30.

如果两头猎犬均选择了正确方向，概率为p^2；如果只有一头选择了正确方向，概率为$2p(1-p)$，此时随机选择到正确方向的概率是$p(1-p)$，故在这个策略下选择正确方向的概率为$p^2+p-p^2=p$，并不会比只让一条猎犬选择更优。

31.

(a)

由于不同信号之间独立，第k个信号正确传输的概率为$p(1-\epsilon_0)+(1-p)(1-\epsilon_1)$

(b)

1011一共含有三个1和一个0，且彼此独立，所以正确传输的概率为$(1-\epsilon_0)(1-\epsilon_1)^3$

(c)

只有以下的情况数据可以被正常传输：

- 3个0均没有错误，概率为$(1-\epsilon_0)^3$
- 只有一个0发生错误，概率为$C_3^1\epsilon_0(1-\epsilon_0)^2$

综上，0被正确传输的概率为$(1-\epsilon_0)^3+3\epsilon_0(1-\epsilon_0)^2$

(d)

将(c)中的式子变形为$1^3-3\epsilon_0^2(1-\epsilon_0)-\epsilon_0^3=1-3\epsilon_0^2+2\epsilon_0^3$

对上式求导得到$-6\epsilon_0+6\epsilon_0^2$,由于$0\le\epsilon_0\le 1$，所以函数在$\epsilon_0=0$时取到最大值。即：整个传输过程完全不要出错是坠吼的。

(e)

由贝叶斯准则，对方发出的数据为0的概率为$\frac{P(0)}{P(1)+P(0)}=\frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_1+\epsilon_0^2}$

32.

- 因为各次生育是独立的，所以国王的性别并不会影响他的兄弟姐妹，而生男的概率为$\frac{1}{2}$，故国王有一个兄弟的概率为$\frac{1}{2}$
- 国王的母亲一共有两个孩子，并且两个都是男性，所以国王有一个兄弟的概率为$\frac{1}{4}$

33.

投一次硬币已经没办法解决这个问题了，那我们考虑投两次。投两次硬币的全部概率为$1^2 = (1-p+p)^2 = (1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2$。注意到里面有一个2，那么我们不妨投两次硬币，如果两次结果相同，则重新开始；剩余的两种情况每个人获胜的概率均为$\frac{1}{2}$。

34.

- 第一个子系统有效的概率为p
- 第二个子系统有效的概率为$p + 3p^2 - 5P^3 + 2p^4$
- 第三个子系统有效的概率为$2p - p^2$

由于三个子系统独立，整个系统的有效概率为$p(p + 3p^2 - 5p^3 + 2p^4)(2p - p^2) = 2p^3 + 5p^4 - 13p^5 + 9p^6 - 2p^7$

35.

由独立性：$\sum_{i=k}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

36.

(a)

只有所有电厂均中断的时候全市才会停电，故由独立性可得：$\Pi_{i=1}^{n} p_i$

(b)

如果所有电厂中断，或者只有不到三个电厂在供电，全市会处在停电状态。设$P(i), P(i,j)$分别为仅第i个电厂工作的概率和仅第i，j个电厂在工作的概率，即$P(i) = \frac{(1-p_i)\Pi_{j=1}^n p_j}{p_i}, P(i,j) = \frac{(1-p_i)(1-p_j)\Pi_{k=1}^n p_k}{p_i p_j}$，全市停电的概率为$\Pi_{i=1}^n + \sum_{i=1}^n P(i) + \sum_{1\le i<j\le n} P(i,j)$。

37.

$\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} [r_1 i + r_2 j > c]\, C_{n_1}^i p_1^i (1-p_1)^{n_1-i} C_{n_2}^j p_2^j (1-p_2)^{n_2-j}$

38.

考虑泰里思领先的概率p_T：只有在剩下的比赛中得到至少6分，才能保证泰里思领先。所以$p_T = \sum_{i=6}^8 C_8^i p^i (1-p)^{8-i}$。

同理对于温迪来说，$P_W = \sum_{i=4}^8 C_8^i (1-p)^i p^{8-i} = \sum_{i=0}^4 C_8^i p^i (1-p)^{8-i}$。

所以泰里思可以分到的钱为$\frac{10p_T}{p_T+p_W} = \frac{10p_T}{1-p^5(1-p)^3}$

39.

设这天是好天气的概率为p_w，若当天每个学生的出勤概率为t，则当天出勤人数不少于k的概率$P_k(t) = \sum_{i=k}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$，那么教授可以讲课的概率为$p_w P_k(p_g) + (1-p_w) P_k(p_b)$。

40.

当$n=0$时，$p_n = 1$。

当$n>0$时，$p_n = p(1-p_{n-1}) + p_{n-1}(1-p)$。

所以$p_n = p_{n-1}(1-2p) + p$。令$p'_n = p_n - \frac{1}{2}$，则$p'_n = (1-2p)p'_{n-1}$，由等比数列通项公式：$p'_n = \frac{(1-2p)^n}{2}$，所以$p_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$。

41.

假设第一个人转出来的数字为p，则在某一回合内，这个人被淘汰的概率为p。所以第一个人在第n个回合被淘汰的概率等于前n-1回合没被淘汰的概率乘上这个回合被淘汰的概率，即$P(N=n)=(1-p)^{n-1}p$。

42.

略。这个问题在第七章马尔可夫链中还会再遇到。

43.

略。

44.

(a)

略。

(b)

由(a)可知：若A和B独立，则A和B^c独立，即$P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$。

对于事件B^c，由全概率公式：$P(B^c)=P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B^c)=P(A)P(B^c)+P(A^c\cap B^c)$，所以$P(A^c\cap B^c)=(1-P(A))P(B^c)=P(A^c)P(B^c)$，所以$A^c$和$B^c$独立。

证毕。

45.

略。

46.

略。

47.

略。

48.

略。