Теория Сверхпроводимости. Феноменологическая теория.

Курин

1 Развитие термодинамического мышления

Мы рассматривали уравнение Лондонов. Мы написали:

$$F = F_0(T,V) + \frac{1}{8\pi}\int \big(\vec{B}^2 + \lambda^2(\textbf{rot }\vec{B})^2\big)dV; \tag{1}$$

При этом толщина скин-слоя:

$$\lambda^{-2} = \frac{4\pi e^2 n_S}{m}; \tag{2}$$

Тогда варьируя можем получить магнитное поле:

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta \vec{B}}\delta\vec{B}dV; \tag{3}$$

В нашем случае получится:

$$\delta F = \frac{1}{4\pi}\int \big(\vec{B}\delta\vec{B} + \lambda^2\textbf{rot }\vec{B}\textbf{rot }\delta\vec{B}\big)dV; \tag{4}$$

Можем воспользоваться свойством:

$$\textbf{div }[\vec{a}\times\vec{B}] = \vec{B}\textbf{rot }\vec{a} + \vec{a}\textbf{rot }\vec{b}; \tag{5}$$

В таком случае выйдет:

$$\textbf{rot }\vec{B}\textbf{rot }\delta\vec{B} = \delta B\textbf{rot rot }\vec{B} - \textbf{div }[\textbf{rot }\vec{B}\times\delta\vec{B}]; \tag{6}$$

Отсюда получим вариационную производную:

$$\frac{\delta F}{\delta\vec{B}} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B} + \lambda^2\textbf{rot rot }\vec{B}) = 0; \tag{7}$$

Если введем лапласиан вектора, как:

$$\textbf{rot rot }\vec{B} = \textbf{grad div }\vec{B} - \Delta\vec{B}; \tag{8}$$

Такой лапласиан удобен в декартовой системе координат.
В силу $\textbf{div }\vec{B} = 0$ получим:

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} = 0; \tag{9}$$

Рассмотрим 3 задачи:

- Представим полупространство, наполовину заполненное сверхпроводником:

  Тогда уравнение Лондонов превратится:

$$\partial^2_{xx} B_z - \frac{1}{\lambda^2} B_z = 0; \tag{10}$$

  Тогда решение - спадающая экспонента.

  В СИ у нас уравнения:

$$\mathbf{rot}\ H = j + \partial_t P; \mathbf{rot}\ E = -\partial_t B; B = \mu_0 H; D = \epsilon_0 \vec{E}; \tag{11}$$

- А если у нас сверхпроводящая пленка $-d/2,\ d/2$ в вакууме. Для B_z то же самое уравнение. Тогда:

$$B_z = c_1 \cosh\frac{x}{\lambda} + c_2 \sinh\frac{x}{\lambda}; \tag{12}$$

  В силу четнорсти граничных условий:

$$B_0 = c_1 \cosh\frac{d}{2\lambda}; \tag{13}$$

  Отсюда:

$$B_z = B_0 \frac{\cosh\frac{x}{\lambda}}{\cosh\frac{d}{2\lambda}}; \tag{14}$$

- А если про пленке течет ток? У нас будет скачок $2B_i = \frac{4\pi}{c} I$.

  Тогда поле в итоге:

$$B = B_I \frac{\sinh\frac{x}{\lambda}}{\sinh\frac{d}{2\lambda}}; \tag{15}$$

2 Динамический вывод уравнения Лондонов или двухжидкостная гидродинамика.

Можно представить что есть две жидкости - нормальная и аномальная. Пусть есть 2-е концентрации $n_{N,S}, \vec{v}_{N,S}$. Тогда законы:

$$\partial_t n_{N,S} + \mathbf{div}\ \vec{v}_{N,S} n_{N,S} = 0; \tag{16}$$

$$m n_{N,S}\big(\partial_t \vec{v}_{N,S} + (\vec{v}_{N,S}, \nabla)\vec{v}_{N,S}\big) + \nabla p_{N,S} = -e n_s\big(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}_{N,S} \times \vec{B}]\big) + St; \tag{17}$$

Здесь столкновительный член зануляется для сверхпроводящих электронов6 а для обычных:

$$St_N = m n_N v_N \nu; \tag{18}$$

Гидродинамическая скорость - усреднеена по объёму:

$$\overline{v} = \frac{1}{V}\int \vec{v} dV; \tag{19}$$

Рассеяние в основном на дефектах решётки. Взаимное превращение может быть. Но если скорости малы, то можно пренебречь.

Здесь есть нелинейные члены. Но есть и член третьего порядка. Будем линеаризовать уравнения:

$$n = n_0 + \delta n; \tag{20}$$

$$\vec{v} = \delta\vec{v}; \tag{21}$$

В результате получим:

$$\partial_t \delta n + n_0 \textbf{div}\ \delta\vec{v} = 0; \tag{22}$$

А закон сохранения импульса:

$$mn_0 \partial_t \delta\vec{v} + \partial_n p \delta n = -en\vec{E} - St; \tag{23}$$

Тогда получим:

$$\partial_t v_n + c_n^2 \textbf{grad}\ n_n = -\frac{e}{m}\vec{E} - \nu\vec{v}_n; \tag{24}$$

$$\partial_t v_s + c_s^2 \textbf{grad}\ n_s = -\frac{e}{m}\vec{E}; \tag{25}$$

Здесь есть 2 типа движения: продольное и поперечное. Потенциальное и вихревое.

Рассмотрим случай падения S (TE) поляризации. У нас есть только $E_y(z, x)$. Его дивергенция равна нулю. Значит это вихревое поле.