1.

因为X是$[0,1]$上的均匀分布，所以$p_X(x) = 1, x \in [0,1]$。所以Y的分布列为

$$P_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{3}} p_X(x)dx = \frac{1}{3} & y = 1 \\ \int_{\frac{1}{3}}^{1} p_X(x)dx = \frac{2}{3} & y = 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

所以$E[Y] = \frac{5}{3}$，根据期望规则， $E[Y] = \int_0^{\frac{1}{3}} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} 2dx = \frac{5}{3}$，可以验证我们的结果是正确的。

2.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}$，可见积分值与指数分布相同，归一化得证。

所以拉普拉斯随机变量的期望$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = 0$，则$var(X) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = \frac{2}{\lambda^2}$。

拉普拉斯分布的更普遍形式为$p_X(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$，这个形式下的
$E[X] = \mu, var(X) = 2\lambda^2$。

3.

略。

4.

略。