15.

(i)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} & x^2 + y^2 \leq r, y > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

(ii)

由(i)得：$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{r-y^2}}^{\sqrt{r-y^2}} \frac{2}{\pi r} dx = \frac{4}{\pi r}\sqrt{r-y^2}$，所以$E[Y] = \int_0^{\sqrt{r}} \frac{4y}{\pi r}\sqrt{r-y^2}dy = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$。

(iii)

利用期望规则直接积分： $E[Y] = \int_0^{\sqrt{r}} ydy \int_{-\sqrt{r-y^2}}^{\sqrt{r-y^2}} \frac{2}{\pi r}dx = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$。

16.

不妨设针的中点到最近的水平线的距离为X，到最近的垂直线的距离为Y，针与水平线的夹角为Θ，根据布丰抛针问题，我们可以得到：

$$f_{X,Y,\Theta} = \begin{cases} \frac{8}{ab\pi} & x \in [0, \frac{b}{2}], y \in [0, \frac{a}{2}], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

所以针与水平线相交的概率为
$P(X \leq \frac{l}{2}sin\Theta) = \frac{8}{ab\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}sin\theta} dxd\theta dy = \frac{2l}{b\pi}$。
同理，针与垂直线相交的概率为：
$P(Y \leq \frac{l}{2}cos\Theta) = \frac{8}{ab\pi}\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}cos\theta} dyd\theta dx = \frac{2l}{a\pi}$。
所以相交边数的期望值为$\frac{2l}{b\pi}(1 - \frac{2l}{a\pi}) + \frac{2l}{a\pi}(1 - \frac{2l}{b\pi}) + 2\frac{2l}{a\pi}\frac{2l}{b\pi} = \frac{2l}{b\pi} + \frac{2l}{a\pi}$，至少交于一条边的概率为$\frac{2l}{b\pi} + \frac{2l}{a\pi} - \frac{2l}{a\pi}\frac{2l}{b\pi}$。

17.

略。