

张天阳\* University of Chinese Academy of Science March 22, 2018

<sup>\*</sup>学号201728017419004

## Contents

Ι	开闭集与有界集						
1	度量空间	4					
2	2.1.1 球邻域         2.1.2 ε-邻域         2.1.3 邻域         2.2 开闭区间定义:         2.2.1 开区间:         2.2.2 闭区间:         2.3 内点与有界         2.3.1 内点:         2.3.2 内部:         2.3.3 有界:	$\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ \end{array}$					
3	3.1.3 $M = [0,1)$	CH					
II 1	聚点、导集与闭包         1.1 集合M的聚点	6					
2	1.4 命题: 度量空间 $(X,d)$ , $M \subset X$ 中 $\overline{M}$ 一定是闭集。         1.5 定理: 度量空间 $(X,d)$ , $M$ 是闭集 $\Leftrightarrow \overline{M} = M$ 可列集、可数集、稠密与可分	6					
		7 7					

3.1 $(R,d)$ 7 3.2 $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 可分 7 3.3 $(l_{p_1}, d_{p_2})$ 不可分 7 3.4 $(l[a, b], d(f, g))$ 可分 8  III 拓扑空间、连续与序列 8  1 拓扑空间文义: 8 1.2 拓扑空间 $(X, \tau)$ . 与拓扑空间中的开集 8  2 连续性与连续函数定义 8 2.1 连续性 2.2 定理:连续与原像的拉开集等价 8  3 序列 3.1 定义: 序列收敛 9 3.1 定义: 序列收敛 9 3.2 直径 $\delta(M)$ 9 3.3 有界 9 3.4 性质:若 $x_n$ 收敛,则其有界,且极限唯一 9 3.5 性质 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ 10 3.6 柯西序列 10 3.7 完备空间 10 3.8 完备性例子: 10 3.8.1 $(X = (0, 1), d =   )$ 7、是完备空间 10 3.8.2 $((p_n, d_n), \hat{c}$ 名 10 3.8.3 $(aa, b, d)$ 5.8 3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a, b), d$ 7元6备 11 3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列 11	3	例:	可分性判别	7
32 $(l_n, d_p_1)$ 可分 33 $(l_n, d_{p_2})$ 不可分 34 $(l_n, b_l, d(f, g))$ 可分 1 拓扑空间、连续与序列 1 拓扑空间、连续与序列 1 拓扑空间、连续与序列 1 拓扑空间、 $(X, \tau)$ , 与拓扑空间中的开集 2 连续性与连续函数定义 2 定理: 连续与原像的拉开集等价 8 2 2 定理: 连续与原像的拉开集等价 8 5 7 序列 3 1 定义: 序列收敛 3 2 直径 $\delta(M)$ 3 3 有界 3 1 定义: 序列收敛 3 2 直径 $\delta(M)$ 3 3 有界 3 5 性版 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ 3 6 何西序列 3 6 何西序列 3 8 元备性例子: 3 8 1 $(X = (0, 1), d =   )$ 不是完备空间 3 8 2 $(a_0, b_0, d)$ 完备 3 8 3 $(a_0, b_0, d)$ 完备 3 8 3 $(a_0, b_0, d)$ 完备 3 8 3 $(a_0, b_0, d)$ 完备 1 3 3 8 2 $(a_0, b_0, d)$ 完备 1 3 3 8 2 $(a_0, b_0, d)$ 完备 1 5 2 $(a_0, b_0, d)$ 元完 $(a_0, b_0, d)$ 元 $(a_0, b_0, d)$ 元 $(a_0, b_0, d)$ $(a_0, $				7
3.4 $(I[a,b],d(f,g))$ 可分  1 拓扑空间、连续与序列  8		3.2		
III 拓扑空间、连续与序列  1 拓扑空间、连续与序列  1 拓扑空间(X, τ), 与拓扑空间中的开集  2 连续性与连续函数定义  2.1 连续性  2.2 定理: 连续与原像的拉开集等价  8 2.2 定理: 连续与原像的拉开集等价  8 8 2.3 序列  3.1 定义: 序列收敛  3.2 直径δ(M)  3.3 有界  3.4 性质: 若x,收敛,则其有界,且极限唯一  3.5 性质x,→ x,yn→ y, d(xn,yn)→ d(x,y)  3.6 种西序列  3.7 完备空间  3.8 紀 (X = (0,1), d =   ),不是完备空间  3.8.1 (X = (0,1), d =   ),不是完备空间  3.8.2 (l <sub>n</sub> , d <sub>n</sub> )完备  3.8.3 (ca,b,d)完备  3.8.4 有理数空间Q不完备  3.8.3 (ca,b,d)完备  3.8.4 有理数空间Q不完备  3.8.5 P(a,b), d不完备  10  3.8.5 P(a,b), d不完备  11  3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列  11  IV 序列的应用  12  定理: M ⊂ X,x ∈ M ⇔ ∃{x <sub>n</sub> } ⊂ M 使得x <sub>n</sub> → x  1.1 定理: M 是闭集,当且仅当:若引x <sub>n</sub> } ⊂ M 使得x <sub>n</sub> → x  1.1 定理: M是闭集,当且仅当:若引x <sub>n</sub> } ⊂ M 使得x <sub>n</sub> → x  1.1 定理: M是闭集,当且仅当:若引x <sub>n</sub> } ⊂ M 使得x <sub>n</sub> → x  1.1 定理: 如果大定可同是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集  1.4 定理: 连续性用序列定义  2 完备化		3.3	$(l_{p_1}, d_{p_2})$ 不可分 $\dots$	7
1 拓扑空间定义:     1.1 集类 $\tau$ 1.2 拓扑空间 $(X,\tau)$ , 与拓扑空间中的开集     2 连续性与连续函数定义     2.1 连续性     2.2 定理: 连续与原像的拉开集等价     3 序列     3.1 定义: 序列收敛     3.2 直径 $\delta(M)$ 3.3 有界     3.3 有界     3.4 性质: 若 $x_n$ 收敛, 则其有界,且极限唯一     3.5 性质 $x_n \to x, y_n \to y, d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ 3.6 柯西序列     3.7 完备空间     3.8.1 $(X = (0, 1), d =   )$ , 不是完备空间     3.8.2 $(t_n, d_p)$ , 万全备     10 3.8.1 $(X = (0, 1), d =   )$ , 不是完备空间     3.8.2 $(t_n, d_p)$ , 万全备     10 3.8.3 $(ax, b, d)$ 完备     10 3.8.4 有理数空间Q不完备     3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备     3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列     11  IV 序列的应用     12  定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 12     13 定理: 如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集		3.4	(l[a,b],d(f,g))可分	7
