Физика магнитных явлений

Иосиф Давидович Токман

Оператор момента импульса множества частиц, будет суммой операторов, для каждой:

$$\hat{\vec{L}} = \sum_i \hat{\vec{l}}_i; \tag{12}$$

При этом момент импульса разных частиц коммутирует - в силу зависимости от разных координат:

$$[\hat{L}_x; \hat{L}_y] = i\hat{L}_z; \tag{13}$$

И аналогично при циклических перестановках:

$$[\hat{L}_y; \hat{L}_z] = i\hat{L}_x;\ [\hat{L}_z; \hat{L}_x] = i\hat{L}_y; \tag{14}$$

Можно показать, что справедливы все коммутационные соотношения для одной частицы, с заменой $\hat{\vec{l}} \to \hat{\vec{L}}$. Очевидно, что существунт такая $\psi_{L,M}$, что:

$$\hat{\vec{L}}^2 \psi_{LM} = L(L+1)\psi_{LM}; \tag{15}$$

$$\hat{L}_z \psi_{LM} = M\psi_{LM}; \tag{16}$$

При этом могут быть значения:$M \in [-L, L] \in \mathbb{Z}$. И полностью аналогично Можно заменять $m \to M$.

3 Спин

Как показывает опытзадание волновой функции частицы, как описания ее положения в пространстве не исчерпывает все степени свободы частицы. При этом рекчь может идти как о сложной частице (ядре), так и об элементарной частице - например электроне.

Спин это фактически - внутренний момент частицы. В разделе 1 мы стартовали с того, что определили:

$$\hbar\hat{\vec{l}} = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]; \tag{17}$$

Оператор момента импульса, действующий на координаты частицы. О спине хаговорили после эксперимента Штерна-Герлаха - пропускали пучок электронов или других спиновых частиц через неоджнородное магнитное поле и наблюдали его расщепление.

Значит то что у нас летело обладало каким то магнитным моментом. При том это наблюдалось даже в электронейтральных атомах - что значило, что момент внтуренний, а не орбитальный.

Дальше идет сухая теория, которая описывает два состояния при одном орбитальном моменте. Введем формально операторы $\hat{\vec{s}}_x,\ \hat{\vec{s}}_y,\ \hat{\vec{s}}_z$. И скажем что у них джолжны быть такие же коммутационные соотношения, что и у обычных проекций момента импульса:

$$[\hat{s}_x; \hat{s}_y] = i\hat{s}_z; \tag{18}$$

И аналогично с циклической перестановкой. однако обычнор все это вводится через матрицы Паули:

$$\hat{s}_i = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i; \tag{19}$$

И для него такие же коммутационные соотношения с циклическими перестановками:

$$[\hat{\sigma}_x; \hat{\sigma}_y] = i2\hat{\sigma}_z; \tag{20}$$

А на что должны действовать такие операторы? В данном случае, поскольку у нас всего 2 состояния - используются волновые функции в виде векторов (спиноров) и операторы в виде матриц 2×2.

Т.е. операторы $\hat{s}$ $(\hat{\sigma})$ действуют в каком-то неизвестном нам ёпространстве функций. Тогда совершенно формально, в случае, если у нас всего два состояния то и функции размером 2×1.

Пусть базисные функции таковы, что матрица $\hat{\sigma}_z$ - диагональна, а её собственные значения ± 1. Тогда получится:

$$\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \tag{21}$$

Естественно потребовать, чтобы собственные значения $\hat{\sigma}_x,\ \hat{\sigma}_y$ аналогично равнялись ± 1. Таким образом мы получим:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{I}; \tag{22}$$

Но тогда из коммутационнных соотношений следует:

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z; \tag{23}$$

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_x; \tag{24}$$

$$\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_z; \tag{25}$$

Тогда вид для остальных матриц в силу эрмитовости:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}^* & a_{22} \end{bmatrix}; \tag{26}$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12}^* & b_{22} \end{bmatrix}; \tag{27}$$

Но также можно показать:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12}^* & 0 \end{bmatrix}; \tag{28}$$

Если возвести в квадрат:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \begin{bmatrix} a_{12}a_{12}^* & 0 \\ 0 & a_{12}^*a_{12} \end{bmatrix}; \tag{29}$$

