media maggiori rispetto a quelle aspettate secondo la relazione suggerita da Manara, Tazzari et al. (2019).

Viscosità massima

Il caso di viscosità massima è quello che corrisponde ad $\alpha = 10^{-2}$. Nel caso di binaria circolare notiamo un buon accordo fra le predizioni teoriche ed i risultati numerici: le discrepanze con il modello sono minime. Per le simulazioni effettuate con $e = 0.3$ osserviamo che i r_T da noi ottenuti sono maggiori rispetto a quelli di Manara, Tazzari et al. (2019): il disco circum-primario teorico con $m_2/m_1 = 0.1$ risulta il 13% più piccolo rispetto a quanto da noi ottenuto. Le discrepanze con il modello risultano maggiori per il circum-primario a bassi m_2/m_1 , mentre accade il contrario per il circum-secondario. Nel caso di binaria altamente eccentrica $e = 0.6$ le predizioni della (3.27) risultano essere maggiormente compatibili con le simulazioni effettuate: la massima discrepanza si verifica per il disco circum-secondario con $m_2/m_1 = 0.5$ ed è pari all' 8% di r_T .

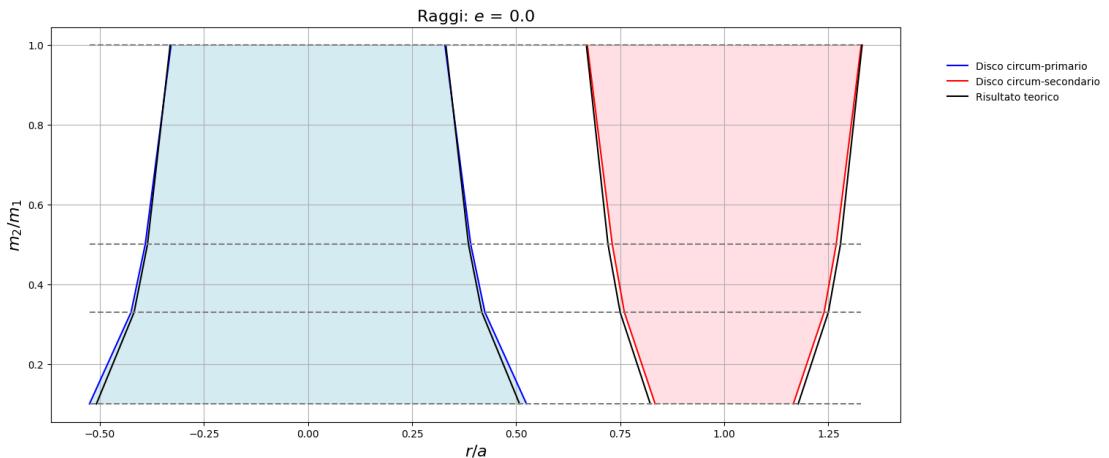


Figura 6.12: Confronto fra predizioni teoriche del raggio di troncamento e valori numerici di r_T . I dischi considerati in questo grafico hanno $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$ e sono ospitati in un sistema binario con eccentricità $e = 0.0$.

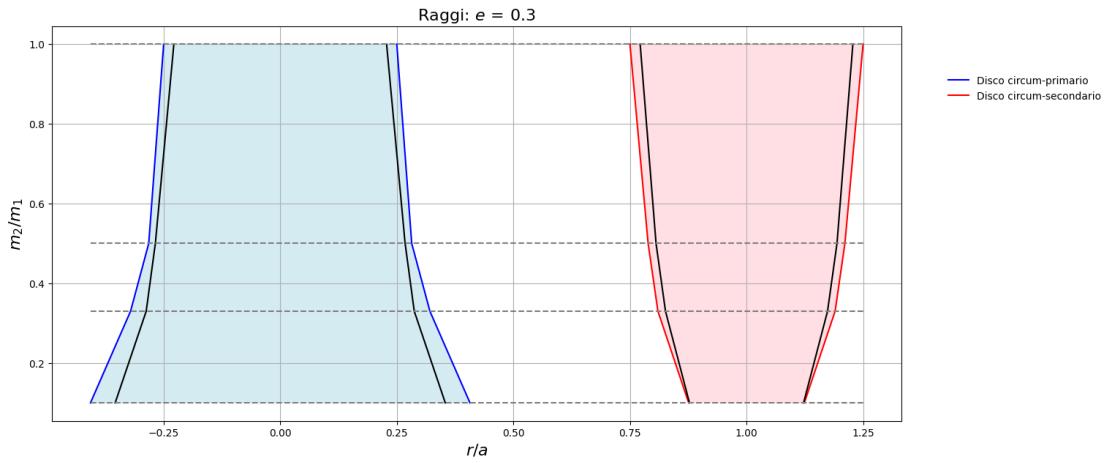


Figura 6.13: Differenze fra i risultati teorici ed i valori numeri del raggio di troncamento. I dischi riportati in figura sono costituiti da materiale con viscosità $\alpha = 10^{-2}$: l'eccentricità del sistema binario è $e = 0.3$. Notiamo come i dischi da noi ottenuti risultino più estesi di quelli predetti dalla (3.27): l'andamento per piccoli m_2/m_1 da noi individuato differisce da quello individuato da Manara, Tazzari et al. (2019).

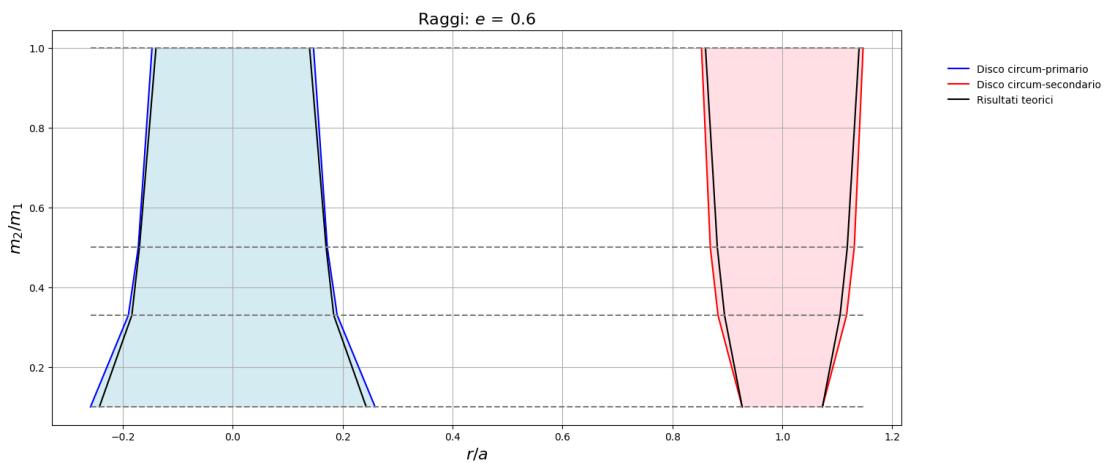


Figura 6.14: Confronto fra il modello di Manara, Tazzari et al. (2019) e i risultati numerici per del materiale caratterizzato da $\alpha = 10^{-2}$ orbitante in un sistema ad elevata eccentricità. Gli andamenti sono confrontabili: la discrepanza maggiore, pari all' 8% di r_T , si presenta per il disco circum-secondario della binaria con $m_2/m_1 = 0.5$.

Viscosità media

I dischi a viscosità media sono caratterizzati da $\alpha = 10^{-3}$, che corrisponde ad un numero di Reynolds pari a $R = 4 \cdot 10^5$. Come per $\alpha = 10^{-2}$, i raggi di troncamento ottenuti mediante simulazione risultano maggiormente in disaccordo con il modello teorico quando $e = 0.3$.

Nel caso di binaria circolare è presente un buon accordo fra i valori numerici e quelli ottenuti mediante la (3.27): osserviamo che il disco circum-secondario per ogni valore del rapporto m_2/m_1 risulta più piccolo della predizione teorica, sebbene venga descritta correttamente la dipendenza da q (vedi Figura 6.15). Per i dischi appartenenti al sistema binario mediamente eccentrico osserviamo che le dimensioni del disco circum-primario risultano superiori a quelle ottenute con la relazione di Manara, Tazzari et al. (2019): in termini percentuali la differenza fra r_T simulati e teorici raggiunge il 21% (vedi Figura 6.16). Nel caso di binaria con $e = 0.6$ i valori numerici risultano maggiori rispetto a quelli ottenuti con la (3.27): osserviamo che la dipendenza dal rapporto m_2/m_1 è la stessa dei risultati presenti in letteratura (vedi Figura 6.17).

