Физика полупроводников.
Задача №1

Куликов Никита

Формулировка: Найти зависимость концентрации носителей заряда от температуры $n(T)$ в квантовой яме, имеющей один уровень размерного квантования и параболический закон дисперсии:

$$\varepsilon(\vec{k}_\perp) = \varepsilon(0) + \frac{\hbar^2 \vec{k}_\perp^2}{2m}; \tag{1}$$

При этом известно, что носители заряда подчиняются статистике Ферми-Дирака и имеют уровень Ферми F. *Рассматриваются частицы без спина, исправить можно умножением на 2 ответа.*

Решение: Вычислим плотность состояний. Для начала рассмотрим интеграл (здесь S - площадь материала):

$$\Gamma(\tilde{\varepsilon}) = \frac{S}{(2\pi)^2} \int_{\varepsilon(\vec{k}_\perp)<\tilde{\varepsilon}} d^2\vec{k}_\perp = \frac{S}{(2\pi)^2} \int_{\varepsilon<\tilde{\varepsilon}} 2\pi k dk = \frac{2\pi m S}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\varepsilon<\tilde{\varepsilon}} d\varepsilon = \begin{cases} \frac{mS}{\pi\hbar^2}\tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} > \varepsilon(0) \\ 0 & \tilde{\varepsilon} < \varepsilon(0) \end{cases}; \tag{2}$$

В таком случае непосредственно двухмерная плотность состояний (здесь Θ - функция Хэвисайда):

$$g(\varepsilon) = \left.\frac{\partial \Gamma(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}}\right|_\varepsilon = \underbrace{\frac{mS}{\pi\hbar^2}}_{G} \Theta\big(\varepsilon - \varepsilon(0)\big); \tag{3}$$

Теперь будем учитывать статистику Ферми-Дирака:

$$f(\varepsilon) = \Big\{1 + \exp\big((\varepsilon - F)/T\big)\Big\}^{-1}; \tag{4}$$

В таком случае среднее число частиц можно вычислить (здесь Ω - зона Бриллюэна):

$$\langle n \rangle = \int_\Omega f(\vec{k}_\perp) d^2\vec{k}_\perp; \tag{5 a}$$

Однако, полагая, что уровень Ферми лежит ниже уровня энергии на границе Бриллюэна $F \ll \min_{\partial\Omega} \varepsilon$, а также малость температуры в этом смысле $F + T \ll \min_{\partial\Omega} \varepsilon$, выражение для концентрации (5 a) можно упростить за счёт хорошей сходимости:

$$\langle n \rangle \approx \int_0^{+\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = G \int_{\varepsilon(0)}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{1 + \exp\big((\varepsilon - F)/T\big)}; \tag{5 b}$$

Этот интеграл можно обезразмерить:

$$\langle n \rangle \approx GT \int_{\big(\varepsilon(0) - F\big)/T}^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \exp \xi}; \tag{5 c}$$

В то же время мы знаем первообразную для подынтегральной функции:

$$\int \frac{d\xi}{1+\exp\xi} = \underbrace{\xi - \log(\exp\xi + 1)}_{F(\xi)} + C; \tag{6}$$

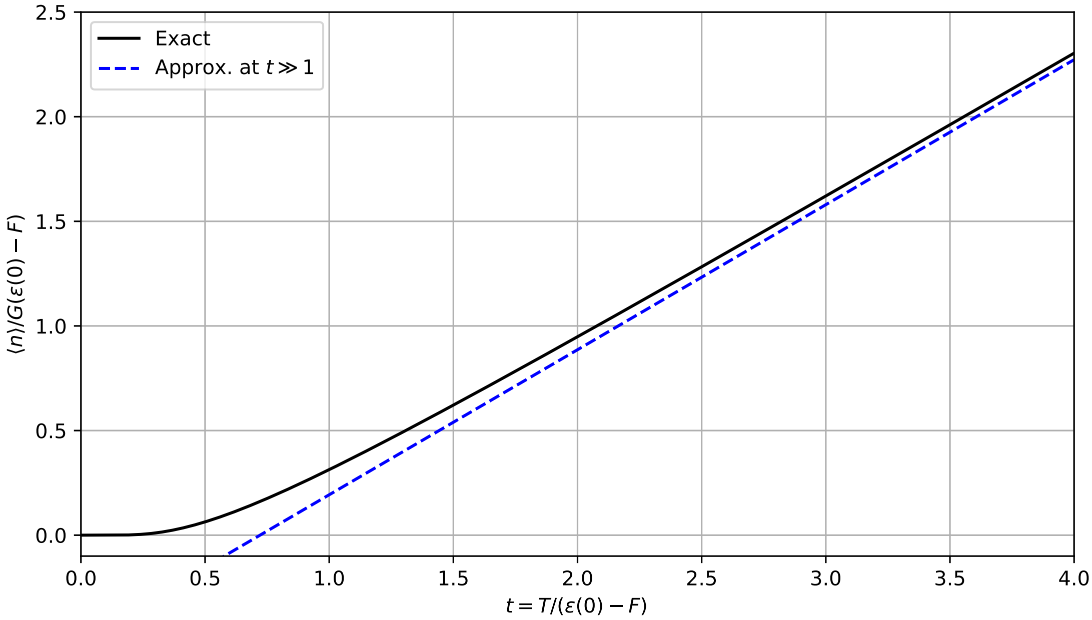
Требуется отметить, что первообразная обращается ноль на бесконечности $F(\xi \to +\infty) \to -0$, и, что первообразная всюду отрицательна $F(\xi) < 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}$. В таком случае концентрация носителей заряда:

$$\langle n \rangle \approx GT\Bigg(\log\left(\exp\frac{\varepsilon(0) - F}{T} + 1 \right) - \frac{\varepsilon(0) - F}{T} \Bigg); \tag{5 c}$$

Проанализируем зависимость концентрации носителей от температуры. Для простоты положим $G\big(\varepsilon(0) - F\big) = 1,\ t = T/\big(\varepsilon(0) - F\big)$. В таком случае получим зависимость:

$$\langle n \rangle = t\Big(\log\big(\exp(1/t) + 1 \big) - 1/t \Big); \tag{7}$$

Построим эту зависимость:



На ней можно можно отметить два характерных участка: плато в нуле температур и линейный рост при достаточно больших температурах. Начнём с последнего участка $t \gg 1$:

$$\langle n \rangle \approx t\Big(\log\big(2 + 1/t + O(1/t^2)\big) - 1/t \Big) = t(\log 2 + 1/2t + O(1/t^2) - 1/t) = \log 2 \cdot t - 1/2 + O(1/t); \tag{8}$$

При близких к нулю температурах $t \to 0$ разложение принимает другой вид:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle = t\Big(\log\Big(\exp(1/t)\big(1 + \exp(-1/t)\big) \Big) - 1/t \Big) &= t\Big(1/t + \log\big(1 + \exp(-1/t)\big) - 1/t \Big) \\ &\approx t\Big(\exp(-1/t) + O\big(\exp(-2/t)\big) \Big) = O\big(t \exp(-1/t)\big). \end{aligned} \tag{9}$$