泛函分析笔记

张天阳*
University of Chinese Academy of Science

March 22, 2018

*学号201728017419004

Contents

Part I
开闭集与有界集

1 度量空间

2 开闭集

2.1 邻域定义：

2.1.1 球邻域

1. 开球（r邻域）：$B(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < r\}$
2. 闭球：$\overline{B}(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \leq r\}$
3. 球面：$S(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = r\}$

2.1.2 ε-邻域

$$B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \varepsilon\}$$

2.1.3 邻域

$\exists\ B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \subset M$,则称$M$为$\boldsymbol{x}_0$的一个邻域。

2.2 开闭区间定义：

2.2.1 开区间：

对于$M \subset X$是开区间，需要满足$\forall \boldsymbol{x} \in M,\ \exists\ B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset M$。

2.2.2 闭区间：

对于$M \subset X$是开区间，需要$M^c = X/M$满足M^c是开集（开区间）。

2.3 内点与有界

2.3.1 内点：

$\boldsymbol{x}_0 \in M$是M的内点，需要满足：$\exists\ \varepsilon > 0$使得$B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \in M$。

2.3.2 内部：

M^c是M的内部，其是所有M的内点的集合。

2.3.3 有界：

$$\exists\ r < \infty\ , st\ M \subset B(\boldsymbol{x}_0, r),\ \boldsymbol{x}_0 \in X$$

则称M有界。

2.4 定理：

如果一个集合是开集，其在任意度量下也是开集；闭集同理。
一个序列在d度量下逼近点$\boldsymbol{x}_0$那么其在d'度量下也逼近点$\boldsymbol{x}_0$

3 例子：

3.1 分辨开闭集合，在$(X = R, d(x,y) = |x-y|)$的情况下

3.1.1 $M = Q$,有理数集

- 由于任意有理数的任意小ε邻域都有无理数存在，所以其不是开集。
- Q^c是无理数集，由于无理数的任意小ε邻域都有有理数存在，所以其不是开集。由于Q^c不是开集，所以Q不是闭集。

结论：Q为非开非闭。当然无理数集也是非开非闭。

3.1.2 $M = \phi$,空集

- 由于开集是满足$\forall \boldsymbol{x} \in M,\ \exists\ B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset M$，而空集中没有点，所以对于其中任意点自然满足。
- 由于空集的补集在这里是全集也就是R而R满足开集的性质，所以空集也是闭集。

结论：空集既开又闭。同样全集既开又闭。

3.1.3 $M = [0, 1)$

- 显然M不是开集，因为0点不存在ε邻域使其包含于M内。
- 又因为其补集中点1也是不存在ε邻域使其包含于M^c内。所以也不是闭集。

结论该集合非开非闭。此外$(0,1)$开集，$[2,3]$闭集。

3.2 分辨开闭集合，在$(X = [0,1), d(x,y) = |x-y|)$的情况下

3.2.1 $M = [0, 1)$

- 由于$B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \varepsilon\}$,所以所有在集合X内的点的$\varepsilon$邻域都包含于X，所以其为开。
- 由于空集为开，所以其为闭集合。所以既开又闭。

3.2.2 $M = (0, \frac{1}{2}]$

- 因为点$\frac{1}{2}$不存在ε邻域使其包含于M内，所以其不是开集。
- 但是其补集$(\frac{1}{2}, 1)$是开集，所以其是闭集。

Part II 导集、可列集、稠密集与可分

1 聚点、导集与闭包

1.1 集合M的聚点

若$\boldsymbol{x}_0$为聚点，则需要满足：$\forall\ B(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)$, $\exists\ \boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)\cap M$
（想象一下直观上就是$\boldsymbol{x}_0$紧贴着M,连在一起，但不一定属于M可能是M的边界之类)

1.2 集合M的导集（聚集）M'

