ÁLGEBRA Y FUNCIONES

SEMANA 1: Potenciación

Azahel Nehemías Bonilla

Universidad de El Salvador Modalidad a Distancia
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

TEMA: LA POTENCIACIÓN Y SUS PROPIEDADES

La potenciación es una multiplicación de varios factores iguales, al igual que la multiplicación es una suma de varios sumandos iguales, (la potenciación se considera una multiplicación abreviada).

En la nomenclatura de la potenciación se diferencian dos partes, la base y el exponente, que se escribe en forma de superíndice. El exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma.

Ejemplo: potencias de 2:

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2x2$$

$$2^3 = 2x2x2$$

$$2^4 = 2x2x2x2$$

En general:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ veces}$$

Definición

La **potencia a^n** representa el producto que tiene ***n*** veces el número a. El número ***a*** se llama base y el número ***n*** se llama exponente

Normalmente, las potencias con base 10, por la cantidad que represente el exponente, esa será la cantidad de ceros en el resultado. El resto de la base, para sacar el resultado el número se multiplica por sí mismo cuantas veces indique el exponente.

Propiedades de la potenciación con igual base y exponente natural.

Definición:

1- sí *a* y *b* son números reales, *m* y *n* enteros positivos, las reglas para efectuar operaciones con potencias de igual base son:

a) **Potencia de un producto:** $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

Ejemplo:

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2\times 2)(2\times 2\times 2)}_{5\ veces} = a^{2+3} = 2^5$$

b) **Potencia de una división:** $\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$

Ejemplo:

$$3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^2$$

c) **Potencia de una potencia:** $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m\times n}}$

Ejemplo:

$$(\mathbf{2^2})^3 = (\mathbf{2^2}) \times (\mathbf{2^2}) \times (\mathbf{2^2}) = \underbrace{(2\times 2)(2\times 2)(2\times 2)}_{6\ veces} = \mathbf{2^{2\times 3}} = \mathbf{2^6}$$

2- Si *a* es un numero real positivo, entonces:

a) **Si n es par entonces:** $\boldsymbol{(-a)^n = \underbrace{(-a)\times(-a)\times \dots \times(-a)}_{cantidad\ par\ de\ números\ negativos} = a^n}$

Ejemplo:

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = (3)^4$$

b) **Si n es impar entonces:** $\boldsymbol{(-a)^n = \underbrace{(-a)\times(-a)\times \dots \times(-a)}_{cantidad\ impar\ de\ números\ negativos} = -a^n}$

Ejemplo:

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = (-3)^4$$

Ejercicios:

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia:

a) $\mathbf{3^6 \times 3^4}$
b) $\mathbf{5^7 \div 5^3}$
c) $\mathbf{\left(6^5\right)^2}$
d) $\mathbf{(-3)^2 \times (-3)^4}$
e) $\mathbf{((-3)^3)^2}$

Propiedades de la potenciación con igual exponente natural

Definición: si a y b son números reales y m es un entero positivo, las reglas para efectuar operaciones de potencias con igual exponente son:

a) **Potencia de Producto:** $\boldsymbol{a^m \times b^m = (a \times b)^m}$

Ejemplo:

$2^3 \times 3^3 = (2\times2\times2)(3\times3\times3) = (2\times3)(2\times3)(2\times3) = \underbrace{6\times6\times6}_{3\ veces} = 6^3$

$se\ cumeple\ 2^3 \times 3^3 = (2\times3)^3 = 6^3$

b) **Potencia de una División:** $\boldsymbol{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (si\ \ b \neq 0)}$

Ejemplo:

$\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = (3)^3$

c) **Si** $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\ son\ números\ reales, entonces}$:

$$\boldsymbol{a_1^m \times a_2^m \times \dots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n)^m}$$

Ejemplo:

$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2\times3\times5)^2 = 30^2$

Ejercicios:

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia:

f) $\boldsymbol{6^{10} \times 4^{10}}$
g) $\boldsymbol{12^5 \div 6^5}$
h) $\boldsymbol{(-3)^7 \times 6^7}$
i) $\boldsymbol{(-2)^5 \times (-7)^5}$
j) $\boldsymbol{4^2 \times 5^2 \times 5^2}$

Exponente cero, exponente negativo y exponente racional

Definición:

a) **El exponente cero: si *a* es un número real con *a≠0* entonces:**

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Ejemplo:

$6^5 \div 6^5$

Utilizando las propiedades de la división tenemos:

$6^5 \div 6^5 = 1$

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$6^5 \div 6^5 = 6^{5-5} = 6^0 = 1$

b) **El exponente negativo: si *a* es un número real con *a≠0* y *n* un numero entero positivo entonces:**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo:

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

Si eliminamos los elementos sombreados, tenemos:

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^4}$$

Si las propiedades de los exponentes se verifican en este caso, entonces:

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = 3^{3-7} = 3^{-4}$$

Por lo tanto $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$ representan el mismo número.

c) **Cualquier base elevada a un exponente racional (fracción), es igual a una raíz, donde el denominador es el índice de la raíz y el numerador es el exponente del radicando.**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$2^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{2^6}$$

Ejercicios:

Escribe las siguientes fracciones como una potencia con exponente negativo:

k) $\frac{1}{2^3}$

l) $\frac{1}{3}$

m) $\frac{1}{(-5)^5}$

Escribe las siguientes potencias con exponente negativo como fracciones:

n) 2^{-7}

o) $6^{\frac{4}{3}}$