

Физика полупроводников.

Задача №1

Куликов Никита

Формулировка: Найти зависимость концентрации носителей заряда от температуры $n(T)$ в квантовой яме, имеющей один уровень размерного квантования и параболический закон дисперсии:

$$\varepsilon(\vec{k}_\perp) = \varepsilon(0) + \frac{\hbar^2 \vec{k}_\perp^2}{2m}; \quad (1)$$

При этом известно, что носители заряда подчиняются статистике Ферми-Дирака и имеют уровень Ферми F .

Решение: Вычислим плотность состояний. Для начала рассмотрим интеграл (здесь S - площадь материала):

$$\Gamma(\tilde{\varepsilon}) = \frac{S}{(2\pi)^2} \int_{\varepsilon(\vec{k}_\perp) < \tilde{\varepsilon}} d^2 \vec{k}_\perp = \frac{S}{(2\pi)^2} \int_{\varepsilon < \tilde{\varepsilon}} 2\pi k dk = \frac{2\pi m S}{(2\pi \hbar)^2} \int_{\varepsilon < \tilde{\varepsilon}} d\varepsilon = \begin{cases} \frac{mS}{\pi \hbar^2} \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} > \varepsilon(0) \\ 0 & \tilde{\varepsilon} < \varepsilon(0) \end{cases}; \quad (2)$$

В таком случае непосредственно двумерная плотность состояний (здесь Θ - функция Хэвисайда):

$$g(\varepsilon) = \left. \frac{\partial \Gamma(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right|_\varepsilon = \underbrace{\frac{mS}{\pi \hbar^2}}_G \Theta(\varepsilon - \varepsilon(0)); \quad (3)$$

Теперь будем учитывать статистику Ферми-Дирака:

$$f(\varepsilon) = \left\{ 1 + \exp((\varepsilon - F)/T) \right\}^{-1}; \quad (4)$$

В таком случае среднее число частиц можно вычислить (здесь Ω - зона Бриллюэна):

$$\langle n \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{k}_\perp) d^2 \vec{k}_\perp; \quad (5 \text{ а})$$

Однако, полагая, что уровень Ферми лежит ниже уровня энергии на границе Бриллюэна $F \ll \min_{\partial\Omega} \varepsilon$, а также малость температуры в этом смысле $F + T \ll \min_{\partial\Omega} \varepsilon$, выражение для концентрации (5 а) можно упростить за счёт хорошей сходимости:

$$\langle n \rangle \approx \int_0^{+\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = G \int_{\varepsilon(0)}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{1 + \exp((\varepsilon - F)/T)}; \quad (5 \text{ б})$$

Этот интеграл можно обезразмерить:

$$\langle n \rangle \approx GT \int_{(\varepsilon(0)-F)/T}^{+\infty} \frac{d\xi}{1 + \exp \xi}; \quad (5 \text{ в})$$

В то же время мы знаем первообразную для подынтегральной функции:

$$\int \frac{d\xi}{1 + \exp \xi} = \underbrace{\xi - \log(\exp \xi + 1)}_{F(\xi)} + C; \quad (6)$$

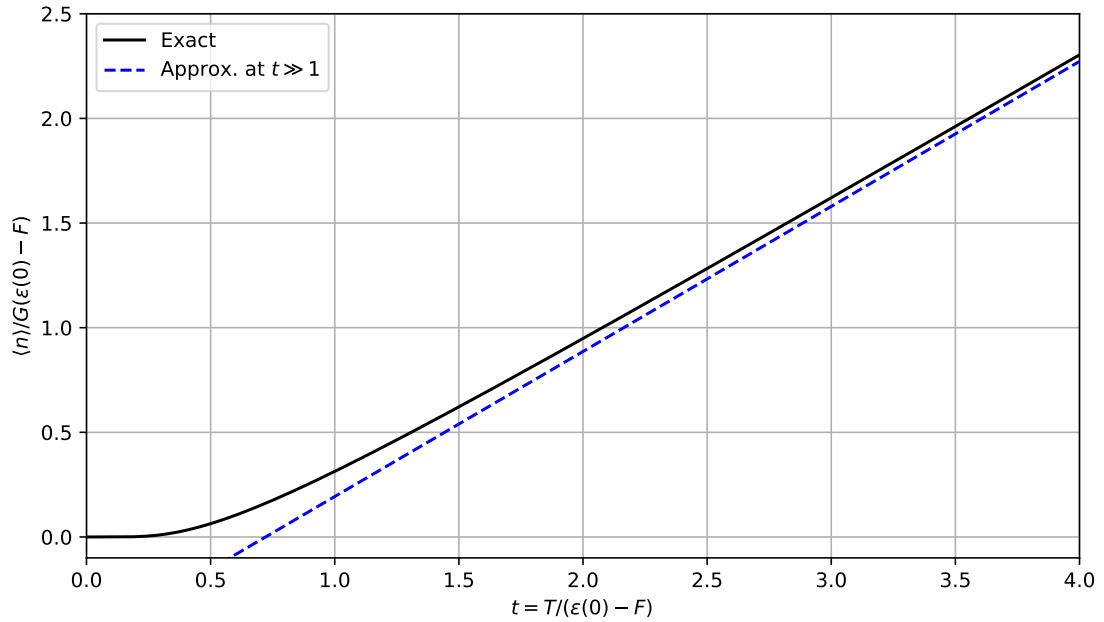
Требуется отметить, что первообразная обращается ноль на бесконечности $F(\xi \rightarrow +\infty) \rightarrow -0$, и, что первообразная всюду отрицательна $F(\xi) < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$. В таком случае концентрация носителей заряда:

$$\langle n \rangle \approx GT \left(\log \left(\exp \frac{\varepsilon(0) - F}{T} + 1 \right) - \frac{\varepsilon(0) - F}{T} \right); \quad (5 \text{ c})$$

Проанализируем зависимость концентрации носителей от температуры. Для простоты положим $G(\varepsilon(0) - F) = 1$, $t = T/(\varepsilon(0) - F)$. В таком случае получим зависимость:

$$\langle n \rangle = t \left(\log (\exp(1/t) + 1) - 1/t \right); \quad (7)$$

Построим эту зависимость:



На ней можно отметить два характерных участка: плато в нуле температур и линейный рост при достаточно больших температурах. Начнём с последнего участка $t \gg 1$:

$$\langle n \rangle \approx t \left(\log (2 + 1/t + O(1/t^2)) - 1/t \right) = t(\log 2 + 1/2t + O(1/t^2) - 1/t) = \log 2 \cdot t - 1/2 + O(1/t); \quad (8)$$

При близких к нулю температурах $t \rightarrow 0$ разложение принимает другой вид:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= t \left(\log \left(\exp(1/t)(1 + \exp(-1/t)) \right) - 1/t \right) = t \left(1/t + \log (1 + \exp(-1/t)) - 1/t \right) \\ &\approx t \left(\exp(-1/t) + O(\exp(-2/t)) \right) = O(t \exp(-1/t)). \end{aligned} \quad (9)$$