

38.

设每个路口遇到红灯的概率为 $p$ 。

(a)

$$P_X(x) = C_4^x p^x (1-p)^{4-x}$$

$$E[X] = 4p$$

$$\text{var}(X) = \sum_{i=0}^4 \text{var}(X_i) = 4p(1-p)$$

(b)

$$\text{var}(2X) = 16p(1-p)$$

39.

由独立性，有：

$$E[X] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 35$$

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{10} \text{var}(X_i) = \frac{175}{6}$$

40.

由于论文之间的成绩完全独立，我们不妨在论文与论文之间插入隔板，以此区分不同成绩的两批论文。如果上交了 $k$ 篇论文，每种评分的论文至少有一篇的概率就为 $P(k) = \frac{5!C_{k-1}^5}{(k+1)^5}$ （一共需要安插5个隔板，分为6个不同评分的区间，所有的可能安插的位置一共是 $k+1$ 个，而合法的安插位置只能在中间的 $k-1$ 个中选择，且不能重复，隔板自身的顺序有 $5!$ 种）。

其中 $P(24) \approx 0.5$ ， $\lim_{k \rightarrow \infty} P(k) = 1$ 。

41.

(a)

不难得到  $P(x) = C_{250}^x 0.02^x 0.98^{250-x}$ , 所以  $E[X] = 50$ 。  
所以罚单数刚好等于50的概率为  $P(50)$ 。

(b)

利用泊松分布近似(a)中的结果:  $P(50) \approx e^{-50} \frac{(50)^{50}}{50!} \approx 0.056$ 。

(c)

$$E[0.5 \times 10X + 0.3 \times 20X + 0.2 \times 50X] = 1050$$
$$\text{var}(0.5 \times 10X + 0.3 \times 20X + 0.2 \times 50X) = 2160.9$$

(d)

因为  $\sigma(X) \approx 2.21$ , 所以  $p \in [0, 0.064]$ 。

42.

(a)

因为  $P_{X_i} = S$ , 所以  $E[X_i] = S$ , 故  $E[S_n] = \frac{nS}{n} = S$ 。  
对于单个点的方差  $\text{var}(X_i) = S(1-S)$  是有限值, 所以由独立性  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(S_n) = \frac{nS(1-S)}{n^2} = 0$ 。  
证毕。

(b)

$$S_n = \frac{(n-1)S_{n-1} + X_n}{n}$$

(c)

由于单位正方形的内切圆的半径为 $\frac{1}{2}$ ，所以

$$\pi = 4E[S_n] = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{10000} P_{X_i}$$

只要计算落在圆形内部的点的数量即可确定 $\pi$ 的值。

(d)

类似于(c)。

**43.**

略。

**44.**

略。

**45.**

略。

**46.**

略。