# Теория Сверхпроводимости. Феноменологическая теория.

Курин

## 1 Элементарная термодинамика сверхпроводников

Что происходит если провести замену? $S \to T$:

$$\delta E(S, V, N) = T\delta S - p\delta V + \mu\delta N; \tag{1}$$

А можно и обратную замену:

$$\delta F(T, V, N) = \delta(E - TS) = -SW\delta T - p\delta V + \mu\delta N; \tag{2}$$

Энергия это $E = F + TS$, но тогда:

$$E = F - T\partial_T \delta F; \tag{3}$$

И тогда для равновесных процессов $\delta S \geq 0$ - второе начало термодинамикаи для закрытых систем. А для открытых можно написать:

$$T\delta S - \delta Q \geq 0; \tag{4}$$

Можно написать и уравнение во времени:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} - T\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial Q - T\partial S}{\partial t} \leq 0; \tag{5}$$

Чем отличаются экстенсивные и интенсивные переменные? Экстенсивные расширяются с увеличением куска вещества. Примеры: $V, S, N$. А есть и интенсивные - они не увеличиваются: $T, \mu, P$.

Тогда можно написать, например:

$$E = V\varepsilon(S/V, N/V); \tag{6}$$

Мы можем легко написать уравнения состояний: $p(n, T)$, $\varepsilon(n, T)$. И если мы просто пользуемся термодинамикой, то мы никогда не напишем ничего, противоречащего первому закону.

Нарисуем диаграмму Мейснера:

А вся система выглядит как:

И можем написать закон индукции:

$$\textbf{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}; \tag{7}$$

Тогда ЭДС получится:

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}; \tag{8}$$

Мы хотим что-то сказать об этой кривой из этого. Если мы охладили нечто ниже критической температуры, то поток скачком уменьшится почти до нуля. Но еще и произойдет сжатие магнитного поля.

Тогда у нас будет энергия уже в более сложной форме $E(S, V, N, \vec{B})$. Для того, чтобы этот потенциал найтит, мы должны написать:

$$\delta E = T\delta S + \delta A + \mu \delta N; \tag{9}$$

А чему у нас равна работа? Если у нас твердое тело, то у нас есть еще и тангенциальные напряжения. Тогда работа запишется как:

$$\delta A = \sum_{ik} \sigma_{ik} \delta u_{ik}; \tag{10}$$

А наша система = сверхпроводник + поле. А вот катушку будем считать внешней средой. Работу над током мы можем найти как:

$$\delta A = -\delta t \int_V (\vec{j}; \vec{E}) dV; \tag{11}$$

Введем поле $H$:

$$\textbf{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_i); \tag{12}$$

При этом у нас $B = H + 4\pi M$:

$$\textbf{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}; \tag{13}$$

Тогда у нас получится:

$$\delta A = -\delta t \int (\textbf{rot } \vec{H}; \vec{E}) dV; \tag{14}$$

Но вспомним:

$$\textbf{div } [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot \textbf{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \textbf{rot } \vec{b}; \tag{15}$$

С уётом этого можно получить:ё

$$\delta a = -\delta t \frac{c}{4\pi} \left( \textbf{div } [\vec{H} \times \vec{E}] + \vec{H} \times \textbf{rot } \vec{E} \right) = -\delta t \frac{c}{4\pi} \left( \textbf{div } [\vec{H} \times \vec{E}] - \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right); \tag{16}$$

Тогда работа электромагнитного поля составит:

$$\delta A_{em} = \frac{1}{4\pi} \int H \delta B dV + \frac{c\delta t}{4\pi} \int [\vec{E} \times \vec{H}] dS; \tag{17}$$

На самом деле мы не совсем честно это написали. Мы забыли в уравнении Максвелла член вида $\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Мы им можем пренебречь в случае квазистатики. Для этого надо $B/L \gg E/(cT)$. Если это так можем написать:

$$\delta E = T\delta S - p\delta V + \mu \delta N + \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dV; \tag{18}$$

Все вместе это нейкий функционал. Нечто от бесконечного числа переменных. Напишем для магнитной индукции:

$$\vec{H} = 4\pi \frac{\delta E}{\delta \vec{B}} \tag{19}$$

Если у нас есть функционал:

$$F = \int K(x, x') f(x') dx'; \tag{20}$$

Тогда его вариация:

$$\delta F = \int K(x, x') \delta f(x') dx; \tag{21}$$

А его вариационная производная:

$$\frac{\delta F}{\delta f} = K(x, x'); \tag{22}$$

Например в класссической механике есть вариационный принцип:

$$S = \int dt L(q, \dot{q}); \tag{23}$$

Тогда его полная вариация:

$$\delta S = \int ()\partial_q L \delta q - \delta \dot{q} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L) dt; \tag{24}$$

И отсюда получим необходимость выполнения уравнения Лагранжа-Эйлера.
Напишем модифицированную свободную энергию $\tilde{F}(T, V, N, \vec{H})$, тогда её вариация:

$$\delta F = -S\delta T + p\delta V + \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \delta \vec{B} dV; \tag{25}$$

Добюавив полнубю производную получим:

$$\delta(F - \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \vec{H} dV) = \delta \tilde{F} = -S\delta T - p\delta V - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \delta \vec{H} dV; \tag{26}$$

Почему это удобно? Потому что эксперимент проходитт так - мы знаем внешнеее поле. Тогда если в начале было $\tilde{F} = F_s$, то после манипуляций получи м:

$$\delta \tilde{F} = \delta F_s - \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \delta \vec{H} dV; \tag{27}$$

Внутренний интеграл занулится, а вот снаружи оставнется:

$$\delta \tilde{F} = \delta F_s - \frac{1}{4\pi} \int_{V_e} \vec{H} \delta H dV; \tag{28}$$

Тоггда у нас получится:

$$\tilde{F} = F_s - \int_{V_e} \frac{H^2}{8\pi} dV; \tag{29}$$

В таком случае изменив начало отсчета у нас будет:

$$\tilde{F} = F_s + \int_{V_s} \frac{H^2}{8\pi} dV; \tag{30}$$