5.

不妨设三角形的高为H，对应的底边长度为L，则分布函数$P_X(x)$可以用梯形的面积除以三角形面积得到： $P_X(x) = \frac{\frac{H-x}{H}L+L}{2}\frac{2}{HL} = \frac{x(2H-x)}{H^2}, x \in [0, H]$。

所以概率密度函数$f_X(x) = P_X'(x) = \frac{2(H-x)}{H^2}$。

6.

有0个顾客的时候，等候的时间为0；有一个顾客的时候，等候时间是一个指数随机变量。所以：

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt) & x > 0 \end{cases}$$

解之得：

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2}(2 - e^{-\lambda x}) & x > 0 \end{cases}$$

7.

(a)

X的分布函数为两个圆形面积的比值，所以$P_X(x) = \frac{x^2}{r^2}, x \in [0, r]$。求导后可以得到概率密度函数$f_X(x) = \frac{2x}{r^2}$。所以$E[X] = \int_0^r \frac{2x^2}{r^2} dx = \frac{2r}{3}$，$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{r^2}{18}$。

(b)

由上一问可知：

$$P_S(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ \frac{r^2-t^2}{r^2} & s = 0 \\ \frac{r^2-t^2}{r^2} & 0 < s < \frac{1}{t} \\ \frac{r^2-t^2}{r^2} + \frac{t^2-(\frac{1}{s})^2}{r^2} & s \geq \frac{1}{t} \end{cases}$$

是连续随机变量。

8.

(a)

X的分布函数为$P_X(X \leq x)$，由全概率公式，可以得到$P_X(X \leq x) = pP_Y(Y \leq x) + (1-p)P_Z(Z \leq x)$。对式子两侧分别求导可得$f_X(x) = pf_Y(x) + (1-p)f_Z(x)$。

证毕。

(b)

$$P_X(x) = \begin{cases} pe^{\lambda x} & x < 0 \\ 1 + (p-1)e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

9.

略。

10.

略。