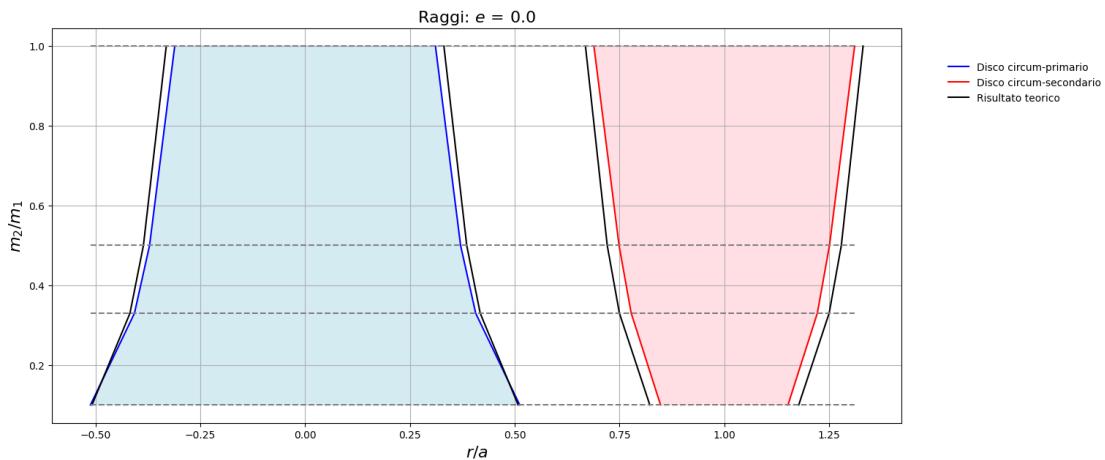


Figura 6.15: Confronto fra risultati numerici ed i valori teorici per dischi costituiti da materiale con $\alpha = 10^{-3}$ appartenenti ad un sistema binario circolare. Le dimensioni dei dischi circum-secondari ottenute per via simulativa risultano essere inferiori rispetto a quelle suggerite dalla (3.27): notiamo che l'andamento in dipendenza del rapporto m_2/m_1 è lo stesso per le due tipologie di stima di r_T . Il disco circum-primario è coerente con la relazione proposta da Manara, Tazzari et al. (2019) per piccoli q , mentre per grandi valori risulta leggermente più piccolo.

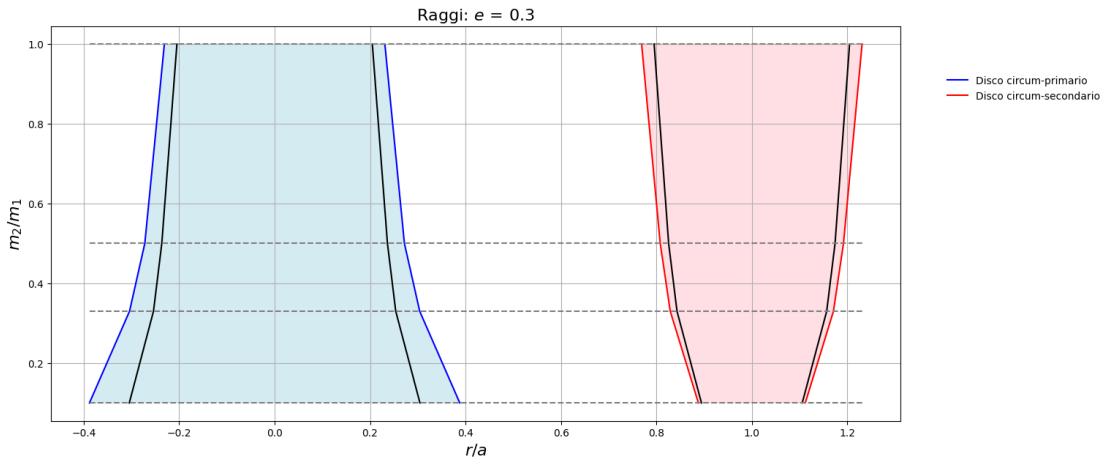


Figura 6.16: Paragone fra le dimensioni ottenute numericamente e quelle determinate mediante la relazione proposta da Manara, Tazzari et al. (2019) per dischi caratterizzati da $\alpha = 10^{-3}$ ospitati in un sistema binario mediamente eccentrico. Notiamo che il disco circum-primario presenta una dipendenza da m_2/m_1 è differente, poiché per bassi valori di q tende ad allargarsi maggiormente. Il disco circum-secondario presenta un buon accordo con la (3.27) per piccoli q , mentre tende ad espandersi più di quanto predetto dal modello per alti valori di m_2/m_1 .

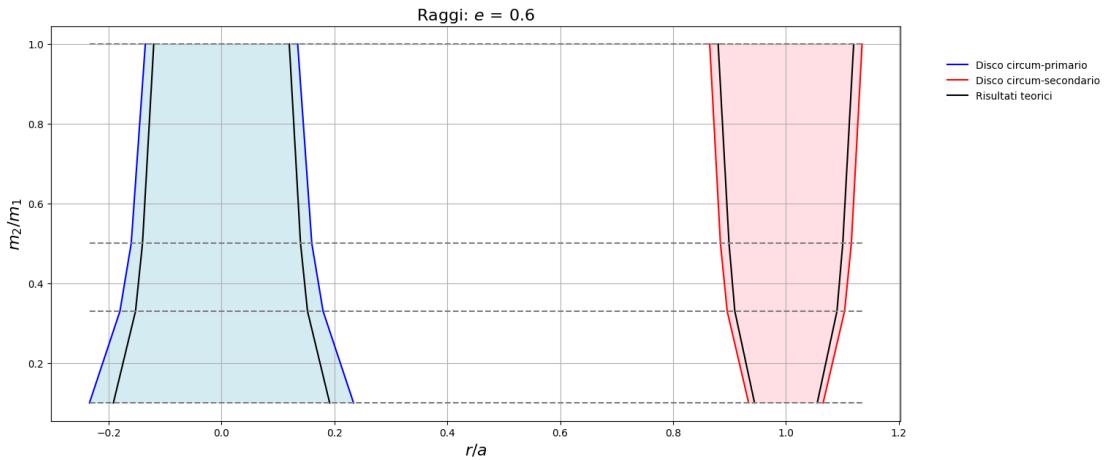


Figura 6.17: In figura sono riportate le regioni occupate dai dischi circumstellari al variare del mass-ratio del sistema altamente eccentrico del quale fanno parte: il materiale costituente i dischi ha $\alpha = 10^{-3}$. Gli andamenti numerici che abbiamo ottenuto sono paragonabili a quelli teorici determinati secondo la relazione (3.27): le dimensioni di entrambi i dischi risultano tuttavia maggiori di quanto proposto dal modello a cui stiamo facendo riferimento.

Viscosità minima

I dischi a viscosità minima sono quelli costituiti da materiale caratterizzato da $\alpha = 10^{-4}$: il corrispondente numero di Reynolds è $R = 4 \cdot 10^6$. I confronti con il modello teorico per le dimensioni di tali oggetti sono le meno significative presenti in questo lavoro di tesi: i paragoni che ci apprestiamo ad analizzare sono effettuati con l'andamento teorico previsto per $R = 1 \cdot 10^6$, poiché il numero di Reynolds a cui stiamo lavorando si trova al di fuori dell'intervallo investigato da Manara, Tazzari et al. (2019).

Come nel caso precedente, notiamo che entrambi i dischi facenti parte di una binaria circolare risultano essere leggermente più piccoli di quanto predetto dalla (3.27) (vedi Figura 6.18). In particolare il disco circum-secondario risulta meno esteso del modello teorico per ogni m_2/m_1 campionato: la massima differenza percentuale si verifica per $m_2/m_1 = 0.33$ ed è del 18%. La binaria mediamente eccentrica $e = 0.3$ si verifica nuovamente la casistica con maggior differenze fra le predizioni della (3.27) ed i valori da noi determinati: il disco circum-primario presenta un incremento in dimensioni maggiore rispetto al modello teorico per piccoli m_2/m_1 (vedi Figura 6.19). Entrambi i dischi circumstellari con $e = 0.6$ risultano più grandi delle predizioni di Manara, Tazzari et al. (2019): la massima differenza percentuale è del 26% per il disco circum-primario a $m_2/m_1 = 0.1$ (vedi Figura 6.20).

