

5.

设挑选一个学生，这个学生是天才为事件A，这个学生喜欢巧克力为事件B，那么：

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.4$$

$$\text{所以 } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 0.1。$$

这题是12题容斥原理的应用。

6.

因为偶数的概率是奇数的两倍，又因为  $P(\text{even}) + P(\text{odd}) = 1$ ，所以  $P(\text{even}) = \frac{2}{3}, P(\text{odd}) = \frac{1}{3}$ 。

因为不同偶数/奇数面出现的概率相同，于是：

$$P(1) = \frac{1}{9}$$

$$P(2) = \frac{2}{9}$$

$$P(3) = \frac{1}{9}$$

$$P(4) = \frac{2}{9}$$

$$P(5) = \frac{1}{9}$$

$$P(6) = \frac{2}{9}$$

所以点数小于4的概率为  $P(1) + P(2) + P(3) = \frac{4}{9}$ 。

7.

样本空间为：第一次时停止，第二次时停止，第三次时停止……

8.

不妨设第n局获胜的概率为  $P_n$ ，那么最终获胜的概率：

$$P = P_1(1 - P_2)P_3 + P_1P_2 + (1 - P_1)P_2P_3$$

化简上式得到  $P = P_1P_3 + P_2(P_1 + P_3 - 2P_1P_3)$ 。

对于函数  $f(x, y) = x + y - 2xy$  在x和y都属于  $[0, 1]$  区间内时，假设  $x < y$  (反之亦然)，有  $f(x, y) \geq 2x - 2x^2 \geq 0$ ，

所以对于 $(P_1 + P_3 - 2P_1P_3)$ ，这个值永远非负，故 $P_2$ 最大时整个式子最大，且与 $P_1, P_3$ 的顺序无关。  
证毕。