



扭摆拓展实验

小组成员：我是谁，是谁呢，忘记了，不管了



1.实验目的

- 1.测量扭摆装置运动的物理过程及其相关数据。
- 2.解释这个运动的原理：刚体的运动是一个球面摆和一个扭摆的复合运动，我们需要分解得到这两个运动的拟合函数表达式，并验证其准确性。
- 3.探究转动惯量对于刚体上质点运动轨迹的影响。

2.实验仪器

- 铁架台、钢丝、刚体、圆环、米尺、手机(用于拍摄视频)、马克笔（用于标记质点）、tracker、Origin、MATLAB。

3.实验原理

- 1.只考虑转动的情况下，在受到恢复力矩的作用下，根据牛顿第二定律得：

$$I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

- 2.只存在扭摆时的质点坐标公式：

$$x(t) = x_c + R \cos(\theta(t) + \theta_x)$$

$$y(t) = y_c + R \sin(\theta(t) + \theta_y)$$

- 3. $\theta(t)$ 的求法：由几何作图可得， $\theta(t) = \arctan \frac{y_2(t) - y_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)}$



代数区



工具



表格



数据

$$= (-5.4918725155848, 5.817158)$$

$$h = \text{线段}(E, A)$$

$$= 8$$

$$i = \text{线段}(E, D)$$

$$= 4.4564192205965$$

$$j: \text{直线}(E, D)$$

$$= 2.1448226778317x + 3.90632$$

$$F = \text{交点}(j, x\text{轴})$$

$$= (5.1028202468867, 0)$$

$$\beta = \text{角度}(j, x\text{轴})$$

$$= 0.5021239022429 \text{ rad}$$

$$\gamma = \text{角度}(h, x\text{轴})$$

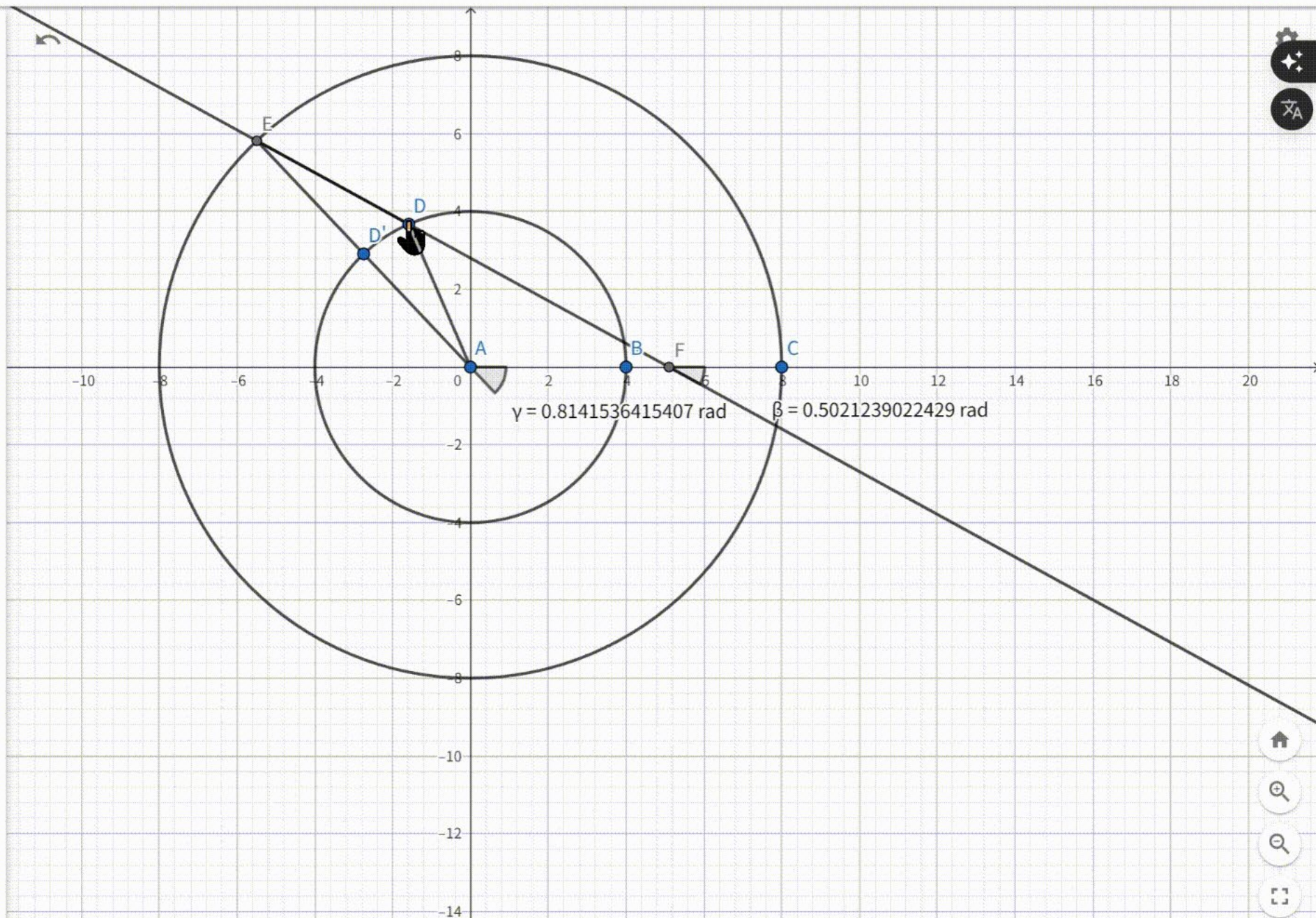
$$= 0.8141536415407 \text{ rad}$$

$$\phi = \gamma - \beta$$

$$= 0.3120297392978 \text{ rad}$$

+

输入...



3.实验原理

- 4.在小角度运动的情况下，单摆的小角度近似方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = A \cdot \cos(\omega_g t + \varphi)$$
$$\omega_g = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- 5.球面摆的运动可以近似为 x, y 两方向单摆运动的叠加。
- 6.只存在球面摆时的质心坐标公式：

$$\begin{cases} x_c = x_{c_0} + a \cdot \cos(\omega_g t + \varphi_x) \\ y_c = y_{c_0} + b \cdot \sin(\omega_g t + \varphi_y) \end{cases}$$

3.实验原理

- 7.综合坐标公式:

$$\begin{cases} x_1(t)=x_{c_0} + a \cdot \cos(\omega_g t + \varphi_x) + R_1 \cdot \cos(\theta(t) + \theta_x) \\ y_1(t)=y_{c_0} + b \cdot \sin(\omega_g t + \varphi_y) + R_1 \cdot \sin(\theta(t) + \theta_y) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2(t)=x_{c_0} + a \cdot \cos(\omega_g t + \varphi_x) + R_2 \cdot \cos(\theta(t) + \theta_x) \\ y_2(t)=x_{c_0} + b \cdot \sin(\omega_g t + \varphi_y) + R_2 \cdot \sin(\theta(t) + \theta_y) \end{cases}$$

4.实验内容

1. 设置仪器

设置合适的扭摆摆线长度，测量摆线长度三次并取平均值。

2. 拍摄视频

(a) 拍摄前准备：用黑色马克笔在金属刚体上标记两个点，便于后期点的追踪。手机开始视频录制模式，对焦在目标刚体上。调整手机的放大倍数，使得刚体上质点的运动轨迹始终处于录制范围内；

