19.

若$j \neq i$，则在第i个抽屉内找但没有找到的概率为$1 - p_i d_i$（要么不在这个抽屉，要么在但是没有找到），而报告在第j个抽屉的概率为p_j，故结果为$\frac{p_j}{1-p_i d_i}$。

若$j = i$，在第i个抽屉内找但没有找到的概率同上，而报告恰好就在第i个抽屉并且没有被找到的概率为$P_i(1-d_i)$，故结果为$\frac{p_i(1-d_i)}{1-p_i d_i}$

证毕。

20.

(a)

(i)

进攻风格下，和局的概率为0，所以我们只需要考虑两种情况：前两局鲍里斯均获胜，前两局平局，第三局鲍里斯获胜。

所以获胜概率为：$p_w^2 + p_w^2(1-p_w)$。

(ii)

保守风格下，获胜的概率为0，所以获胜情况只有一种：前两局和局，第三局获胜。

所以获胜概率为：$p_d^2 p_w$。

(iii)

由全概率定理，整理出所有获胜情况：

- 第一局获胜，第二局平局
- 第一局获胜，第二局失败，第三局获胜
- 第一局失败，第二局获胜，第三局获胜

所以获胜概率为：$p_w p_d + p_w^2(1-p_d) + p_w^2(1-p_w)$

(b)

由(a)(iii)可知，策略三的获胜概率为$p_w(p_d+2p_w-p_w^2-p_wp_d)$。
不难发现若$p_w=0.49$时，$\exists p_d\approx 0.56$，使得上式可以大于0.5。

21.

- 若在第一回合获胜，概率为$\frac{m}{m+n}$
- 若在第二回合获胜，概率为$\frac{n}{m+n}\frac{n-1}{m+n-1}\frac{m}{m+n-2}$
- 若在第三回合获胜，概率为$\frac{n}{m+n}\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\frac{n-3}{m+n-3}\frac{m}{m+n-4}$
- ...

从上面的式子并不容易看出递推式来，但如果稍作一些改动：

- 若第一回合前无法决出胜负，概率为1
- 若第二回合前无法决出胜负，概率为$\frac{n}{m+n}\frac{n-1}{m+n-1}$
- 若第三回合前无法决出胜负，概率为$\frac{n}{m+n}\frac{n-1}{m+n-1}\frac{n-2}{m+n-2}\frac{n-3}{m+n-3}$
- ...

设第i回合前无法决出胜负的概率为p_i，那么我们可以得到$p_1=1$，递推式$p_i=p_{i-1}\frac{n-2i+4}{m+n-2i+4}\frac{n-2i+3}{m+n-2i+3}$
所以获胜概率为：$\sum_{i=1}^{1+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}p_i\frac{m}{m+n-2i+2}$

22.

当$k=1$时，取出白球的概率为$\frac{m}{m+n}$显然成立。
不妨假设当$k=p$时，在第k个罐子里取出白球的概率依然是$\frac{m}{m+n}$，则对于$k=p+1$时，由全概率定理，在第k个罐子里取出白球的概率为
$\frac{m}{m+n}\frac{m+1}{m+n+1}+\frac{n}{m+n}\frac{n}{m+n+1}$
整理后得到$\frac{m}{m+n}$，归纳完毕。
证毕。

23.

不妨设罐子里的球的个数为n，分两种情况讨论：

- 第一次交换两个球，第二次再交换回来，第三第四次亦如此，这样做的概率为$(\frac{1}{n})^4$
- 第一次第二次一共交换了两组球，第三第四次再交换回来，这样做的概率为$\frac{4(n-1)^2}{n^6}$

总的概率为二者之和。

24.

$\frac{2}{3}$是先验概率，而$\frac{1}{2}$是后验概率。

25.

不妨设两个信封内的钱数分别为S和L，且$L > S$。

对于S，选中的概率为$\frac{1}{2}$，且只有抛硬币的次数不少于S次时才会换信封。若第一次选中了该信封，则最后得到的钱数为L的概率为

$\frac{1}{2}(1-\sum_{i=1}^{S-1}(\frac{1}{2})^i) = (\frac{1}{2})^S$

对于L，选中的概率也是$\frac{1}{2}$，且只有抛硬币的次数小于L次时才会选择不换信封。若第一次选中了该信封，则最后得到的钱数为L的概率为

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L-1}(\frac{1}{2})^i = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^L$

所以最后的概率为$\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^L + (\frac{1}{2})^S$。因为$L > S$，所以这个概率大于$\frac{1}{2}$。

26.

(a)

由于A和B独立，由条件概率$P(A|B) = \frac{p(1-q)}{1-q} = p$。

(b)

$P(C) = q(p + \frac{1-p}{2}) = \frac{q(1+p)}{2}$

由贝叶斯准则：$P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \frac{2p}{p+1}$

27.

- 当鲍勃的所有硬币均正面朝上时，爱丽丝无论怎么抛都是失败，一共有2^n种情况
- 当鲍勃有一枚硬币朝下时，对于鲍勃来说有C_{n+1}^1种可能，而对于爱丽丝来说，除了全正以外都是鲍勃获胜，故有$2^n - C_n^0$种情况
- 当鲍勃有两枚硬币朝下时，对于鲍勃来说有C_{n+1}^2种可能，对于爱丽丝来说，有$2^n - C_n^0 - C_n^1$种情况
- ...

综上，所有鲍勃获胜的情况的可能数一共是 $2^n + C_{n+1}^1(2^n - C_n^0) + C_{n+1}^2(2^n - C_n^0 - C_n^1) + \ldots + C_{n+1}^n(2^n - C_n^0 - \ldots - C_n^{n-1})$

上式化简后得到$2^{2n+1} - 2^n - \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i(\sum_{j=0}^{i-1} C_n^j)$。

注意到$2^{2n+1} = 2^{n+1} \times 2^n = (\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i)(\sum_{i=0}^n C_n^i)$

所以$(\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i)(\sum_{i=1}^n C_n^i) = 2^{2n+1} - 2^{n+1}$

因为$\sum_{i=1}^n C_{n+1}^i(\sum_{j=0}^{i-1} C_n^j) = \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i(\sum_{j=i}^n C_n^j)$

所以 $2\sum_{i=1}^n C_{n+1}^i(\sum_{j=0}^{i-1} C_n^j) = \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i(\sum_{j=0}^{i-1} C_n^j) + \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i(\sum_{j=i}^n C_n^j)$

上式就等于$(\sum_{i=1}^n C_{n+1}^i)(\sum_{i=0}^n C_n^i)$，即$2^{2n+1} - 2^{n+1}$

带回原式可知鲍勃获胜的情况总共有2^{2n}种，所有情况一共有2^{2n+1}种，故获胜的概率为$\frac{1}{2}$。

证毕。

28.

略。

29.

略。