QUANTPY

Traducción y Expansión de

Analysis, Geometry, and Modeling in Finance

Pierre Henry-Labordère

April 11, 2025

Contents

1 Introducción **1**

1.1 Opciones . . . 1

1.2 Inversión del Modelo para Obtener σ . . . 3

1.3 Métodos Numéricos para Encontrar la Raíz . . . 4

1.3.1 Método de Newton-Raphson . . . 4

1.3.2 Método de Bisección . . . 4

1.3.3 En resumen . . . 4

1.4 Elección del valor inicial de σ para la iteración . . . 5

1.4.1 Valores típicos del mercado . . . 5

1.4.2 Fórmulas empíricas para σ_0 . . . 5

1.4.3 Uso de la volatilidad histórica . . . 6

2 Breve repaso de matemáticas financieras **11**

2.0.1 Productos(contratos) derivados . . . 11

3 Apéndice **13**

3.1 Derivación Vega . . . 13

Chapter 1

Introducción

Con la gran cantidad de libros sobre finanzas matemáticas que se publican cada año, puede cuestionarse la utilidad de uno nuevo. Este es el primer libro que expone las aplicaciones de métodos analíticos y geométricos avanzados, utilizados recientemente en física y matemáticas, al campo financiero. Esto implica que se obtienen nuevos resultados en situaciones donde anteriormente solo se disponía de soluciones aproximadas y parciales.

Presentamos herramientas y métodos poderosos (como la geometría diferencial, la descomposición espectral y la supersimetría) que pueden aplicarse a problemas prácticos en finanzas matemáticas. Aunque estos métodos son ampliamente utilizados en diversas áreas de la física teórica y las matemáticas (por ejemplo, la geometría diferencial en la relatividad general y la descomposición espectral en la mecánica cuántica), siguen siendo poco conocidos en su aplicación a las finanzas y permiten obtener nuevos resultados de manera inmediata. Introducimos estos métodos a través del problema de la valoración de opciones.

1.1 Opciones

Una opción es un **contrato financiero** que otorga al titular el derecho, pero no la obligación, de celebrar un contrato a un precio fijo en el futuro. El ejemplo más sencillo es una opción de compra europea (European call option), que concede el derecho, pero no la obligación, de comprar un activo a un precio fijo, denominado precio de ejercicio (**strike**), en una fecha futura determinada, llamada fecha de vencimiento (**maturity date**). Desde el trabajo de Black y Scholes [65] y Merton [32] en 1973, se ha establecido un marco probabilístico general para valorar estas opciones. - En la descripción del modelo Black-Scholes-Merton **(BSM)**, las variables financieras involucradas en la definición de una opción (ya no son deterministas) son **variables aleatorias** y su dinámica sigue ecuaciones diferenciales estocásticas **SDEs**; en otras palabras: "Debido a la incertidumbre inherente a los mercados, matemáticamente un activo financiero S_t, en el tiempo t, se modela como **una variable aleatoria con una función de distribución de probabilidad.** Por ejemplo, en el modelo original de Black-Scholes-Merton **(BSM)**, se asume que los activos negociados siguen procesos de difusión log-normal con volatilidades constantes (**esa constancia es el punto de partida para nuevos modelos**) **La volatilidad es la desviación es-**

tándar de una densidad de probabilidad en finanzas matemáticas. El precio de la opción satisface una ecuación diferencial parcial (**PDE**) de tipo parabólico, denominada ecuación de valoración de Kolmogórov-Black-Scholes, que depende de las ecuaciones diferenciales estocásticas introducidas para modelar el mercado.

El modelo de mercado depende de parámetros observables o no observables, como la volatilidad de cada activo. Estos parámetros se eligen (se calibran) con el fin de reproducir el precio de las opciones líquidas cotizadas en el mercado (tal como en las European Call Options). Si las opciones líquidas no están disponibles, se pueden usar los datos históricos para los movimientos de los activos.