(b) 开始视频录制，将手机水平放置于扭摆底座上。轻轻扭转旋钮并推动刚体，使其开始运动，得到一个30-40s的30fps视频；

(c) 不改变摆线长度，在刚体上增加一个圆环，重复上述步骤，得到第二个视频。

3. 数据处理

(a) 将视频导入tracker软件，选择两个标记点——即马克笔标记的两个黑色点，进行追踪，得到两组点的横纵坐标-时间数据；

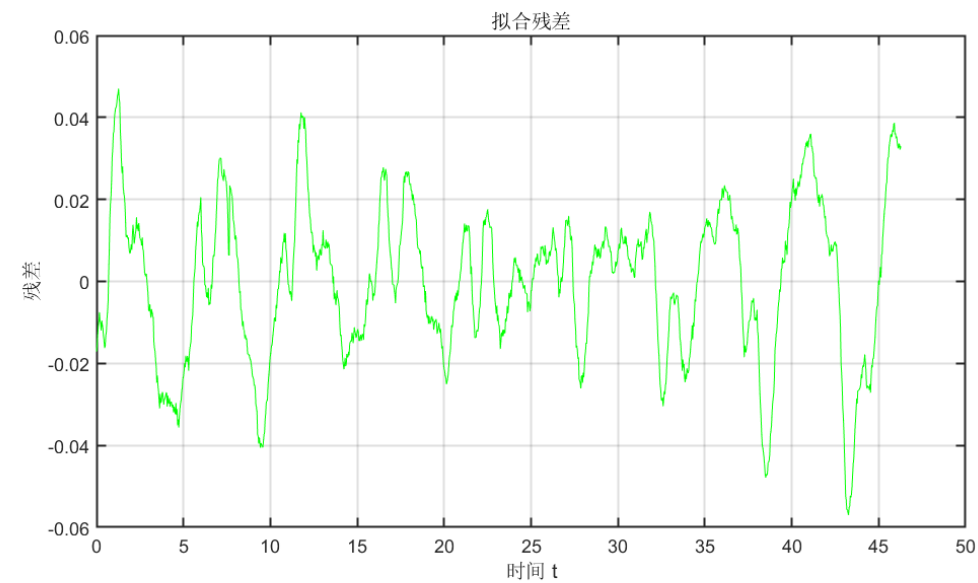
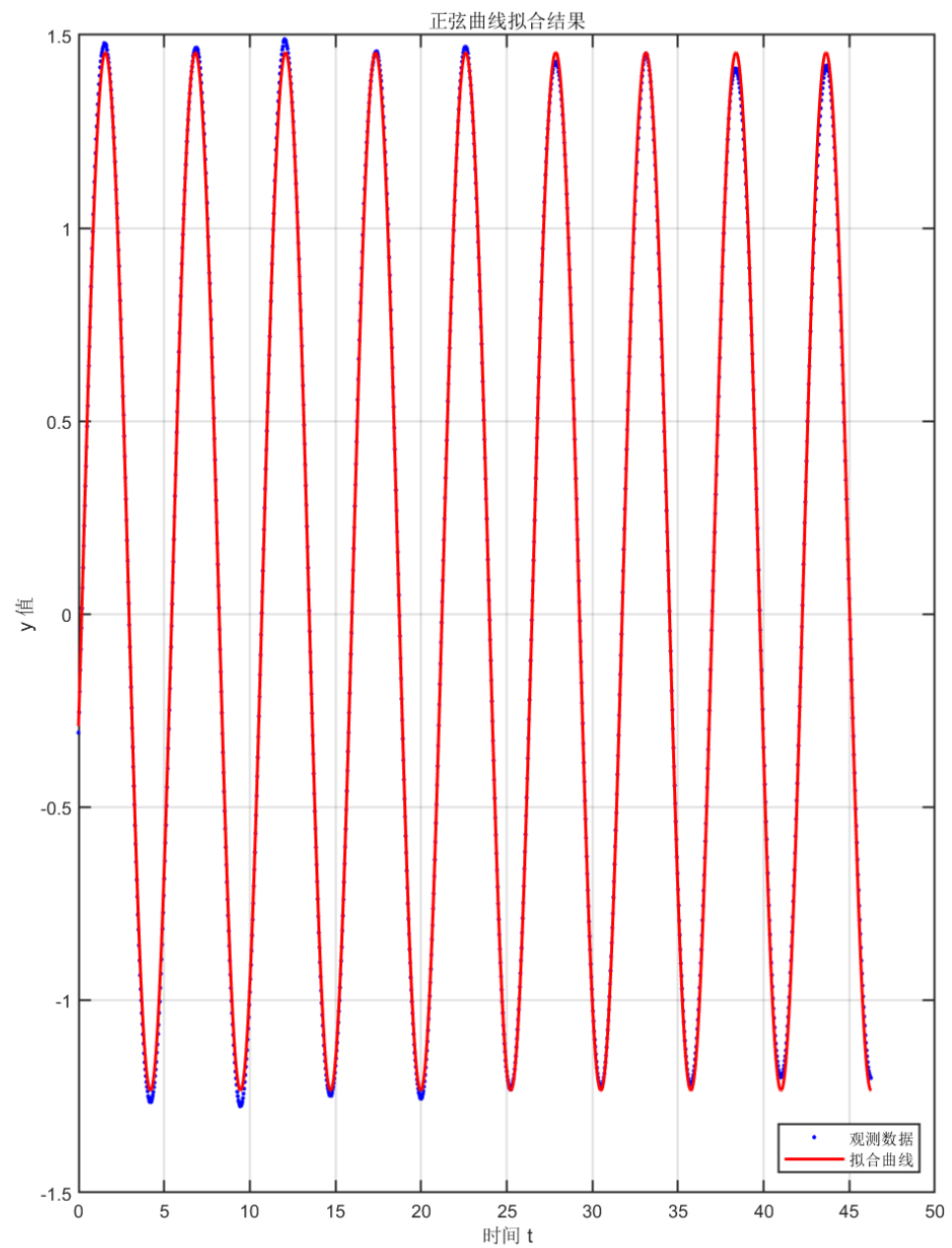
(b) 将数据导入Origin进行数据分析。

5.数据处理

- 1) 摆长为57.83cm, 无圆环刚体:

(a)拟合 $\theta(t)$:由公式 $\theta(t) = \arctan \frac{y_2(t)-y_1(t)}{x_2(t)-x_1(t)}$ 可以得到每个时间对应的 $\theta(t)$, 将 $\theta(t)$ 的结果以

$\theta(t) = \theta_0 + A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ 进行拟合, 得到 $\theta(t) = 0.1095 + 1.3457 \sin(1.1947t - 0.3022)$ 。