1 拓扑空间定义:     1.1 集类 $\tau$ 1.2 拓扑空间 $(X,\tau)$ , 与拓扑空间中的开集     2 连续性与连续函数定义     2.1 连续性     2.2 定理: 连续与原像的拉开集等价     3 序列     3.1 定义: 序列收敛     3.2 直径 $\delta(M)$ 3.3 有界     3.3 有界     3.4 性质: 若 $x_n$ 收敛, 则其有界,且极限唯一     3.5 性质 $x_n \to x, y_n \to y, d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ 3.6 柯西序列     3.7 完备空间     3.8.1 $(X = (0, 1), d =   )$ , 不是完备空间     3.8.2 $(t_n, d_p)$ , 万全备     10 3.8.1 $(X = (0, 1), d =   )$ , 不是完备空间     3.8.2 $(t_n, d_p)$ , 万全备     10 3.8.3 $(ax, b, d)$ 完备     10 3.8.4 有理数空间Q不完备     3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备     3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列     11  IV 序列的应用     12  定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11     12 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 12     13 定理: 如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集				
1.1 集类 $_{T}$	II	I 招	<b>后扑空间、连续与序列</b>	8
1.2 拓扑空间 $(X,\tau)$ , 与拓扑空间中的开集 8  2 连续性与连续函数定义 8 2.1 连续性 8 2.2 定理: 连续与原像的拉开集等价 8  3 序列 9 3.1 定义: 序列收敛 9 3.2 直径 $\delta(M)$ 9 3.3 有界 9 3.4 性质: 若 $x_n$ 收敛, 则其有界,且极限唯一 9 3.5 性质 $x_n \to x, y_n \to y, d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ 9 3.6 柯西序列 10 3.7 完备空间 10 3.8 完备性例子 10 3.8.1 $(X = (0, 1), d =   )$ ,不是完备空间 10 3.8.2 $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 完备 10 3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备 10 3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a, b)$ , $d$ 不完备 11 3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列 11  IV 序列的应用 12  IV 序列的应用 12  I文理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M, x_n \to x y_n x_n x_n x_n x_n x_n x_n x_n x_n x_n x$	1	拓扑	空间定义:	8
2 连续性与连续函数定义 2.1 连续性 8 2.2 定理:连续与原像的拉开集等价 8 2.2 定理:连续与原像的拉开集等价 8 3 序列 6 2.3 直径 $\delta(M)$ 9 3.1 定义:序列收敛 9 3.2 直径 $\delta(M)$ 9 3.3 有界 9 3.4 性质: $\exists x_n$ 收敛,则其有界,且极限唯一 10 3.5 性质 $x_n  oldsymbol{\sim} x, y_n  oldsymbol{\rightarrow} y, d(x_n, y_n)  oldsymbol{\rightarrow} d(x, y)$ 10 3.6 种西序列 10 3.7 完备空间 10 3.8 完备性例子: 10 3.8.1 $(X = (0, 1), d =   )$ ,不是完备空间 10 3.8.2 $(I_{0_1}, d_{0_1})$ 完备 10 3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备 10 3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备 10 3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备 11 3.9 定理:任意收敛序列都是柯西序列 11 定理: $M \subset X, x \in M \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M, x_n \to x_m\} x \in M$ 12 子空间 $(X, d)$ 下 $M \in X, (M, d)$ 是子空间 12 子空间 $(X, d)$ 下 $M \in X, (M, d)$ 是子空间 12 元 2 2 完备化 12 元 2 2 2 完备化 12 元 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2				
2.1 连续性		1.2	拓扑空间 $(X, au)$ ,与拓扑空间中的开集	8
2.1 连续性	2	连续	·性与连续函数完义	Q
2.2 定理:连续与原像的拉开集等价 8 8 7 9 9 1 1 1 2 2 完备化 12 元素化 $M$	_			
3 序列 3.1 定义: 序列收敛 3.2 直径 $\delta(M)$				
3.1 定义: 序列收敛		2.2		
3.2 直径 $\delta(M)$	3			9
3.3 有界				
3.4 性质: $\overline{A}x_n$ 收敛,则其有界,且极限唯一		-		
