29.

$$M(s) = \sum_x e^{sx} p_X(x)$$
$$= e^s \times \frac{1}{2} + e^{2s} \times \frac{1}{4} + e^{3s} \times \frac{1}{4}$$

所以：

- $E[X] = \frac{d}{ds} M(s)|_{s=0} = \frac{7}{4}$
- $E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2} M(s)|_{s=0} = \frac{15}{4}$
- $E[X^3] = \frac{d^3}{ds^3} M(s)|_{s=0} = \frac{37}{4}$

30.

标准正态分布$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$，其矩母函数为

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2} + sx} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 - 2sx + s^2 - s^2}{2}} dx$$
$$= \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2}} dx$$
$$= e^{\frac{s^2}{2}}$$

所以$E[X^3] = 0, E[X^4] = 3$。

31.

$M(s) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x + sx} dx = \frac{-\lambda}{s-\lambda}$，所以$E[X^3] = \frac{6}{\lambda^4}, E[X^4] = \frac{24}{\lambda^5}$, $E[X^5] = \frac{120}{\lambda^6}$

32.

猜测题目正确形式应为：

- (1) $M(s) = e^{2(e^{s-1} - 1)}$
- (2) $M(s) = e^{e(e^s - 1)}$

(a)

第一个不是矩母函数。根据矩母函数的定义$M_X(s)=E[e^{sX}]$,$M_X(0)=E[1]=1$，很明显第一个函数不满足这个条件。

(b)

第二个矩母函数为泊松分布的矩母函数的形式，$\lambda=2$，所以$P(X=0)=e^{-2}$

33.

不难看出加号两侧是指数分布的矩母函数的形式，所以概率密度函数：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\times 2e^{-2x}+\frac{2}{3}\times 3e^{-3x} & x\geq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

34.

利用卷积计算的分布列：

$$p(x)=\begin{cases}1-p_1-p_2-p_3+p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-p_1p_2p_3 & x=0\\ 3p_1p_2p_3+p_1+p_2+p_3-2(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3) & x=1\\ p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-3p_1p_2p_3 & x=2\\ p_1p_2p_3 & x=3\end{cases}$$

对于某一个球员，其矩母函数为$M_{X_i}(s)=1-p_i+p_ie^s$，又因为独立随机变量的和的矩母函数是和项的矩母函数的乘积，所以$M_X(s)=\Pi_{i=1}^3(1-p_i+p_ie^s)$，展开后去掉$e^{sk}$，形式与上面的分布列是一样的。

35.

由$M(0)=1$，可以计算得$c=\frac{2}{9}$，所以$E[X]=\frac{d}{ds}M(s)|_{s=0}=\frac{37}{18}$；令$\alpha=\frac{e^s}{3}$，那么$M(s)=\frac{c(3+4e^2+2e^3)}{3(1-\alpha)}=\frac{2}{27}(3+4e^2+2e^3)(1+\alpha+\alpha^2+\ldots)$，所以$p_X(1)=\frac{2}{27},p_X(0)=\frac{2}{9}$，由条件期望：$E[X|X\neq 0]=\frac{E[X]}{1-p_X(0)}=\frac{37}{14}$。

36.

(a)

由题意得：$M_{XY}(s) = \frac{1}{3}M_Y(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{2-s}$， $M_{(1-X)Z} = \frac{2}{3}M_Z(s) = \frac{2}{3}e^{3(e^s-1)}$，所以$M_U(s) = \frac{2s}{9(2-s)}e^{3(e^s-1)}$。

(b)

$M_{2Z+3}(s) = M_{2Z}(s)M_3(s) = e^{3(e^{2s}-1)+3s}$

(c)

$M_{Y+Z}(s) = \frac{s}{2-s}e^{3(e^s-1)}$

37.

TODO:

38.

略。

39.

略。

40.

略。