关于集合M的所有聚点的集合叫做其导集。

1.3 集合M的闭包$\overline{M}$

$\overline{M}=M\cup M'$

1.4 命题：度量空间(X,d), $M\subset X$中 $\overline{M}$一定是闭集。

证明：
$\overline{M}=M\cup M'\Rightarrow(\overline{M})^c=M^c\cap(M')^c$
$\forall\boldsymbol{x}\in(\overline{M})^c,\Rightarrow\boldsymbol{x}\in M^c$, $\boldsymbol{x}\in(M')^c$ beacuse: $\boldsymbol{x}\in(M')^c$, $\exists B(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cap M=\phi\Rightarrow\exists\ B(\boldsymbol{x},\varepsilon)\subset M^c$
又因为:$\exists\ B(\boldsymbol{x},\varepsilon)\subset M^c$所以$\forall\boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, $\boldsymbol{y}\notin M$所以$B(\boldsymbol{x},\varepsilon)\in(M')^c$
即：$B(\boldsymbol{x},\varepsilon)\in M^c\cap(M')^c\Rightarrow\ \overline{M}^c$是开集，所以$\overline{M}$是闭集。

1.5 定理：度量空间(X,d), M是闭集$\Leftrightarrow\ \overline{M}=M$

证明：

- 必要性：由命题1.4显然。
- 充分性：由于$\overline{M}=M\cup M'$只要证：$\overline{M}\subset M$即证$M'\subset M$,即证$M^c\subset(M')^c$。
  由于M闭所以M^c开集，所以$\forall\boldsymbol{x}\in M^c$,$\exists\ B(\boldsymbol{x},\varepsilon)\subset M^c$所以$\boldsymbol{x}$不属于$M'$即$\boldsymbol{x}\in(M')^c$

2 可列集、可数集、稠密与可分

2.1 可列集

可以与自然数一一对应, $X\to N$

2.2 可数集

若集合X是可列集或者有限集（集合内元素个数有限）则称其为可数集。

2.3 可数集的例子，与不可数集的例子

- 可数集：自然数集、偶数集、$\{0,1,0.12317,\sqrt{3}\}$。
- 不可数集：$(0,1)$、R、无理数

2.4 命题：可列个可列集的并一定是可列集，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$，$A$是可列集

证明：沿着对角线数，可以与自然数一一对应。

2.5 例：有理数集是可列集

证明：有理数可以表述为$\frac{q}{p}$；$q,p \in N$，所以将其写作(q,p)的形式去数。
当$q=1$时，p为可列个；当$q=1$时，p为可列个,...,当$q=n$时，p为可列个,... 可列个可列集的并集是可列集。

2.6 X的稠密子集

(X,d)内，当$\overline{M}=X$则称M是X中的稠密子集。

2.7 X的可分性

若(X,d)内存在稠密子集则称其为可分的。

3 例：可分性判别

3.1 (R,d)

因为任意无理数的任意小邻域都有有理数，所以$Q' = Q^c$所以$\overline{Q} = Q^c \cup Q = R$,所以Q是稠密集。所以可分。

3.2 (l_{p_1}, d_{p_1})可分

$$l_{p_1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...), x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$
$$d_{p_1}(x,y) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p$$

3.3 (l_{p_1}, d_{p_2})不可分

$$l_{p_1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...), x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$
$$d_{p_2}(x,y) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty$$

3.4 $(l[a,b], d(f,g))$可分

$$l[a,b] = \{f\ , [a,b] \to R,\ continous\}$$
$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$$

因为多项式函数是稠密的其可以逼近任意定义在$[a,b]$上连续函数。而有理系数多项式又可以任意精度逼近所有多项式函数。

Part III
拓扑空间、连续与序列

1 拓扑空间定义:

1.1 集类τ

$$\tau = \{A, A \subset X\} \tag{1}$$

1.2 拓扑空间(X,τ)，与拓扑空间中的开集

- 如果全集X（空间）满足下面三条性质，则称其为拓扑空间。

  1. $\phi \in \tau,\ X \in \tau$
  2. $U_A \in \tau,\ \bigcup_{i=1}^{n} U_A \in \tau, n\ can\ be\ \infty$
  3. $U_A \in \tau,\ \bigcap_{i=1}^{n} U_A \in \tau,\ n < \infty$