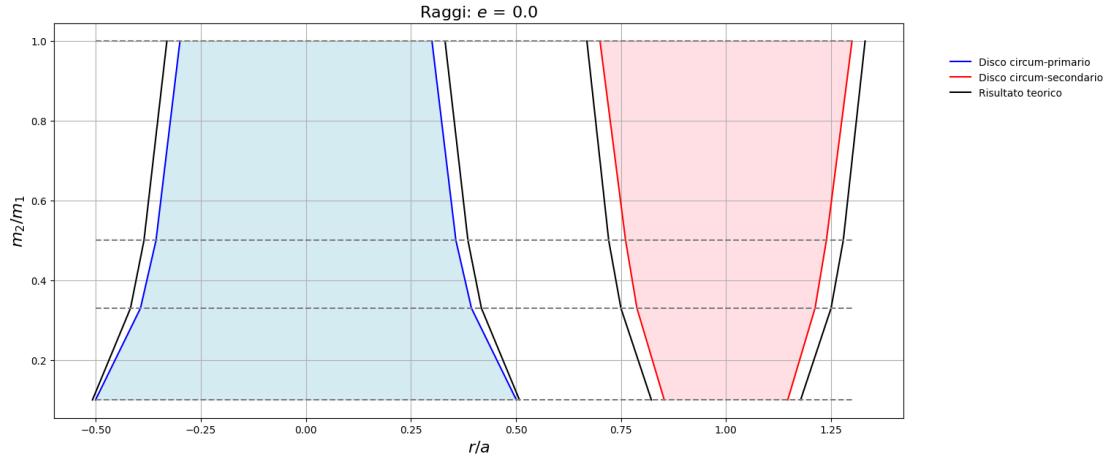


Figura 6.18: In Figura è riportato il confronto fra i valori numerici e le predizioni teoriche della relazione proposta da Manara, Tazzari et al. (2019) per dei dischi caratterizzati da $\alpha = 10^{-4}$ orbitanti in una binaria circolare. Osserviamo come il disco circum-secondario presenta dei raggi di troncamento più piccoli rispetto alle predizioni teoriche per ogni valore di m_2/m_1 .

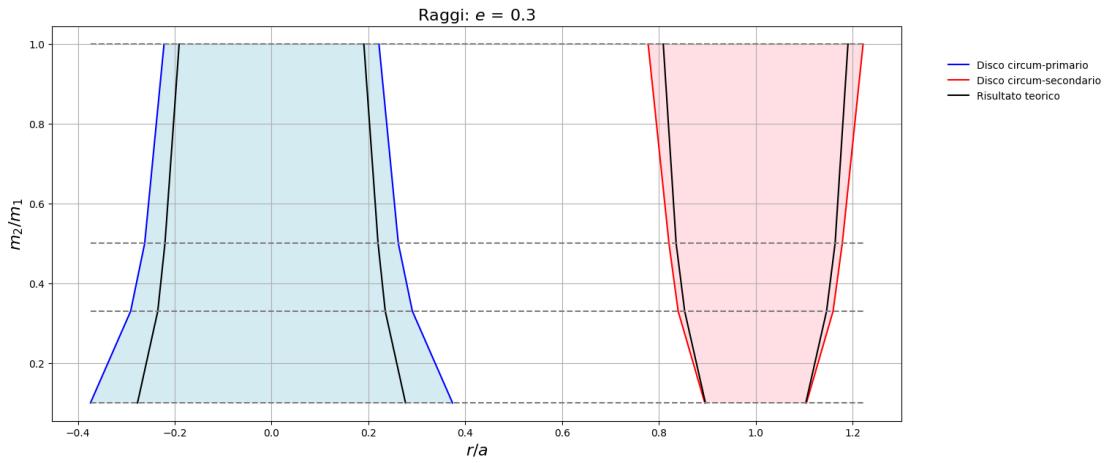


Figura 6.19: Paragone fra le simulazioni da noi effettuate e le predizioni teoriche per le dimensioni di dischi circumstellari costituiti da materiale con $\alpha = 10^{-4}$ ospitati in un sistema binario a media eccentricità. Il disco circum-primario numericamente ottenuto è maggiormente esteso rispetto alle predizioni teoriche per ogni valore del rapporto m_2/m_1 : la massima differenza è presente per bassi valori di q . Il disco circum-secondario presenta un comportamento opposto, in quanto per alti m_2/m_1 risulta più grande di quanto suggerito dalla teoria.

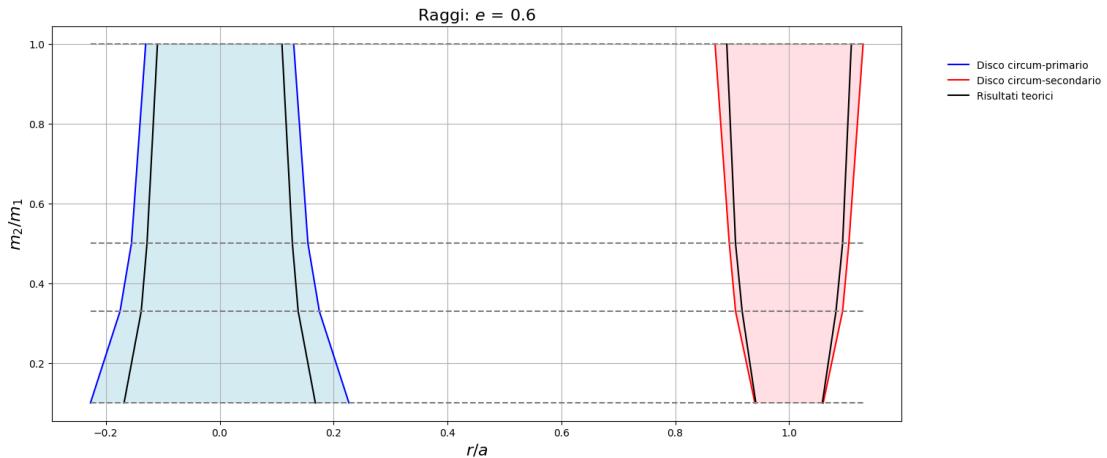


Figura 6.20: In figura sono riportate le regioni occupate da dei dischi circumstellari con $\alpha = 10^{-4}$ in un sistema altamente eccentrico al variare di m_2/m_1 . Osserviamo che sia il disco circum-primario, che quello circum-secondario risultano di dimensioni maggiori rispetto al modello teorico. La massima differenza è presente per il materiale orbitante attorno alla componente principale della binaria per $m_2/m_1 = 0.1$

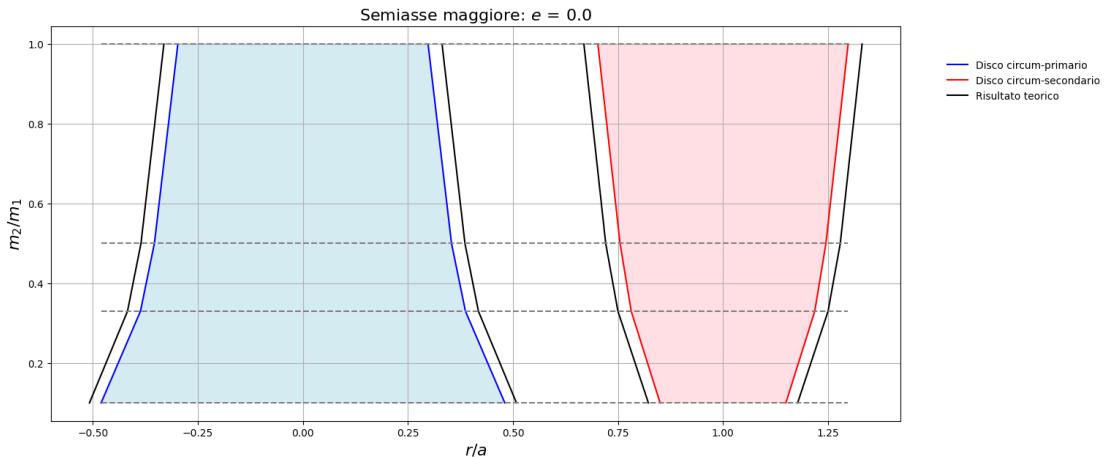
6.3.2 Semiassi di troncamento

Abbiamo definito come a_T il semiasse maggiore dell'orbita del materiale tale che il 99.9% del materiale presente nella griglia simulativa compisse orbite a semiassi inferiori. Lavorando in termini di a_T dovremmo essere in grado di evitare una problematica riportata da Artymowicz e Lubow (1994), ossia che la determinazione delle dimensioni del disco d'accrescimento è resa difficoltosa dalla sua mancanza di simmetria per rotazione attorno all'asse z.

Abbiamo osservato, come riportato nella Sottosezione 6.1.2, che le dimensioni dei dischi ricavate con il metodo dei semiassi maggiori sono inferiori rispetto a quelle dei raggi di troncamento. Di conseguenza, il confronto con il modello proposto da Manara, Tazzari et al. (2019) fornisce dei risultati differenti. I dischi ospitati in binarie circolari sono più piccoli rispetto alle predizioni teoriche, sebbene il modo di scalare al variare di m_2/m_1 sia lo stesso per i valori simulati e quelli ottenuti con la (3.27). Per i dischi facenti parte di sistemi binari a media o alta eccentricità l'accordo con il modello teorico è molto elevato. Abbiamo osservato per tutti i valori di α che l'andamento proposto da Manara, Tazzari et al. (2019) al variare di m_2/m_1 è altamente compatibile con quello ottenuto per il metodo dei semiassi.

Viscosità massima

Il materiale a viscosità massima è caratterizzato da $\alpha = 10^{-2}$. Osserviamo che nelle binarie circolari sia il disco circum-primario che quello circum-secondario sono di taglia inferiore rispetto alle predizioni teoriche (vedi Figura 6.21).



