

1.

令事件A为掷出偶数，即 $A = \{2, 4, 6\}$

令B表示点数大于3的事件，即 $B = \{4, 5, 6\}$

那么：

$$A^c = \{1, 3, 5\}, B^c = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}, A \cap B = \{4, 6\}$$

$$\text{所以 } (A \cup B)^c = \{1, 3\} = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 5\} = A^c \cup B^c$$

2.

(a)

设全集为S，由代数性质：

$$A^c =$$

$$A^c \cap S =$$

$$A^c \cap (B \cup B^c) =$$

$$(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

对 $B^c$ 的结论同理，证毕。

也可以通过韦恩图进行证明：任意一个集合中的元素，要么属于B，要么属于 $B^c$ 。上式就是全概率定理的特殊情况。

(b)

设全集为S，由德摩根律：

$$(A \cap B)^c =$$

$$A^c \cup B^c =$$

$$(A^c \cap S) \cup (B^c \cap S) =$$

$$(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) =$$

$$(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$$

证毕。

也可以通过韦恩图进行证明：A交B的补集中，只有三种可能：属于A但不属于B、属于B但不属于A、既不属于A也不属于B，整理即可得到上式。

(c)

令事件A为掷出偶数，即 $A = \{2, 4, 6\}$

令B表示点数大于3的事件，即 $B = \{1, 2, 3\}$

则 $(A \cap B)^c = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) = \{1, 3\} \cup \{5\} \cup \{4, 6\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

所以 $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$ 。

3.

略。

4.

证明略，这里给出一个实例。假设 $[0, 1]$ 区间中的数可数，那么我们可以列出：

$$x_1 = 0.3154\dots$$

$$x_2 = 0.114514\dots$$

$$x_3 = 0.2333\dots$$

...

我们可以找到一个 $y$ ，使得 $y = 0.121\dots$ 。由于 $y$ 的第 $n$ 位与 $x_n$ 不同，于是这个 $y$ 不可能在上面的数中。

当然找到 $y$ 的方式并不止书上一种。