- 此时称X中的元素为一个点，τ中的元素为开集，(X,τ)为拓扑空间。

2 连续性与连续函数定义

2.1 连续性

$$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$$

$\forall \boldsymbol{x}_0 \in X, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) > 0$
使得:

$$f\ B(\boldsymbol{x}_0, \delta)\ \subset B(f(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$$

则称f在$\boldsymbol{x}_0$点处连续。
如果f在X上连续则称f连续。

2.2 定理：连续与原像的拉开集等价

对于任意Y空间的开子集U其原像$T^{-1}(U) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid T(\boldsymbol{x}) \subset U\}$也是开集。$\Leftrightarrow$ T连续**证明:**

1. ”$\Leftarrow$”设T连续：令$S \subset Y$，S是开集。
   下证：$T^{-1}(S)$也是开集对于$\forall \boldsymbol{y} \in S$。由于$S$是开集，所以$\exists\ B(\boldsymbol{y}, \varepsilon)_{d_2} \subset S$
   因为连续：所以存在 $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$，$T\ B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset B(\boldsymbol{y}, \varepsilon)_{d_2} \subset S$
   即$T\ B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset S$
   即$B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset T^{-1}(S)$

2. ”$\Rightarrow$”证明连续:
   对于任意ε有$B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon))$是$Y$中的开集，且$T^{-1}B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$也是开集。
   因为$T^{-1}B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$是开集，所以存在$B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset T^{-1}B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$,所以$T\ B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset B(T(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$

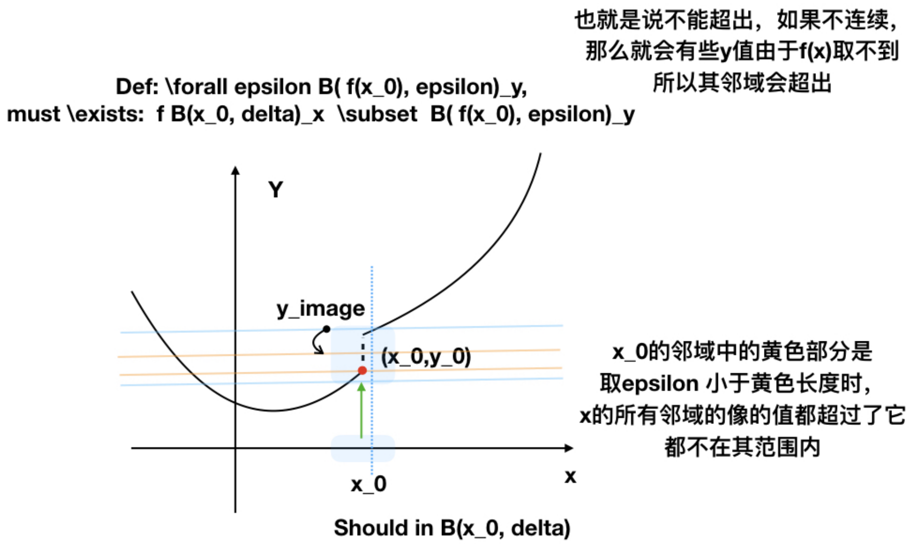

Figure 1: 连续性

3 序列

3.1 定义：序列收敛

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \tag{2}$$

若存在$x \in X$使得:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

其为给定一个ε使得存在$N > 0$当$n > N$,$d(x_n, x) < \varepsilon$

则称$\{x_n\}$收敛至x，记作:

$$\{x_n\} \to x$$
$$or \quad x_n \to x$$

3.2 直径$\delta(M)$

$$\delta(M) = \sup_{x\subset X,\ y\subset Y} d(x, y) \tag{3}$$

3.3 有界

若$\delta(M) < \infty$则M有界。
要证：$\forall x_0 \in X, \exists r > 0, M \subset B(x_0, r)$
设$y \in M$令$r = d(x_0, y_0) + \delta(M) + 1$，因为$d(x, x_0) < d(x, y_0) + d(y_0, x_0) < d(x_0, y_0) + \delta(M)$
所以$M \subset B(x_0, r)$。

