Физика магнитных явлений

Иосиф Давидович Токман

Мы от атомных систем ушли к твердому телу. Теперь стали рассматривать систему спинов с обменным взаимодействием. Используем для этого гамильтониан Гейзенберга. Мы хотим объяснить ферромагнетизм и антиферромагнетизм в первую очередь.

Можем рассмотреть отсутствие прямого взаимодействия спинов. Однако предположим, что они создают общее среднее магнитное поле и взаимодействуют уже с ним.

Напрашивается соблазн использовать гамильтониан для диполя во внешнем поле:

$$\hat{H} = -\hat{\vec{P}}\vec{E}; \tag{1}$$

В классической физикее показывается, что электрические диполи во внешнем поле начинают колебаться вокруг направления поля. А магнитные диполи будут двигаться по кругу относительно направления поля.

Задача: В чем отличие между поведениями магнитных и электрических диполей в однородном внешнем поле. При том, что гамильтонианы у них одинаковые.

Дальше рассмотрим теорию среднего поля Вейса. Если система спинов находится во внешнем поле $\mathcal{H}_f$, то спин i - ого атома находится в поле:

$$\vec{\mathcal{H}}'_f = \vec{\mathcal{H}}_f + \vec{\mathcal{H}}_{ef}; \tag{2}$$

Если вспомнитт, что получали в парамагнетизме. То заменив реальное поле на модифицированное, получим самосогласованное выражение - трансцендентное уравнение.

$$\langle M_z \rangle = N g_s \mu_B S B_s(x); \tag{3}$$

В данном случае:

$$x = \frac{g_s \mu_B S(\mathcal{H}_{fz} + \gamma\langle M_z \rangle)}{T}; \tag{4}$$

Это т.н. уравнение Кюри-Вейса. Дальше мы немнрого с ним поработаем. Рассмотрим предельные случаи:

- **Высокие температуры:** $x \ll 1$, получим:

$$\langle M_z \rangle = \frac{N g_S^2 \mu_B^2 S(S+1)}{3T}(\mathcal{H}_{fz} + \gamma\langle M_z \rangle); \tag{5}$$

Разрешив его получим:

$$\langle M_z \rangle = \frac{\frac{N g_S^2 \mu_B^2 S(S+1)}{3}}{T - \frac{Z J_0 S(S+1)}{3}} \mathcal{H}_{fz}; \tag{6}$$

Здесь вводится величина - парамагнитная температура Кюри:

$$\theta = \frac{ZJ_0S(S+1)}{3}; \tag{7}$$

Соответствующая магнитная восприимчивость:

$$\chi = \partial_{\mathcal{H}_{fz}}\langle M_z\rangle = \frac{\frac{Ng_S^2\mu_B^2S(S+1)}{3}}{T-\theta}; \tag{8}$$

- **Спонтанная намагниченность:** Пусть внешнее поле отсутствует $\mathcal{H}_{fz} = 0$, тогда можно написать:

$$\langle M_z\rangle = Ng_S\mu_BS\Big(\frac{2S+1}{S+1}\coth\big(\frac{2S+1}{2S}\frac{ZJ_0S}{Ng_s\mu_BT}\langle M_z\rangle\big) - \frac{1}{2S}\coth\big(\frac{1}{2S}\frac{ZJ_0S}{Ng_s\mu_BT}\langle M_z\rangle\big)\Big); \tag{9}$$

Введем величину для оберазмеривания:

$$y = \frac{\langle M_z\rangle}{Ng_s\mu_B}; \tag{10}$$

Тогда подставляя увидим:

$$y = \frac{2S+1}{2}\coth\big(\frac{2S+1}{2S}\frac{ZJ_0S}{T}y\big) - \frac{1}{2}\coth\big(\frac{1}{2S}\frac{ZJ_0S}{T}y\big); \tag{11}$$

Это уравненеие имеет решение, если:

$$\frac{2S+1}{2}\partial_y\coth\big(\frac{2S+1}{2S}\frac{ZJ_0S}{T}y\big) - \frac{1}{2}\partial_y\coth\big(\frac{1}{2S}\frac{ZJ_0S}{T}y\big) \geq 1; \tag{12}$$

Условие превращается в:

$$1 \leq \frac{ZJ_0S(S+1)}{3T}; \tag{13}$$

Отсюда получается условие на критическую температуру:

$$T \leq T_c = \frac{ZJ_0S(S+1)}{3}; \tag{14}$$

Она характеризует, когда пропадёт средняя намагниченнность. В рамках теории среднего поля $T_c = \theta$. Z - число соседей. Из этой формулы например можно оценить интеграл взаимодействия.