拟合参数:
 $y_0 = 0.1095$
振幅 $A = 1.3457$
角频率 $\omega = 1.1947$ rad/unit
相位 $\varphi = -0.3022$ rad
频率 $f = 0.1901$ Hz
 $R^2 = 0.9996$

图1: $\theta(t)$ 拟合图

5.数据处理

- (b)拟合 $x_{C_0}, y_{C_0}, a, b, R_1, R_2, \omega_g, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$,得到 $x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t)$ 的表达式:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{C_0} + a \cos(\omega_g t + \varphi_x) + R_1 \cos(\theta(t) + \theta_x) \\ y_1(t) = y_{C_0} + b \sin(\omega_g t + \varphi_y) + R_1 \sin(\theta(t) + \theta_y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = x_{C_0} + a \cos(\omega_g t + \varphi_x) + R_2 \cos(\theta(t) + \theta_x) \\ y_2(t) = y_{C_0} + b \sin(\omega_g t + \varphi_y) + R_2 \sin(\theta(t) + \theta_y) \end{cases}$$

- 将 $\theta(t) = 0.1095 + 1.3457 \sin(1.1947t - 0.3022)$ 带入,进行拟合,进行三角诱导公式使得 $R_1 > 0$,
- 得到:

$$\begin{cases} x_1 = 58.3069 + 57.9607 \cos(4.1060t - 1.2094) + 106.5522 \cos(\theta(t) + 3.0807) \\ y_1 = -334.7360 + 82.3392 \sin(4.1060t - 3.0593) + 106.5522 \sin(\theta(t) + 3.1023) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 57.8732 + 57.2387 \cos(4.1061t - 1.2152) + 108.3969 \cos(\theta(t) + 0.0547) \\ y_2 = -333.8828 + 83.0249 \sin(4.1061t - 3.0724) + 108.3969 \sin(\theta(t) + 0.0343) \end{cases}$$

B 点拟合: $R^2 = 0.99988$, max residual = 9.59944 A 点拟合: $R^2 = 0.99982$, max residual = 8.77074

A 点参数 $pA = [xc1, a1, wg1, phi1, yc1, b1, phi3, R1, phi2, phi4]:$

58.3069 57.9607 4.1060 -1.2094 -334.7360 82.3392 -3.0593 -106.5522 -0.0609 -0.0392

