## 16.

### (a)

由归一性可知$2(P_X(3)+P_X(2)+P_X(1))+P_X(0)=1$，解之得$a=\frac{1}{28}$。
由于$P_X$及其定义域关于$x=0$对称，所以$E[x]=0$。

### (b)

因为$E[x]=0$，所以$Z=X^2$，故$P_Z(z)=\{\begin{array}{ll}\frac{2z}{28} & z=0,1,4,9\\ 0 & otherwise\end{array}$

### (c)

由(b)得，$var(X)=E[Z]=\frac{2}{28}+\frac{32}{28}+\frac{162}{28}=7$。

### (d)

$var(X)=\sum_x(x-E[X])^2p_X(x)=2(\frac{1}{28}+\frac{16}{28}+\frac{81}{28})=7$

## 17.

因为$F=1.8C+32$，所以$E[F]=1.8E[C]+32=40$，$var(F)=1.8^2var(C)=324$，所以$\sigma_F=18$。

## 18.

$E[X]=\int_a^b\frac{2^x}{b-a}dx=\frac{2^b-2^a}{(b-a)ln2}$
$var(X)=\int_a^b(2^x-E[X])^2=\frac{2^{2b}-2^{2a}}{2ln2}-\frac{b-a}{ln2}+(2^b-2^a)^2(b-a)$

## 19.

略。

## 20.

设需要购买的数量为随机变量X，则X满足几何分布。所以$P_X(x) = (1-p)^{x-1}p$，故期望$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p$，计算$E[x]-(1-p)E[x]$后求得期望为$\frac{1}{p}$。

首先计算$E[X^2]$，然后使用$var(X) = E[X^2] - E[X]^2$计算方差。因为$E[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1}p$，不难发现可以利用积分得到类似$E[X]$的形式。最后求得$E[X^2] = \frac{2-p}{p^2}$，故$var(X) = \frac{1-p}{p^2}$。

几何分布的期望也可以通过第6节的全期望定理完成。

## 21.

由题意得，这是一个几何分布，所以$P_N(n) = (\frac{1}{2})^n$。于是我们可以求得期望$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^x 2^x = \infty$。

这个级数并不收敛，所以理论上你可以得到无穷多的钱，但是事实上这并不可能发生。

## 22.

### (a)

$$P_X(x) = (1-p-q+2pq)^{x-1}(p+q-2pq)$$
$$E[X] = \frac{1}{p+q-2pq}$$
$$var(X) = \frac{1-p-q+2pq}{(p+q-2pq)^2}$$

### (b)

由条件概率得：$\frac{p(1-q)}{p+q-2pq}$

# 23.

## (a)

抛掷k次，前$k-1$次必定是正反交替，最后一次和倒数第二次相同。抛掷k次结束可以有两种情况（最后一次为正面和最后一次为反面），所以分布列为$P_X(k)=(\frac{1}{2})^{k-1}$。

期望值$E[X]=\sum_{x=2}^{\infty}x(\frac{1}{2})^{x-1}$，利用积分可得$E[X]=3$。

同理方差$var(X)=E[X^2]-E[X]^2=12-9=3$。

这个问题在条件一节的习题33中有对任意p值下期望值公式的推广。

## (b)

抛掷k次，一定先出现若干次（可以为0）反面朝上，接下来若干次正面朝上I（至少有一次），最后一次反面朝上。所以分布列为$P_X(k)=(k-1)(\frac{1}{2})^k$。

期望值$E[X]=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)(\frac{1}{2})^x=4$。

方差$var(X)=E[X^2]-E[X]^2=80-16=64$