3.4 性质：若x_n收敛，则其有界，且极限唯一

- 有界：给定一个$\varepsilon = 1$使得存在$N > 0$当$n > N$,$d(x_n, x) < \varepsilon$
  取$a = max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$，$\sup_{x\subset X,\ y\subset Y} d(x, y) = a + 1 < \infty$所以有界
- 唯一：反正假设有$x_n \to z$, $lim_{n\to\infty} d(x, z) \le d(x_n, z) + d(x_n, x) = 0 + 0 = 0$所以$x = z$所以唯一。

3.5 性质$x_n \to x, y_n \to y,\ d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

证明：
$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y)$
$\Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x_n, x) + d(y_n, y)$
$d(x, y) \le d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$
$\Rightarrow d(x, y) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(y_n, y)$
所以夹逼定理得到$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

3.6 柯西序列

(X, d)度量空间内存在序列$\{x_n\}, x_n \in X$满足：
对于$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ s.t : \forall n, m > N :\quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$则称序列$\{x_n\}$为柯西序列。
(不需要定义收敛点的收敛序列，当其收敛点在空间内则为收敛序列)

3.7 完备空间

当空间M内的任意柯西序列$\{x_n\}$收敛到x,并且 $x \in M$则称空间M为完备空间。

3.8 完备性例子：

3.8.1 $(X = (0, 1), d = ||)$,不是完备空间

因为$\{X_n\} = \frac{1}{n}$属于这个空间，并且$x_n \to 0$而0不在该空间内。

3.8.2 (l_{p_1}, d_{p_1})完备

$$l_{p_1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...), x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$
$$d_{p_1}(x, y) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p$$

3.8.3 (ca, b, d)完备

$$l[a, b] = \{f\ , [a, b] \to R,\ continous\}$$
$$d(f, g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$$

3.8.4 有理数空间Q不完备

因为有理数可以任意逼近无理数，所以不完备。

3.8.5 $P(a,b),d$不完备

多项式函数空间不完备，因为多项式函数可以任意精度逼近任意连续函数。

3.9 定理：任意收敛序列都是柯西序列

对于任意收敛序列$\{x_n\}$求证$\forall\varepsilon>0,\exists N$满足：$\forall n,m>N$, $d(x_n,x_m)<\varepsilon$
因为序列$\{x_n\}$收敛所以:对于$\frac{\varepsilon}{2}$存在K满足：当$n,m>K$,$d(x,x_n)<0.5\varepsilon,d(x_m,x)<0.5\varepsilon,$
那么：$d(x_n,x_m)<d(x,x_n)+d(x,x_m)<\varepsilon$当$N=K$时。
柯西序列与收敛序列的区别:

1. 首先收敛序列一定是柯西序列
2. 柯西序列不一定“收敛”（但一定有极限）原因是其收敛的极限不一定在空间内，除非该空间是个完备空间。比如$\{x_n\}=\frac{1}{n}$在空间$((0,1),d=||)$下是一个柯西序列但是其极限不在该空间内，所以其是不完备，序列也不收敛，但是有极限极限为0不在$(0,1)$内。
3. 也就是说柯西序列其实是一个有极限（不是无穷）“收敛”的序列，一般用于我们不好搞清收敛极限的时候，因为收敛的定义要那个极限x，$d(x,x_n)<\varepsilon$而且要求极限x在该空间内。

Part IV
序列的应用

1 定理：$M \subset X, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists\{x_n\} \subset M$使得$x_n \to x$