I dischi in sistemi ad $e = 0.3$ ed $e = 0.6$ presentano un elevato accordo con le predizioni teoriche (vedi Figure 6.22, 6.23).

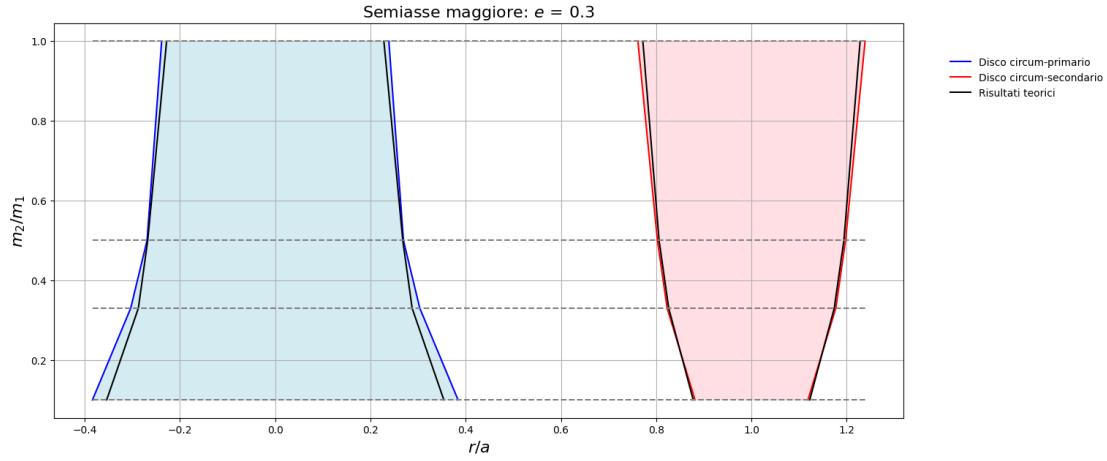


Figura 6.22: Confronto fra predizioni teoriche di r_T e dimensioni dei dischi con il metodo dei semiassi per $\alpha = 10^{-2}$ ed $e = 0.3$. Osserviamo un elevata compatibilità fra modello e valori numerici, sebbene la dipendenza su m_2/m_1 da noi individuata per il disco circum-primario risulta essere leggermente differente, con maggiori espansioni a bassi ed alti q .

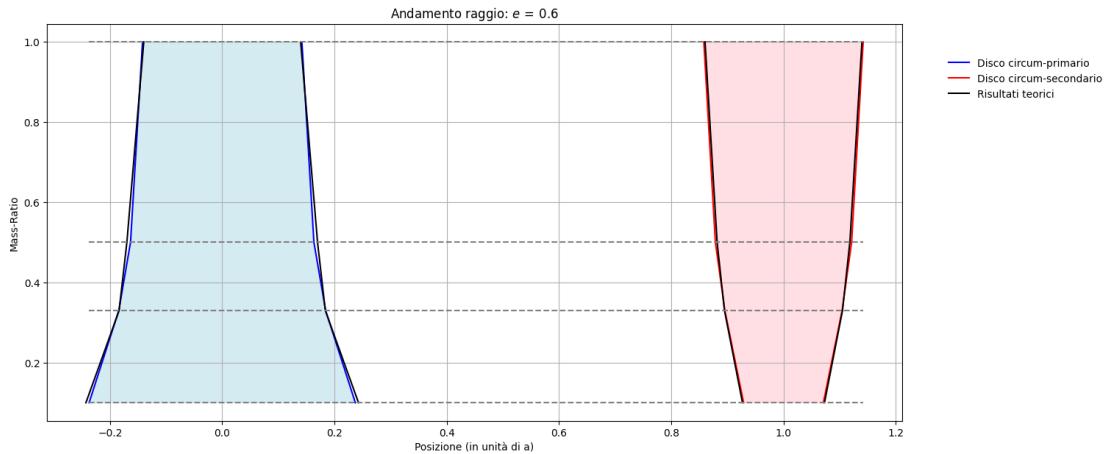


Figura 6.23: In figura è riportato un paragone fra il modello di Manara, Tazzari et al. (2019) e i valori numerici da noi calcolati. I dischi in questione hanno $\alpha = 10^{-2}$ ed $e = 0.6$: osserviamo come le due stime risultino coincidenti, con andamenti al variare di m_2/m_1 totalmente sovrapponibili.

Viscosità media

I dischi a viscosità media sono costituiti da materiale caratterizzato da $\alpha = 10^{-3}$. Osserviamo che nel caso di binaria circolare entrambi i dischi presentano delle dimensioni inferiori a quelle del modello teorico, sebbene il modo di scalare al variare di m_2/m_1 sia confrontabile (vedi Figura 6.24). I dischi circum-primari con $e = 0.3$ risultano più estesi delle predizioni teoriche per bassi m_2/m_1 , mentre i circum-secondari sono in perfetto accordo con la 3.27 (vedi Figura 6.25).

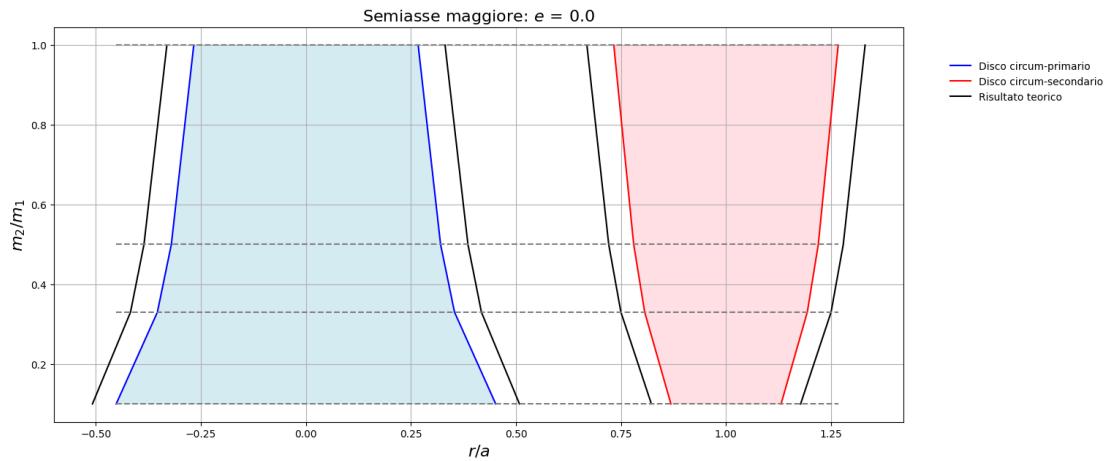


Figura 6.24: Confronto fra modello teorico e valori numerici con: $\alpha = 10^{-3}$, $e = 0.0$. Notiamo che entrambe sia i dischi circum-primari che i dischi circum-secondari sono meno estesi delle predizioni della 3.27.

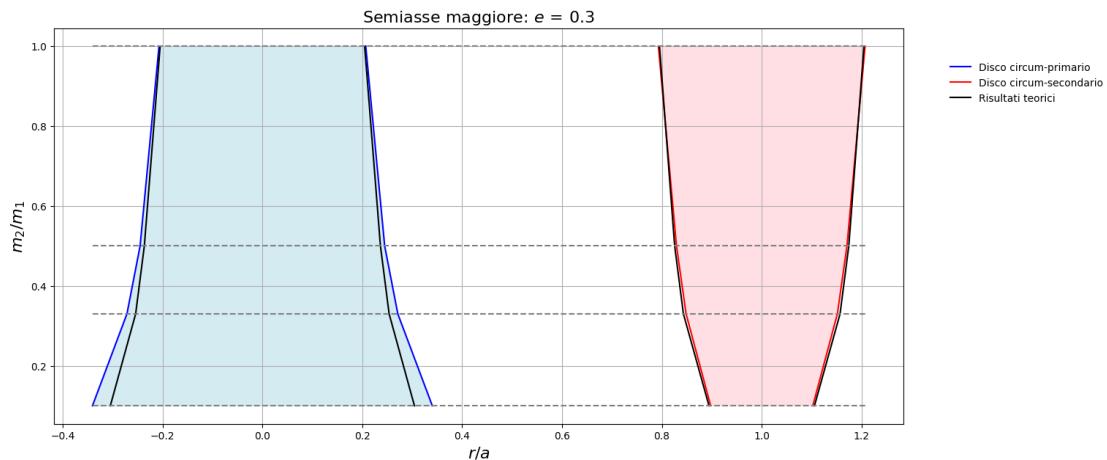


Figura 6.25: Valori numerici e teorici per $\alpha = 10^{-3}$, $e = 0.3$. Il disco circum-primario risulta più esteso per bassi m_2/m_1 .