B 点参数 $pB = [xc2, a2, wg2, phi1, yc2, b2, phi3, R2, phi2, phi4]:$

57.8732 57.2387 4.1061 -1.2152 -333.8828 83.0249 -3.0724 108.3969 0.0547 0.0343

图2: 拟合参数

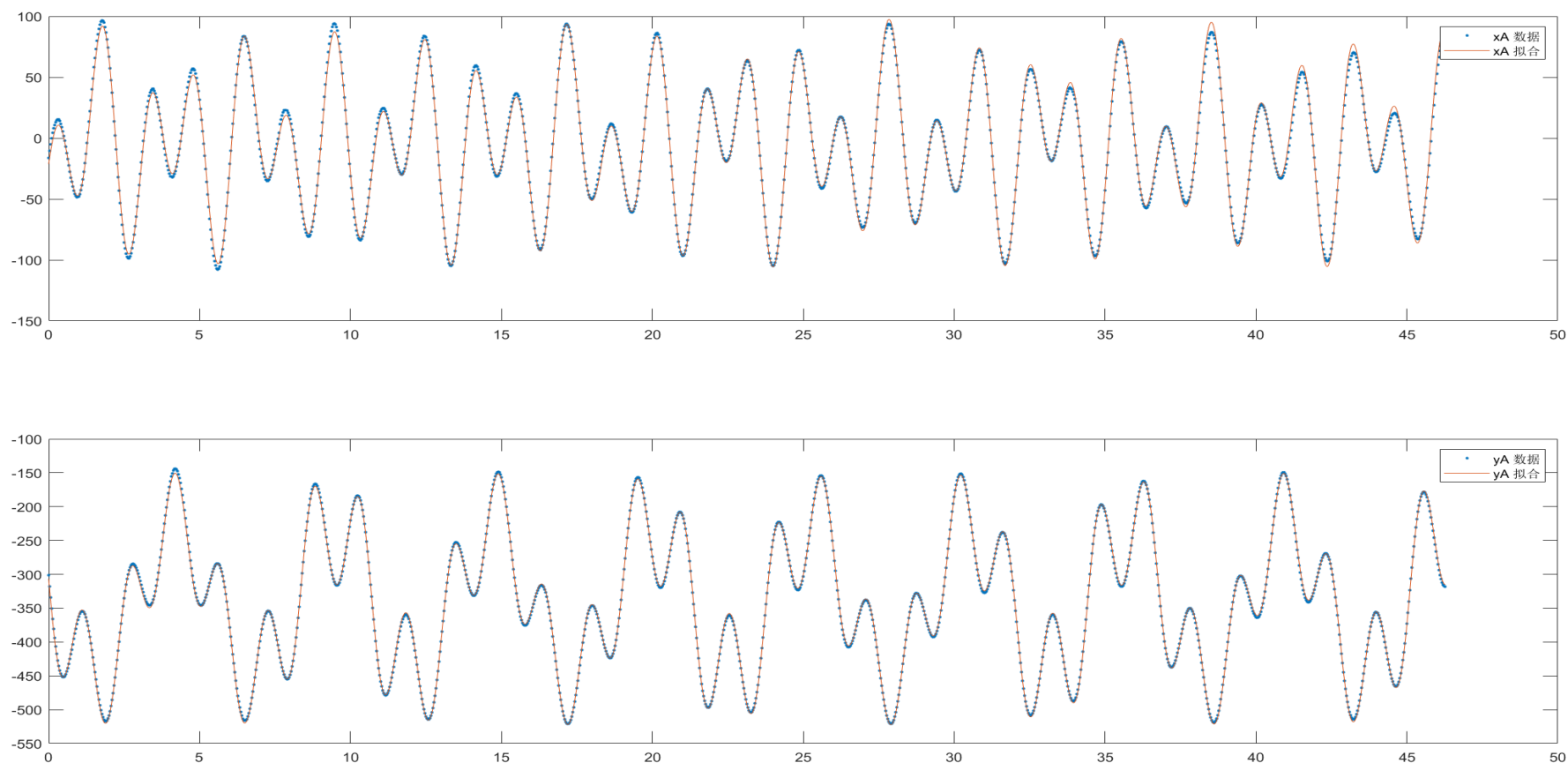