即导集的意义就是里面的点都是某个序列的极限点。X不需要完备是因为是收敛到x，而不是柯西序列收敛到x。因为是收敛到x极限点x一定在X内

其正向 “$\Rightarrow$” $x \in \overline{M}$，则一定存在$\{x_n\} \subset M$，$x_n \to x$

- 如果$x \in M$那么$\exists\{x_n\} = x$满足条件
- 若果$x \in M'$那么$B(x, \frac{1}{n}) \cap M \neq \phi$,设$x_n \in B(x, \frac{1}{n})$那么$n \to \infty$，$d(x_n, x) = 0$。所以找到了一个序列$\{x_n\}$

反向"$\Leftarrow$"任意$\{x_n\} \to x$，$\{x_n\} \subset M$则$x \in \overline{M}$。$\forall \varepsilon > 0$,$\exists N$，$B(x, \varepsilon) \cap M = C$，$\{x_n \in C \mid n > N\}$

1.1 定理：M是闭集，当且仅当：若$\exists\{x_n\} \subset M$，$x_n \to x$则$x \in M$

也就是说闭集就是说有收敛序列的极限都在其内则为闭集。

- “$\Rightarrow$ ” 已知M是闭集，即证：若$\exists\{x_n\} \subset M$，$x_n \to x$则$x \in M$由上一个定理得知$x \in \overline{M}$而当M为闭集时，M等于闭包。
- “$\Leftarrow$” 也是显然因为由于上一个定理得知若$\exists\{x_n\} \subset M$，$x_n \to x$则$x \in \overline{M}$，又因为根据条件得知$x \in M$所以$\overline{M} \subset M$所以M为闭集。

1.2 子空间(X, d)下$M \in X, (M, d)$是子空间

1.3 定理：如果大空间是完备的，那么小空间完备的充要条件是小空间是闭集

证明：

- "$\Rightarrow$":已知小空间M是闭集，即证：其中的任何柯西列都收敛在其中。因为任何M中的柯西序列$\{x_n\}$都是大空间X中的收敛序列。所以其收敛至x。又因为任意$B(x, \varepsilon) \cap M \neq \phi$所以$x \in M'$又因为M是闭集所以$\{x_n\}$收敛。
- "$\Leftarrow$"：如果小空间M是完备的，其中任意一个柯西序列都是收敛序列也都收敛在其中所以其为闭集。

1.4 定理：连续性用序列定义

描述：$T(X, d_x) \to (Y, d_y)$如果T在x_0处连续则满足：若$x \to x_0$则$T(x) \to T(x_0)$。

- "$\Leftarrow$"：下证连。续若不连续，则存在$\varepsilon > 0$使得对于$\forall \delta = \frac{1}{n}$。存在$x \in B(x, \frac{1}{n}), x \to x_0$,但是$d(T(x), T(x_0)) > \varepsilon$所以不满足连续，所以$T(x) \to T(x_0)$。
- "$\Rightarrow$"$\forall \varepsilon \exists N$满足$n > N$，$d(x_n, x) < \delta, \delta = \delta(\varepsilon, N)$因为连续说以存在$\delta(\varepsilon, N), x \in B(x_0, \delta), T(x) \in B(T(x_0), \varepsilon)$,这正好是$T(x) \to T(x_0)$

2 完备化

完备化定义： **顾**名思义就是在空间中添加一些元素是空间变为完备空间。

完备空间的理解： 借助柯西序列与收敛序列来说明，任何收敛序列都是柯西序列，因为柯西序列的极限点不一定在空间中，只要保证柯西序列的极限点在空间中的空间就是完备空间。

定义：等距映射 $(X,d),(\tilde{X},\tilde{d})$中:

$$\begin{cases} T: X \to \tilde{X} \\ \forall x, y \in X,\ d(x,y) = \tilde(T(x), T(y)) \end{cases}$$

则称其为等距映射，如果T还是一一映射则称$(X,d),(\tilde{X},\tilde{d})$为等距空间。

2.1 定理:

(X,d)是不完备的度量空间，那么一定存在一个完备度量空间$(\hat{X},\hat{d})$其稠密子空间$(W,\hat{d})$，$\overline{W}=X$与(X,d)是等距的。

例子 比如有理数在$\mathbb{R}$是稠密的，其加上所有无理数之后就是完备的了。

Part V
巴拿赫不动点定理

1 压缩映射

定义： (X,d)度量空间。
$T:X\to X,\ d<1$
若存在$0<\alpha<1$使得:

$$d(Tx,Ty)\le\alpha\ d(x,y)$$

则称T是压缩映射。

1.1 定理：压缩映射是连续的

1.2 压缩映射例子：

$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ (x\to f(x))$

$$|f(x)-f(y)|=d(f(x),f(y))$$

一定存在 $d(f(x),f(y))=|f'(x)|d(x,y)$
若$\forall\xi,f'(\xi)=\alpha\le1$则f一定是压缩的。

2 不动点定理：

描述： 假设(X,d)非空且完备。

$$T:X\to X\text{是压缩的}$$

则T有且仅有一个不动点($T(x_0)=x_0$为不动点)

进一步： 任取一点$x_0\in X$，找一串序列。

$$\begin{aligned}
&x_1=Tx_0\\
&x_2=Tx_1=T^2x_0\\
&\vdots\\
&x_n=T^nx_0\\
&\{x_n\}\to\overline{x}\text{为唯一的不动点}
\end{aligned}$$

证明： 任取一点$x_0\in X$
作$\{x_n\}$,$x_n=T^nx_0$即$x_{n+1}=Tx_n$

下证：$\{x_n\}$是柯西序列

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1}) &\leq \alpha d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

对于$\forall n > m$

$$\begin{aligned} &d(x_n, x_m) \\ \leq &d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + ... + d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

下证：对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, \forall n > m > N, d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} &d(x_n, x_m) \\ \leq &d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + ... + d(x_{m+1}, x_m) \\ \leq &(\alpha^{n-m} + \alpha^{n-m-1} + ... + \alpha + 1) d(x_{m+1}, x_m) \\ \leq &\frac{\alpha^m (1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

即已知$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$找出那个N。

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow \frac{\alpha^m (1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow m > log_d(\frac{\varepsilon}{d(x_1, x_0)} &(1 - \alpha)) \end{aligned}$$

所以$N = [log_d(\frac{\varepsilon}{d(x_1, x_0)}(1 - \alpha))] + 1$。
下证：$T\overline{x} = \overline{x}$

$$\begin{aligned} d(T\overline{x}, \overline{x}) \leq &d(T\overline{x}, x_m) + d(x_m, \overline{x}) \\ \leq &\alpha d(\overline{x}, x_{m-1}) + d(x_m, \overline{x}) \\ limt\ x_m \rightarrow &\overline{x} : d(\overline{x}, x_{m-1}) = 0 \\ thus : d(T&\overline{x}, \overline{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

所以:$d(T\overline{x}, \overline{x}) = 0$ 所以$T\overline{x} = \overline{x}$。
下证唯一:
反设不然: $\exists Ty_1 = y_1, Ty_2 = y_2$

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) = d(Ty_1, Ty_2) &\leq \alpha d(y_1, y_2) \\ (1 - \alpha) d(y_1, y_2) &\leq 0 \\ \Rightarrow (1 - \alpha) d(y_1, y_2) &= 0 \\ \Rightarrow d(y_1, y_2) &= 0 \end{aligned}$$

所以$y_1 = y_2$

3 不动点定理的应用：

3.1 牛顿法解方程

牛顿法解方程是通过下面这个序列，其极限是方程的解$f(\overline{x})=0$

条件 序列$x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{x_0}{f'(x_0)}$
在$[a,b]$上f为两次连续可微f''为连续即$f\in C^2[a,b]$, $\overline{x}$为$f(\overline{x})=0$的单零点$f'(\overline{x})\neq 0$那么$g(x)$在这个邻域$[\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta]$上是压缩的。

