

DL

ABC DEV

Algèbre de Boole

Dossier travaux pratiques

<u>Activité</u>	1
<u>Module</u>	1
<u>Séquence</u>	2

INTRODUCTION A LA LOGIQUE

Variable logique

Un ordinateur ne manipule que des données binaires, on appelle donc variable logique une donnée binaire, c'est-à-dire une donnée ayant deux états possibles: 0 ou 1.

Une information binaire peut être représentée par une proposition qui ne peut être que VRAIE ou FAUSSE.

Elle peut être simple ("il fait plus de 25°C") ou complexe ("il fait plus de 25°C ET il ne pleut pas")

Fonction logique

On appelle fonction logique une entité acceptant plusieurs valeurs logiques en entrée et dont la sortie peut avoir deux états possibles: 0 ou 1.

Ces fonctions peuvent être des composants électroniques admettant des signaux électriques en entrée, et restituent un signal en sortie. Les signaux électroniques peuvent prendre une valeur de l'ordre de 5 Volts (c'est l'ordre de grandeur général) que l'on représente par un 1, ou 0 V que l'on représente par un 0.

Les fonctions logiques de bases sont appelées aussi **portes logiques**. Il s'agit de fonctions ayant une ou deux entrées et une sortie:

- La fonction OU (en anglais *OR*) positionne sa sortie à 1 si l'une ou l'autre de ses entrées est à 1

Exemple:

Un four doit s'arrêter si la température voulue est atteinte ou si le temps prévu est écoulé. Les propositions logiques sont:

- $P1$: " la température est supérieure à T_0 "
- $P2$: " le temps est supérieur à t_0 "
- $P3$: " le four doit s'arrêter "

On peut écrire :

$P3$ est vraie si $P1$ est vraie OU si $P2$ est vraie.

Donc on a

$$P3 = P1 \text{ OU } P2.$$

La fonction s'appelle **somme logique** ou **fonction OU**.

On remarque que si $P1$ et $P2$ sont toutes deux vraies, $P3$ est vraie également. On parle de OU inclusif

- La fonction ET (en anglais *AND*) positionne sa sortie à 1 si ses deux entrées sont à 1
Examinons la phrase : " j'irai me promener s'il fait plus de 25°C et s'il ne pleut pas. ".

Soient les propositions :

- $P1$: "j'irai me promener "
- $P2$: " il fait plus de 25°C "
- $P3$: " il ne pleut pas ".

Pour que la proposition $P1$ soit vraie, il faut que les deux propositions $P2$ et $P3$ soient vraies simultanément.

On peut donc écrire :

$P1$ est vraie si $P2$ est vraie ET $P3$ est vraie.

Ou encore :

$$P1 = P2 \text{ ET } P3.$$

Cette fonction s'appelle **produit logique** ou **fonction ET**.

- La fonction **NON** (appelée aussi *inverseur*) positionne sa sortie à 1 si son entrée est à 0, et vice-versa

Soient les propositions

P1 : " j'irai me promener "

P2 : " il pleut "

Le système doit déterminer quand "je sortirai"; la logique du problème est : " j'irai me promener s'il ne pleut pas ". On peut donc dire que

$P1 = \text{NON } P2$

Cette fonction est appelée **négation** ou fonction **NON**.

On définit également les fonctions:

- **OU EXCLUSIF** (en anglais *XOR*) positionne sa sortie à 1 si l'une ou l'autre de ses entrées est à 1 mais pas les deux simultanément
- **NON OU** (couramment appelée *NOR*) et **NON ET** (*NAND*) comme étant la composition respective d'un NON avec un OU et un ET.

• Fonctions complexes

Il arrive que l'on ait besoin de la conjonction de plusieurs de ces fonctions :

Etudions le cas : " j'irai me promener s'il fait plus de 25°C et qu'il ne pleut pas, ou si ma copine le veut. "

Soient les propositions :

- P1 : " j'irai me promener "
- P2 : " il fait plus de 25°C "
- P3 : " il pleut "
- P4 : " ma copine veut se promener "

Le problème se décrit par :

P1 est vraie si P2 est vraie ET P3 est fausse, ou si P4 est vraie.

Soit :

$P1 = (P2 \text{ et NON } P3) \text{ ou } P4$

$P1 = (p2. /P3) + P4$

$P1 = (P2 \text{ ET NON } P3) \text{ OU } P4.$

On remarque vite le besoin d'un formalisme mathématique pour décrire, traiter, et résoudre des problèmes logiques

L'algèbre de Boole

Boole est un mathématicien anglais du milieu du 19^{ème} siècle qui conçut, un outil mathématique composé de symboles et de règles, applicable aux propositions logiques.