图3: A点横纵坐标——时间拟合图

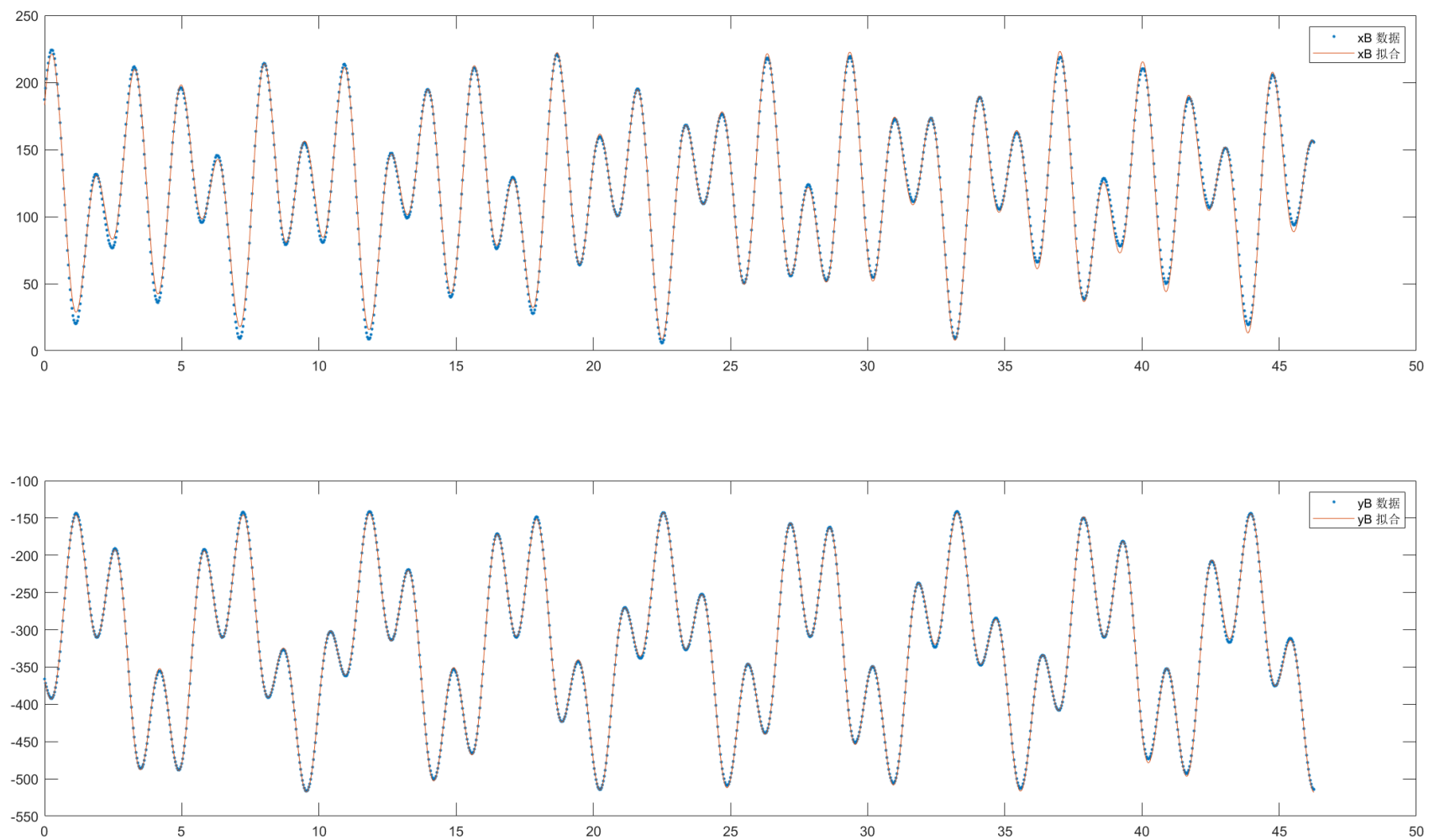


图4: B 点横纵坐标——时间拟合图

5. 数据处理

- (c)将得到的拟合参数带入实验原理中综合坐标公式,由A,B两点反推得到两组 $(x_c(t), y_c(t))$ 的坐标轨迹, 绘图得到:

