1.

得分	0	1	2	3	4
概率	0.18	0.27	0.34	0.14	0.07

2.

假设有k个人与你的生日相同，由二项分布：

$$P_X(k) = C_{500}^k p^k (1-p)^{500-k}$$

其中$p = \frac{1}{365}$，则有人生日与你相同的概率为$1 - P_X(0) = 1 - (1 - \frac{1}{365})^{500} \approx 0.75$。

若使用泊松分布逼近，$\lambda = np = \frac{500}{365}$，那么$1 - P_X(0) = 1 - e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \approx 0.75$。

3.

(a)

设k为比赛连续平局的局数，则$P(k) = 0.3^k$，那么赢得比赛的概率为$0.4\sum_{i=0}^{9} P(i) = 0.5714251972,$。

(b)

下棋的前9局数满足几何分布，所以$P_X(k) = (1-p)^{k-1}p = 0.3^{k-1}0.7$，第10局后比赛一定结束，所以分布列为：

局数	1	2	3	4	5
概率	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.00567

局数	6	7	8	9	10
概率	0.001701	0.0005103	0.00015309	0.000045927	0.000019683

4.

(a)

在使用者的数量小于等于50的时候，调制解调器的数量分布满足二项分布；使用者数量大于50的时候，由于调制解调器数量不足，故一定是50个。

所以分布列为：

人数	$k \le 50$	$k > 50$
概率	$C_{1000}^{k} 0.01^{k} 0.99^{1000-k}$	$1-\sum_{i=0}^{50} C_{1000}^{i} 0.01^{i} 0.99^{1000-i}$

(b)

设使用者人数为k，由泊松分布有$P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-10}\frac{10^k}{k!}$

(c)

利用精确分布，$P = 1-\sum_{i=0}^{50} C_{1000}^{i} 0.01^{i} 0.99^{1000-i}$，而利用泊松分布，$P = 1-\sum_{i=0}^{50} e^{-10}\frac{10^i}{i!}$

5.

(a)

第一时段结束时：

信息包数量k	$k < b$	$k = b$
概率	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$1-\sum_{i=0}^{b-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$

第二时段结束时：

信息包数量k	$k = 0$	$k > 0$
概率	$\sum_{i=0}^{c} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$	$\sum_{i=c+1}^{b-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} + 1-\sum_{i=0}^{b-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$

(b)

如果到达的信息包的数量不超过b，是不会发生丢包的，所以丢包的概率为$1-\sum_{i=0}^{b}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$。

6.

(a)

对于$n=5$，凯尔特人队获胜的概率为$p^3+C_3^1p^3(1-p)+C_4^2p^3(1-p)^2=10p^3-15p^4+6p^5$；

对于$n=3$，凯尔特人队获胜的概率为$p^2+C_2^1p^2(1-p)=3p^2-2p^3$

所以当$10p^3-15p^4+6p^5>3p^2-2p^3$，时，$n=5$比$n=3$合算。将所有式子移到左侧，消去$p^2(p>0)$并求导得到$18p^2-30p+12$，不难发现当$p=\frac{1}{2}$或$p=1$时，原式为0，且该函数在$[0.5,1]$上先增后减，所以当$p\in(0.5,1)$时$n=5$比$n=3$合算。

(b)

不难得到$P_N(n=2k+1)=p^{k+1}+C_{k+1}^1P^{k+1}(1-p)+\ldots+C_{2k}^kp^{k+1}(1-p)^k$，并且对于不同的k，$P_N(0)=0,P_N(1)=1,P_N(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$恒成立（0和1十分显然，对于0.5的证明我们额外放在(c)部分讲解）。

不妨做差$P_N(2k+3)-P_N(2k+1)$并对这个式子求导，不难验证导数在$\frac{1}{2}$处大于0。由罗尔定理导函数在$[0.5,1]$之间一定存在值为0的点，且仅有一个（这是一个2k+1重多项式，其中0为k重根，1为k重根，$\frac{1}{2}$为1重根）。所以导函数在区间上先增后减，原来的差值函数保证大于0，故$p\in(0.5,1)$。

(c)

原题不存在，这部分是(b)中$P_N(n)$在$p=\frac{1}{2}$为常数的证明。

因为$P_N(n=2k+1)=p^{k+1}+C_{k+1}^1p^{k+1}(1-p)+\ldots+C_{2k}^kp^{k+1}(1-p)^k$，将$\frac{1}{2}$带入后$P_N(2k+1)=(\frac{1}{2})^{k+1}+C_k^1(\frac{1}{2})^{k+2}+\ldots+C_{2k}^k(\frac{1}{2})^{2k+1}$。

当$k=0$时，原式显然成立。假定$k=m$时原式也成立，则$k=m+1$时，我们不妨计算$2^{k+2}P_N(2m+3),2^{k+1}P_N(2m+1)$，将两个式子逐项做差，得到$2^{k+1}P_N(2m+1)$，则$2^{k+2}P_N(2m+3)=2^{k+2}P_N(2m+1)$，故原式也为$\frac{1}{2}$，归纳完毕。

证毕。

7.

(a)

(1)

由于失败后会做记号，所以尝试的次数最多只有四次（第四次即便失败，剩下的钥匙也没必要再试一次了）。

分布列：

尝试次数	1	2	3	4
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(2)

随机尝试的情况下，尝试次数满足几何分布，所以分布律为：$P(k) = (\frac{4}{5})^{k-1}(\frac{1}{5})^k$。

(b)

(1)

尝试次数	1	2	3	4	5	6	7	8
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

(2)

$P(k) = (\frac{4}{5})^{k-1}(\frac{1}{5})^k$

8.

二项随机变量满足$P_X(k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$。

所以

$$P_X(k+1) = C_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} =$$

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} =$$

$$\frac{n-k}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{p}{1-p} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P_X(k)$$

证毕。

9.

由第8题，我们可以得到： $P_X(k+1) - P_X(k) = (\frac{p}{1-p}\frac{n-k}{k+1} - 1)P_X(k)$。

由于$P_X(k) \geq 0$，我们不妨令$f(k) = \frac{p}{1-p}\frac{n-k}{k+1} - 1$，则$f'(k) = \frac{-p(n+1)}{(1-p)(k+1)^2}$。

不难发现导函数恒为负，且当$k = p(n+1) - 1$时，原函数为0。所以当$k <= (n+1)p$时，$P_X(k)$是非降的，而在$k > (n+1)p$时是单调递减的。

证毕。

10.

因为泊松分布$P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$，所以$P'_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k!)^2}(ln\lambda\Gamma(k+1) - \Gamma'(k+1))$。

由于括号外的部分恒正，我们解括号内的部分等于0，即$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = \Psi(k+1) = ln\lambda$。

解得近似解为$k = \lambda$。由于$\Psi(x)$是单调递增的，故导函数在$[0, \lambda]$上大于0，在(λ, ∞)上小于0。

也可以简单地通过$\frac{P_X(k+1)}{P_X(k)} = \frac{\lambda}{k+1}$看出单调性。

证毕。

11.

略。

12.

略。