3.5 性质 $x_n  o x, y_n  o y, \ d(x_n, y_n)  o d(x, y)$ 10 3.6 柯西序列 10 3.7 完备空间 10 3.8 完备性例子: 10 3.8.1 $(X = (0,1), d =   )$ ,不是完备空间 10 3.8.2 $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 完备 10 3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备 10 3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备 11 3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列 11  IV 序列的应用 12  I文理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n  o x$ 12 1.1 定理: $M$ 是闭集,当且仅当:若式 $x_n\} \subset M, x_n  o x$ 则 $x \in M$ 12 1.2 子空间 $(X, d)$ 下 $M \in X, (M, d)$ 是子空间 12 1.3 定理: 如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集 12 1.4 定理: 连续性用序列定义 12				
3.6 柯西序列		-		
3.7 完备空间 10 3.8 完备性例子: 10 3.8.1 $(X = (0,1), d =   )$ ,不是完备空间 10 3.8.2 $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 完备 10 3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备 10 3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备 11 3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列 11  IV 序列的应用 12  1 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 12 1.1 定理: $M \not\in M$ 是闭集,当且仅当: 若 $\exists \{x_n\} \subset M, x_n \to x$ 则 $x \in M$ 12 1.2 子空间 $(X, d)$ 下 $M \in X, (M, d)$ 是子空间 12 1.3 定理: 如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集 12 1.4 定理: 连续性用序列定义 12				
3.8 完备性例子: 10 3.8.1 $(X = (0,1), d =   )$ ,不是完备空间 10 3.8.2 $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 完备 10 3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备 10 3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备 11 3.9 定理: 任意收敛序列都是柯西序列 11  IV 序列的应用 12  1 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 12 1.1 定理: $M$ 是闭集,当且仅当: 若 $\exists \{x_n\} \subset M$ , $x_n \to x$ 则 $x \in M$ 12 1.2 子空间 $(X, d)$ 下 $M \in X, (M, d)$ 是子空间 1.3 定理: 如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集 12 1.4 定理: 连续性用序列定义 12				
3.8.1 $(X = (0,1), d =   )$ ,不是完备空间 10 3.8.2 $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 完备 10 3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备 10 3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备 10 3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a, b), d$ 不完备 11 3.9 定理:任意收敛序列都是柯西序列 11 <b>区理</b> : $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 11 定理: $M$ 是闭集,当且仅当:若司 $\{x_n\} \subset M, x_n \to x$ 则 $x \in M$ 12 子空间 $(X, d)$ 下 $M \in X, (M, d)$ 是子空间 1.3 定理:如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集 1.4 定理:连续性用序列定义 12 完备化			×=	
$3.8.2  (l_{p_1}, d_{p_1})$ 完备		3.0		
3.8.3 $(ca, b, d)$ 完备				
3.8.4 有理数空间Q不完备 10 3.8.5 $P(a,b), d$ 不完备 11 3.9 定理:任意收敛序列都是柯西序列 11 <b>IV 序列的应用</b> 12 <b>IV 序列的应用</b> 12 1 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 12 1.1 定理: $M$ 是闭集,当且仅当:若 $\exists \{x_n\} \subset M, x_n \to x$ 则 $x \in M$ 12 1.2 子空间 $(X,d)$ 下 $M \in X, (M,d)$ 是子空间 12 1.3 定理:如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集 12 1.4 定理:连续性用序列定义 12 2 完备化				
3.8.5 $P(a,b), d$ 不完备				
3.9 定理:任意收敛序列都是柯西序列				
IV 序列的应用		3.9		
1 定理: $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 1.1 定理: $M$ 是闭集,当且仅当: 若ョ $\{x_n\} \subset M, x_n \to x$ 则 $x \in M$				
1.1 定理: $M$ 是闭集,当且仅当: 若习 $\{x_n\} \subset M$ , $x_n \to x$ 则 $x \in M$	IJ	7 序	列的应用	<b>12</b>
1.1 定理: $M$ 是闭集,当且仅当: 若习 $\{x_n\} \subset M$ , $x_n \to x$ 则 $x \in M$	1	定理	$! \cdot M \subset X \ x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$	19
<ul> <li>1.2 子空间(X,d)下M∈X,(M,d)是子空间</li></ul>	-	11	定理: $M$ 是闭集 当目仅当: $若 \exists \{x_n\} \subset M$ $x_n \to x \square \mid x \in M$	
1.4 定理: 连续性用序列定义 12 2 完备化 12		1.2	子空间 $(X,d)$ 下 $M \in X$ , $(M,d)$ 是子空间	12
1.4 定理: 连续性用序列定义 12 2 完备化 12		1.3	定理:如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集	12
2 完备化       12         2.1 定理:				
2.1 定理:	2	完备	-4 <i>t</i>	19
	_	2.1	· 定理:	13
V 巴拿赫不动点定理 14	$\mathbf{V}$	円.:	拿赫不动点定理	14