Come nel dischi caratterizzati da $\alpha = 10^{-2}$, nel caso di binaria altamente eccentrica osserviamo un'elevata compatibilità fra valori numerici e teorici (vedi Figura 6.26).

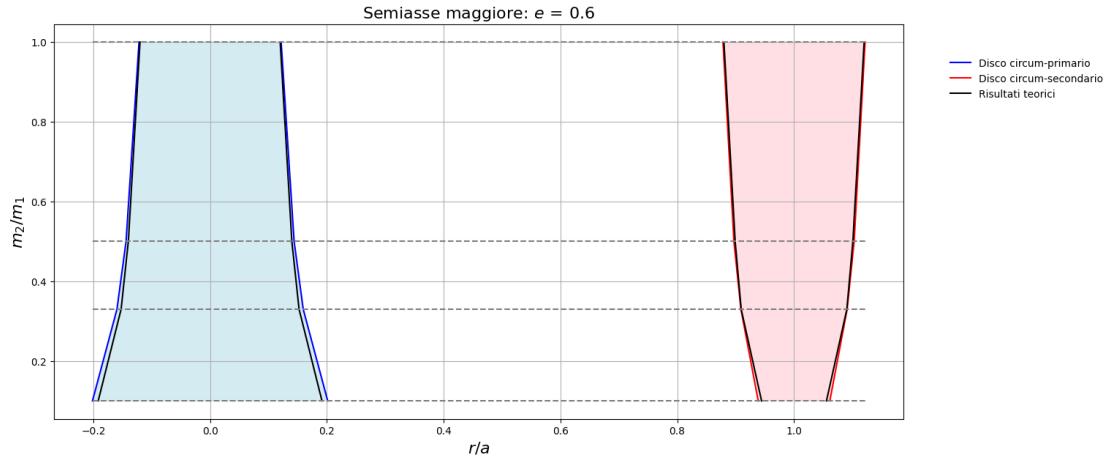


Figura 6.26: Paragone fra valori numerici e teorici per dischi circumstellari facenti parte di un sistema ad elevata eccentricità. Il materiale orbitante ha $\alpha = 10^{-3}$. Le due stime sono altamente compatibili per entrambi i dischi.

Viscosità minima

Il materiale a viscosità minima è caratterizzato da $\alpha = 10^{-4}$. Come per gli altri due valori del parametro adimensionale α osserviamo che entrambi i dischi simulati sono di dimensioni inferiori rispetto alle predizioni (vedi Figura 6.27).

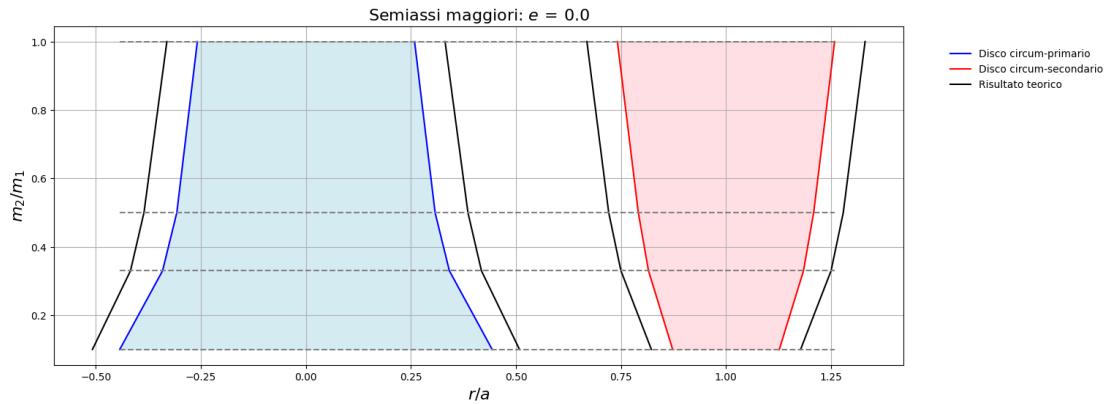


Figura 6.27: Paragone fra dimensioni teoriche e numeriche dei dischi circumstellari con $\alpha = 10^{-4}$ ed $e = 0.0$. Sia i dischi circum-primari che quelli circum-secondari risultano più piccoli delle predizioni della (3.27).

I dischi in sistemi mediamente od altamente eccentrici presentano un buon accordo con il modello teorico, sebbene per entrambi i valori di e il circum-primario simulato presenti una differente dipendenza da m_2/m_1 , che comporta delle dimensioni maggiori per bassi valori di q .

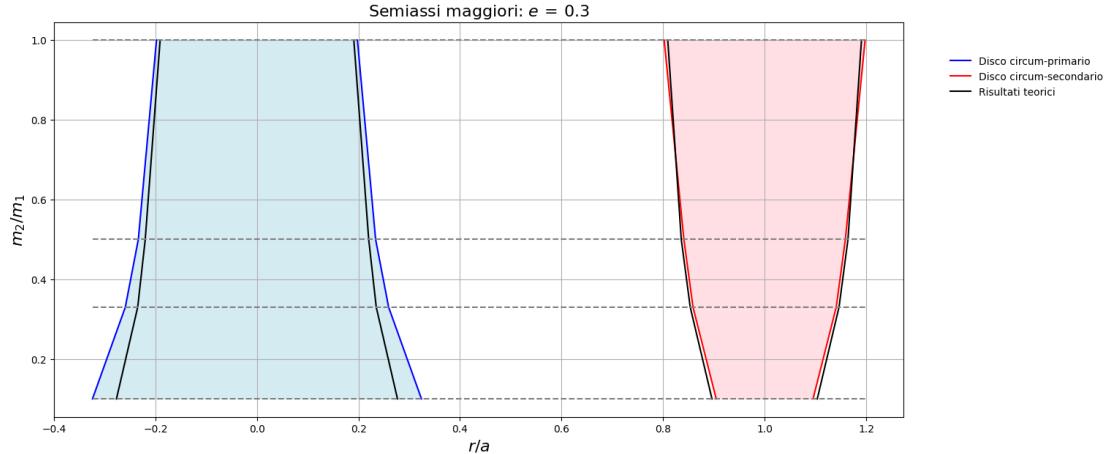


Figura 6.28: Confronto fra modello teorico e risultati simulativi per dischi ospitati in un sistema binario mediamente eccentrico: $\alpha = 10^{-4}$. Osserviamo che il disco circum-primario presenta delle dimensioni maggiori rispetto ai valori suggeriti dalla (3.27) per bassi valori di m_2/m_1 .

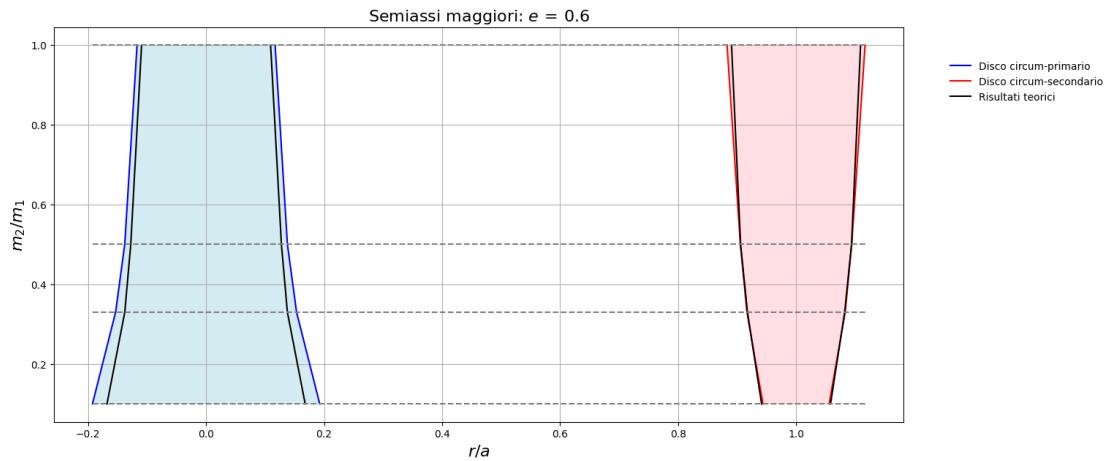


Figura 6.29: In Figura sono riportate le dimensioni dei dischi circumstellari facenti parte di un sistema binario con $e = 0.6$ e le predizioni teoriche: $\alpha = 10^{-4}$. Notiamo che il disco circum-primario è più esteso di quanto suggerito dal modello proposto da Manara, Tazzari et al. (2019) per piccoli m_2/m_1 .

Capitolo 7

Conclusioni

Motivati dalla mancanza in letteratura di un campionamento sistematico dello spazio dei parametri, abbiamo deciso di studiare il troncamento per dischi circumstellari al variare dell'eccentricità e della binaria ospitante, del mass-ratio q e della viscosità del materiale orbitante.