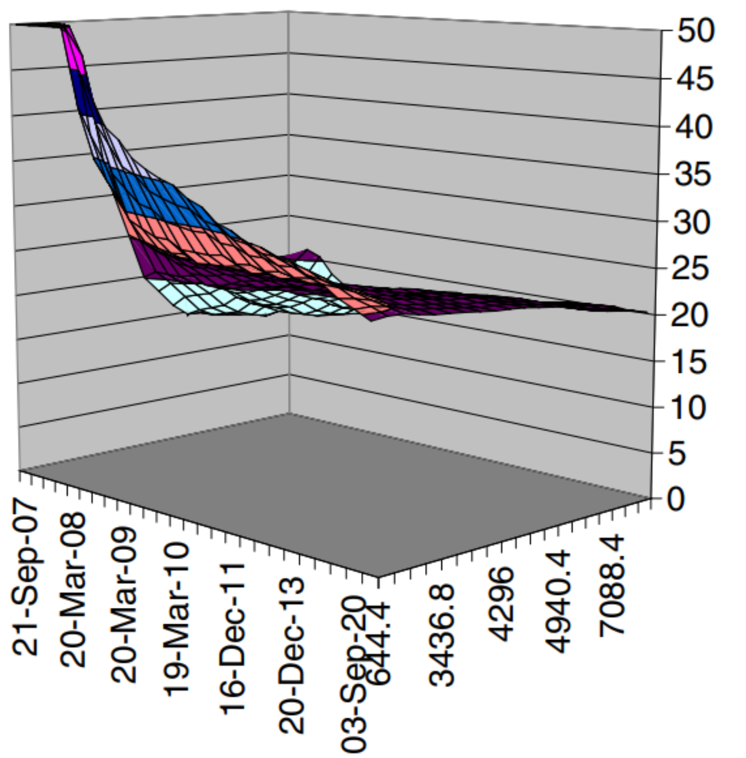

Figure 1.1: Volatilidad implícita (multiplicada por 100) para la $EuroStoxx50$, $03-09-2007$. Los dos ejes representan las fechas de ejercicio (strikes) y las fechas de vencimiento (maturity dates)

En la anterior imagen podemos ver la volatilidad implícita que presenta el libro. A continuación mostraré los pasos que he de seguir para hacer el cálculo de esa gráfica usando datos simulados por IA de los precios de las opciones.

Cálculo de la Volatilidad Implícita en Opciones usando el Modelo de Black-Scholes-Merton

La volatilidad implícita de una opción es la volatilidad que el mercado asigna al activo subyacente, dada la prima de la opción observada en el mercado. Para calcularla, debemos invertir el modelo de **Black-Scholes-Merton (BSM)**, ya que normalmente este modelo se usa para calcular el precio de una opción dada la volatilidad. Ahora, queremos hacer lo inverso: dada la prima de la opción, obtener la volatilidad.

El precio de una opción de compra (Call) según el modelo de **BSM** está dado por:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Mientras que para una opción de venta (Put) es:

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Parámetros:

- C y P: precios de la opción Call y Put, respectivamente.
- S_0: precio del activo subyacente.
- K: precio de ejercicio (strike price).
- T: tiempo hasta el vencimiento en años.
- r: tasa libre de riesgo.
- σ: volatilidad del activo subyacente (la incógnita).
- $N(x)$: función de distribución acumulada de una normal estándar.

1.2 Inversión del Modelo para Obtener σ

El problema es que no podemos despejar σ algebraicamente en la ecuación de Black-Scholes. Por lo tanto, debemos encontrar σ mediante un **método numérico**.

La ecuación que queremos resolver es:

$$f(\sigma) = C_{\text{BSM}}(\sigma) - C_{\text{mercado}} = 0 \tag{1.1}$$

Donde:

- $C_{\text{BSM}}(\sigma)$ es el precio de la opción calculado con el modelo de Black-Scholes para una volatilidad dada.
- C_{mercado} es el precio real de la opción obtenido del mercado.