## University of Chinese Academy of Science

	<b>压缩映射</b> 1.1 定理: 压缩映射是连续的	
2	不动点定理:	14
	<b>不动点定理的应用:</b> 3.1 牛顿法解方程	

## Part I

# 开闭集与有界集

- 1 度量空间
- 2 开闭集
- 2.1 邻域定义:
- 2.1.1 球邻域
  - 1. 开球(r邻域):  $B(x_0, r) = \{x \in X, d(x, x_0) < r\}$
  - 2. 闭球:  $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X, d(x, x_0) \le r\}$
  - 3. 球面:  $S(x_0, r) = \{x \in X, d(x, x_0) = r\}$
- **2.1.2** ε-邻域

$$B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) = \{ \boldsymbol{x} \in X, \ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \varepsilon \}$$

#### 2.1.3 邻域

 $\exists B(x_0, \varepsilon) \subset M$ ,则称M为 $x_0$ 的一个邻域。

- 2.2 开闭区间定义:
- 2.2.1 开区间:

对于 $M \subset X$ 是开区间,需要满足 $\forall x \in M, \exists B(x, \varepsilon) \subset M$ 。

#### 2.2.2 闭区间:

对于 $M \subset X$ 是开区间,需要 $M^c = X/M$ 满足 $M^c$ 是开集(开区间)。

- 2.3 内点与有界
- 2.3.1 内点:

 $x_0 \in M$  是M的内点,需要满足: $\exists \varepsilon > 0$  使得 $B(x_0, \varepsilon) \in M$ 。

#### 2.3.2 内部:

 $M^c \neq M$ 的内部,其是所有M的内点的集合。

## 2.3.3 有界:

$$\exists r < \infty, st \ M \subset B(\boldsymbol{x}_0, r), \ \boldsymbol{x}_0 \in X$$

则称M有界。

#### 2.4 定理:

如果一个集合是开集,其在任意度量下也是开集;闭集同理。 一个序列在d度量下逼近点 $x_0$ 那么其在d'度量下也逼近点 $x_0$ 

## 3 例子:

- **3.1** 分辨开闭集合,在(X = R, d(x, y) = |x y|)的情况下
- 3.1.1 M = Q,有理数集
  - 由于任意有理数的任意小ε邻域都有无理数存在,所以其不是开集。
  - $Q^c$ 是无理数集,由于无理数的任意小 $\varepsilon$ 邻域都有有理数存在,所以其不是开集。由于 $Q^c$ 不是开集,所以Q不是闭集。

结论: Q为非开非闭。当然无理数集也是非开非闭。

#### 3.1.2 $M = \phi$ ,空集

- 由于开集是满足 $\forall x \in M$ ,∃  $B(x,\varepsilon) \subset M$ ,而空集中没有点,所以对于其中任意点自然满足。
- 由于空集的补集在这里是全集也就是*R*而*R*满足开集的性质,所以空集也是闭集。

结论: 空集既开又闭。同样全集既开又闭。

## **3.1.3** M = [0, 1)

- 显然M不是开集,因为0点不存在 $\varepsilon$ 邻域使其包含于M内。
- 又因为其补集中点1也是不存在 $\varepsilon$ 邻域使其包含于 $M^c$ 内。所以也不是闭集。

结论该集合非开非闭。此外(0,1)开集, [2,3]闭集。

- **3.2** 分辨开闭集合,在(X = [0,1), d(x,y) = |x-y|)的情况下
- **3.2.1** M = [0, 1)
  - 由于 $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in X, d(x,x_0) < \varepsilon\}$ ,所以所有在集合X内的点的 $\varepsilon$ 邻域都包含于X,所以其为开。
  - 由于空集为开, 所以其为闭集合。所以既开又闭。

## **3.2.2** $M = (0, \frac{1}{2}]$

- 因为点表不存在ε邻域使其包含于M内,所以其不是开集。
- 但是其补集(1/2,1)是开集, 所以其是闭集。

## Part II

# 导集、可列集、稠密集与可分

## 1 聚点、导集与闭包

## 1.1 集合M的聚点

 $\exists x_0$ 为聚点,则需要满足: $\forall B(x_0,\varepsilon), \exists y \in B(x_0,\varepsilon) \cap M$  (想象一下直观上就是 $x_0$ 紧贴着M,连在一起,但不一定属于M可能是M的边界之类)

## 1.2 集合M的导集(聚集)M'

关于集合M的所有聚点的集合叫做其导集。

## 1.3 集合M的闭包 $\overline{M}$

 $\overline{M} = M \cup M'$ 

1.4 命题: 度量空间(X,d),  $M \subset X$ 中 $\overline{M}$ 一定是闭集。

证明:

 $\overline{M} = M \cup M' \Rightarrow (\overline{M})^c = M^c \cap (M')^c$   $\forall \boldsymbol{x} \in (\overline{M})^c, \Rightarrow \boldsymbol{x} \in M^c, \ \boldsymbol{x} \in (M')^c \text{ beacuse: } \boldsymbol{x} \in (M')^c, \ \exists B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap M = \phi \Rightarrow \exists \ B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset M^c$ 又因为:  $\exists B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset M^c$ 所以 $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \varepsilon), \ \boldsymbol{y} \notin M$ 所以 $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \in (M')^c$ 即:  $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \in M^c \cap (M')^c \Rightarrow \overline{M}^c$ 是开集,所以 $\overline{M}$ 是闭集。

1.5 定理: 度量空间(X,d), M是闭集 $\Leftrightarrow \overline{M} = M$ 

证明:

- 必要性:由命题1.4显然。
- 充分性:由于 $\overline{M} = M \cup M'$ 只要证: $\overline{M} \subset M$ 即证 $M' \subset M$ ,即证 $M^c \subset (M')^c$ 。由于M闭所以 $M^c$ 开集,所以 $\forall x \in M^c$ , $\exists B(x, \varepsilon) \subset M^c$ 所以x不属于M'即 $x \in (M')^c$