Per effettuare lo studio numerico necessario abbiamo utilizzato FARGO3D (Benítez-Llambay e Masset 2016), un codice idrodinamico sviluppato per analizzare le caratteristiche dei dischi proto-planetari. Ci siamo concentrati su tre tipologie di sistemi binari (circolari, mediamente eccentrici ed altamente eccentrici) studiando quattro rapporti fra la massa m_2 della stella secondaria e quella m_1 della primaria: $m_2/m_1 = 0.1, 0.33, 0.5, 1$. I materiali costituenti i dischi potevano differire nel nostro lavoro in viscosità, dato che abbiamo utilizzato $\alpha \in \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$ in modo tale da esplorare l'intervallo caratteristico dei dischi d'accrescimento.

Il numero totale di simulazioni che abbiamo effettuato è 72: il campione da noi analizzato è 9 volte più grande di quello presente nella ricerca di Artymowicz e Lubow (1994). Il bagaglio numerico a sostegno dello studio del troncamento risulta più vasto grazie a questo lavoro di tesi.

Ci siamo concentrati in particolare su due caratteristiche dei dischi: la loro estensione spaziale e la loro eccentricità.

7.1 Dimensioni del disco

I metodi che abbiamo impiegato per valutare l'estensione dei dischi sono due:

- metodo del raggio di troncamento
- metodo del semiasse maggiore

La motivazione alla base dell'utilizzo del secondo metodo è che, come riportato da Artymowicz e Lubow (1994), l'eccentricità intrinseca del disco pregiudica una cor-

retta valutazione della coordinata radiale a cui avviene il troncamento. Abbiamo osservato che i valori di $a_T < r_T$ sistematicamente per ogni disco considerato nella nostra analisi: questo accade perché il materiale durante la propria orbita spende più tempo nell'intorno dell'apoastro.

La dipendenza dell'estensione del disco dai parametri della binaria è analoga a quella presente in letteratura. Abbiamo osservato che ad e fissato, la dimensione dell'oggetto orbitante dipende fortemente da m_{cen}/m_{per} , dove m_{cen} è la massa della stella centrale, mentre m_{per} quella del corpo perturbante. I dischi che si sviluppano attorno ad una stella che racchiude una frazione maggiore della massa della binaria sono più grandi: questo accade perché il corrispondente *Roche-Lobe* è più esteso. Come individuato da Artymowicz e Lubow (1994), le dimensioni dei dischi ospitati in sistemi binari mediamente o altamente eccentrici sono inferiori rispetto a quelle determinate per dischi in binarie circolari: questo andamento è dovuto al fatto che le risonanze eccentriche sono di intensità maggiore ad alta e con un conseguente spostamento della regione di troncamento (Artymowicz e Lubow 1994). Abbiamo osservato una leggera dipendenza da α : maggiore è la viscosità, maggiori sono le dimensioni che otteniamo. Tale dipendenza era nota in letteratura per dischi ospitati in sistemi binari eccentrici, ma non per quanto riguarda quelli circolari.

Per testare i metodi utilizzati in questo lavoro di tesi, abbiamo effettuato un confronto con la relazione (3.27) proposta da Manara, Tazzari et al. (2019): tale paragone ci ha consentito di osservare come il criterio da noi sviluppato per il calcolo del raggio di troncamento e del semiasse maggiore del disco portasse a ottenere delle dimensioni maggiori rispetto a quelle osservate da Artymowicz e Lubow (1994). Abbiamo notato che la formula (3.27) cattura correttamente l'andamento delle estensioni dei dischi al variare dei parametri della binaria: i valori suggeriti dal modello teorico presentano degli scarti tipici del 10/15% con quanto da noi calcolato. È necessario sottolineare che i dischi circum-primari simulati presentano per bassi valori di m_2/m_1 dei raggi di troncamento che scalano al diminuire di q con un tasso maggiore rispetto a quanto suggerito da Manara, Tazzari et al. (2019).

7.2 Eccentricità del disco

Per ogni disco presente in questo lavoro, abbiamo valutato quale fosse il valore di e_{disco} osservando che in media tale quantità diminuisce all'aumentare dell'eccentricità della binaria. Supponiamo che questo comportamento contro-intuitivo si verifichi perché le risonanze responsabili dell'eccitazione di e_{disco} finiscono per trovarsi a raggi maggiori rispetto a quello di troncamento. Artymowicz e Lubow (1994) fanno riferimento all'eccentricità del disco solo per rimarcare come

la mancanza di simmetria per rotazioni attorno all'asse z del materiale orbitante pregiudichi una corretta valutazione di r_T : al meglio delle nostre conoscenze è la prima volta che viene condotta una tale analisi quantitativa dell'eccentricità eccitata dalla compagna in questo contesto.

7.3 Sviluppi futuri

Ci siamo posti di studiare computazionalmente le caratteristiche dei dischi circumstellari motivati dalla mancanza di un campionamento sistematico dello spazio dei parametri: questo lavoro di tesi ha consentito di colmare solamente alcune lacune e quindi uno dei possibili sviluppi futuri potrebbe essere un'ulteriore espansione dell'analisi effettuata. Il confronto con la relazione analitica di Manara, Tazzari et al. (2019) consente di paragonare il nostro lavoro con altri studi teorico-computazionali ed i metodi da noi utilizzati con quelli presenti in letteratura. Un test importante per i risultati da noi ottenuti potrebbe essere il confronto con studi osservativi di dischi circumstellari dei quali sono noti i parametri da noi presi in considerazione. Un ulteriore spunto per il futuro potrebbe essere l'estensione del fit di a , b , c e d ad una regione dello spazio dei parametri non presa in considerazione nel lavoro di Manara, Tazzari et al. (2019).

Appendice A

Parametri per la determinazione del raggio di troncamento

Nella seguente tabella sono riportati i valori di a e b ottenuti come risultato dei fit sui valori numerici ottenuti da Artymowicz e Lubow, 1994.

Reynolds	Circum-primario		Circum-secondario	
R	a	b	a	b
$\mu = 0.1$				
10^4	-0.66	0.84	-0.81	0.98
10^5	-0.75	0.68	-0.81	0.80
10^6	-0.78	0.56	-0.83	0.69
$\mu = 0.2$				
10^4	-0.72	0.88	-0.81	0.99
10^5	-0.78	0.72	-0.82	0.82
10^6	-0.80	0.60	-0.83	0.70
$\mu = 0.3$				
10^4	-0.76	0.92	-0.79	0.97
10^5	-0.80	0.75	-0.82	0.81
10^6	-0.81	0.63	-0.83	0.69
$\mu = 0.4$				
10^4	-0.77	0.95	-0.80	0.98
10^5	-0.81	0.78	-0.82	0.80
10^6	-0.82	0.66	-0.83	0.68
$\mu = 0.5$				
10^4	-0.78	0.94	-0.79	0.95
10^5	-0.81	0.78	-0.81	0.78
10^6	-0.82	0.66	-0.82	0.66

Tabella A.1: Parametri che garantiscono i migliori fit con i risultati di Artymowicz e Lubow. I valori hanno una dipendenza sulla viscosità, indicata in termini di numero di Reynolds R (Manara, Tazzari et al. 2019).

Appendice B

Risultati sul troncamento

Nelle seguenti tabelle sono riportate le dimensioni ottenute mediante simulazioni dell’evoluzione dei dischi da Artymowicz e Lubow (1994) e Pichardo, Sparke e Aguilar (2005).

μ	e	Primario	Secondario
0.3	0.0	0.38 ± 0.03	0.24 ± 0.02
0.3	0.3	0.28 ± 0.03	0.18 ± 0.02
0.1	0.0	0.47 ± 0.04	0.17 ± 0.03
0.1	0.3	0.36 ± 0.03	0.14 ± 0.02

Tabella B.1: Dimensioni dei dischi d’accrescimento circumstellari ottenute da Artymowicz e Lubow (1994). La tecnica numerica utilizzata per risolvere le equazioni idrodinamiche è lagrangiana (SPH). I valori di R con cui sono state effettuate le simulazioni sono tali per cui $\log R \sim 4$

μ/e	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.1	0.125	0.100	0.079	0.049	0.019
0.2	0.162	0.130	0.098	0.048	0.029
0.3	0.195	0.165	0.097	0.067	0.028
0.4	0.228	0.195	0.125	0.083	0.033
0.5	0.257	0.213	0.147	0.097	0.037
0.6	0.317	0.228	0.153	0.093	0.047
0.7	0.350	0.225	0.171	0.109	0.037
0.8	0.387	0.260	0.187	0.126	0.049
0.9	0.426	0.297	0.231	0.141	0.064

Tabella B.2: Dimensioni medie del disco attorno alla stella di massa pari a $\mu \cdot M$ in unità di semiasse maggiore della binaria a (il disco è circum-secondario se $\mu < 0.5$, altrimenti è il disco circum-primario). Tutti i raggi sono valutati al periastro del sistema binario (Pichardo, Sparke e Aguilar 2005).