- **Низкие температуры:** Разложим всё, что уже получили при больших значениях x.

$$\langle M_z\rangle = Ng_s\mu_BS - Ng_s\mu_B\cdot\exp\Bigg(-\frac{ZJ_0S\langle M_z\rangle}{TNg_s\mu_BS}\Bigg); \tag{15}$$

Тогда можно упростить:

$$\langle M_z\rangle|_{T=0} \approx Ng_S\mu_BS = M_0; \tag{16}$$

Подстав

$$\langle M_z\rangle = M_0\big(1 - \frac{1}{S}\exp\Bigg(-\frac{3}{S+1}\frac{T_c}{T}\Bigg)\big); \tag{17}$$

Уравнение 17 показывает, что насыщение достигается только при нулевой температуре, однако сама эта зависимость не соответствует точному решению для гамильтониана Гейзенберга.

- **Намагниченность при температуре Кюри:** Разложение $B_s(x),\ x \ll 1$.

$$B_s\big(\frac{\langle M_z\rangle}{Ng_S\mu_B}\frac{ZJ_0S}{T}\big) \approx \frac{(2S+1)^2-1}{4S^2}\frac{ZJ_0S}{3T}\frac{\langle M_z\rangle}{Ng_S\mu_B} - \frac{(2S+1)^4-1}{16S^3}\frac{1}{45}\big(\frac{ZJ_0S}{T}\frac{\langle M_z\rangle}{Ng_s\mu_B}\big)^3 = \alpha; \tag{18}$$

Используя это разложение и уравнение 9 при $T \sim T_c$ мы имеем:

$$\alpha \approx \frac{\langle M_z\rangle}{Ng_s\mu_B S} \approx \sqrt{\frac{10}{3}\frac{(S+1)^2}{(S+1)^2+S^2}}\sqrt{\frac{T_c-T}{T}}; \tag{19}$$

Это неплохо согласуется с экспериментом, но не с каждым.

Если мы смотрим за движением атома в классической физикее внутри твердого тела - получим модель грузиков на пружинках. Но в такой структуре возможны и волны - акустические и оптические.

Пусть вначале спины торчат в одну сторону. И можно полагать, что после возбуждения они будут прецессировать.

14 Динамика магнитной решетки ферромагнетика с обменным взаимодействием.

Рассмотрим **линейную** цепочку из спинов. Пусть система изолированна и находится в состоянии, когда все спины, которые рассматриваются как вектора, сонаправленны и неподвижны.

Вместо Гамильтониана Гейзенберга будем иметь:

$$H_{ex} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} J_{ij}\vec{S}_i\vec{S}_j; \tag{20}$$

Соответствующее механическое уравнение движения в формализме скобок Пуассона будет:

$$\dot{\vec{S}}_i = [H_{ex}; \vec{S}_i]; \tag{21}$$

Поскольку скобки пуассона для компонент механического момента:

$$[M_\alpha; M_\beta] = -M_\gamma; \tag{22}$$

Где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - соответствуют $x,\ y,\ z$ с циклическими перестановками.

Тогда по аналогии мы должны получить такие же скобки Пуассона для спинов - в силу соответствия скобок Пуассона и коммутаторов, и спинов и момента.

$$[S_\alpha; S_\beta] = -\frac{1}{\hbar}S_\gamma; \tag{23}$$

Будем считать, что ось OX направленна вдоль цепочки, а в равновесном состоянии все спины напроавленны по оси OZ. Ограничиваясь взаимодейсьвием лишь с ближайшими соседями, получим:

$$\dot{S}_{ix} = \frac{1}{\hbar}JS_{iy}S_{(i+1)z} + \frac{1}{\hbar}JS_{iy}S_{(i-1)z} - \frac{1}{\hbar}JS_{iz}S_{(i+1)y} - \frac{1}{\hbar}JS_{iz}S_{(i-1)y}; \tag{24}$$

Аналогично и для других компонент:

$$\dot{S}_{iy} = \frac{1}{\hbar} J S_{iz} S_{(i+1)x} + \frac{1}{\hbar} J S_{iz} S_{(i-1)x} - \frac{1}{\hbar} J S_{ix} S_{(i+1)z} - \frac{1}{\hbar} J S_{ix} S_{(i-1)z}; \tag{25}$$

$$\dot{S}_{iz} = \frac{1}{\hbar} J S_{ix} S_{(i+1)y} + \frac{1}{\hbar} J S_{ix} S_{(i-1)y} - \frac{1}{\hbar} J S_{iy} S_{(i+1)x} - \frac{1}{\hbar} J S_{iy} S_{(i-1)x}; \tag{26}$$

