5.

设挑选一个学生，这个学生是天才为事件A，这个学生喜欢巧克力为事件B，那么：

$P(A)=0.6, P(B)=0.7, P(A\cap B)=0.4$

所以$P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=0.1$。

这题是12题容斥原理的应用。

6.

因为偶数的概率是奇数的两倍，又因为$P(even)+P(odd)=1$，所以$P(even)=\frac{2}{3}, P(odd)=\frac{1}{3}$。

因为不同偶数/奇数面出现的概率相同，于是：

$$\begin{aligned}
P(1) &= \tfrac{1}{9}\\
P(2) &= \tfrac{2}{9}\\
P(3) &= \tfrac{1}{9}\\
P(4) &= \tfrac{2}{9}\\
P(5) &= \tfrac{1}{9}\\
P(6) &= \tfrac{2}{9}
\end{aligned}$$

所以点数小于4的概率为$P(1)+P(2)+P(3)=\frac{4}{9}$。

7.

样本空间为：第一次时停止，第二次时停止，第三次时停止……

8.

不妨设第n局获胜的概率为P_n，那么最终获胜的概率：

$P=P_1(1-P_2)P_3+P_1P_2+(1-P_1)P_2P_3$

化简上式得到$P=P_1P_3+P_2(P_1+P_3-2P_1P_3)$。

对于函数$f(x,y)=x+y-2xy$在x和y都属于$[0,1]$区间内时，$x\geq x^2, y\geq y^2, (x-y)^2\geq 0$，所以$x+y-2xy\geq x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geq 0$

所以对于$(P_1+P_3-2P_1P_3)$，这个值永远非负，故P_2最大时整个式子最大，且与P_1,P_3的顺序无关。

证毕。

9.

(a)

$P(A)=P(A\cap\Omega)=P(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}S_i)=P(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap S_i))$

由于$\{S_1,S_2,...,S_n\}$互不相容，故$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap S_i)$

证毕。

(b)

不难发现，$B^c\cap C^c, B\cap C^c, B^c\cap C, B\cap C$互不相容

所以$P(A)=P(A\cap B^c\cap C^c)+P(A\cap B\cap C^c)+P(A\cap B^c\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

由容斥原理，$P(A)=P(A\cap B^c\cap C^c)+P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$

证毕。

10.

$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))$

证毕。

11.

(a)

原文给出的等式应为$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，似乎存在笔误。

(b)

略。

12.

(a)

略。

(b)

当n = 3时，由(a)可知等式成立。

假定n = m时等式依然成立，那么当n = m + 1时：

$P(\bigcup_{k=1}^{m+1}) = P(A_{m+1} \cup \bigcup_{k=1}^{m} A_k) = P(A_{m+1}) + \sum_{i \in S_1} P(A_i) - \sum_{(i_1,i_2) \in S_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + ... + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) - P(A_{m+1} \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k)$

整理上式可得：

$P(\bigcup_{k=1}^{m+1}) = \sum_{i \in S_1} P(A_i) - \sum_{(i_1,i_2) \in S_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + ... + (-1)^n P(\bigcap_{k=1}^{m+1} A_k)$

归纳完毕。

13.

略。