Appendice C

Dimensioni della griglia

Nelle prossima tabella riportiamo le dimensioni in unità di a delle griglie utilizzate per le simulazioni dei dischi circumstellari.

q	Circum-primario		Circum-secondario	
Valore	r_{min}/a	r_{max}/a	r_{min}/a	r_{max}/a
$e = 0.0$				
0.1	0.048	0.841	0.033	0.292
0.33	0.040	0.696	0.033	0.333
0.5	0.035	0.617	0.033	0.333
1	0.026	0.529	0.026	0.529
$e = 0.3$				
0.1	0.048	0.721	0.025	0.250
0.33	0.040	0.497	0.033	0.250
0.5	0.035	0.441	0.033	0.292
1	0.026	0.330	0.026	0.330
$e = 0.6$				
0.1	0.048	0.601	0.017	0.167
0.33	0.035	0.398	0.033	0.208
0.5	0.035	0.353	0.033	0.250
1	0.026	0.264	0.026	0.264

Tabella C.1: Dimensioni delle griglie utilizzate per le simulazioni. Il caso riportato è quello di $\alpha = 10^{-3}$. Per il caso di $\alpha = 10^{-3}$ l'unica differenza è che r_{max} per il circumsecondario con $q = 0.5$, $e = 0.0$ ha valore: $0.417a$. Il caso con $\alpha = 10^{-4}$ è uguale a quello mostrato in tabella.

Appendice D

Dimensioni dei dischi

Raggi di troncamento

Raggi di troncamento $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	$0.525 a$	$0.166 a$
0.33	$0.425 a$	$0.240 a$
0.50	$0.391 a$	$0.269 a$
1.00	$0.329 a$	$0.329 a$
$e = 0.3$		
0.10	$0.407 a$	$0.124 a$
0.33	$0.321 a$	$0.190 a$
0.50	$0.282 a$	$0.211 a$
1.00	$0.250 a$	$0.250 a$
$e = 0.6$		
0.10	$0.259 a$	$0.073 a$
0.33	$0.190 a$	$0.117 a$
0.50	$0.172 a$	$0.131 a$
1.00	$0.147 a$	$0.147 a$

Tabella D.1: Dimensioni radiali dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$

Raggi di troncamento $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.512 a	0.152 a
0.33	0.407 a	0.222 a
0.50	0.371 a	0.251 a
1.00	0.311 a	0.311 a
$e = 0.3$		
0.10	0.388 a	0.112 a
0.33	0.304 a	0.171 a
0.50	0.272 a	0.192 a
1.00	0.231 a	0.231 a
$e = 0.6$		
0.10	0.234 a	0.066 a
0.33	0.180 a	0.104 a
0.50	0.160 a	0.116 a
1.00	0.135 a	0.135 a

Tabella D.2: Dimensioni radiali dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$

Raggi di troncamento $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.501 a	0.147 a
0.33	0.394 a	0.212 a
0.50	0.357 a	0.239 a
1.00	0.300 a	0.300 a
$e = 0.3$		
0.10	0.374 a	0.105 a
0.33	0.291 a	0.160 a
0.50	0.262 a	0.179 a
1.00	0.222 a	0.222 a
$e = 0.6$		
0.10	0.227 a	0.060 a
0.33	0.175 a	0.094 a
0.50	0.155 a	0.105 a
1.00	0.130 a	0.130 a

Tabella D.3: Dimensioni radiali dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$

Semiassi di troncamento

Semiassi di troncamento $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.481 a	0.150 a
0.33	0.387 a	0.218 a
0.50	0.354 a	0.245 a
1.00	0.298 a	0.298 a
$e = 0.3$		
0.10	0.384 a	0.119 a
0.33	0.304 a	0.177 a
0.50	0.269 a	0.198 a
1.00	0.239 a	0.239 a
$e = 0.6$		
0.10	0.237 a	0.071 a
0.33	0.184 a	0.104 a
0.50	0.163 a	0.121 a
1.00	0.142 a	0.142 a

Tabella D.4: Semiassi maggiori dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$

Semiassi di troncamento $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.452 a	0.131 a
0.33	0.354 a	0.194 a
0.50	0.321 a	0.220 a
1.00	0.267 a	0.267 a
$e = 0.3$		
0.10	0.340 a	0.102 a
0.33	0.271 a	0.152 a
0.50	0.245 a	0.171 a
1.00	0.207 a	0.207 a
$e = 0.6$		
0.10	0.201 a	0.061 a
0.33	0.159 a	0.091 a
0.50	0.144 a	0.103 a
1.00	0.122 a	0.122 a

Tabella D.5: Semiassi maggiori dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$

Semiassi di troncamento $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.443 a	0.127 a
0.33	0.341 a	0.185 a
0.50	0.307 a	0.209 a
1.00	0.259 a	0.259 a
$e = 0.3$		
0.10	0.324 a	0.095 a
0.33	0.259 a	0.141 a
0.50	0.234 a	0.159 a
1.00	0.198 a	0.198 a
$e = 0.6$		
0.10	0.193 a	0.056 a
0.33	0.153 a	0.083 a
0.50	0.138 a	0.094 a
1.00	0.117 a	0.117 a

Tabella D.6: Semiassi maggiori dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$

Appendice E

Eccentricità dei dischi

Eccentricità dei dischi $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.172	0.416
0.33	0.225	0.279
0.50	0.243	0.297
1.00	0.277	0.277
$e = 0.3$		
0.10	0.173	0.218
0.33	0.158	0.150
0.50	0.163	0.165
1.00	0.138	0.138
$e = 0.6$		
0.10	0.174	0.088
0.33	0.156	0.288
0.50	0.124	0.291
1.00	0.159	0.159

Tabella E.1: Eccentricità dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$

Eccentricità dei dischi $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.187	0.386
0.33	0.251	0.311
0.50	0.266	0.285
1.00	0.311	0.311
$e = 0.3$		
0.10	0.192	0.185
0.33	0.176	0.192
0.50	0.156	0.213
1.00	0.184	0.184
$e = 0.6$		
0.10	0.124	0.077
0.33	0.145	0.224
0.50	0.126	0.222
1.00	0.171	0.171

Tabella E.2: Eccentricità dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$

Eccentricità dei dischi $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$		
m_2/m_1	Circum-primario	Circum-secondario
$e = 0.0$		
0.10	0.210	0.311
0.33	0.274	0.288
0.50	0.318	0.263
1.00	0.315	0.315
$e = 0.3$		
0.10	0.222	0.179
0.33	0.204	0.282
0.50	0.213	0.245
1.00	0.194	0.194
$e = 0.6$		
0.10	0.140	0.071
0.33	0.158	0.243
0.50	0.148	0.221
1.00	0.179	0.179

Tabella E.3: Eccentricità dei dischi con $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$

Appendice F

Parametri per il confronto

Reynolds	Circum-primario		Circum-secondario	
R	a	b	a	b
$\mu = 0.1$				
$4 \cdot 10^4$	-0.690	0.787	-0.810	0.920
$4 \cdot 10^5$	-0.760	0.640	-0.867	0.763
10^6	-0.780	0.560	-0.830	0.690
$\mu = 0.2$				
$4 \cdot 10^4$	-0.740	0.827	-0.813	0.933
$4 \cdot 10^5$	-0.787	0.680	-0.823	0.780
10^6	-0.800	0.600	-0.830	0.700
$\mu = 0.3$				
$4 \cdot 10^4$	-0.773	0.863	-0.800	0.917
$4 \cdot 10^5$	-0.803	0.710	-0.823	0.770
10^6	-0.810	0.630	-0.830	0.690
$\mu = 0.4$				
$4 \cdot 10^4$	-0.783	0.893	-0.807	0.920
$4 \cdot 10^5$	-0.813	0.740	-0.823	0.760
10^6	-0.820	0.660	-0.830	0.680
$\mu = 0.5$				
$4 \cdot 10^4$	-0.790	0.887	-0.797	0.893
$4 \cdot 10^5$	-0.813	0.740	-0.813	0.740
10^6	-0.820	0.660	-0.820	0.660

Tabella F.1: Parametri ottenuti estrapolando su R quelli prodotti da Manara, Tazzari et al. (2019)

Reynolds	Circum-primario		Circum-secondario	
R	a	b	a	b
$\mu = 0.091$				
$4 \cdot 10^4$	-0.685	0.783	-0.809	0.919
$4 \cdot 10^5$	-0.758	0.638	-0.871	0.761
10^6	-0.782	0.556	-0.830	0.689
$\mu = 0.25$				
$4 \cdot 10^4$	-0.757	0.845	-0.867	0.925
$4 \cdot 10^5$	-0.795	0.695	-0.823	0.775
10^6	-0.805	0.615	-0.830	0.695
$\mu = 0.33$				
$4 \cdot 10^4$	-0.776	0.873	-0.802	0.918
$4 \cdot 10^5$	-0.806	0.719	-0.823	0.767
10^6	-0.813	0.640	-0.820	0.687
$\mu = 0.5$				
$4 \cdot 10^4$	-0.790	0.887	-0.797	0.893
$4 \cdot 10^5$	-0.813	0.740	-0.813	0.740
10^6	-0.820	0.660	-0.820	0.660

Tabella F.2: Parametri utilizzati per il calcolo dei raggi di troncamento. Essi sono stati ottenuti estrapolando sul numero di Reynolds e su μ .

