29.

$$
\begin{aligned}
&M(s) = \sum_x e^{sx} p_X(x) \\
&= e^s \times \frac{1}{2} + e^{2s} \times \frac{1}{4} + e^{3s} \times \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

所以：

- $E[X] = \frac{d}{ds} M(s)|_{s=0} = \frac{7}{4}$
- $E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2} M(s)|_{s=0} = \frac{15}{4}$
- $E[X^3] = \frac{d^3}{ds^3} M(s)|_{s=0} = \frac{37}{4}$

30.

标准正态分布$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$，其矩母函数为

$$
\begin{aligned}
&M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2} + sx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 - 2sx + s^2 - s^2}{2}} dx \\
&= \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2}} dx \\
&= e^{\frac{s^2}{2}}
\end{aligned}
$$

所以$E[X^3] = 0, E[X^4] = 3$。

31.

$M(s) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x + sx} dx = \frac{-\lambda}{s-\lambda}$，所以$E[X^3] = \frac{6}{\lambda^4}, E[X^4] = \frac{24}{\lambda^5}$，$E[X^5] = \frac{120}{\lambda^6}$

32.

(a)

第二个不是矩母函数。根据矩母函数的定义$M_X(s) = E[e^{sX}]$,$M_X(0) = E[1] = 1$，很明显第二个函数不满足这个条件。

(b)

设N为满足$\lambda = 2$的泊松分布的随机变量，Y为满足$\lambda = 1$的泊松分布的随机变量，所以X为N个Y之和（见4.5节），$P(X=0)=\sum_{n=0}^{\infty} p_N(n)p_Y(0)$ $= e^{-1}$

33.

不难看出加号两侧是指数分布的矩母函数的形式，所以概率密度函数：

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \times 2e^{-2x} + \frac{2}{3} \times 3e^{-3x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

34.

利用卷积计算的分布列：

$$p(x) = \begin{cases} 1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3 & x = 0 \\ 3p_1p_2p_3 + p_1 + p_2 + p_3 - 2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) & x = 1 \\ p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 3p_1p_2p_3 & x = 2 \\ p_1p_2p_3 & x = 3 \end{cases}$$

对于某一个球员，其矩母函数为$M_{X_i}(s) = 1 - p_i + p_ie^s$，又因为独立随机变量的和的矩母函数是和项的矩母函数的乘积，所以$M_X(s) = \Pi_{i=1}^{3}(1 - p_i + p_ie^s)$，展开后去掉$e^{sk}$，形式与上面的分布列是一样的。

35.

由$M(0) = 1$，可以计算得$c = \frac{2}{9}$，所以$E[X] = \frac{d}{ds}M(s)|_{s=0} = \frac{37}{18}$；令$\alpha = \frac{e^s}{3}$，那么$M(s) = \frac{c(3+4e^2+2e^3)}{3(1-\alpha)} = \frac{2}{27}(3 + 4e^2 + 2e^3)(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots)$，所以$p_X(1) = \frac{2}{27}, p_X(0) = \frac{2}{9}$，由条件期望：$E[X|X \neq 0] = \frac{E[X]}{1-p_X(0)} = \frac{37}{14}$。

36.

(a)

由题意得：$M_{XY}(s) = \frac{1}{3}M_Y(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{2-s}$， $M_{(1-X)Z} = \frac{2}{3}M_Z(s) = \frac{2}{3}e^{3(e^s-1)}$，所以$M_U(s) = \frac{2s}{9(2-s)}e^{3(e^s-1)}$。

(b)

$M_{2Z+3}(s) = M_{2Z}(s)M_3(s) = e^{3(e^{2s}-1)+3s}$

(c)

$M_{Y+Z}(s) = \frac{s}{2-s}e^{3(e^s-1)}$

37.

TODO:

38.

略。

39.

略。

40.

略。