Физика магнитных явлений

Иосиф Давидович Токман

15 Магнитооптика

Как оптическое излучение взаимодействует со средой, имеющей спонтанную намагниченность. Мы рассмотрели такую среду - ферромагнетик.

Начнём с того, что представляет электромагнитное поле, точнее - с чем оно взаимодействует. Электрическое поле действует на заряды, а магнитное поле - в первую очередь на спиновые переменные.

Мы рассматривали "узкую"область - воздействие электричческого поля. В первую очередь это влиет на движение электронов. Заряды "чувствуют"намагниченность и спин-орбитальное взаимодействие.

Может такое случиться, то их спин "чувствует"поле упорядоченной системы - мы эьто опускаем. Электроны, взаимодействующие с полем называются оптическими. Поле действует на все электроны, но эти - сильнее всего откликаются. Сами эти электроны взаимодействуют спином с магнитным полем упорядоченной системы.

Что бывает с электронами, с орбитальным движением, когда на них действует поле - мы рассматривали. Мы рассматривапем чисто квантовый случай с заданными наперёд дискретными уровнями. У нас есть система 4-ёх уровней, а их волновые функции считаем базовыми.

В классике - мы что делаем? Получаем уравнения на функцию распределения. А у нас получается то же самое, но для матрицы плотности. С её помощью можно вычислить все квантовомеханические средние.

В каких условиях мы не можем описать систему волновой функции? Например, когда есть классический силовой центр, и волновая функция в начале. Тогда мы можем всегда описать при помощи волновых функций. А если у нас есть квантовый источник, тогда происходит запутывание. Если мы следим за переменными только своей системы - тогда у нас не получится описать. Работает всё хорошо только для глобальной волновой функции.

Рассмотрим систему из 4-ёх уровней в термостате. Вероятности обнаружения ччастицы на уровня: $P_i \propto \frac{1}{z}\exp\left(-\frac{E_i}{T}\right)$. Вместо того, чтобы заморачиваться с этим, можнл ввести матрицу плотности, которая удобнее - можно просто вычислять средние.

Мы посчитали матрицу плотности в первом порядке возмущений. Оператор возмущения - дипольный момент.

Рассмотрим предельный случай $T \to 0$. Тогда у нас останется по-сути гибсовского распределение. $\rho_{11}^{(0)} \to 1$, в таком случае электрический дипольный момент выходит равным:

$$\langle d_x(t)\rangle = \frac{2}{\hbar}d^2\left\{\frac{\omega_{21}}{\omega_{21}^2-\omega^2}+\frac{\omega_{41}}{\omega_{41}^2-\omega^2}\right\}E_{0x}e^{-i\omega t}; \tag{1}$$

Смотрим на картинку с переходами. Введём $\omega_0 = \frac{E_3-E_1}{\hbar}$ - "собственная частота"атома, соответствующая переходу между основным состоянием и средним уроавнем триплета. Аналогично: $\omega_{21} = \frac{E_2-E_1}{\hbar}$, $\omega_{41} = \frac{E_4-E_1}{\hbar}$. Также введём аналог Лорморовской частоты: $\omega_L = \frac{As}{\hbar}$.

В этих обозначениях получим:

$$\langle d_x(t)\rangle = \frac{4}{\hbar}d^2\frac{\omega_0\big((\omega_0^2-\omega_L^2)-\omega^2\big)}{\big((\omega_0^2-\omega_L^2)-\omega^2\big)\big((\omega_0^2+\omega_L^2)-\omega^2\big)}E_{0x}e^{-i\omega t}; \tag{2}$$

Здесь можно увидеть аналог классического тензора поляризуемости:

$$\alpha_{xx} == \frac{4}{\hbar}d^2\frac{\omega_0\big((\omega_0^2-\omega_L^2)-\omega^2\big)}{\big((\omega_0^2-\omega_L^2)-\omega^2\big)\big((\omega_0^2+\omega_L^2)-\omega^2\big)}; \tag{3}$$

Но почему у нас отклик только по одной оси? $\alpha_{xx} = \alpha_{yy}$. Оччевидно, то существуют и недиагональные компоненты. В том же приближении и в отсутствии поглощения можно получить:

$$\langle d_y(t)\rangle = -i\frac{8d^2}{\hbar}\frac{\omega_0\omega_L\omega}{\big((\omega_0^2-\omega_L^2)-\omega^2\big)\big((\omega_0^2+\omega_L^2)-\omega^2\big)}E_{0x}e^{-i\omega t}; \tag{4}$$

$$\alpha_{xy} = -\alpha_{yx} = -i\frac{8d^2}{\hbar}\frac{\omega_0\omega_L\omega}{\big((\omega_0^2-\omega_L^2)-\omega^2\big)\big((\omega_0^2+\omega_L^2)-\omega^2\big)}; \tag{5}$$

Это нечётная функция ларморовой чластоты. Таким образом это модель гироэлектрической среды.

Вообще это достаточно традиционная процедура в электродинамике.

16 Обращение времени и теорема Крамерса

Случай классической механики. Система описывается состоянием из координат и импульсов $\vec{p},\ \vec{q}$. Исходное состояние g - описывается теми же обобщёными координатыми, но противоположными импульсами. такое состояние называется сопряжёным по времени6 по отношению к исходному. Уравнения Гамильтона:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}; \tag{6}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}; \tag{7}$$

Преобразование: $t \to -t,\ \vec{p} \to -\vec{p},\ \vec{q} \to \vec{q}$ - не меняет вид уравнений 6 в случае, если:

$$H(\vec{p},\vec{q}) = H(-\vec{p},\vec{q}) \tag{8}$$

Это значит, что если $q(t),\ p(t)$ - решения уравнений Гамильтона, то $q(-t),\ -p(-t)$ - тоже решение уравнения Гамильтона.