Дальше можно всё это линеаризовать. Будем искать решение этого уравнения, соответствующее малому отклонению от основного состояния:

$$S_z^0 = S_0,\ S_y^0 = S_z^0 = 0; \tag{27}$$

Тогда полный спин:

$$\vec{S} = \vec{S}^0 + \vec{\sigma}; \tag{28}$$

Тогда получим:

$$S_x = \sigma_x,\ S_y = \sigma_y,\ S_z = S_0; \tag{29}$$

Разложим в ряд Фурье, введем явную зависимость:

$$\sigma_{mx}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \sigma_x(k,t) e^{ikma}; \tag{30}$$

Здесь a - расстояние между спинами, k - проекция волнового вектора на ось OX. Используя 29, 30, из 24 получаем:

$$\dot{\sigma}_x(k,t) = \frac{2S_0 J}{\hbar}(1-\cos(ka))\sigma_y(k,t); \tag{31}$$

$$\dot{\sigma}_y(k,t) = -\frac{2S_0 J}{\hbar}(1-\cos(ka))\sigma_x(k,t); \tag{32}$$

Решение **??** будем искать в виде:

$$\sigma_x(k,t) = \sigma_x(k,\omega_k) e^{-i\omega_k t}; \tag{33}$$

Из этого мы имеем однородную систему алгебраических уравнений:

$$-i\omega_k \sigma_x(k,\omega_k) = \frac{2S_0 J}{\hbar}(1-\cos(ka))\sigma_y(k,\omega_k); \tag{34}$$

$$-i\omega_k \sigma_y(k,\omega_k) = -\frac{2S_0 J}{\hbar}(1-\cos(ka))\sigma_x(k,\omega_k); \tag{35}$$

Решение уравнение на детерминант:

$$\omega_k^2 = \big(\frac{2JS_0}{\hbar}(1-\cos ka)\big)^2; \tag{36}$$

И получится два вида связи:

$$\sigma_y(k,\omega) = \pm i \sigma_x(k,\omega); \tag{37}$$

Это какие-то спиновые волны. Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси OX. Тогда:

$$S_x(\omega_k,k,t) = \frac{1}{2}\big(\sigma_0(\omega_k,k)e^{-i(\omega_k t - kx)} + \sigma_0(-\omega_k,-k)e^{i(\omega_k t - kx)}\big); \tag{38}$$

$$S_x(\omega_k, k, t) = \frac{1}{2}\big(- i\sigma_0(\omega_k, k)e^{-i(\omega_k t - kx)} + i\sigma_0(-\omega_k, -k)e^{i(\omega_k t - kx)}\big); \tag{39}$$

Здесь мы считаем $\omega_k > 0,\ k > 0$, и, поскольку все величины действительны:

$$\sigma_0(\omega_k, k) = \sigma_0^*(-\omega_k, -k) = \sigma_0 e^{i\phi_k}; \tag{40}$$

Из уравнения 38 будем иметь:

$$S_x = \sigma_0 \cos(\omega_k t - kx - \phi_k); \tag{41}$$

$$S_y = \sigma_0 \sin(\omega_k t - kx - \phi_k); \tag{42}$$

Можно видеть, что найденное решение описывает по цепочке спинов неоднородной прецессии спинов относительно исходного положения. Такая волна называется спиновой волной.

А что будет, если мы заменим время на обратное. Получим ли возможный процесс? При такой замене спины должны заменить на обратные, поскольку испулься сменяются на обратные, а в моменте линейно входит импульс.

При достаточно малых волновых числах $ka \ll 1$, то получим:

$$\omega \approx (\frac{S_0 J a}{\hbar})k^2; \tag{43}$$

В этом смысле это практически классическая частица (в силу квадратичности закона дисперсии). В ряде случаев при изучении таких волн в магнетиках можно перейти к приближению *сплошной среды*. В этом приближении обменная энергия, определяемая гамильтонианом Гейзенберга, определяемая при взаимоджействии с ближайшими соседями принимает такой вид (α - направляющие косинусы):

$$H_{ex} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} J_{ij}\vec{S}_i\vec{S}_j \approx -JS_0^2\sum_{i>j}\cos\phi_{ij} = -JS_0^2\sum_{i>j}()\alpha_{xi}\alpha_{xj} + \alpha_{yi}\alpha_{yj} + \alpha_{zi}\alpha_{zj}); \tag{44}$$

В случае кубической решётки мы получаем:

$$E_{ex} = \int_V \frac{JS_0^2}{2a}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{grad}\ \alpha_i)^2 d^3r; \tag{45}$$

Тогда можем получить для кубических решёток:

$$E_{ex} = \int_V A\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{grad}\ \alpha_i)^2 d^3r; \tag{46}$$

Тогда плотность обменной энергии:

$$\epsilon_{ex} = A\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{grad}\ \alpha_i)^2 d^3r; \tag{47}$$

Это всё, что можно вытащить из гамильтониана Гейзенберга при классическом подходе.