И из условия на квадраты имеем:

$$a_{12} = e^{i\phi}; \tag{30}$$

Иными словами:
$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{bmatrix}; \qquad (31)$$
По аналогии:
$$\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\beta} \\ e^{-i\beta} & 0 \end{bmatrix}; \qquad (32)$$
А из условия на их умножение будем иметь:
$$e^{i(\phi-\beta)} = e^{-i(\phi-\beta)} = i; \qquad (33)$$
Откуда с неизбежностью сдедует: $\phi = 0,\ \beta = -i\frac{\pi}{2}$.
Тогда получим:
$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (34)$$
$$\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad (35)$$
Надо напомнить, что настоящие операторы спина:
$$\hat{s}_i = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i; \qquad (36)$$
При этом собственные числа для спина будут равны $\pm\frac{1}{2}$, а квадрат спина:
$$\hat{\vec{s}^2} = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2 = \frac{3}{4}; \qquad (37)$$
Что полностью соответствует формуле для оператора орбитального момента. Почему мы используем такой архаичный подход? Мы используем некоторую не единственность и собственный выбор. Однако этот выбор устоявшийся и не снижающий общности.

Таким образом существуют 2 состояния, в которых проекция спина на определёную остальных равна $\pm\frac{1}{2}$. В соответствии с матричным формализмом, операторы, выражаемые матрицами 2×2 действуют в фпространстве функций:
$$\Phi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}; \qquad (38)$$
$$\Phi^* = [\psi_1^*; \psi_2^*]; \qquad (39)$$
И можно получить, что такой спинор - собственная функция оператора $\hat{s}_z$. Тогда функция соответствующая проекции спина $\frac{1}{2}$:
$$\Phi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad (40)$$
А функция, соотвествующая состоянию с $-\frac{1}{2}$:
$$\Phi_{-1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad (41)$$
Большая часть квантовой механики может быть проиллюстрированнна такими спинорами. Но все это лишь часть более общего квантово-механического формализма. Твердотельный магнетизм практически целиком оказывается связан именно со спином.

4 Преобразование спина при преобразовании системы координат.

Рассмотрим просто поворот для начала. Для начала посмотрим на пролизвольную квантовую систему и мы её описываем в какой-то конкретной системе координат. Мы можем вращать саму физическую систему или вращать выбранную систему координат.

Пусть в определённой системе координат x, y, z волновая функция описывается спинором Φ. А в системе координат x', y', z' это же состояние описывется спинором: Φ' Для простоты рассмотрим случай, где переход от одной системы к другой осуществляется поворотом вокруг оси z на угол γ.

При этом связь координат:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \tag{42}$$

Т.е. такому преобразованию соответствует марица преобразования спинора.

$$\Phi' = \hat{T}_z(\gamma)\Phi; \tag{43}$$

Тогда спиноры преобразуются (аналогично т для других координат):

$$\hat{s}'_x = \hat{T}_z(\gamma)\hat{s}_x\hat{T}_z^{-1}(\gamma); \tag{44}$$

Здесь $\hat{s}'_{x,y,z}$ - операторы, действующие в штрихованнной системе координат. Это операторы проекции спина на старые оси координат x, y, z, наприсаннные в новом представлении, связанном с x', y', z'.

А чем являются эти операторы ещё? Это операторы, соответстующие некоторым векторам $\hat{\vec{S}}$. Тогда они должны преобразовываться по тем же законам.

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_x \\ \hat{s}_y \\ \hat{s}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}'_x \\ \hat{s}'_y \\ \hat{s}'_z \end{bmatrix}; \tag{45}$$

Здесь штрихованные операторы - соответствуют проекциям на оси x', y', z', взятые в одном и том же представлении, связанном с x, y, z.

Но такая связь справедлива в любом представлнении.

$$\begin{bmatrix} \hat{s}'_x \\ \hat{s}'_y \\ \hat{s}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}'_{x'} \\ \hat{s}'_{y'} \\ \hat{s}'_{z'} \end{bmatrix}; \tag{46}$$

Тогда это будет равно (в силу независимомти от представлений):

$$\begin{bmatrix} \hat{s}'_x \\ \hat{s}'_y \\ \hat{s}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}_x \\ \hat{s}_y \\ \hat{s}_z \end{bmatrix}; \tag{47}$$

Так как $\hat{s}'_{x'} = \hat{s}_x, \hat{s}'_{y'} = \hat{s}_y, \hat{s}'_{z'} = \hat{s}_z$. Тогда если сравнить это с тем, что мы писали преобразование через некоторые операторы поворота $\hat{T}_z(\gamma)$. Поскольку мы выбрали $\hat{s}_z$ - диагональной, то и $\hat{T}_z$ - диагональная (чтобы они коммутировали).