Магнитное поле нарушает такой принцип. Чтобы восстановить обратимость во времени - нужно будет поле направлять в обратную сторону.

Если есть полностью изолированная система с магнитными частицами это всегда можно сделать.

Рассмотрим случай квантовой механики и бесспиновой частицы.

$$\hat{H}(\hat{\vec{r}},\hat{\vec{p}})\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}; \tag{9}$$

Рассмотрим оператор $\hat{T}$ - обращения во времени: замена $t \to -t$, комплексное сопряжение:

$$\hat{H}^*(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}})\psi^* = -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial(-t)}; \tag{10}$$

Из этого видно, что если:

$$\hat{H}^*(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}) = \hat{H}(\vec{r}, -\vec{p}) = \hat{H}(\vec{r}, \vec{p}); \tag{11}$$

И если $\psi(\vec{r}, t)$ - является решением, то и $\psi^*(\vec{r}, -t)$ - будет тоже решением уравнения 10.

Рассмотрим теперь случай частицы со спином $\frac{1}{2}$. Тогда оператор Гамильтона будет выглядеть:

$$\hat{H}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{\sigma}) \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{bmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial(t)} \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{bmatrix}; \tag{12}$$

Подействуем оператором $\hat{T}$, определённым для бесспиновой частицы.

$$\hat{H}(\vec{r}, -\vec{p}, \sigma_x, -\sigma_y, \sigma_z) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial(-t)} \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix}; \tag{13}$$

Подействуем на 13 оператором $i\hat{\sigma}_y$:

$$(i\hat{\sigma}_y)\hat{H}(\vec{r}, -\vec{p}, \sigma_x, -\sigma_y, \sigma_z) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial(-t)} (i\hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix}; \tag{14}$$

А теперь будем действовать формально:

$$\hat{H}(\vec{r}, -\vec{p}, -\sigma_x, -\sigma_y, -\sigma_z)(i\hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial(-t)} (i\hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix}; \tag{15}$$

Это можно переписать более кратко:

$$\hat{H}(\vec{r}, -\vec{p}, -\vec{\sigma})(i\hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial(-t)} (i\hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix}; \tag{16}$$

Теперь по аналогии с классчисеским случаем потребуем:

$$\hat{H}(\vec{r}, -\vec{p}, -\vec{\sigma}) = \hat{H}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{\sigma}); \tag{17}$$

В таком случае мы получим, что волновые функции $i\hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_1^*(\vec{r}, -t) \\ \psi_2^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix}$ - тоже являются решением системы.

Имеет смысл ввести оператор обращения времени для частицы с таким спином $\hat{T}'$:

$$\hat{T}' \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{bmatrix} = (i\hat{\sigma}_y)\hat{T} \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_2^*(\vec{r}, -t) \\ -\psi_1^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix}; \tag{18}$$

Ситуация 17 соответствует: $\hat{T}'\hat{H} = \hat{H}\hat{T}'$. А из **??**, 18 следует, что:

$$\hat{T}' \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_2^*(\vec{r}, -t) \\ -\psi_1^*(\vec{r}, -t) \end{bmatrix}; \tag{19}$$

- есть решение уравнения Шредингера.

Воздействие оператора $\hat{T}'$ - даёт другую функцию или исходную (с точностью до постоянного множителя)?

Пусть это так, тогда:

$$\hat{T}'\Phi = C\Phi; \tag{20}$$

Применим второй раз и получем:

$$\hat{T}'\hat{T}'\Phi = \hat{T}'C\Phi = C^*C\Phi = |C|^2\Phi; \tag{21}$$

Но, выполняя требования 19 получим:

$$\hat{T}'\hat{T}'\Phi = -\Phi; \tag{22}$$

Таким образом это не совместные уравнения, это значит, что если Φ - решение уравнения Шредингера, то $\hat{T}'\hat{T}'\Phi$ - толже решение, но:

$$\hat{T}'\Phi \neq C\Phi; \tag{23}$$

Тогда одному энергетическому уровню принадлежат *как минимум* два состояния:

$$\hat{H}\Phi = E\Phi; \tag{24}$$

И тогда:

$$\hat{H}\hat{T}'\Phi = E\hat{T}'\Phi; \tag{25}$$

Значит есть как минимум двухкратное вырождение. Наличие этого вырождения составляет предмет *теоремы Крамерса.*

Можно сформулировать так: Если есть спиновая частица, движущаяся в таком гамильтониане, то вырождение это никак не изменить.

Но вот добавки, не обладающие таким свойством - испортят эту смимметрию, но если мы включим в рассмотрение и источники поля, то всё снова станет прекрасно.

Рассмотрим случай системы частиц со спином $\frac{1}{2}$, если есть симметрия, рассмотренная в прошлом и оно действует для изолированной системы и для такой же системы во внешнем электрическом поле (внешнее магнитное поле отсутствует), то если система состоит из нечётного числа электронов - имеет место Крамерсово вырождение.

В силу того что волновая функция - сумма произведений:

$$\hat{T}'\hat{T}'\psi^N = -\psi^N,\ N = 2k + 1; \tag{26}$$

$$\hat{T}'\hat{T}'\psi^N = \psi^N,\ N = 2k; \tag{27}$$

Φ^N- N электронная волновая функция частиц со спином $\frac{1}{2}$.