Educación a Distancia CIMAT

Álgebra y Funciones

Curso de nivelación.
Universidad de El Salvador

FACTOREO
SEMANA 2

Azahel Nehemias Bonilla Argueta

FACTOREO DE POLINOMIOS

Casos de factoreo de un polinomio: factor común, factor común en grupos, trinomio cuadrado perfecto, cuatrinomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados

EXPRESIONES ALGEBRAICAS: **POLINOMIOS**

EXPRESIONES LITERALES

Son expresiones matemáticas en donde los números están simbolizados por letras.

Veamos una nueva forma de pensar con los números.

Todos sabemos que, si una habitación es de 9m por 12m, tendrá una superficie de 9m x 12m = 108m^2. Si la habitación fuera de 12m por 18m tendría una superficie de 12m x 18m = 216m^2.

¿Existe una forma de generalizar cuando nos referimos a la superficie de cualquier habitación?

Sí. Podemos decir que, para cualquier habitación rectangular, su superficie es el producto del largo por el ancho.

Es decir: superficie = largo x ancho O más sencillamente s = l x a.

Al utilizar **s**, l y **a**, no estamos hablando de ningún valor en particular; sino de cualquier valor que se quiera considerar.

Las letras s, l y a son llamadas **NÚMEROS O EXPRESIONES LITERALES**, pues ellas son letras que representan números. A estas letras también se las denomina **VARIABLES**; y esto es lógico porque **s**, l y **a** pueden tomar diferentes valores, es decir, pueden variar o cambiar.

Término: es una expresión algebraica con números y variables, conectadas sólo por las operaciones de multiplicación (como caso

Binomio: es una expresión algebraica de dos términos.

Ejemplos:

$8x^3 + 5xy$

Trinomio: es una expresión algebraica de tres términos.

Ejemplos:

$9xy + 10\,zx - ab$

Polinomio: En general, cualquier expresión algebraica con más de un término es un polinomio. Por lo tanto, binomios, trinomios y cuatrinomios son polinomios.

Veamos otra definición.

Coeficiente: El coeficiente de un monomio es el resultado de operar con los factores numéricos que en él aparecen.
Por ejemplo en el monomio 2a(-3)b el coeficiente es el resultado de multiplicar 2(-3) = -6
es decir que 2a(-3)b = -6 ab

FACTOREO O FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio significa transformarlo en productos en monomios o polinomios de menos grado.

Se parte de una expresión formada por sumas y/o restas de términos y se llega a una expresión equivalente

Por ejemplo:

Por ejemplo, de **$x^2 + 3x + 2$** se llega a **$\underbrace{(x+2).(x+1)}_{\text{Factores}}$**

> Factorizar es útil en muchos temas de matemática donde es necesario trabajar con multiplicaciones en vez de sumas o restas.

verificar si el factoreo fue bien realizado se multiplican los factores entre sí, debiéndose llegar a la expresión originaria.

Haciéndolo en el ejemplo dado:

$(x+2).(x+1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x +2$

(se empleó propiedad distributiva y se sumaron los términos lineales de x entre sí, o sea x + 2x = 3x)

CASOS DE FACTOREO

1- FACTOR COMÚN

Ejemplo 1: $8x + 4y + 16z$

En este caso sólo podremos sacar factor común entre los coeficientes, puesto que la parte literal es distinta en cada término (x, y ,z)

Se elige el máximo común divisor entre los 3 coeficientes

Divisores de 8 : 1, 2, **4**, 8

Divisores de 4 : 1,2,**4**

Divisores de 16 : 1,2, **4** , 8 , 16

Es decir, adopto el 4.

8 x + 4 y + 16 z = 4 . (--------------------------)

Luego dividimos los 3 coeficientes por 4 (8:4 =2 , 4:4 = 1 , 16:4 = 4) 8 x + 4 y + 16 z = **4 (2x + y + 4z)**
Quedando así el polinomio dado factorizado (un factor es 4 y el otro la expresión que está entre paréntesis)

Podemos verificar el resultado se aplicamos la propiedad distributiva al segundo miembro, ya que, si el ejercicio está hecho correctamente, volveríamos a la expresión dada.

<u>Ejemplo 2</u> : 12 x + 18 y – 24 z

En este caso, analizando los divisores de 12, 18 y 24 vemos que el número mayor que sea común a todos es 6. Entonces queda:

12 x + 18 y – 24 z = 6 (2 x + 3 y – 4 z)

Para estudiar los casos en que podemos sacar factor común entre las variables repasemos antes producto y división de potencias de igual base.

<u>Producto de potencias de igual base</u>:

Sean x^a y x^b , entonces: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Es decir si multiplicamos dos o más números iguales elevados a una determinada potencia, el resultado es un número de igual base a la de los factores elevado a una potencia que resulta de sumar las potencias de los factores.

Ejemplo:

$(x^4)(x^3)(x^2) = x^9$

la potencia 9 del resultado surge de sumar las potencias de los factores (4+3+2)

<u>Cociente de potencias de igual base</u>

Sean x^a y x^b entonces: $x^a / x^b = x^{a-b}$

Si dividimos dos o más números iguales elevados a una determinada potencia, el resultado es un número de igual base a la de los factores elevado a una potencia que resulta de restar las potencias de los factores.