El objetivo es encontrar un valor de σ que haga que esta ecuación se acerque a 0.

1.3 Métodos Numéricos para Encontrar la Raíz

Dado que la ecuación es no lineal, usamos métodos iterativos como: Método de Newton-Raphson o Método de Bisección

1.3.1 Método de Newton-Raphson

Este método se basa en la fórmula iterativa:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)} \tag{1.2}$$

Donde $f'(\sigma_n)$ es la derivada de $f(\sigma)$ respecto a σ, conocida como **Vega**:

$$\text{Vega} = S_0\sqrt{T}\frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.3}$$

NOTA: La derivación de **Vega**, junto con un repaso rápido de $N(d_i)$, se puede leer en 3.1

1.3.2 Método de Bisección

Si Newton-Raphson no converge adecuadamente, podemos usar bisección:

- Se elige un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.
- Se calcula el punto medio $m = (a + b)/2$.
- Se reemplaza a o b por m, según el signo de $f(m)$.
- Se repite hasta que la solución sea suficientemente precisa.

1.3.3 En resumen

Para calcular la volatilidad implícita, debemos encontrar el valor de σ que hace que el precio de la opción calculado con el modelo de Black-Scholes-Merton coincida con el precio de mercado:

$$C_{\text{BSM}}(S_0, K, T, r, \sigma) = C_{\text{market}}$$

donde el precio de la opción según Black-Scholes-Merton está dado por:

$$C_{\text{BSM}} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

con los parámetros:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Sin embargo, en este caso σ es desconocido, lo que significa que d_1 y d_2 tampoco pueden calcularse directamente. Para resolver esto, necesitamos **invertir el modelo**, es decir:

1. Para un valor dado de σ, calculamos el precio teórico de la opción usando la ecuación de Black-Scholes.

2. Comparamos con el precio de mercado C_{market}.

3. Ajustamos σ iterativamente hasta minimizar la diferencia entre C_{BSM} y C_{market}.

Este problema se resuelve numéricamente mediante métodos como:

- **Método de Newton-Raphson**, que es rápido pero requiere el cálculo de derivadas. - **Método de bisección**, que es más estable pero más lento.

En conclusión, los valores de d_1 y d_2 se re-calculan en cada iteración del algoritmo hasta encontrar la volatilidad implícita correcta.

1.4 Elección del valor inicial de σ para la iteración

Dado que la volatilidad implícita (σ) no tiene una solución analítica directa, debemos resolverla iterativamente. La elección del valor inicial σ_0 es crucial para la rapidez y estabilidad del método. A continuación, se presentan algunos criterios para seleccionarlo.

1.4.1 Valores típicos del mercado

En la práctica, la volatilidad implícita de las opciones financieras suele estar en un rango razonable:

- Acciones: σ suele estar entre: 10% y 50% anual.
- Índices bursátiles: σ suele estar entre 5% y 40% anual.
- Divisas: σ suele estar entre 5% y 30% anual.

Un buen valor inicial es 20%-30%, lo que equivale a $\sigma_0 = 0.2$ o $\sigma_0 = 0.3$.

1.4.2 Fórmulas empíricas para σ_0

Existen aproximaciones rápidas para estimar un buen punto de partida. Una de las más usadas es:

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}} \times \frac{C_{\text{market}}}{S_0} \tag{1.4}$$

donde:

- C_{market} es el precio de mercado de la opción.
- S_0 es el precio actual del activo subyacente.
- T es el tiempo hasta el vencimiento en años.

Esta fórmula proviene de una expansión de Black-Scholes para opciones "at-the-money" y suele ser un buen punto de partida.

1.4.3 Uso de la volatilidad histórica

Si disponemos de datos históricos de precios del activo subyacente, podemos calcular su volatilidad histórica y usarla como un punto de partida para σ_0. La volatilidad histórica se puede estimar a partir del retorno logarítmico de la acción:

$$\sigma_{\text{hist}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_i - \bar{r})^2} \tag{1.5}$$

con

$$r_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right). \tag{1.6}$$

En resumen

La elección del valor inicial depende del método usado:

- **Newton-Raphson** → Usar fórmulas empíricas o valores típicos (20%).
- **Bisección** → Definir un rango amplio (0.01 a 2.0).
- **Volatilidad histórica** → Útil si hay datos previos.

