Физика магнитных явлений

Иосиф Давидович Токман

Задание: В некоторой системе координат задан спинор:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{i} \\ 10^{27} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Надо выяснить какое среднее значение проекции спина на ось, которая имеет углы α, β, γ с осями координат.

6 Появление спина

Он появился с одной стороны из эксперимента Штерна-Герлаха, а с другой - из эффекта Зеемана. И было видно, что есть не только пространственные координаты, но и что-то ещё.

Если же говорить про теорию - то это следствие уравнения Дирака.

Видно, что в соответствующем гамильтониане у нас фигурируют матрицы 4×4. Соответственно и спиноры должны быть 4-х компонентными. Можно зааметить, что прпоизводная по времени - первая. Значит задание волновой функции в начальный момент времени задаёт ее эволюцию на все оставшееся время.

А также в гамильтониан координаты входят так же, как и производная по-времени. С этой точки зрения время от координат не отличимо. Операторы $\hat{\vec{a}}$, $\hat{b}$ - такие, что:

$$\hat{H}^2 = c^2(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + m^2c^4 = E^2; \tag{13}$$

То есть есть соблюдение релятивистского закона дисперсии. И эта связь не только для одной частицы, но и для целой системы.

Как преобразуется энергия при смене системы координат? Оказывается, что масса в этой записи остаётся неизменной - нет никаких масс покоя и масс движения.

Какая масса фотона? Их закона дисперсии фотона $E = \hbar\omega$. Тогда его масса равняется нулю.

Если мы возьмем два фотона, движущихся друг на встречу друг другу. Тогда её полный импульс $\vec{p} = 0$, а вот энергия $E = 2\hbar\omega$. Отсюда можно видеть, что масса пролучается отличной от нуля.

Задание: Проверить, что это утверждение справедливо и посмотреть соответствующий раздел в курсе теоретической физики ЛЛ.

Из уравнения Дирака видно, что волновая функция представляет собой 4-х компонентный столбец - биспинор Дирака.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}; \tag{14}$$

Тогда уравнение покомпонентно уравнение дирака имеет такой вид:

$$i\hbar\partial_t\psi_1 = c(p_x - ip_y)\psi_4 + cp_z\psi_3 + mc^2\psi_1; \tag{15}$$

$$i\hbar\partial_t\psi_2 = c(p_x + ip_y)\psi_3 - cp_z\psi_4 + mc^2\psi_2; \tag{16}$$

$$i\hbar\partial_t\psi_3 = c(p_x - ip_y)\psi_2 + cp_z\psi_1 - mc^2\psi_3; \tag{17}$$

$$i\hbar\partial_t\psi_4 = c(p_x + ip_y)\psi_1 + cp_z\psi_2 - mc^2\psi_4; \tag{18}$$

В случае, если частица с зарядом e движется в элетромагнитном поле $(\vec{A};\psi)$, то уравнения Дирака записываются как:

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(c\hat{\vec{a}}(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}) + e\phi + mc^2\hat{\beta}\right)\psi; \tag{19}$$

И все это находится в полном соответствии с классической механикой.

Теперь зададимся вопросом: вернемся в классическую механику - когда сохраняется момент импульса? Только когда при поворотах вокруг какой-то оси ничего не меняется - то есть есть симметрия относительно поворота.

Что мы должны сделать в данном случае? проверить коммутативность какого-то оператора с гамильтонианом? То есть, если коммутатор какой-то величины с гамильтонианом зануляется - эта величина сохраняется.

Это можно объяснить при помощи Хейзенберговского представления:

$$\dot{\hat{A}} = [\hat{H};\hat{A}]; \tag{20}$$

Вернемся к уравнению свободной частици Дирака - например там ьбудет коммутировать импульс с гамильтонианом, значит импульс будет сохраняться. Но также будет сохраняться и момент импульса в силу изотропности пространства. Соответствуют ди оператору $\hbar\hat{\vec{l}} = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]$ - сохраняющаяся величина доля свободной частицы? Рассммотрим произвольную компоненту z:

$$\hbar\dot{\hat{l}}_z = \hbar(\hat{H}\hat{l}_z - \hat{l}_z\hat{H}) = i\hbar c(\hat{a}_y\hat{p}_x - \hat{a}_x\hat{p}_y) \neq 0; \tag{21}$$

И аналогично для x, y компонент. Отсюда следует, что орибитальный момент - не является интегралом движения.