Expression algébrique

Le but de l'algèbre de Boole est de décrire le traitement de signaux sous forme d'expression algébrique. Les signaux (propositions) sont représentés par des noms de variables. Les fonctions logiques sont représentées par des opérateurs:

- la fonction **OU** est représentée par un *plus*:
- la fonction **ET** est représentée par un *point*:
- la fonction **NON** est représentée par une *barre* au-dessus de la variable inversée:
Elle est parfois représentée par un / devant la variable inversée
- la fonction **OU EXCLUSIF** est représentée par un *plus encerclé*:

Une expression algébrique sera donc une expression du type:

Table de vérité

Une table de vérité est un tableau permettant de décrire toutes les possibilités de sorties en fonction des entrées. On place donc les variables d'entrées dans les colonnes de gauche en les faisant varier de telle façon à couvrir l'ensemble des possibilités. La colonne (ou les colonnes si la fonction a plusieurs sorties) de droite décrit la sortie.

Voici les tables de vérités des fonctions logiques:

Nom de la porte	Entrée		Sortie
	A	B	S
OU	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1
ET	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1
NON OU	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	0
NON ET	0	0	1

	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0
NON	0		1
	1		0

Il est possible à partir de la table de vérité d'une fonction d'écrire l'expression algébrique de celle-ci.

Soit la table de vérité suivante:

Entrée		Sortie
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$S = A \cdot \bar{B}$$

La sortie vaut 1 lorsque A vaut 1 et B vaut 0, l'expression algébrique de cette fonction est donc:

$$S = A \cdot \bar{B}$$

Prenons maintenant la table de vérité suivante:

Entrée			Sortie
A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0

0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$S = B./A./C + A.B./C$$

$$S = /C(B./A + B.A) = /C.B(A+/A) = /CB$$

La sortie vaut 1 lorsque

- A vaut 0
- B vaut 1
- C vaut 0

ou

- A vaut 1
- B vaut 1
- C vaut 0

L'expression algébrique de cette fonction est donc:

Constituons la table de vérité du cas: " j'irai me promener s'il fait plus de 25°C et qu'il ne pleut pas, ou si ma copine le veut" avec les propositions :

P1 : " j'irai me promener "

P2 : " il fait plus de 25°C "

P3 : " il pleut "

P4 : " ma copine veut se promener "

Ent rée			Sortie
P2	P3	P4	P1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$P1 = \neg p2 \wedge \neg p3 \wedge p4 + \neg p2 \wedge p3 \wedge p4 + p2 \wedge \neg p3 \wedge \neg p4 + p2 \wedge p3 \wedge p4 + p2 \wedge \neg p3 \wedge p4$$

$$P1 = \neg p2 \wedge p3 + p2$$

Priorité des opérateurs logiques:

Par ordre de priorité décroissante: NOT, ET, OU

Des parenthèses changent l'ordre des priorités

Les lois de composition

Les lois de composition sont des règles logiques qui permettent de simplifier l'écriture des expressions algébriques.

Associativité

$(A.B).C$ est équivalent à $A.(B.C)$

$(A+B)+C$ est équivalent à $A+(B+C)$

Absorption

$A.(A+B)$ est équivalent à A

$A+A.B$ est équivalent à A

Commutativité

$A.B$ est équivalent à $B.A$

$A+B$ est équivalent à $B+A$

Distributivité

$A+(B.C)$ est équivalent à $(A+B).(A+C)$

$A.(B+C)$ est équivalent à $A.B+A.C$

Idempotence

$A.A$ est équivalent à A

$A + A$ est équivalent à A

Identité

$1.A$ est équivalent à A

$0+A$ est équivalent à A

Inversion

$A./A$ est équivalent à 0

$A+/A$ est équivalent à 1

Nullité

$0.A$ est équivalent à 0

$1+A$ est équivalent à 1

Théorème de De Morgan

- $\overline{A.B}$ est équivalent à $\overline{A}+\overline{B}$
 $\overline{A+B}$ est équivalent à $\overline{A}. \overline{B}$

Utilisation de l'algèbre binaire

L'algèbre binaire peut se substituer à l'utilisation des propositions logiques, et on l'emploie chaque fois que la complexité des systèmes logiques l'exige.

