Теория Сверхпроводимости. Феноменологическая теория.

Курин

1 Элементарная электродинамика

Пусть есть сверхпроводник и есть два магнитных поля $\vec{B}_e$, $\vec{B}_i$ - внешнее и внутренее. Эффект Мейснера заключается в том, что $\vec{B}_i = 0$.

А ещё этот эффект наблюдается только в определёънной области B, T:

Если мы применим теорему Гаусса:

$$\textbf{div}\ \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}_{i,n} = \vec{B}_{e,n} = 0; \tag{1}$$

Из этого следует, что есть поверхностный ток:

$$j_y = \frac{c}{4\pi} B_{e,x}; \tag{2}$$

А в векторной записи:

$$\vec{j}_{sur} = \frac{c}{4\pi}[\vec{n} \times \vec{B}_e]; \tag{3}$$

А ток объёмный связан с этим:

$$\vec{j}_{sur} = \int_{-\infty}^{0} \vec{j} dz; \tag{4}$$

То есть у нас есть скин эффект, даже при нулевой частоте, чего в нормальных проводниках нет. Только называется это глубиной проникновения:

$$\lambda \sim 10 \ldots 200\ nm; \tag{5}$$

Обычно это считают δ функцией. Примерно это выглядит так:

Почему у нас магнитное поле спадает так же как и ток? Потому что уравнения Максвелла:

$$\textbf{rot}\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \tag{6}$$

Что у нас получается?

$$\partial_z B_x = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \tag{7}$$

Но ещё у нас есть сила Лоренца:

$$\vec{f} = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}]; \tag{8}$$

В нашем случае это превратится в :

$$f_z = -\frac{1}{4\pi} \partial_z B_x \cdot B_x \tag{9}$$

Если мы проинтегрируем силу, то получим давление:

$$\vec{f}_{sur} = -\vec{n}\frac{B_e^2}{8\pi}; \tag{10}$$

Какие законы сохранения?

$$\partial_t \rho + \mathbf{div}\ \vec{j} = 0; \tag{11}$$

$$\partial_t W + \mathbf{div}\ \vec{S} = 0; \tag{12}$$

- Заряда и Энергии. Но можно написать и для импульса при помощи тензора натяжений:

$$\partial_t \vec{p} + \mathbf{div}\ \hat{T} = 0; \tag{13}$$

А сам тензор натяжений:

$$T_{ik} = \frac{1}{8\pi}(B_i B_k - \frac{1}{2}S_{ik}B^2); \tag{14}$$

Как обычно проводится эксперимент?
Напишем уравнение максвелла. но учтем, что есть 2 тока - внешний и скин-тое. Тогда:

$$\mathbf{rot}\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}_e + \vec{j}_i)' \tag{15}$$

Но тогда через намагниченность $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$:

$$\vec{j}_i = c\mathbf{rot}\ \vec{M}; \tag{16}$$

При этом стоит заметить, что:

$$\mathbf{div}\ \vec{H} = -4\pi\mathbf{div}\ \vec{M} \neq 0; \tag{17}$$

А вот вне образца у нас потенциальное магнитное поле в силу того, что $\mathbf{rot}\ \vec{H} = 0$:

$$\vec{H} = -\mathbf{grad}\ \psi; \tag{18}$$

У нас сверхпроводник - идеальный диамагнетик - $\mu = 0$. Отсюда у нас условие:

$$\Delta\Psi = 0; \tag{19}$$

$$\psi_e|_s = \psi_i|_s; \tag{20}$$

$$\mu_e \partial_n \psi_e = \mu_i \psi_i = 0; \tag{21}$$

Тогда тангенциальная компонента поля на границе непрерывна.
Тогда у нас получается что-то вроде магнитного заряда. Его поле будет:

$$\vec{B} = \vec{r}\frac{q}{r^3}; \tag{22}$$

Есть еще 2 задачи:

2 Термодинамика сверхпроводников

Здесь вводится понятие энтропии S, которая увеличивается $\delta S \geq 0$. Как с этим работать? Пусть у нас есть коробка с двумя газами:

А как себя будет вести энтропия? $S_1(E_1, V_1, N_1),\ S_2(E_2, V_2, N_2)$ И силы между газами должны быть короткодействующими. В силу аддитивности:

$$S = S_1 + S_2; \tag{23}$$

$$E = E_1 + E_2; \tag{24}$$

Но тогда получим:

$$\partial_{E_1} S = \partial_{E_1} S_1 + \partial_{E_1} S_2 = \partial_{E_1} S_1 + \partial_{E_2} S_2 = 0; \tag{25}$$

Но в силу $\delta Q = T\delta S$ получим:

$$\partial_{E_1} S = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0; \tag{26}$$

Отсюда следует равенство температур. Из соотношения $\delta E = T\delta S - p\delta V$. Тогда механическое равновесие:

$$\partial_{V_1} S = \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} = 0; \tag{27}$$

Аналогично химическое равновесие:

$$\partial_{N_1} S = \frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} = 0; \tag{28}$$

Можно менять перменнные в потенциалах при помощи преобразований лежандра:

$$\delta E = T\delta S - p\delta V + S\delta T - S\delta T; \tag{29}$$

Тогда переходим к свободной энергии:

$$\delta F = \delta(E - TS) = -S\delta T - p\delta V; \tag{30}$$