证明：只需证明：$|g'(x)\leq\alpha<1|$

$$\begin{aligned}g'(x)&=1-\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\\&=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\end{aligned}$$

因为f为两次连续可微f''为连续即$f\in C^2[a,b]$, $\overline{x}$为$f(\overline{x})=0$的单零点，所以$lim_{x\to\overline{x}}g'(x)=0$，并且原函数连续。
所以在邻域$[\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta]$上时，则任意选择$\varepsilon\leq\alpha$,都$\exists B(\overline{x},\delta)$满足$g\ B(\overline{x},\delta)\subset B(g(\overline{x}),\varepsilon)$ 所以存在$\delta>0$满足$g(x)$在$[\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta]$内是压缩的。

3.2 常微分方程

度量空间$(C[t_0-\beta,t_0+\beta],d)$上解的存在性证明。

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t))\\x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{4}$$

设f在$\mathbb{R}=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leq a,|x-x_0|\leq b\}$连续。且$|f(t,x)|\leq c,(t,x)\in\mathbb{R}$
满足李氏条件：$\exists k>0$使得：

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq k|x-y|\tag{5}$$

则存在$[t_0-\beta,t_0+\beta]$解存在且唯一。$\beta<min\{a,\frac{b}{c},\frac{1}{k}\}$

证明： 首先：$(C[t_0-\beta,t_0+\beta],d)$ 在$d=max_{t\in[t_0-\beta,t_0+\beta]}|f(t)-g(t)|$是完备的。
首先$x(t)=x_0$是常函数，显然是属于连续函数度量空间$(C[t_0-\beta,t_0+\beta],d)$的。

定义闭球也就是$\overline{B}(x_0,c\beta)=\{f(t)\mid max|f(t)-x_0|\leq c\beta\}$,

证明闭球是闭集 反证若不是闭集那么存在收敛序列其极限$\{f_n\}\to f_0\ s.t: d(f_0,x_0)>r$
又因为:$d(f_0,x_0)\leq d(f_n,x_0)+d(f_n,f_0)$
即$d(f_n,f_0)\geq d(f_0,x_0)-d(f_n,x_0)\geq d(f_0,x_0)-r=e$又因为e是一个常数,所以与$\{f_n\}\to f_0$矛盾。
取$X=\overline{B}(x_0,c\beta),\because c\beta<b,\overline{B}(x_0,c\beta)\subset(C[t_0-\beta,t_0+\beta],d)$那么X也是完备的。

定义:映射T

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))ds$$

下证：对于任意$Tx(t) \in X$。

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx(t)) &= \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))ds \\ &\leq c|x - x_0| = c\beta \end{aligned}$$

所以$Tx(t) \in \overline{B}(x_0, c\beta)$

证明该映射是压缩的　即证:

$$d(Tx(t), Ty(t)) \leq \alpha\ d(x(t), y(t));\ x(t), y(t) \in X \tag{6}$$

$$\begin{aligned} d(Tx(t), Ty(t)) &= \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))ds| \\ &= \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |\int_{t_0}^{t} f(t, x(t)) - f(t, y(t))ds| \\ \text{根据李普希兹条件} &\leq \max_{t \in |t-t_0| \leq \beta} |\int_{t_0}^{t} k|x(t) - y(t)|ds| \\ &\leq \max_{t,s \in |t-t_0| \leq \beta} k|t - t_0||x(s) - y(s)| \\ &\leq k\beta d(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

又因为$\beta < \frac{1}{k}$所以$d(Tx(t), Ty(t)) \leq \alpha\ d(x(t), y(t))$，$\alpha \in [0, 1)$ 所以为压缩的。

下证该序列的收敛点为微分方程的解　设收敛点为:

$$T\overline{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \overline{x}(t))ds = \overline{x}(t) \tag{7}$$

对等式两边求导可得满足原微分方程。