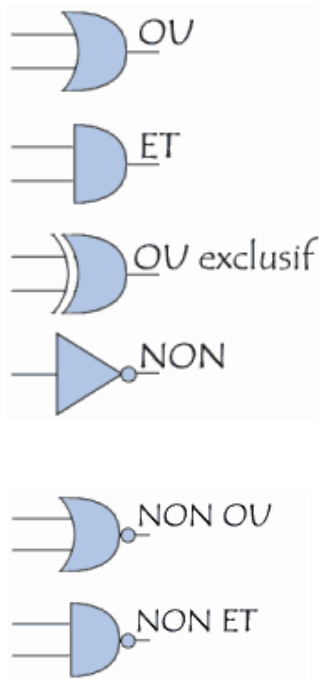
La transposition des propositions logiques à l'algèbre binaire est la suivante :

Propositions logiques	Algèbre binaire
FAUX	0
VRAI	1
Proposition (P)	Variable (A)
Négation (NON P)	Complément ($\neg A$)
Somme (P1 OU P2)	Somme (A+B)
Produit (P1 ET P2)	Produit (A.B)

Les propriétés et les théorèmes de l'algèbre binaire permettront une approche plus simple et systématique des problèmes logiques complexes.

Circuits logiques

La représentation conventionnelle des portes logiques est la suivante:



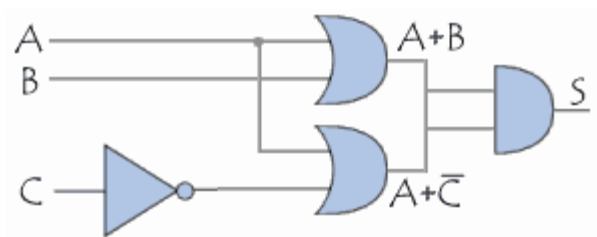
Réalisation de circuits logiques

On appelle circuit logique (ou *circuit combinatoire*) un ensemble de portes logiques reliées entre elles pour répondre à une expression algébrique. Il s'agit donc d'aller transcrire en schéma électrique (à l'aide des représentations ci-dessus) l'expression algébrique que l'on a simplifiée grâce aux lois de composition.

Par exemple l'expression algébrique

$$(A+B).(A+\bar{C})$$

sera schématisée comme suit:



















Exercices

Enoncé 1

Ces 3 formes représentent 3 variables binaires.



Donnez la valeur du résultat dans les différents contextes suivants

Entrées	Expressions logiques	Résultats
 	 OU 	Vrai
	 ET 	Vrai
	NON  OU 	Vrai
	 ET NON 	faux
	 OU  ET 	vrai
	 OU ) ET 	Faux

Enoncé 2

La lumière d'un véhicule s'éclaire si une des deux portes avant est ouverte (capteurs pd et pg à coupure de circuit) ou si l'interrupteur du plafonnier est appuyé.

Présentez:

Les propositions

La table de vérité

L'expression booléenne simplifiée

Table de vérité

P1 : le plafonnier allumé

Pd : porte droite ouverte

Pg : porte gauche ouverte

Pl : interrupteur allumé

Entrée			Sortie
pd	pg	pl	P1
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

$$P1 = Pd./pg./pl + /pd.pg./pl + /pd./pg.pl + pd.pg./pl + pd./pg.pl + /pd.pg.pl + pd.pg.pl$$

$$P1 = pl(/pd./pg + pd.pg + /pd.pg + pd./pg)$$

Enoncé 3

Soient 3 couleurs:

Cb = couleur de base

Cad1 = 1^{ère} couleur additionnelle

Cad2 = 2^{ème} couleur additionnelle

Elles sont mélangées pour produire une couleur

Cr = couleur résultat

Pour chacune des affirmations suivantes, vous présenterez:

La table de vérité à partir des propositions données

L'expression booléenne simplifiée. Pour cet énoncé, vous disposez des fonctions logiques ET (.), OU (+) et NON ($\overline{\text{variable}}$)

Le résultat attendu est Cr = couleur très claire.

Cr est de type "très claire" si les 2 couleurs additionnelles sont blanches. Le blanc étant exclu de cette catégorie, la couleur de base ne doit pas être blanche

Les propositions sont:

P1 : Cr = très claire

P2 : Cb = blanc

P3 : Cad1 = blanc

$$P1 = \overline{P2} \cdot P3 \cdot P4$$

P4 : Cad2 = blanc

P2 Cb	P3 Cad1	P4 Cad2	P1 Cr
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

1	1	0	0
1	1	1	0

Le résultat attendu est Cr = couleur claire.

