Теория Сверхпроводимости. Феноменологическая теория.

Курин

1 Элементарная термодинамика сверхпроводников

Мы написали несколько потенциалов E, F, W, Φ, Ω, а также несколько аналогов с волной: $\tilde{F}$.

Например для свободной энергии:

$$\delta F = -S\delta T - p\delta V + \mu\delta N + \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}\delta\vec{B}dV; \tag{1}$$

Тогда её модификация:

$$\tilde{F} = F_{0s} + \int_{V_s} \frac{H^2}{8\pi}dV - \int_{\infty} \frac{H^2}{8\pi}dV; \tag{2}$$

В случае маленького циллиндра в соленоиде мы можем пренебречь интегралом по всему объёему - он просто изменит уровень отсчёта энергии. Тогда:

$$\tilde{F}_s = F_{0s}(T, V_s, N_s) + V_s\frac{H^2}{8\pi}; \tag{3}$$

Введём понятие равновесия фаз - нормальной и сверхпроводящей. Если у нас есть обе фазы - тогда (если пренебречь слабыми парамагнитными свойствами):

$$\tilde{F} = F_{0s} + F_n(T, V_N, N_N) + V_s\frac{H^2}{8\pi}; \tag{4}$$

Тогда свободная энергия должна иметь минимум, его необходимым условием будет зануление производных:

$$\frac{\delta\tilde{F}}{\delta V_s} = \frac{\delta F_{0s}}{\delta V_s} - \frac{\delta F_N}{\delta V_n} + \frac{H^2}{8\pi} = -p_s + \frac{H^2}{8\pi} + p_N; \tag{5}$$

А ещё дложно быть такое же условие по числу частиц:

$$\frac{\delta\tilde{F}}{\delta N_s} = \frac{\delta F_{0s}}{\delta N_s} - \frac{\delta F_N}{\delta N_N}; \tag{6}$$

Что такое теплоемкость? По определению:

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T} = T\frac{\delta S}{\delta T}; \tag{7}$$

Фишка в том, что сжимаемость металлов очень мала (как и у жидколстей, например). Тогда условие равновесия хим. потенциалов:

$$\frac{\delta F_{0s}}{\delta N_S} = \frac{\delta F_N}{\delta N_N}; \tag{8}$$

И если мы введём объёмную свободную энергию $F = Vf$ (аналогично для S, N), и при этом V - экстенсивная величина, а f - интенсивная, тогда $f(T, n = N/V)$. Отсюда следует, что производные по числу частиц, могут быть выражены через производные по объёму ($\partial_N f = \partial_n f/V,\ \partial_v f = (-N/V) \cdot \partial_n f$):

$$N_s \partial_{N_s} f = -V \partial_N f; \tag{9}$$

Тогда применительно к нашей ситуации:

$$V_s \frac{\delta f_{0s}}{\delta N_s} = V_n \frac{\delta f_N}{\delta N_N}; \tag{10}$$

Если воспользуемся прошлым выражением для механического равновесия:

$$\frac{V_s}{N_s}(p_s + f_{0s}) = \frac{V_n}{N_n}(p_N + f_N); \tag{11}$$

Здесь мы знаем:

$$p_s = p_N + \frac{H^2}{8\pi}; \tag{12}$$

А за счет чего у нас может происходить сжатие? За счет магнитного давления, а оно мало. Тогда:

$$f_{0s} + \frac{H_c^2}{8\pi} = f_N; \tag{13}$$

Эта элементарная термодинамика была разработана очень быстро. Исходной информацией у нас является кривая мейснера:

Продифференциировав условие равновесия хим. потенциалов мы получим:

$$-s_S + \frac{1}{4\pi} H_c \partial_T H_c = -s_N; \tag{14}$$

Тогда из графика видно, что при фазовом переходе выделяется тепло. Что это значит? Здесь можНо увидеть фазовый переход 2-ого рода, и увидеть аналогию - сверхпроводящий материал эквивалентен льду, а нормальный - газу.

Например есть задача Капицы - как бы тро проплавит проволочка сгрузом брусок льда?

Как происходит переход в нашем случае?

Если поле чуть чуть превысит критическое - объём сверхпроводника уменьшится. Значит температура в новой области нормального проводника понизится, значит начется процесс теплопроводности и сверхпроводник бюудет потихоньку уменьшаться.

Если мы второй раз продифференциируем уравнение для равновесия хим. потенциалов:

$$-\partial_T s_S + \frac{1}{8\pi} \partial_{TT}^2 H^2 = -\partial_T s_N; \tag{15}$$

Умножив на температуру получим теплоёмкости:

$$c_S - c_N = \frac{T}{8\pi} \partial_{TT}^2 H^2; \tag{16}$$

И тут мсы видим скачок теплоемкости - фазовый переход 2-ого рода.

Термодинамика - феноменологическая наука.

2 Уравнение Лондона

Оно описывает скинирование в сверхпроводнике. Напишем уравнение для модифицированной свободной энергии:

$$\tilde{F} = F_{0s}(T, V, N) + \frac{H^2}{8\pi} V_s; \tag{17}$$

В таком случае у нас получится:

$$\tilde{F} = F_{0s} - \int_{V_{ex}} \frac{H^2}{8\pi} dV; \tag{18}$$

$$F = F_{0s} - \int \frac{B^2}{8\pi} dV + \int n_s \frac{m v_s^2}{2} dV; \tag{19}$$

При этом плостность тока:

$$\vec{j} = e n_s \vec{v}_s = \frac{c}{4\pi} \mathbf{rot}\ \vec{B}; \tag{20}$$

Такмим образом получаем:

$$F = F_{0s} + \int \frac{B^2}{8\pi} dV + \int \lambda^2 (\mathbf{rot}\ \vec{B})^2 dV; \tag{21}$$

При этом $\lambda^2 = \frac{c^2 m}{4\pi e^2 n}$.