Explicación del Archivo simulado con IA

Para hacer este ejercicio de reproducción de la gráfica de Volatilidad Implícita presentada por el Autor, hemos simulado mediante ChatGPT un DataSet que tiene la estructura que se muestra en la figura 1.2.

Date: Fecha en la que se registró la cotización de la opción.

Spot: Precio del EuroStoxx50 en la fecha dada.

Strike: Precio de ejercicio de la opción, es decir, el precio al cual el comprador de la opción puede ejercer el derecho de compra o venta.

Maturity: Tiempo hasta el vencimiento de la opción en años.

Rate: Tasa de interés libre de riesgo en la fecha del contrato.

Option Price: Precio de la opción en el mercado en la fecha dada.

Esta estructura es bastante común en los datasets de opciones que se pueden encontrar en internet, aunque en muchos casos se incluyen columnas adicionales como el tipo de opción (call o put) y la volatilidad implícita si está disponible.

Date	Spot	Strike	Maturity	Rate	OptionPrice
2007-01-31	3000	2400	0.1397260274	0.03896792983	606.7573471
2007-01-31	3000	2700	0.8547945205	0.01760405492	301.1272476
2007-01-31	3000	3000	0.3452054795	0.01152642472	4.470686334
2007-01-31	3000	3300	0.9479452055	0.04720169167	10.56787609
2007-01-31	3000	3600	0.6054794521	0.01968813202	2.858215004
2007-02-28	3100.169416	2480.135533	0.6821917808	0.02482472415	621.4673811
2007-02-28	3100.169416	2790.152474	0.09589041096	0.0175686554	314.7686768

Figure 1.2: Estructura del DataSet simulado usando ChatGPT para las opciones de EuroStoxx50

Paso a Paso

- Cargar el archivo de datos en Python usando `pandas`.
- **Cálculo de volatilidad histórica**
  - Obtener la serie de precios del activo subyacente.
  - Calcular los rendimientos logarítmicos:
  $$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$
  - Determinar la desviación estándar histórica:
  $$\sigma_{hist} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \bar{r})^2}$$
- **Implementación del modelo de Black-Scholes-Merton (BSM)**
  - Definir la ecuación de BSM para el precio de una opción de compra:
  $$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$
  donde
  $$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$
- **Cálculo de la volatilidad implícita mediante el método de bisección**
  - Definir una función objetivo que minimice la diferencia entre el precio teórico y el precio de mercado:
  $$f(\sigma) = C_{\text{BSM}}(\sigma) - C_{\text{mercado}}$$
  - Implementar el método de bisección para encontrar σ tal que $f(\sigma) \approx 0$.

- **Construcción de la matriz de volatilidad implícita**
  - Para cada combinación de fecha y strike, calcular la volatilidad implícita usando los pasos anteriores.
- **Generación de la gráfica 3D**
  - Usar `matplotlib` para representar en 3D la superficie de volatilidad implícita.
  - Los ejes deben corresponder a fechas de ejercicio (*strike*), fechas de vencimiento (*maturity*) y volatilidad implícita.
- Análisis y comparación con la gráfica presentada en el libro