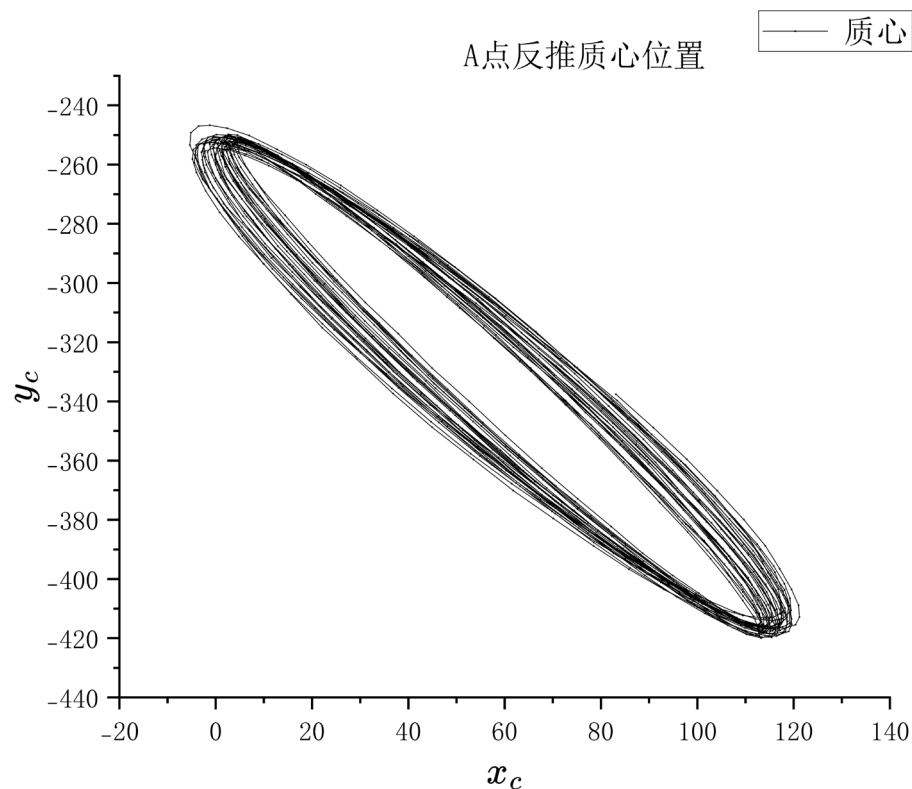


图5: A点反推的质心坐标轨迹图

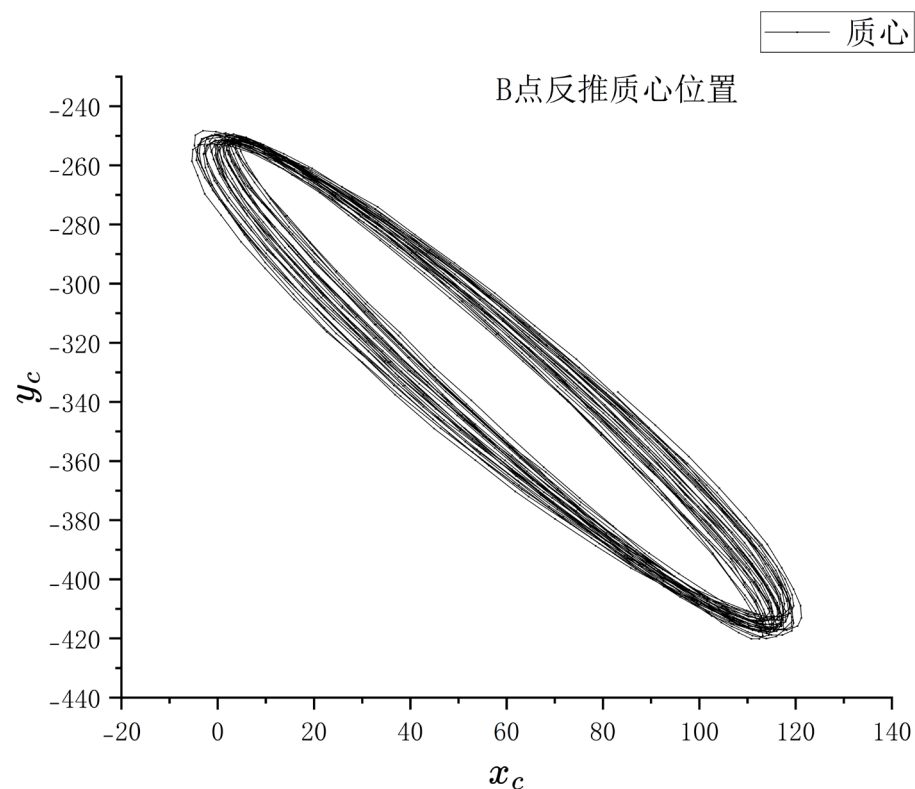