## 2 可列集、可数集、稠密与可分

## 2.1 可列集

可以与自然数一一对应,  $X \to N$ 

## 2.2 可数集

若集合X是可列集或者有限集(集合内元素个数有限)则称其为可数集。

## 2.3 可数集的例子, 与不可数集的例子

- 可数集: 自然数集、偶数集、{0,1,0.12317,√3}。
- 不可数集: (0,1)、R、无理数

## 2.4 命题:可列个可列集的并一定是可列集, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$ , A是可列集

证明: 沿着对角线数, 可以与自然数一一对应。

## 2.5 例:有理数集是可列集

证明:有理数可以表述为 $\frac{q}{p};\ q,p\in N$ ,所以将其写作(q,p)的形式去数。 当q=1时,p为可列个; 当q=1时,p为可列个,…,当q=n时,p为可列个,… 可列个可列集的并集是可列集。

## 2.6 X的稠密子集

(X,d)内, 当 $\overline{M} = X$ 则称M是X中的稠密子集。

#### 2.7 X的可分性

若(X,d)内存在稠密子集则称其为可分的。

## 3 例:可分性判别

#### **3.1** (R, d)

因为任意无理数的任意小邻域都有有理数,所以 $Q' = Q^c$ 所以 $\overline{Q} = Q^c \cup Q = R$ ,所以Q是稠密集。所以可分。

## **3.2** $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 可分

$$l_{p_1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...), x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$
$$d_{p_1}(x, y) = ||x - y||_p$$

## **3.3** $(l_{p_1}, d_{p_2})$ 不可分

$$l_{p_1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...), x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$
$$d_{p_2}(x, y) = \|x - y\|_{\infty}$$

## **3.4** (l[a,b],d(f,g))可分

$$l[a,b] = \{f, [a,b] \to R, continous\}$$
$$d(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

因为多项式函数是稠密的其可以逼近任意定义在[a,b]上连续函数。而有理系数多项式又可以任意精度逼近所有多项式函数。

# Part III 拓扑空间、连续与序列

- 1 拓扑空间定义:
- **1.1** 集类  $\tau$

$$\tau = \{A, A \subset X\} \tag{1}$$

- **1.2** 拓扑空间 $(X,\tau)$ , 与拓扑空间中的开集
  - 如果全集X(空间)满足下面三条性质,则称其为拓扑空间。
    - 1.  $\phi \in \tau$ ,  $X \in \tau$
    - 2.  $U_A \in \tau$ ,  $\bigcup_{i=1}^n U_A \in \tau$ , n can be  $\infty$
    - 3.  $U_A \in \tau$ ,  $\bigcap_{i=1}^n U_A \in \tau$ ,  $n < \infty$
  - 此时称X中的元素为一个点, $\tau$ 中的元素为开集, $(X,\tau)$ 为拓扑空间。
- 2 连续性与连续函数定义
- 2.1 连续性

$$f:(X,d_1)\to (Y,d_2)$$

 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) > 0$  使得:

$$f B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset B(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$$

则称f在 $x_0$ 点处连续。

如果f在X上连续则称f连续。

## 2.2 定理: 连续与原像的拉开集等价

对于任意Y空间的开子集U其原像 $T^{-1}(U) = \{x \in X \mid T(x) \subset U\}$ 也是开集。 $\Leftrightarrow T$ 连续证明:

1. "⇐"设T连续:  $\Diamond S \subset Y$ , S是开集。

下证:  $T^{-1}(S)$ 也是开集对于 $\forall \boldsymbol{y} \in S$ 。由于S是开集,所以 $\exists B(\boldsymbol{y}, \varepsilon)_{d_2} \subset S$ 因为连续: 所以存在  $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ , $T B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset B(\boldsymbol{y}, \varepsilon)_{d_2} \subset S$ 即 $T B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset S$ 即 $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset T^{-1}(S)$ 

2. "⇒"证明连续:

对于任意 $\varepsilon$ 有 $B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$ )是Y中的开集,且 $T^{-1}B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$ 也是开集。 因为 $T^{-1}B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ 是开集,所以存在 $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset T^{-1}B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$ ,所以 $T(B(\boldsymbol{x}, \delta)) \subset B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$ 

也就是说不能超出,如果不连续, 那么就会有些y值由于f(x)取不到 所以其邻域会超出

Def: \forall epsilon B(  $f(x_0)$ , epsilon)\_y, must \exists:  $f(x_0)$ , delta)\_x \subset B(  $f(x_0)$ , epsilon)\_y

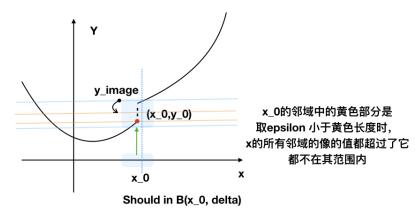


Figure 1: 连续性

## 3 序列

## 3.1 定义: 序列收敛

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \tag{2}$$

若存在 $x \in X$ 使得:

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

其为给定一个 $\varepsilon$ 使得存在N > 0当 $n > N, d(x_n, x) < \varepsilon$ 

则称 $\{x_n\}$ 收敛至x,记作:

$$\{x_n\} \to x$$
  
or  $x_n \to x$ 

## 3.2 直径 $\delta(M)$

$$\delta(M) = \sup_{x \subset X, \ y \subset Y} d(x, y) \tag{3}$$

## 3.3 有界

 $若\delta(M) < \infty$ 则M有界。

要证:  $\forall x_0 \in X, \exists r > 0, M \subset B(x_0, r)$ 

设 $y \in M \diamondsuit r = d(x_0, y_0) + \delta(M) + 1$ ,因为 $d(x, x_0) < d(x, y_0) + d(y_0, x_0) < d(x_0, y_0) + \delta(M)$ 

