Физика магнитных явлений

Иосиф Давидович Токман

Лекции будут перемежаться с практическими занятиями и семинарами. Будут домашние задания. Запланированно 18 лекций по 3 часа.

На экзамене можно пользоваться чем угодно. Во время ответа будем отвечать за каждую букву.

Это самозванная наука: компиляция из электродинамики и квантовой механики. Что из магнетизма будем рассматривать? В основном - магнетизм твёрдого тела: токи и спин. Спин органично получается в квантовой электродинамике. Типичный представитель - уравнение Дирака. От этого никуда не деться на микроуровне.

Начнем с квантовой механики. Первые лекции - будут экскурсом в неё, но с упором на магнитные явления.

1 Момент импульса. Орбитальное движение отдельной частицы.

Определяется момент импульса так:

$$\hbar\hat{\vec{l}} = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]; \tag{1}$$

В классической механике постоянной Планка нет.

Сам оператор $\hat{\vec{l}}$ действует в пространстве волновых функций. Из этого мы можем получить например матричные элементы оператора момента импульса.

Получим его правила коммутации:

$$[\hat{r}_k; \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{k,l};\ k, l = x, y, z; \tag{2}$$

Из этих коммутационнных соотношений следуют соотношения и для самого оператора момента импульса ($l_+ = l_x + il_y,\ l_- = l_x - il_y$):

$$[l_x; l_y] = il_z;\ [l_y; l_z] = il_x;\ [l_z; l_x] = il_y; \tag{3}$$

$$[l_+; l_-] = 2l_z;\ [l_z; l_+] = l_+;\ [l_z; l_-] = -l_-; \tag{4}$$

$$[\vec{l}^2; l_i] = 0;\ i = x, y, z; \tag{5}$$

Дополнительное соотношение:

$$\vec{l}^2 = l_-l_+ + l_z^2 + l_z = l_+l_- + l_z^2 - l_z; \tag{6}$$

Отсутствие коммутации операторов - эквивалентно тому, что мы не можем выбрать систему собственных функций для них.

Полезно знать связь в сферических координат:

$$\begin{aligned}
&{}_z = -i\partial_\phi;\\
&l_\pm = e^{\pm i\phi}(\pm\partial_\theta + i\cot\theta\partial_\phi);\\
&l^2 = -\left(\frac{\partial_{\phi\phi}}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)\right);
\end{aligned} \tag{7}$$

А как выглядят собственные функции? Начнем с оператора l_z:

$$l_z\psi = -i\partial_\phi\psi; \tag{8}$$

Тогда собственная функция (из требования однозначности и непрерывности функции):

$$\psi_m = e^{im\phi}/\sqrt{2\pi};\ m \in \mathbb{Z}; \tag{9}$$

Но собственная функция квадрата оператора момента импульса:

$$\Psi = f(r;\theta)\cdot\psi_{l_z}(\phi); \tag{10}$$

Из уравнения на коммутаторы следует, что существуют состояния, где одновременно две величины $\vec{l}^2$, l_z - могут быть определены. Что здесь значит одновременно? Пусть дано:

$$\hat{\vec{l}}^2\psi = \vec{l}^2\psi; \tag{11}$$

А также можно подействовать на ту же функцию:

$$\hat{l}_z\psi = l_z\psi; \tag{12}$$

Вообще волновая функция - свойство ансамбля измерений, а не отдельной частицы. Отдельная частица коллапсирует во что - то.

Будем считать, что функция ψ - собственная $\vec{l}^2$. Тогда получается:

$$\vec{l}^2 - l_z^2 = l_x^2 + l_y^2 \geq 0; \tag{13}$$

И это значит, что должно быть минимальное значение $\hat{l} = l$, такое, что при заданном l значения $l_z = -l;\ldots;l$. Но из соотношения на коммутаторы следует:

$$\hat{l}_z\hat{l}_\pm\Psi_m = (m+1)\hat{l}_\pm\Psi_m; \tag{14}$$

А также:

$$\hat{l}_+\Psi_m = const\cdot\Psi_{m+1}; \tag{15}$$

$$\hat{l}_-\Psi_m = const\cdot\Psi_{m-1}; \tag{16}$$

Это значит, что операторы $\hat{l}_\pm$ действуют как повышение или понижения квантового числа m на единицу. Однако действие повышающего оператора на ψ_l сведется к занулению в силу ограниченности его собственных чисел:

$$\hat{l}_+\psi_l = 0; \tag{17}$$

Отсюда можно видеть:

$$l_-l_+\psi_l = (\vec{l}^2 - l_z^2 - l_z)\psi_l = 0; \tag{18}$$

Важно отметить, что l, $\vec{l}$ - отличаются. Тогда получим:

$$\vec{l}^2\psi_l - l^2\psi_l - l\psi_l = 0; \tag{19}$$

Это значит, что мы получили собственные числа оператора квадрата момента импульса:

$$\vec{l}^2 = l(l+1); \tag{20}$$

Удобно записать собственную функцию операторов $\vec{l}^2,\ l_z$ в виде:

$$\psi(r;\theta;\phi) = Y_{l,m}(\theta,\phi)f(r); \tag{21}$$

Тогда можно написать уравнение на это выражение:

$$\vec{l}^2 Y_{l,m}(\theta,\phi)f(r) = l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\phi)f(r); \tag{22}$$

Но и для оператора l_z тоже будет собственной функцией:

$$l_z Y_{l,m}(\theta,\phi)f(r) = mY_{l,m}(\theta,\phi)f(r); \tag{23}$$

В силу эрмитовости оператора $\vec{l}$:

$$\langle Y_{l,m-1}|\, l_- \,|Y_{l,m}\rangle = \langle Y_{l,m}|\, l_+ \,|Y_{l,m-1}\rangle^*; \tag{24}$$

Откуда получаем важное следствие:

$$\langle Y_{l,m}|\, l_+ \,|Y_{l,m-1}\rangle = \langle Y_{l,m-1}|\, l_- \,|Y_{l,m}\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}; \tag{25}$$

А для других компонент мы получим:

$$\langle l,m|\, l_x \,|l,m-1\rangle = \langle l,m-1|\, l_x \,|l,m\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}; \tag{26}$$

$$\langle l,m|\, l_y \,|l,m-1\rangle = -\langle l,m-1|\, l_y \,|l,m\rangle = -\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}; \tag{27}$$

Также заметим, что соотношение на собственные функции оператора, получается и в явном виде. Можно показать, что $Y_{l,m}$ - так называемые сферические функции.

Литература:

- Ландау, Лифшиц "Том 3. Нерелятивистская квантовая теория"
- Блохинцев "Основы квантовой механики"
- Херми "Лекции по квантовой механике"
- Кринчик "Физика магнетизма"
- Ванцовский "Магнетизм"
- Вдовин, Левич, Мямлин "Курс теоретической физики"