Pseudocódigo para la Simulación de Volatilidad Implícita

Algorithm 1 Cálculo de la volatilidad implícita mediante el método de bisección

Importar librerías: numpy, pandas, matplotlib, mpl_toolkits, datetime
Simular datos del EuroStoxx50 :
  Usar pandas para bajar y leer datos del EuroStoxx50, con yahoofinance
  Usar IA (ChatGPT) para simular un archivo de datos compatibles con el anterior paso
  Explorar y examinar el DataSet simulado
Cálculo de la volatilidad histórica. Se usará como σ_a en la bisección
  Calcular los rendimientos logarítmicos $r_t = \ln(\frac{Spot_t}{Spot_{t-1}})$
  Calcular la media de los rendimientos $\bar{r}$ y contar el número de datos N
  Calcular la volatilidad histórica inicial σ_{hist}
function BLACK-SCHOLES(Spot, Strike, T, r, sigma, tipo)
  Calcular d_1 y d_2 según la fórmula de Black-Scholes
  Retornar el precio de la opción call o put
end function
function BISECCIÓN_VOLATILIDAD(Precio_Mercado, Spot, Strike, T, r, tipo)
  Definir intervalo de búsqueda para σ
  while Error mayor que tolerancia **do**
    Evaluar precio de opción con volatilidad media del intervalo
    Actualizar intervalo según el signo del error
  end while
  Retornar σ encontrada
end function
  For each in: opción en dataset
  Obtener datos de Spot, Strike, T, Precio_Mercado
  Aplicar el método de bisección para encontrar σ
  Guardar resultado en una nueva columna
Graficar la curva de volatilidad implícita en 2D
Generar gráfico 3D con Strike, T y Volatilidad

En la siguiente figura se muestran los resultados de este primer cálculo de la volatilidad implícita usando datos simulados con IA.

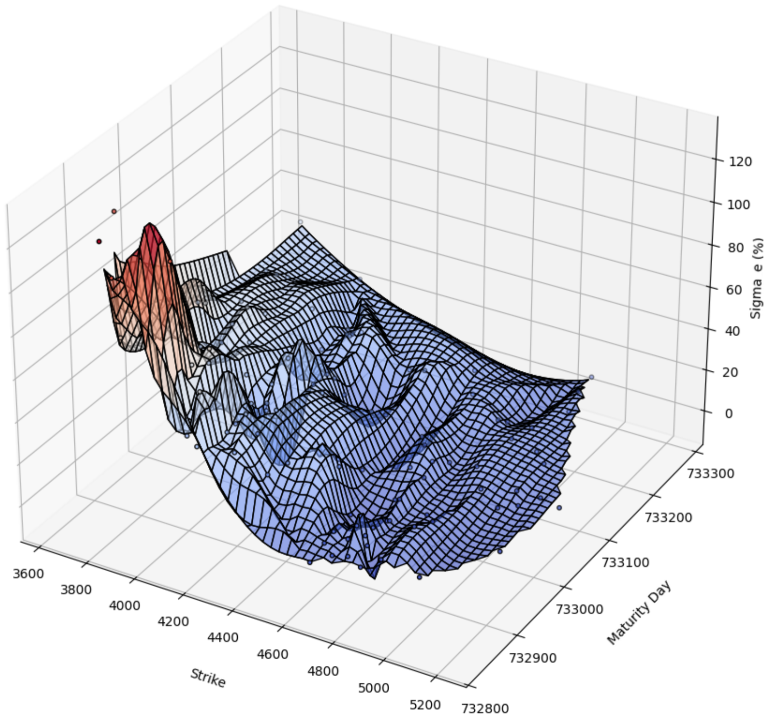

Figure 1.3: Volatilidad implícita (multiplicada por 100) calculada usando datos simulados por IA de de la $EuroStoxx50$, $03-09-2007$. Los dos ejes representan las fechas de ejercicio (strikes) y las fechas de vencimiento (maturity dates)

-

Chapter 2

Breve repaso de matemáticas financieras

The enormous usefulness of Mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it.

La enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso y que no tiene una explicación racional.

— E. Wigner

Resumen

Las finanzas están dominadas por métodos estocásticos. En particular, se asume que los activos negociados siguen procesos de difusión de **Itô** en tiempo continuo. Las nociones (conceptos) de *martingala (local)*, *proceso de difusión de* ***Itô*** y *medida equivalente* aparecen de forma natural. En este capítulo el autor revisa y motiva las ideas y conceptos principales de finanzas matemáticas.