所以 $M \subset B(x_0, r)$ 。

## 3.4 性质: 若 $x_n$ 收敛,则其有界,且极限唯一

- 有界: 给定一个 $\varepsilon = 1$ 使得存在N > 0当 $n > N, d(x_n, x) < \varepsilon$  取 $a = max\{x_1, x_2, ..., x_n\}, \sup_{x \in X, y \in Y} d(x, y) = a + 1 < \infty$ 所以有界
- 唯一: 反正假设有 $x_n \to z$ ,  $\lim_{n \to \infty} d(x,z) \le d(x_n,z) + d(x_n,x) = 0 + 0 = 0$ 所以x = z所以唯一。

## **3.5** 性质 $x_n \to x, y_n \to y, d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

证明:

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

$$d(x, y) \le d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow d(x, y) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(y_n, y)$$
所以夹逼定理得到 $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ 

#### 3.6 柯西序列

(X,d)度量空间内存在序列 $\{x_n\}, x_n \in X$ 满足: 对于 $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists N, s.t: \forall n, m > N: d(x_n, x_m) < \varepsilon$ 则称序列 $\{x_n\}$ 为柯西序列。 (不需要定义收敛点的收敛序列,当其收敛点在空间内则为收敛序列)

## 3.7 完备空间

当空间M内的任意柯西序列 $\{x_n\}$ 收敛到x,并且  $x \in M$ 则称空间M为完备空间。

#### 3.8 完备性例子:

#### **3.8.1** (X = (0,1), d = ||),不是完备空间

因为 $\{X_n\} = \frac{1}{n}$ 属于这个空间,并且 $x_n \to 0$ 而0不在该空间内。

## **3.8.2** $(l_{p_1}, d_{p_1})$ 完备

$$l_{p_1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...), x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$
  
$$d_{p_1}(x, y) = ||x - y||_p$$

#### **3.8.3** (ca, b, d)完备

$$\begin{split} l[a,b] = \{f \ , [a,b] \rightarrow R, \ continous \} \\ d(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| \end{split}$$

#### 3.8.4 有理数空间Q不完备

因为有理数可以任意逼近无理数,所以不完备。

### **3.8.5** P(a,b), d不完备

多项式函数空间不完备,因为多项式函数可以任意精度逼近任意连续函数。

## 3.9 定理:任意收敛序列都是柯西序列

对于任意收敛序列 $\{x_n\}$ 求证 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$ 满足:  $\forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$  因为序列 $\{x_n\}$ 收敛所以:对于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 存在K满足:  $\exists n, m > K, d(x, x_n) < 0.5\varepsilon, d(x_m, x) < 0.5\varepsilon$ , 那么:  $d(x_n, x_m) < d(x, x_n) + d(x, x_m) < \varepsilon \exists N = K$ 时。 柯西序列与收敛序列的区别:

- 1. 首先收敛序列一定是柯西序列
- 2. 柯西序列不一定"收敛"(但一定有极限)原因是其收敛的极限不一定在空间内,除非该空间是个完备空间。比如 $\{x_n\}=\frac{1}{n}$ 在空间((0,1),d=||)下是一个柯西序列但是其极限不在该空间内,所以其是不完备,序列也不收敛,但是有极限极限为0不在(0,1)内。
- 3. 也就是说柯西序列其实是一个有极限(不是无穷)"收敛"的序列,一般用于我们不好搞清收敛极限的时候,因为收敛的定义要那个极限x,  $d(x,x_n)<\varepsilon$ 而且要求极限x在该空间内。

## Part IV 序列的应用

1 定理:  $M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M$ 使得 $x_n \to x$ 

即导集的意义就是里面的点都是某个序列的极限点。X不需要完备是因为是收敛到x,而不是柯西序列收敛到x。因为是收敛到x极限点x一定在X内

其正向 " $\Rightarrow$ "  $x \in \overline{M}$ ,则一定存在 $\{x_n\} \subset M$ , $x_n \to x$ 

- 如果 $x \in M$ 那么习 $\{x_n\} = x$ 满足条件
- 若果 $x \in M'$ 那么 $B(x, \frac{1}{n}) \cap M \neq \phi$ ,设 $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ 那么 $n \to \infty$ ,  $d(x_n, x) = 0$ 。所以找到了一个序列 $\{x_n\}$  反向"  $\Leftarrow$ "任意 $\{x_n\} \to x$ ,  $\{x_n\} \subset M$ 则 $x \in \overline{M}$ 。  $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists N$ ,  $B(x, \varepsilon) \cap M = C$ ,  $\{x_n \in C \mid n > N\}$
- 1.1 定理: M是闭集,当且仅当: 若 $\exists \{x_n\} \subset M, x_n \to x$ 则 $x \in M$