Bibliografia

- Armitage, Philip J. (gen. 2007). «Lecture notes on the formation and early evolution of planetary systems». In: *arXiv e-prints*, astro-ph/0701485, astro-ph/0701485. DOI: 10.48550 / arXiv . astro - ph / 0701485. arXiv: astro - ph / 0701485 [astro-ph])
- Artymowicz, Paweł e Stephen H. Lubow (feb. 1994). «Dynamics of Binary-Disk Interaction. I. Resonances and Disk Gap Sizes». In: *The Astrophysical Journal* 421, p. 651. DOI: 10.1086/173679)
- Benítez-Llambay, Pablo e Frédéric S. Masset (2016). «FARGO3D: A New GPU-oriented MHD Code». In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 223.1, p. 11. URL: <http://stacks.iop.org/0067-0049/223/i=1/a=11>)
- Eggleton, P. P. (mag. 1983). «Aproximations to the radii of Roche lobes.» In: *The Astrophysical Journal* 268, pp. 368–369. DOI: 10.1086/160960)
- Goldreich, P. e S. Tremaine (ott. 1980). «Disk-satellite interactions.» In: *The Astrophysical Journal* 241, pp. 425–441. DOI: 10.1086/158356)
- Goodman, A. A. et al. (apr. 1993). «Dense Cores in Dark Clouds. VIII. Velocity Gradients». In: *The Astrophysical Journal* 406, p. 528. DOI: 10.1086/172465)
- Kenyon, S. J. e L. Hartmann (dic. 1987). «Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars: Disk Flaring and Limits on Accretion». In: *The Astrophysical Journal* 323, p. 714. DOI: 10.1086/165866)
- Kurtovic, Nicolás T. et al. (dic. 2018). «The Disk Substructures at High Angular Resolution Project (DSHARP). IV. Characterizing Substructures and Interactions in Disks around Multiple Star Systems». In: *The Astrophysical Journal Letters* 869.2, L44, p. L44. DOI: 10.3847/2041-8213/aaf746. arXiv: 1812.04536 [astro-ph.SR])
- Lin, D. N. C. e J. Papaloizou (mar. 1979). «Tidal torques on accretion discs in binary systems with extreme mass ratios.» In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 186, pp. 799–812. DOI: 10.1093/mnras/186.4.799)
- Lodato, Giuseppe (giu. 2008). «Classical disc physics». In: *New Astronomy Reviews* 52.2-5, pp. 21–41. DOI: 10.1016/j.newar.2008.04.002)

- Long, Feng et al. (set. 2019). «Compact Disks in a High-resolution ALMA Survey of Dust Structures in the Taurus Molecular Cloud». In: *The Astrophysical Journal* 882.1, 49, p. 49. DOI: 10.3847/1538-4357/ab2d2d. arXiv: 1906.10809 [astro-ph.SR])
- Lynden-Bell, D. e J. E. Pringle (set. 1974). «The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables.» In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 168, pp. 603–637. DOI: 10.1093/mnras/168.3.603)
- Manara, C. F., M. Ansdell et al. (2023). *Demographics of young stars and their protoplanetary disks: lessons learned on disk evolution and its connection to planet formation.* arXiv: 2203.09930 [astro-ph.SR])
- Manara, C. F., M. Tazzari et al. (ago. 2019). «Observational constraints on dust disk sizes in tidally truncated protoplanetary disks in multiple systems in the Taurus region». In: *Astronomy & Astrophysics* 628, A95, A95. DOI: 10.1051/0004-6361/201935964. arXiv: 1907.03846 [astro-ph.EP])
- Offner, S. S. R. et al. (lug. 2023). «The Origin and Evolution of Multiple Star Systems». In: Astronomical Society of the Pacific Conference Series 534. A cura di S. Inutsuka et al., p. 275. DOI: 10.48550/arXiv.2203.10066. arXiv: 2203.10066 [astro-ph.SR])
- Papaloizou, J. e J. E. Pringle (nov. 1977). «Tidal torques on accretion discs in close binary systems.» In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181, pp. 441–454. DOI: 10.1093/mnras/181.3.441)
- Pichardo, Barbara, Linda S. Sparke e Luis A. Aguilar (mag. 2005). «Circumstellar and circumbinary discs in eccentric stellar binaries». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 359.2, pp. 521–530. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2005.08905.x. arXiv: astro-ph/0501244 [astro-ph])
- Pringle, J. E. (gen. 1981). «Accretion discs in astrophysics». In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 19, pp. 137–162. DOI: 10.1146/annurev.aa.19.090181.001033)
- Rota, A. A. et al. (giu. 2022). «Observational constraints on gas disc sizes in the protoplanetary discs of multiple systems in the Taurus region». In: *Astronomy & Astrophysics* 662, A121, A121. DOI: 10.1051/0004-6361/202141035. arXiv: 2201.03588 [astro-ph.EP])

Shakura, N. I. e R. A. Sunyaev (gen. 1973). «Black holes in binary systems. Observational appearance.» In: *Astronomy & Astrophysics* 24, pp. 337–355)

Ringraziamenti

Vorrei sfruttare questa ultima parte della tesi per esprimere la mia gratitudine a tutte le persone che mi hanno supportato durante questo lavoro di tesi.

In primo luogo desidero ringraziare i miei supervisori Giovanni Rosotti ed Enrico Ragusa per la loro guida preziosa e per il loro sostegno costante: i loro consigli mi hanno fornito degli spunti preziosi necessari per il completamento di questo lavoro.

Desidero dedicare questo mio lavoro a tutti i miei amici con cui ho condiviso il percorso di studi e che hanno reso più divertenti i momenti passati in dipartimento. Voglio ringraziare di cuore Fragaini, che sebbene come sport preferito pratichi "Mettere in imbarazzo Filo in ogni possibile contesto sociale" è stato (ed è ancora adesso) un amico sincero, una spalla su cui piangere (perché siamo onesti potrebbe essere successo) ed una presenza positiva nella mia vita. Ringrazio i membri di "Falce & Marcello" per la compagnia che mi hanno fatto in questi anni (e per aver partecipato come passeggeri alla mia prima driftata in Matiz) e tutta la Risotto per i momenti di cazzeggio intenso giocando a GeoGuessr.

Ringrazio OnlyMassy per i nostri piotti montagnini che sincero la gasano non poco: secondo me in futuro una puntatina sopra i 4000 è un obiettivo più che possibile da raggiungere. Parlando di giri in the wild non posso non menzionare Pino, che sebbene negli ultimi anni non veda di frequente come un tempo, è sempre stato un compagno affidabile con cui smaltire gli sbatti dell'uni (forse lanciando sassi dalle montagne o forse no, sarà il lettore a giudicare...).

Ricordo con piacere (oddio se non avessi dovuto studiare e non avessi avuto male alle ginocchia con più piacere) le sessioni estive passate in montagna con mio cugino Fabio: sappi che anche se non vado più in bici da corsa come un tempo, morirò sulla sella piuttosto che farmi staccare. Ci tengo a rimarcare che non sono competitivo :-).

Ringrazio la gang dell'arrampicata per le serate scialle che abbiamo passato a Manga e per avermi sopportato in sti mesi di sbatti. L'unico problema di questa cumpa è quel giovane stallone italiano con la barba vorticosa che arriva da "Ba Ba Barona" conosciuto come Lucio Latin Lover che oltre ad essere enorme, mi ruba tutte le tipe.

Ringrazio tutto il popolo della BICF per le pausette durante lo studio. Sin-

cero le serate BICF la gasano non poco, dopo le 9 di sera in quel posto mi sento a casa.

Ringrazio i miei compagni delle superiori per i piazz in Piazza Leo durante le sessioni e un po' durante tutto l'anno: necessaria una reunion per vedere come stanno i *Raton*.

Un ringraziamento particolare va a Pierangela Lentini, la mia professoressa di fisica delle superiori: anche se mi "ha venduto un po' un accolto di corso di laurea", le sarò per sempre grato per l'impatto che la sua passione nell'insegnamento ha avuto su di me.

Infine ringrazio i miei genitori: solo grazie al loro sacrificio costante negli anni (anche prima che nascessi) ho avuto la possibilità di continuare a studiare. Sebbene gli anni di uni con il covid non sono stati facili e a volte abbiamo avuto delle incomprensioni, li ringrazio per il sostegno che mi hanno fornito in questi ultimi mesi e per l'empatia che hanno mostrato nei miei confronti.