千葉大原子核理論研究室　2024 年度卒研課題

重複のないよう下の中から各自テーマを選択し，卒研発表会 (2 月半ば–3 月前半に行う) にて成果発表を行うと共に，その成果をまとめて (LaTeX 使用) 担当教員に提出する。テーマの詳細は個別に担当教員の指導を受ける。

次年度に当研究室にて大学院に進学する予定の学生には，MC での研究の方向を考慮しながら卒研を進める方針である。今年度は，全員が該当し，かつ MC で希望する研究の方向にも大差がないので，0. として全員に共通の部分を述べ，それ以降に個別の部分 (ある程度 overlap がある) を紹介する。

なお，参考のため MC での研究テーマの候補を最後の page に挙げる。それぞれの MC でのテーマについては，卒研がある程度進行した段階で改めて相談する。

0. **核構造研究のための量子多体論の基礎の学習**　— 全員共通

   次の textbook により，核構造研究のための量子多体論の基礎を学習する。輪読形式で要点をまとめて紹介し，理解度を確認する。

   P. Ring & P. Schuck, “The Nuclear Many-Body Problem”, Chap. 5.1 – 5.4; Chap. 6; Chap. 7.1 - 7.3, 7.6; Chap. 8

   なお，数値計算についての記述は，手法は参考になるが具体例は現代的でない。

1. **Woods-Saxon potential による中性子 halo の研究**

   原子核の半径は凡そ $A^{1/3}$ に比例することが知られ，飽和性の根拠ともなっている。しかし，中性子 drip line 近傍では緩く束縛された中性子が “halo” 構造を持つことにより平均半径に異常な増大が見られることがある。これは $A \approx 10$ 程度の軽い核の実験により発見され，$A \lesssim 40$ 程度までの幾つかの核で確認されている。しかし，より重い核ではまだ実験が困難である。それ故，理論的に予言し実験に指針を与える意義が大きい。その研究への入り口として，次の Woods-Saxon potential により個々の核子の波動関数が得られると仮定して，どのような核種で halo 構造が現れるかを数値的に調べてみる。

$$U(r) = u_0\, f(r) + u_{\ell s}\, r_0^2 \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\, \boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{s} + U_{\mathrm{Coul}}(r)\, \frac{1-\tau}{2}\,; \quad f(r) = \frac{1}{1+\exp((r-R)/a)} \tag{1}$$

   (1) 式の parameter r_0, R, a, u_0, $u_{\ell s}$ には次の文献を参照するとよい。

   Ref: A. Bohr & B.R. Mottelson, “Nuclear Structure” vol. 1, p. 238.

   Coulomb potential $U_{\mathrm{Coul}}(r)$ は，半径 R の一様帯電球の与える scalar potential で近

似してよい。

(a) (1) 式の Woods-Saxon potential の下での 1 粒子状態を計算する。その際，特に緩く束縛された軌道について遠方での境界条件と収束性に注意を払う。

(b) 得られた波動関数から，それぞれの核の密度分布と平均 2 乗根 (rms) 半径 $\sqrt{\langle r^2\rangle}$ を計算する。

(c) これを多数の原子核について繰り返し，この model の範囲で中性子 drip line の同定を行いながらその近傍で halo が出現するか否かを調べ，どのような場合に halo が出現するかを考察する。

2. **Woods-Saxon potential + seniority pairing model における Sn 核の超流動状態の 1 体密度行列の分析**

Pairing の影響を考慮しない平均場近似 (*e.g.* Hartree-Fock) では多体波動関数が Slater 行列式により表され，1 体密度行列 $\varrho_{\alpha\beta} := \langle\Phi|a_\beta^\dagger a_\alpha|\Phi\rangle$ が idempotency $\varrho^2 = \varrho$ を満たす (Ring-Schuck 参照)。しかし，2 体相関が効くと idempotency が破れる。(Pairing tensor を使って ϱ を拡張しない限り) Pair correlation もその相関の例である。

他方，"magic number" では原子核波動関数は Slater 行列式でよく近似される。現在の核構造研究において，従来より知られていた magic number の消失や新たな magic number の出現は重要なテーマの 1 つであるが，その指標として "1 体密度行列 ϱ がどの程度 idempotent か" を調べるという方法を試したい。

Pair correlation による ϱ の idempotency の破れの例を見るため，次のような計算を行う。

(a) 調和振動子基底を用い，$^{100-132}$Sn の $N =$ even 核を対象として，(1) 式の Woods-Saxon potential の下での 1 粒子状態を対角化により求める。