也就是说闭集就是说有收敛序列的极限都在其内则为闭集。

- "⇒"已知M是闭集,即证:若∃ $\{x_n\}$   $\subset M$ ,  $x_n \to x$ 则 $x \in M$ 由上一个定理得知 $x \in \overline{M}$ 而当M为闭集时,M等于闭包。
- " $\leftarrow$ " 也是显然因为由于上一个定理得知若 $\exists \{x_n\} \subset M, x_n \to x 则 x \in \overline{M}$ ,又因为根据条件得知 $x \in M$ 所以 $\overline{M} \subset M$ 所以M为闭集。
- **1.2** 子空间(X, d)下 $M \in X, (M, d)$ 是子空间
- **1.3** 定理:如果大空间是完备的,那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集证明:
  - "⇒":已知小空间M是闭集,即证: 其中的任何柯西列都收敛在其中。因为任何M中的柯西序列 $\{x_n\}$ 都是大空间X中的收敛序列。所以其收敛至x。又因为任意 $B(x,\varepsilon)\cap M\neq \phi$ 所以 $x\in M'$ 又因为M是闭集所以 $\{x_n\}$ 收敛。
  - "⇐":如果小空间M是完备的,其中任意一个柯西序列都是收敛序列也都收敛在其中所以其为闭集。

## 1.4 定理: 连续性用序列定义

描述:  $T(X, d_x) \to (Y, d_y)$ 如果T在 $x_0$ 处连续则满足: 若 $x \to x_0$ 则 $T(x) \to T(x_0)$ 。

- " $\Leftarrow$ ": 下证连。续若不连续,则存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于 $\forall \delta = \frac{1}{n}$ 。存在 $x \in B(x, \frac{1}{n}), x \to x_0$ ,但是 $d(T(x), T(x_0)) > \varepsilon$ 所以不满足连续,所以 $T(x) \to T(x_0)$ 。
- "⇒" $\forall \varepsilon \exists N$ 满足 $n > N, d(x_n, x) < \delta, \delta = \delta(\varepsilon, N)$ 因为连续说以存在 $\delta(\varepsilon, N), x \in B(x_0, \delta), T(x) \in B(T(x_0), \varepsilon)$ ,这正好是 $T(x) \to T(x_0)$

## 2 完备化

完备化定义: 顾名思义就是在空间中添加一些元素是空间变为完备空间。

**完备空间的理解:** 借助柯西序列与收敛序列来说明,任何收敛序列都是柯西序列,因为柯西序列的极限点不一定在空间中,只要保证柯西序列的极限点在空间中的空间就是完备空间。

定义: 等距映射  $(X,d),(\tilde{X},\tilde{d})$ 中:

$$\begin{cases} T: X \to \tilde{X} \\ \forall x, y \in X, \ d(x, y) = (T(x), T(y)) \end{cases}$$

则称其为等距映射,如果T还是一一映射则称 $(X,d),(\tilde{X},\tilde{d})$ 为等距空间。

## 2.1 定理:

(X,d)是不完备的度量空间,那么一定存在一个完备度量空间 $(\hat{X},\hat{d})$ 其稠密子空间 $(W,\hat{d})$ , $\overline{W}=X$ 与(X,d)是等距的。

例子 比如有理数在账是稠密的,其加上所有无理数之后就是完备的了。

 ${\it Tianyang Zhang} \hspace{1.5cm} 201728017419004 \hspace{1.5cm} 13$ 

## Part V

# 巴拿赫不动点定理

## 1 压缩映射

定义: (X,d)度量空间。  $T: X \to X, d < 1$ 若存在 $0 < \alpha < 1$ 使得:

$$d(Tx, Ty) \le \alpha \ d(x, y)$$

则称T是压缩映射。

- 1.1 定理: 压缩映射是连续的
- 1.2 压缩映射例子:

 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (x \to f(x))$ 

$$|f(x) - f(y)| = d(f(x), f(y))$$

一定存在 d(f(x), f(y)) = |f'(x)|d(x, y) 若 $\forall \xi, f'(\xi) = \alpha \leq 1$ 则f一定是压缩的。

## 2 不动点定理:

$$T: X \to X$$
 是压缩的

则T有且仅有一个不动点 $(T(x_0) = x_0$ 为不动点)

进一步: **任**取一点 $x_0 \in X$ , 找一串序列。

$$x_1 = Tx_0$$
  
 $x_2 = Tx_1 = T^2x_0$   
 $\vdots$   
 $x_n = T^nx_0$   
 $\{x_n\} \to \overline{x}$ 为唯一的不动点

证明: 任取一点
$$x_0 \in X$$
 作 $\{x_n\}, x_n = T^n x_0$ 即 $x_{n+1} = T x_n$ 

下证:  $\{x_n\}$ 是柯西序列

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1}) \le \alpha d(x_{m+1}, x_m)$$
  
 
$$\le \alpha^m d(x_1, x_0)$$

对于 $\forall n > m$ 

$$d(x_n, x_m)$$

$$\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_1, x_0)$$

下证: 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N, \forall n > m > N, d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ 

$$d(x_n, x_m)$$

$$\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\leq (\alpha^{n-m} + \alpha^{n-m-1} + \dots + \alpha + 1)d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\leq \frac{\alpha^m (1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

即已知 $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ 找出那个N。

$$d(x_n, x_m) \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^m (1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow m > \log_d(\frac{\varepsilon}{d(x_1, x_0)} (1 - \alpha))$$

所以 $N = [log_d(\frac{\varepsilon}{d(x_1,x_0)}(1-\alpha))] + 1 \circ$ 下证:  $T\overline{x} = \overline{x}$ 

$$d(T\overline{x}, \overline{x}) \leq d(T\overline{x}, x_m) + d(x_m, \overline{x})$$

$$\leq \alpha d(\overline{x}, x_{m-1}) + d(x_m, \overline{x})$$

$$limt \ x_m \to \overline{x} : d(\overline{x}, x_{m-1}) = 0$$

$$thus : d(T\overline{x}, \overline{x}) \leq 0$$

所以: $d(T\overline{x}, \overline{x}) = 0$  所以 $T\overline{x} = \overline{x}$ 。 下证唯一:

反设不然:  $\exists Ty_1 = y_1, Ty_2 = y_2$ 

$$d(y_1, y_2) = d(Ty_1, Ty_2) \le \alpha d(y_1, y_2)$$
$$(1 - \alpha)d(y_1, y_2) \le 0$$
$$\Rightarrow (1 - \alpha)d(y_1, y_2) = 0$$
$$\Rightarrow d(y_1, y_2) = 0$$

所以 $y_1 = y_2$ 

## 3 不动点定理的应用:

## 3.1 牛顿法解方程

牛顿法解方程是通过下面这个序列, 其极限是方程的解  $f(\bar{x}) = 0$ 

条件 序列 $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{x_0}{f'(x_0)}$ 

 $\mathbb{E}[a,b]$ 上f为两次连续可微f''为连续即 $f \in C^2[a,b]$ ,  $\overline{x}$ 为 $f(\overline{x}) = 0$ 的单零点 $f'(\overline{x}) \neq 0$ 那么g(x)在这个邻域 $[\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]$ 上是压缩的。

证明: 只需证明:  $|q'(x) < \alpha < 1|$ 

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$
$$= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

因为f为两次连续可微f''为连续即 $f \in C^2[a,b]$ ,  $\overline{x}$ 为 $f(\overline{x}) = 0$ 的单零点,所以 $\lim_{x \to \overline{x}} g'(x) = 0$ ,并且原函数连续。

所以在邻域 $[\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta]$ 上时,则任意选择 $\varepsilon \leq \alpha$ ,都 $\exists B(\overline{x},\delta)$ 满足 $g(B(\overline{x},\delta)) \subset B(g(\overline{x}),\varepsilon)$  所以存在 $\delta > 0$ 满足g(x)在 $[\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta]$ 内是压缩的。

## 3.2 常微分方程

度量空间 $(C[t_0 - \beta, t_0 + \beta], d)$ 上解的存在性证明。

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\tag{4}$$

设f在 $\mathbb{R} = \{(t,x) \mid |t-t_0| \le a, |x-x_0| \le b\}$ 连续。且 $|f(t,x)| \le c, (t,x) \in \mathbb{R}$ 满足李氏条件:  $\exists k > 0$ 使得:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le k|x - y| \tag{5}$$

则存在 $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ 解存在且唯一。 $\beta < min\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$ 

证明: **首**先:  $(C[t_0 - \beta, t_0 + \beta], d)$  在 $d = \max_{t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]} |f(t) - g(t)|$ 是完备的。 首先 $x(t) = x_0$ 是常函数,显然是属于连续函数度量空间 $(C[t_0 - \beta, t_0 + \beta], d)$ 的。

定义闭球也就是 $\overline{B}(x_0, c\beta) = \{f(t) \mid max|f(t) - x_0| \le c\beta\},$ 

**证明闭球是闭集** 反证若不是闭集那么存在收敛序列其极限 $\{f_n\} \to f_0 \ s.t : d(f_0, x_0) > r$ 

又因为: $d(f_0, x_0) \le d(f_n, x_0) + d(f_n, f_0)$ 

即 $d(f_n, f_0) \geq d(f_0, x_0) - d(f_n, x_0) \geq d(f_0, x_0) - r = e$ 又因为e是一个常数,所以与 $\{f_n\} \rightarrow f_0$ 矛盾。 取 $X = \overline{B}(x_0, c\beta), c\beta < b, \overline{B}(x_0, c\beta) \subset (C[t_0 - \beta, t_0 + \beta], d)$ 那么X也是完备的。 定义:映射T

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(t))ds$$

下证:对于任意 $Tx(t) \in X$ 。

$$d(x_0, Tx(t)) = \max_{t \in |t - t_0| \le \beta} \int_{t_0}^t f(t, x(t)) ds$$
$$\le c|x - x_0| = c\beta$$

所以 $Tx(t) \in \overline{B}(x_0, c\beta)$ 

## 证明该映射是压缩的 即证:

$$d(Tx(t), Ty(t)) \le \alpha \ d(x(t), y(t)); \ x(t), y(t) \in X$$

$$\tag{6}$$

$$\begin{split} d(Tx(t),Ty(t)) &= \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |x_0 + \int_{t_0}^t f(t,x(t)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(t,y(t)) ds| \\ &= \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |\int_{t_0}^t f(t,x(t)) - f(t,y(t)) ds| \\ & \\ \mathbbm{R}$$
帮着弦条件  $\leq \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |\int_{t_0}^t k|x(t) - y(t)| ds| \\ &\leq \max_{t,s \in |t-t_0| \leq \beta} k|t - t_0||x(s) - y(s)| \\ &\leq k\beta d(x(t),y(t)) \end{split}$ 

又因为 $\beta < \frac{1}{k}$ 所以 $d(Tx(t), Ty(t)) \le \alpha \ d(x(t), y(t)), \ \alpha \in [0, 1)$  所以为压缩的。

## 下证该序列的收敛点为微分方程的解 设收敛点为:

$$T\overline{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \overline{x}(t))ds = \overline{x}(t)$$
(7)

对等式两边求导可得满足原微分方程。