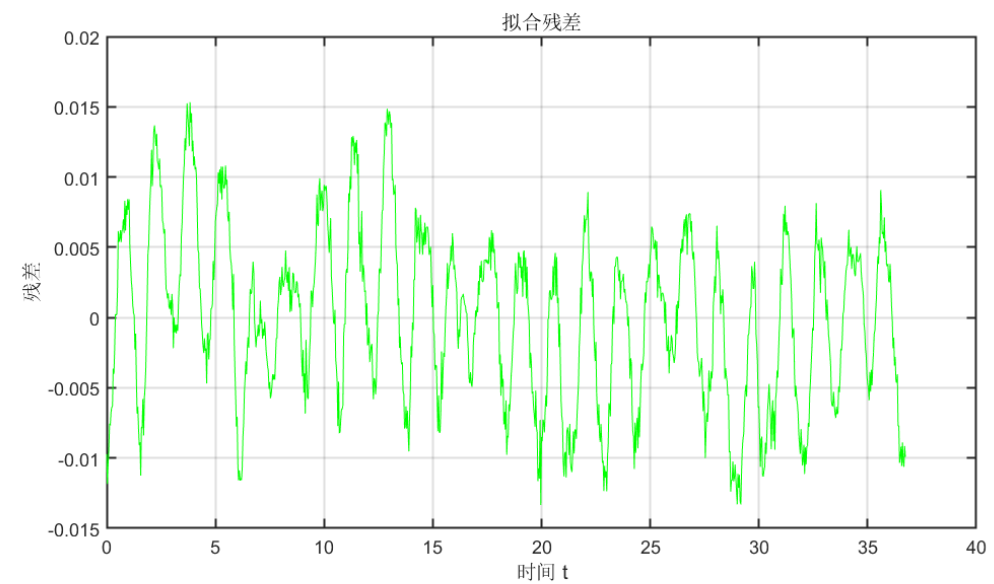
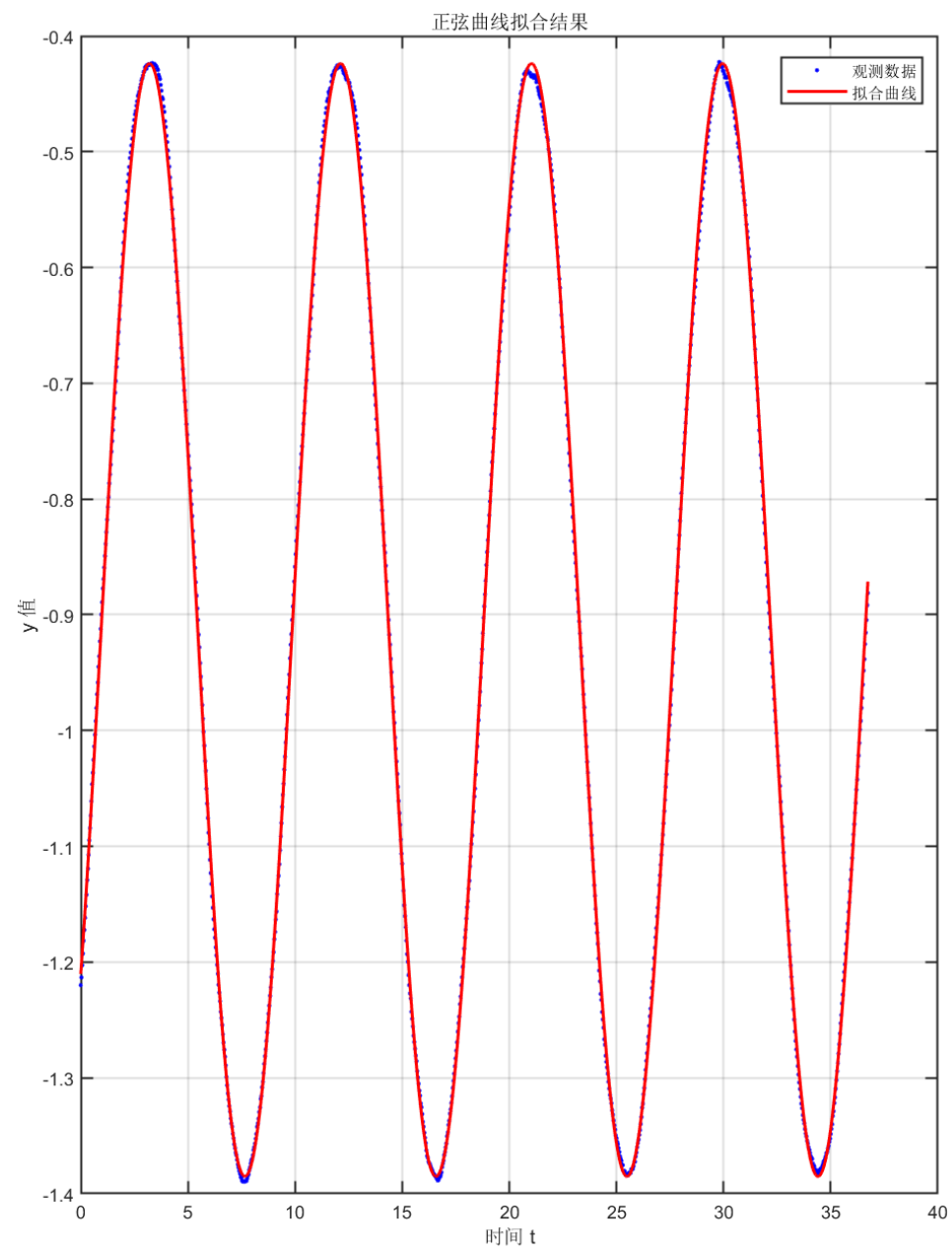
图6: B点反推的质心坐标轨迹图