2.0.1 Productos(contratos) derivados

En lugar de dar una definición general de un producto derivado, el autor presenta algunos ejemplos clásicos. El primero es una *opción de compra europea* sobre un único activo, que es un contrato que le otorga al titular el derecho (u oportunidad), **pero no la obligación**, de comprar un activo a un precio determinado, **denominado precio de ejercicio** en una fecha futura fija, **denominadas vencimiento**.

Supongamos que se adquiere una opción de compra con un **strike K (precio de ejercicio o precio que se paga al vencimiento)** por un valore $C_0 = 110\$$ y un vencimiento de 5años, **T**= 5. El precio inicial del activo, denominado **Spot** (S_0), es de 100$, si en 5 años el precio S_T **(precio del activo en el momento el instante T)** de la acción es de $S_T = 150\$$, la opción puede ejercerse y el comprador es libre de adquirir la acción por el precio de $K = 110\$$, ganando en ese movimiento (Profit, P o).

Resumen

- K precio

Chapter 3

Apéndice

En este apéndice se presentan las deducciones matemáticas realizadas a lo largo del libro.

3.1 Derivación Vega

La derivada del precio de una opción con respecto a la volatilidad implícita se denomina **Vega**, y está dada por:

$$\text{Vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Ke^{-rT}\frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} \tag{3.1}$$

donde:

- $N(x)$ es la función de distribución acumulada de la normal estándar:

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt \tag{3.2}$$

- $\phi(x)$ es la función de densidad de la normal estándar (también llamada función gaussiana):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{3.3}$$

- $N(x)$ representa la probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar tome un valor menor o igual a x.

Algunas propiedades útiles de $N(x)$:

- $N(-\infty) = 0$, $N(0) = 0.5$, $N(\infty) = 1$.
- $N(-x) = 1 - N(x)$.
- La derivada de $N(x)$ es $\frac{dN}{dx} = \phi(x)$.

Aproximación rápida para cálculos:

$$N(x) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{3.4}$$

donde la función error está definida como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \tag{3.5}$$

Continuando con la derivación de Vega:

$$\text{Vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Ke^{-rT}\frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} \tag{3.6}$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial N}{\partial \sigma} = \phi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2/2}. \tag{3.7}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} = \phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}. \tag{3.8}$$

Sabemos que:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \to \sigma\sqrt{T}\, d_1 - \frac{\sigma^2 T}{2} = \ln(S/K) + rT. \tag{3.9}$$

al derivar con respecto a σ en ambos lados,

$$\sqrt{T}\, d_1 + \sqrt{T}\, \frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\sigma - \sigma T = 0. \tag{3.10}$$

de donde

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \sqrt{T} - \frac{d_1}{\sigma}. \tag{3.11}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T} = -\frac{d_1}{\sigma}. \tag{3.12}$$

Sustituyendo en la expresión 3.6 de Vega

$$\text{Vega} = S\phi_1\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-rT}\phi_2\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \to S\phi(d_1)\left[\sqrt{T} - \frac{d_1}{\sigma}\right] + Ke^{-rT}\phi(d_2)\frac{d_1}{\sigma} \tag{3.13}$$

Si suponemos que $\phi_1 = \phi_2$, entonces $\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} = \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma}$, por lo que la expresión de Vega se simplifica a:

$$\text{Vega} = \phi_1\left[S\sqrt{T} + \frac{d_1}{\sigma}(Ke^{-rT} - S)\right] \tag{3.14}$$

Si además $Ke^{-rT} = S = 0$, se obtiene la **Vega clásica**:

$$\text{Vega} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial C_{BSM}}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.15}$$

Conclusión: La igualdad se cumple si σ es pequeño y se asume que:

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} = \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} \tag{3.16}$$

Además, si $Ke^{-rT} - S = 0$, se obtiene la expresión más simple para Vega. Aunque ambas suposiciones son restrictivas, permiten un primer modelo simplificado.