

5.

设挑选一个学生，这个学生是天才为事件A，这个学生喜欢巧克力为事件B，那么：

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.4$$

$$\text{所以 } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 0.1。$$

这题是12题容斥原理的应用。

6.

因为偶数的概率是奇数的两倍，又因为 $P(\text{even}) + P(\text{odd}) = 1$ ，所以 $P(\text{even}) = \frac{2}{3}, P(\text{odd}) = \frac{1}{3}$ 。

因为不同偶数/奇数面出现的概率相同，于是：

$$P(1) = \frac{1}{9}$$

$$P(2) = \frac{2}{9}$$

$$P(3) = \frac{1}{9}$$

$$P(4) = \frac{2}{9}$$

$$P(5) = \frac{1}{9}$$

$$P(6) = \frac{2}{9}$$

所以点数小于4的概率为 $P(1) + P(2) + P(3) = \frac{4}{9}$ 。

7.

样本空间为：第一次时停止，第二次时停止，第三次时停止……

8.

不妨设第n局获胜的概率为 P_n ，那么最终获胜的概率：

$$P = P_1(1 - P_2)P_3 + P_1P_2 + (1 - P_1)P_2P_3$$

化简上式得到 $P = P_1P_3 + P_2(P_1 + P_3 - 2P_1P_3)$ 。

对于函数 $f(x, y) = x + y - 2xy$ 在x和y都属于 $[0, 1]$ 区间内时， $x \geq x^2, y \geq y^2, (x - y)^2 \geq 0$ ，所以 $x + y - 2xy \geq x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$

所以对于 $(P_1 + P_3 - 2P_1P_3)$ ，这个值永远非负，故 P_2 最大时整个式子最大，且与 P_1, P_3 的顺序无关。
证毕。