1.

由题意得，$f_X(x)=\frac{1}{2}$，所以 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt{|X|}\le y)=P(|X|\le y^2)$。

$$F_Y(y)=\begin{cases} y^2 & y\in[0,1] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

求导后即可得到：

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2y & y\in[0,1] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

因为$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(-ln|X|\le z)=P(|X|\ge e^{-z})$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 1-e^{-z} & z\in[0,\infty] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z} & z\in[0,\infty] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2.

令$Y=e^X$，则$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le lny)$，所以$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{lny}f_X(x)dx$，求导后$f_Y(y)=\frac{f_X(lny)}{y}$。

当X服从$[0,1]$上的均匀分布时：

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{y} & y\in[1,e] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

3.

令$Y=|X|^{\frac{1}{3}},Z=|X|^{\frac{1}{4}}$，则：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|^{\frac{1}{3}}\le y)=P(|X|\le y^3)=\int_0^{y^3}f_{|X|}(|x|)dx$，所以$f_Y(y)=3y^2f_{|X|}(y^3)$，同理$f_Z(z)=4z^3f_{|X|}(y^4)$。

4.

因为$F_Y(y) = P(Y \le y)$，当$0 \le y \le 5$时，由全概率公式，$P(Y \le y) = \frac{1}{4}P(X \le y) + \frac{3}{4}P(X-5 \le y) = \frac{1}{4}P(X \le y) + \frac{3}{4}P(X \le y+5)$，所以$P(Y \le y) = \frac{1}{4}(\int_0^y f_{X_A}(x)dx + 3\int_0^{y+5} f_{X_B}(x)dx) = \frac{y}{10} + \frac{1}{4}$，故$f_Y(y) = \frac{1}{10}$；同理当$5 < y \le 15$时，$P(Y \le y) = \frac{3}{4}\int_0^{y+5} f_{X_B}(x)dx = \frac{y+5}{20}$，所以$f_Y(y) = \frac{1}{20}$。

5.

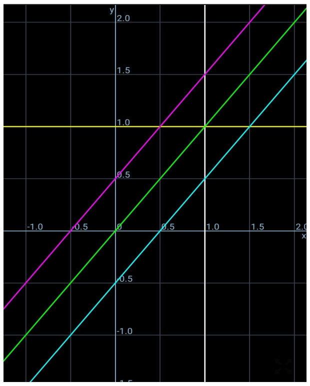

图 1: $|z| = 0.5$的情况

由于X, Y均服从均匀分布，两个随机变量的联合概率可以用以上的正方形区域面积表示。考虑$|X-Y| \le z$，这个式子可以被拆开为两个式子$X-Y \le z$和$Y-X \le z$，在图中做出这两个函数的图像。不难发现$P(Z \le z)$就是两条平行线与正方形所包围的图形的面积，即$P(Z \le z) = 2z - z^2$，所以$f_Z(z) = 2 - 2z$。

6.

使用和第五题类似的做法：$P(Z \le z) = P(|X-Y| \le z) = \frac{\sqrt{2}z}{2}(\sqrt{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-z) * 2) = \frac{z}{2}$，所以$f_Z(z) = \frac{1}{2}$。

7.

不难看出这题的随机变量就是第五题中的Z。所以$E[Z] = \int_0^1 2z^2 - z^3 dz = \frac{1}{3}$。

证毕。

8.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

9.

当$z \leq 0$，

$$\begin{aligned} & F_Z(z) = P(X - Y \leq z) = 1 - P(X - Y > z) \\ & = 1 - \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} dy \int_{z+y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ & = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

当$z < 0$时，$-z \leq 0$，所以$F_Z(z) = 1 - F_Z(-z) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{\lambda z}$。

10.

由离散卷积公式$f_Z(z) = \sum f_X(x) f_Y(z-x)$可以求得：

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6} & z = 1 \\ \frac{5}{18} & z = 2 \\ \frac{1}{3} & z = 3 \\ \frac{1}{6} & z = 4 \\ \frac{1}{18} & z = 5 \end{cases}$$

11.

设$P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, P_Y(k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$，由卷积公式，有$P_Z(z) = \sum P_X(k) P_Y(z-k)$，因为$C_z^k = \frac{z!}{k!(z-k)!}$，所以$P_Z(z) = \frac{e^{(-\lambda+\mu)}}{z!} \sum C_z^k \lambda^k \mu^{z-k}$
$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}$。

证毕。

12.

先求$W=X+Y$的概率密度函数：

$$f_W(w)=\begin{cases}\int_0^w dx & = & w & 0\le w\le 1\\ \int_{w-1}^1 dx & = & 2-w & 1<w\le 2\\ 0 & & & otherwise\end{cases}$$

再求$R=W+Z$：

$$f_R(r)=\begin{cases}\int_0^r wdw & = & \frac{r^2}{2} & 0\le r\le 1\\ \int_{r-1}^1 wdw+\int_1^r 2-wdw & = & 3r-r^2-\frac{3}{2} & 1<r\le 2\\ \int_{r-1}^2 2-wdw & = & \frac{r^2}{2}-3r+\frac{9}{2} & 2<r\le 3\\ 0 & & & otherwise\end{cases}$$

13.

因为概率密度函数的周期为$\frac{a+b}{2}$，所以有$f(x)=f(a+b-x)$，而$X+Y$和$X-Y$的积分区间正好差着$a+b$的距离，所以只需要将f_{X+Y}平移即可。