Но также ясно, что какой-то момент, назовём его полным - будет сохраняться. Определим его как:

$$\hat{j}_z = \hat{l}_z + \hat{\square}_z; \tag{22}$$

Аналогично будет и для x, y. Мы хотим найти эту неизвестную величину. Чтобы полный момент сохранялся, нужно, чтобы коммутатор гамильтониана с этой добавкой был равен:

$$[\hat{H};\hat{\square}_z] = ic\hbar(\hat{a}_x\hat{p}_y - \hat{a}_y\hat{p}_x); \tag{23}$$

Можно убедиться, что это удовлетворятся когда:

$$\hat{\square}_z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_z & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_z \end{bmatrix} = \hat{S}_z; \tag{24}$$

Аналогично (тоже диагональные матрицы такого же вида) для оставшихся координат $x,\ y$. При этом гамильтониан оказался одновременно релятивистским и линейным по импульсам и времени.

Таким образом мы получаем $\hat{S}_x,\ \hat{S}_y,\ \hat{S}_x$ - оператиоры спина, действующие в проостранстве биспиноров. Таким образом оператор полного момента для частицы - сумма орбитального и собственного момента импульса:

$$\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{l}} + \hat{\vec{S}}; \tag{25}$$

Что мы с этого имеем? Как это влиет на классическую квантовую механику. Решим уравнение Дирака для свободной частицы, подставив вид плоской волны:

$$\psi_i = \psi_{i0} \exp\left\{-i\frac{Et}{\hbar}\right\} \exp\left\{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right\}; \tag{26}$$

Таким образом получим систему алгебраических уравнений:

$$E\psi_{10} = c(p_x - ip_y)\psi_{40} + cp_z\psi_{30} + mc^2\psi_{10}; \tag{27}$$

$$E\psi_{20} = c(p_x + ip_y)\psi_{30} - cp_z\psi_{40} + mc^2\psi_{20}; \tag{28}$$

$$E\psi_{30} = c(p_x - ip_y)\psi_{20} + cpx_z\psi_{10} - mc^2\psi_{30}; \tag{29}$$

$$E\psi_{40} = c(p_x + ip_y)\psi_{10} - cpx_z\psi_{20} - mc^2\psi_{40}; \tag{30}$$

Для наличия решения такой системы уравнений мы должны приравнять нулю детерминант - по сути мы получим связь между импульсами и энергией.

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4; \tag{31}$$

И формально у нас получится неоднозначная связь энергии и импульса.

$$E_+ = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}; \tag{32}$$

$$E_- = -\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}; \tag{33}$$

Если перейти к нерелятивистскому пределу $p \ll mc$, то получим:

$$E_+ \approx mc^2,\ E_- = -mc^2; \tag{34}$$

А что делают дальше? Можно подставить это в уравнения и получить чуть упрощенные уравнения. Тогда в результате такого действия в нерелятивистком пределе получим:

$$\Phi_+ = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ O(v/c) \\ O(v/c) \end{bmatrix}; \tag{35}$$

И аналогично для отрицательной энергии:

$$\Phi_+ = \begin{bmatrix} O(v/c) \\ O(v/c) \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}; \tag{36}$$

Тогда получим что-то вроде предела:

$$\Phi_+ \to \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}; \tag{37}$$

$$\Phi_- \to \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}; \tag{38}$$

И что же с этим делать? Наличие частиц с отрицательными энергиями соответствует тому, что есть какие-то античастицы - или отсутствие нормальных частиц.

Представим, что все состояние, имеющие отрицательную энергию - заняты. А у нас свой мир с частицами положительной энергии. И у нас своя жизнь, а у отрицательных - своя. Тогда можем ли мы вытащить эти частицы? Можем - эффектом Клейна или с помощью двух фотонов - там могут быть проблемы с сохранением импульса.

Задание: Каким образом можно вытащить электрон с нижних состояний?