Ejemplo: $x^6/ x^4 = x^2$ (la potencia del resultado surge de restar 6-4)

Retomamos el primer caso de factoreo

<u>Ejemplo 3:</u> $9x^4 - 6x^7 + 12x^5$

Sacamos primero el factor común entre los coeficientes comparando los divisores de los mismos y eligiendo el mayor que sea común a todos:

Divisores de 9: 1, 3, 9
Divisores de 6: 1, 2, 3, 6
Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6 , 12

Vemos que el máximo divisor común es 3

En este caso también podremos sacar factor común entre las variables (x^4 ,x^3 y x^6). Se toma el factor elevado al <u>menor</u> exponente (x^3)

Entonces:

$9x^4 - 6x^3 + 12x^5 = 3x^4$ (……..

Ahora se divide cada coeficiente del polinomio por 3 y cada expresión literal por x^3, recordando que para hacerlo debemos restar los exponentes entre sí, como vimos en los ejemplos de cociente de potencias de igual base:

$9x^4 - 6x^3 + 12x^5 = 3x^3(3x - 2 + 4x^2)$

Vemos que $x^3 : x^3 = x^0 = 1$ (todo número elevado a la 0 es igual a 1)

Se sugiere al alumno aplicar la propiedad distributiva al resultado para verificar el resultado.

Ejercicios propuestos

En cada caso factorizar y aplicar propiedad distributiva para verificar el resultado obtenido:

1) $14x^5 - 7x^3 + 28x^4 - 49x^6 =$

2) $15x^4 + 25x^5 - 100x^2 =$

2 – FACTOR COMÙN EN GRUPOS

En estos casos vemos, si bien no hay un factor común a todos los términos, se pueden agrupar algunos términos y sacar factor común entre los mismos.

Ejemplo: $3x^3 + 5x^6 - 6x^2 - 10x^5$

Sacamos factor común entre el primer y tercer término por un lado y el segundo y cuarto término por el otro

$3x^2(x-2) + 5x^5(x-2) =$

Ahora vemos que podemos sacar factor común (x-2) ya que aparece en ambos términos:

$= (x-2)(3x^2 + 5x^5)$

Ejercicios propuestos

En cada caso factorizar y aplicar propiedad distributiva para verificar el resultado obtenido:

1) $2\ x^4 + 5x^2$ `$+ 8\ x^3 + 15\ x =$

2) $5\ x^6 - 7x^3 + 15\ x^4 - 21\ x =$

3- TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Vamos a desarrollar un binomio elevado al cuadrado: $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b) =$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$= \underbrace{a . a}_{} + \underbrace{a . b + b . a}_{} + \underbrace{b . b}_{} =$$

$$= a^2 + 2.a.b + b^2$$

Del mismo modo, si desarrollamos

$(a - b)^2$ llegamos a que es igual a: $a^2 - 2.a.b + b^2$

Entonces:

$(a + b)^2 \quad = \quad a^2 + 2\ a\ b + b^2$

$(a - b)^2 \quad = \quad a^2 - 2.\ a.\ b + b^2$

cuadrado de un binomio　　　　trinomio cuadrado perfecto

La idea es reconocer un trinomio cuadrado perfecto y pasarlo a su forma de binomio elevado al cuadrado:

<u>Ejemplo 1</u>: $x^2 + 6x + 9$

Busco dos términos que sean el cuadrado de números, en este caso el primer término lo es de "x" y el tercero es 3 (x y 3 son las bases)

Luego verifico que el otro término sea el producto de las bases anteriores multiplicadas por dos (el doble producto)

$2 (x) (3) = 6x$

Entonces podemos expresar:

$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2}$

<u>Ejemplo 2</u>: $9x^2 - 30x + 25$

$9 = 3^2$ entonces $9x^2 = (3x)^2$ y $25 = 5^2$; bases: $(3x)$ y (5)

Por otro lado, verificamos que:

$2 (3x) (5) = 30x$

Por lo que : $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

<u>Ejercicios propuestos</u>

En cada caso factorizar

1) $4x^2 - 4x + 1 =$

2) $x^2 - 6x + 9 =$

3) $x^6 + 10x^3 + 25 =$

4- CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Del mismo modo que demostramos el desarrollo del cuadrado de un binomio, llegamos que el cubo de un binomio podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\, a^2\, b + 3\, a\, b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3\, a^2\, b + 3\, a\, b^2 - b^3$$

Ejemplo 1:

$$x^3 + 6\, x^2 + 12\, x + 8 \; = \qquad (x + 2)^3$$

x^3 $\quad$ 2^3

$3\, x^2\, 2$ $\quad$ $3\, x\, 2^2$

Ejemplo 2:

$$x^3 - 27 - 9\, x^2 + 27\, x$$

$$x^3 - 9\, x^2 + 27\, x - 27 = \qquad (x - 3)^3$$

x^3 $\quad$ $3x^2(-3)$ $\quad$ $3x\,(-3)^2$ $\quad$ $(-3)^3$

Ejercicios propuestos

En cada caso factorizar

1) $x^3 + 15\, x^2 + 75\, x + 125 =$

2) $64\, x^3 + 27 + 144\, x^2 + 108\, x =$

3) $x^3 - 12\, x^2 + 48\, x - 64 =$

5 – DIFERENCIA DE CUADRADOS

$P(x) = x^2 – a^2 = (x – a)(x + a)$

Ejemplos

1) $x^2 – 9 = (x-3) (x+3)$
2) $36 x^2 - 100 = (x^2)^2 - 5^2 = (x^2 - 5)(x^2 + 5)$
3) $36 x^2 – 100 = (6 x + 10)(6x – 10)$

Ejercicios propuestos

En cada caso factorizar

a) $x^2 - 81 =$
b) $25 x^2 – 4 =$
c) $1 – x^2 =$
d) $x^4 – 36 =$
e) $x^6 – 100 =$