(b) 残留相互作用として "seniority pairing" を用いる。即ち，Hamiltonian を次のように仮定する。

$$H = \sum_j \epsilon_j N_j - g\, S_+ S_- \,; \quad S_+ := \sum_j S_{j+}\,,\ S_- := (S_+)^\dagger \tag{2}$$

但し，j は $N = 50 - 82$ の軌道とし，ϵ_j は W-S potential により求めた 1 粒子 energy，$S_{j\pm}$ は j に対する quasi-spin operator である。以下の計算のため，^{116}Sn 近傍の even-odd mass difference から pairing gap を estimate し，これを再現するよう相互作用の強さ g を定める。

Ref: A. Bohr & B.R. Mottelson, "Nuclear Structure" vol. 1, p. 169;
https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2020/mass_1.mas20.txt

(c) (2) 式の Hamiltonian を用いて BCS 計算を行う。

(d) BCS 解に対して 1 体密度行列 ϱ を求め，idempotency の破れがどの程度か検討する。中性子数 N による変化，また pairing gap との相関にも一定の興味がある。

3. **有限温度 Woods-Saxon potential＋seniority pairing model を用いた Sn 核の超流動・常流動相転移の研究**

原子核の energy scale は $1\,\mathrm{MeV} \approx 10^{10}\,\mathrm{K}$ 程度であり，地上で励起状態まで含めた熱平衡状態が実現される状況は考え難く，我々が通常扱う原子核は $T=0$ にあると見なしてよい。しかし，恒星内部やその終焉時の爆発的環境下では原子核も有限温度の熱浴の下にあると考えてよい。他方，"核温度" という概念があり，孤立した原子核に対してもその励起状態の統計的性質を調べるために使われる。このように，有限温度での原子核の性質も重要な研究対象である。

多くの原子核は，$T=0$ では pairing のため超流動相にあると考えてよいが，T が高くなるにつれ常流動相への転移が起こるはずである。この相転移について，2. と同じく Sn 核を例に取って $N=50-82$ の軌道から成る系と見なし，(1), (2) 式に与えた Woods-Saxon potential＋seniority pairing model を使って調べてみよう。

(a) 2. と同様，(1) 式の Woods-Saxon potential の下での 1 粒子状態を求める。但し，計算方法は対角化でなくてもよい。

(b) 2. と同様に g の値を定める。

(c) 有限温度での BCS 方程式を導き，BCS 計算を行う。超流動・常流動相転移の order parameter を見極め，T の上昇により転移が起こる様子を追って，転移温度を定める。

Ref.: A.L. Goodman, Nucl. Phys. A 352, 30 (1981).

なお，平均場近似の下では明瞭な相転移が見られるが，実際の原子核では自由度が有限であるため量子効果が効き，相転移の効果は smear される。

4. **Elliott model における原子核の回転状態の配位の研究**

原子核の shell structure は，3 次元等方調和振動子 (h.o.) を第 0 近似として理解できる。この近似の下で，"major shell" は調和振動子の energy $(N_{\mathrm{osc}}+\frac{3}{2})\hbar\omega$ の N_{osc} 値

で指定できる。核子がenergy的に低い軌道から順に詰まるとして，(閉殻となる場合を別として) 最終核子の占有し得るmajor shellをvalence shellと定義する。低励起状態は概ねこのvalence shell内にある核子のみにより記述できる。
特定の (h.o. の定める) major shell内のHamiltonianを

$$H_{\mathrm{SU}(3)} = -\kappa_Q\, Q^{(2)} \cdot Q^{(2)} + \kappa_L\, L^{(1)} \cdot L^{(1)}\,; \\ Q^{(2)}_\mu := r^2\, Y^{(2)}_\mu(\hat{\boldsymbol{r}})\,, \quad L^{(1)}_\mu := (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})^{(1)}_\mu \tag{3}$$

とする。なお，$\kappa_Q > 0$ とし，κ_L は通常非負 (0でもよい) に取る。このHamiltonianは “SU(3) 対称性” を持っており[1]，そのenergy固有値は群論により解析的に求めることができる。角運動量 L の異なる一連の状態がSU(3) の同一表現に属し (量子数 (λ, μ) で表される)，“回転band” を構成すると解釈できる。
簡単のため，中性子のみ，かつ中性子数 $N = \text{even}$ の場合のみ考えることにしよう。1つのband (λ, μ) に属するenergy固有状態の波動関数は同一のintrinsic stateから得ることができ (それが “回転” したものと解釈できる) よく似ているが，角運動量 L にも幾らか依存し，これを物理的に “回転の効果” と解釈できる。個々の軌道の占有核子数 (の期待値) という観点から，特に基底状態 (energy固有状態) とintrinsic state (平均場解) の違いを確認する。