Тогда для неё можно написать:

$$\hat{T}_z = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; \tag{48}$$

Поскольку по определению и в силу унитарности у нас должно быть:

$$\hat{T}_z \hat{T}_z^{-1} = \hat{I} = \hat{T}_z \hat{T}_z^{\dagger}; \tag{49}$$

В виде матричном виде:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{bmatrix} \tag{50}$$

Отсюда можно видеть $\phi_1 - \phi_2 = \gamma$:

$$\hat{T}_z = \begin{bmatrix} e^{\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{bmatrix}; \tag{51}$$

Поэтому можно выбрать симметрично:

$$\hat{T}_z = \begin{bmatrix} e^{-\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix}; \tag{52}$$

Рассмотрим волновую функцию для двух частиц, для каждой из которых волновая функция - простой спинор. Тогда полная волновая функция:

$$\Phi_0(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \right); \tag{53}$$

Здесь индексы у спиноров - соответствуют частицам. Вообще полная волновая функция будет антисимметричной, относительно перестановок частиц. А операторы останутся теми же в силу своей аддитивности:

$$\hat{A} = \sum_i \hat{A}_i; \tag{54}$$

Легко показать, что эта функция описывает состояние с полным спином $\hat{S} = 0$.

$$\sum_i = (\hat{s}_{1i} + \hat{s}_{2i})^2 \Phi_0(1,2) = 0; \tag{55}$$

Очевидно, что при вращении сисетмы координат такая функция не должна изменяться. В виде формулы, где $\hat{T}$ - произвольное вращение:

$$\hat{T}\Phi_0(1,2) = \Phi_0(1,2); \tag{56}$$

А сам оператор поворота запишется как:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \tag{57}$$

Но каждый из электронов то может изменяться? Что с этим всем делать?
Как мы можем совместить эти два условия? Напишем:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \right) = \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}_1 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \right) \tag{58}$$

А последнее равенство выше из того, что мы хотим получить. Отсюда следует, что:

$$ad - bc = 1; \tag{59}$$

Сравнив матрицу и ее вид для вращения вокруг z получим:

$$e^{i(\phi_1+\phi_2)} = 1; \tag{60}$$

Тогда например можно сделать так: $\phi_1 + \phi_2 = 0$. Так же как делали и в прошлый раз.

Вспомним про такую классную штуку как циклические координаты и симметрии из теоретической механике. Например импульс соответствует симметрии трансляции, а момент импульса - повороту вокруг оси, энергия - однородности времени.

Тогда чтобы проверить сохранение проекции момента (пусть даже спина) - нежно повернуть систему. Можно написать волновую функцию в повернутых координатах при помощи оператора момента импульса.

Задание: залезть в ЛЛ. Посмотреть на то, как трансляция связана с оператором момента импульса. Пользуясь этим знанием написать оператор поворота, записанный через оператор момента импульса или спиновые операторы.

Замечание: как пишется простой спинор? Обычно так:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{bmatrix} \neq \psi(\vec{r}) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; \tag{61}$$

Единственный вариант, когда можно так написать - если операторы пространственные и спинорные действуют на разные координаты.

5 "Появление"спина.

Как спин воoьще влияет на уравнение? В первом приближении это уравнение Паули. Чуть более продвинутый предел - спиниорбитальное взаимодействие. На самом деле все это сидит в уравнении Дирака, а все, что мы наблюдаем - некоторые его нерелятивистские приближения.

Уравнение Дирака для свободной частицы совпадает с уравнением Шредингера:

$$i\hbar\partial_t psi = \hat{H}\psi; \tag{62}$$

А сам гамильтониан выглядит как:

$$\hat{H} = c\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}} = mc^2\hat{\beta}; \tag{63}$$

Масс покоя и просто масс не существует. Есть просто масса.

Тогда получим:

$$\hat{H} = c(\hat{\alpha}_x\hat{p}_x + \hat{\alpha}_y\hat{p}_y) + \hat{\alpha}_z\hat{p}_z) + mc^2\beta; \tag{64}$$

А если писать альфа- и бета-матрицы:

$$\hat{\alpha}_i = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{bmatrix}; \tag{65}$$

$$\hat{\beta}_i = \begin{bmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{bmatrix}; \tag{66}$$