Cr est claire si une seule des 2 couleurs additionnelles est blanche.

Les propositions sont:

P1 : Cr = claire

P2 : Cb = blanc

P3 : Cad1 = blanc

P4 : Cad2 = blanc

$$P1 = \overline{P2} \cdot P3 \cdot \overline{P4} + \overline{P2} \cdot P4 \cdot \overline{P3}$$

$$P1 = \overline{P2} \cdot (P3 \cdot \overline{P4} + P4 \cdot \overline{P3})$$

P2	P3	P4	P1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Le résultat attendu est Cr = mauve.

Cr est mauve si Cb est bleue et si l'une des 2 couleurs additionnelles est rouge et l'autre blanche. Lors de cette opération de mélange, les couleurs additionnelles ne peuvent être que rouges ou blanches

Les propositions sont:

Propositions:

$$P1 = P2 \cdot P3 \cdot \overline{P4} + P2 \cdot P4 \cdot \overline{P3}$$

$$P1 = P2 \cdot (P3 \cdot \overline{P4} + P4 \cdot \overline{P3})$$

P1 : Cr = mauve

P2 : Cb = bleu

P3 : Cad1 = blanc

P4 : Cad2 = blanc

P2 Cb	P3 Cad1	P4 Cad2	P1 Cr
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Le résultat attendu est Cr = violet.

Cr est violet si Cb est bleue et si les 2 couleurs additionnelles sont rouges ou bleues, mais pas toutes les 2 bleues. Lors de cette opération de mélange, les couleurs additionnelles ne peuvent être que rouges ou bleues

Propositions:

$$P1 = P2 \cdot P3 \cdot \overline{P4} + P2 \cdot P4 \cdot \overline{P3} + P2 \cdot \overline{P4} \cdot \overline{P3}$$

$$P1 = P2 (P3 \cdot \overline{P4} + P4 \cdot \overline{P3} + \overline{P3} \cdot \overline{P4})$$

P1 : Cr = violet

$$P1 = P2 (\overline{P3} (P4 + \overline{P4}) + P3 \cdot \overline{P4})$$

P2 : Cb = bleu

$$P1 = P2 (\overline{P3} + P3 \cdot \overline{P4})$$

P3 : Cad1 = bleu

$$P1 = P2 ((\overline{P3} + P3) \times (\overline{P3} + \overline{P4}))$$

P4 : Cad2 = bleu

$$P1 = P2 (\overline{P3} + \overline{P4})$$

P2 Cb	P3 Cad1	P4 Cad2	P1 Cr
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Enoncé 4

A l'aide de l'algèbre de Boole, simplifiez les équations suivantes:

$$R1 = A \cdot B \bar{A} \bar{B} =$$

$$R2 = A + AC + AB =$$

$$R3 = AB \bar{A} \bar{B} =$$

$$R4 = \bar{A} \bar{B} (\bar{A} \bar{B}) =$$

$$R5 = \bar{A} \bar{C} \bar{A} \bar{C} =$$

A l'aide du théorème de De Morgan et de l'algèbre de Boole, simplifiez l'équation suivante:

$$R6 = \overline{\overline{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D} \bar{E} \bar{F}} =$$

Enoncé 5

Complétez le tableau suivant en déterminant le résultat de chaque expression logique en fonction des valeurs des variables:

Expression logique	Valeurs des variables	Résultat VRAI / FAUX
A>2 OU B<3	A=2 B=3	FAUX
	A=3 B=5	VRAI
	A=3 B=1	VRAI
A>2 OU B<3 et C≠1	A=3 B=1 C=1	VRAI
	A=1 B=1 C=2	VRAI
	A=3 B=1 C=2	VRAI
(A>2 OU B<3) ET C≠1	A=3 B=1 C=1	FAUX
	A=3 B=3 C=2	VRAI
	A=2 B=5 C=2	FAUX
A>2 OU B<3 ET C≠1 OU A<1	A=0 B=2 C=1	VRAI
	A=1 B=2 C=2	VRAI
	A=3 B=2 C=2	VRAI
(A>2 OU B<3) ET C≠1 OU A<1	A=0 B=2 C=2	VRAI
	A=1 B=5 C=2	FAUX
	A=3 B=5 C=2	VRAI
A>2 OU B<3 OU C≠1 ET A<1	A=0 B=5 C=2	VRAI
	A=0 B=2 C=1	VRAI
	A=3 B=2 C=2	VRAI