(a) ElliottのSU(3) modelについて学習する。基底状態energy，及び基底状態が属するintrinic stateの波動関数を把握する。
  Ref.: I. Talmi, “Simple Models of Complex Nuclei”, Chap. 30.
(b) $H_{\mathrm{SU}(3)}$ のenergy固有状態を計算するため，これを N 粒子系の基底に対して行列表示し対角化したい。そのcodeを自作するか，それを実行できるshell model codeを入手してその使い方を把握する。
(c) sd-shell ($0d_{5/2}$, $0d_{3/2}$, $1s_{1/2}$ 軌道から成る $N = 8 - 20$ のshell) で N を変えながら対角化を実行し，基底状態の波動関数を求める。
(d) $0d_{5/2}$, $0d_{3/2}$, $1s_{1/2}$ の軌道それぞれを占有する中性子数を，intrinsic stateと基底状態 (energy固有状態) で比較する。
(e) 同様の解析を pf-shell ($N = 20 - 40$ のshell) でも実行する。

全般的な注意: 1. 以外のテーマでは残留相互作用を扱うことになる。その場合，核子が

[1]正確には，$Q^{(2)}_\mu$ 演算子は座標に加え運動量 p を用いた項も含むが，$Q^{(2)}_\mu$ 演算子も $N_{\mathrm{osc}} = \text{一定}$ の部分空間に制限すればそれと同等になる。

fermion であるので反対称化に注意すべきである。生成・消滅演算子を用いた第 2 量子化の表示が有効。

参考 — MC での研究テーマの候補　(Ref. は，関連した当研究室の業績)

- **自己無撞着平均場計算による中質量核における中性子 halo の予言**
  Ref.: H. Nakada & K. Takayama, Phys. Rev. C 98, 011301(R) (2018).
- **自己無撞着平均場計算による Hg 核の荷電半径の研究**
  Ref.: H. Nakada, Phys. Rev. C 100, 044310 (2019);
  T. Day Goodacre *et al.*, Phys. Rev. Lett. 126, 032502 (2021).
- **自己無撞着平均場計算による $N = 90$ 近傍での原子核の形状変化の陽子数依存性に注目した研究**
- **Constrained HF/HFB 計算による Sr 核の形状の研究**
  Ref.: S. Miyahara & H. Nakada, Phys. Rev. C 98, 064318 (2018).
- **Constrained HF/HFB 計算による "球形" 核の deformability の研究**
  Ref.: Y. Omura *et al.*, Phys. Rev. C 108, 054308 (2023).
- **準粒子 RPA 及び HFB+角運動量射影を併用した $N =$ even Zr 核の第 1 励起状態の研究**
  Ref.: S. Miyahara & H. Nakada, Phys. Rev. C 98, 064318 (2018);
  Y. Omura *et al.*, Phys. Rev. C 108, 054308 (2023).
- **準粒子 RPA による Sn 核の単極巨大共鳴の中性子数依存性，及びそれを通じた核物質状態方程式の K_τ parameter の研究**
  Ref.: H. Nakada *et al.*, Nucl. Phys. A 828, 283 (2009);
  T. Inakura & H. Nakada, Phys. Rev. C 92, 064302 (2015).
- **1 体密度行列による magic number の新しい指標の提案**
  Ref.: H. Nakada & K. Sugiura, Prog. Theor. Exp. Phys. 2014, 033D02.
- **原子核エネルギー密度汎関数に対する回転エネルギーの補正**
  Ref.: H. Nakada, Phys. Scr. 98, 105007 (2023);
  K. Abe & H. Nakada, Phys. Rev. C 106, 054317 (2022);
  K. Abe & H. Nakada, J. Phys. G 51, 035101 (2024).
- **有限温度平均場理論による核準位密度の研究**
  Ref.: K. Esashika *et al.*, Phys. Rev. C 72, 044303 (2005);
  Y. Alhassid *et al.*, Phys. Rev. C 93, 044320 (2016);
  H. Nakada & k. Ishida, Phys. Rev. C 109, 044614 (2024).