5.数据处理

- 2) 摆长为57.83cm, 有圆环刚体:

(a)拟合 $\theta(t)$:由公式 $\theta(t) = \arctan \frac{y_2(t)-y_1(t)}{x_2(t)-x_1(t)}$ 可以得到每个时间对应的 $\theta(t)$, 将 $\theta(t)$ 的结果以

$\theta(t) = \theta_0 + A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ 进行拟合, 得到 $\theta(t) = -0.9045 + 0.4808\sin(0.7048t - 0.6891)$ 。



拟合参数:
 $y_0 = -0.9045$
振幅 $A = 0.4808$
角频率 $\omega = 0.7048$ rad/unit
相位 $\varphi = -0.6891$ rad
频率 $f = 0.1122$ Hz
 $R^2 = 0.9997$

图7: $\theta(t)$ 拟合图

5.数据处理

- 对 A, B 两点进行拟合, 并使用三角诱导公式使得 $R_1 > 0$,
- 得到:

$$\begin{cases} x_1 = -31.2942 + 71.1724 * \cos(4.1178 * t + 2.8592) + 91.6279 * \cos(\theta(t) + 3.2592) \\ y_1 = -447.5730 + 80.1044 * \sin(4.1178 * t + 1.9304) + 91.6279 * \sin(\theta(t) + 3.2303) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -28.6870 + 71.7296 * \cos(4.1177 * t + 2.8616) + 92.7770 * \cos(\theta(t) - 0.1435) \\ y_2 = -447.2191 + 78.8005 \sin(4.1177 * t + 1.9366) + 92.7770 * \sin(\theta(t) - 0.0967) \end{cases}$$

B 点拟合: $R^2 = 0.99809$, max residual = 32.19486 A 点拟合: $R^2 = 0.99421$, max residual = 32.90397

A 点参数 $pA = [xc1, a1, wg1, phi1, yc1, b1, phi3, R1, phi2, phi4]$:
-31.2942 71.1724 4.1178 2.8592 -447.5730 80.1044 1.9304 -91.6279 0.1176 0.0887

B 点参数 $pB = [xc2, a2, wg2, phi1, yc2, b2, phi3, R2, phi2, phi4]$:
-28.6870 71.7296 4.1177 2.8616 -447.2191 78.8005 1.9366 92.7770 -0.1435 -0.0967

图8：拟合参数

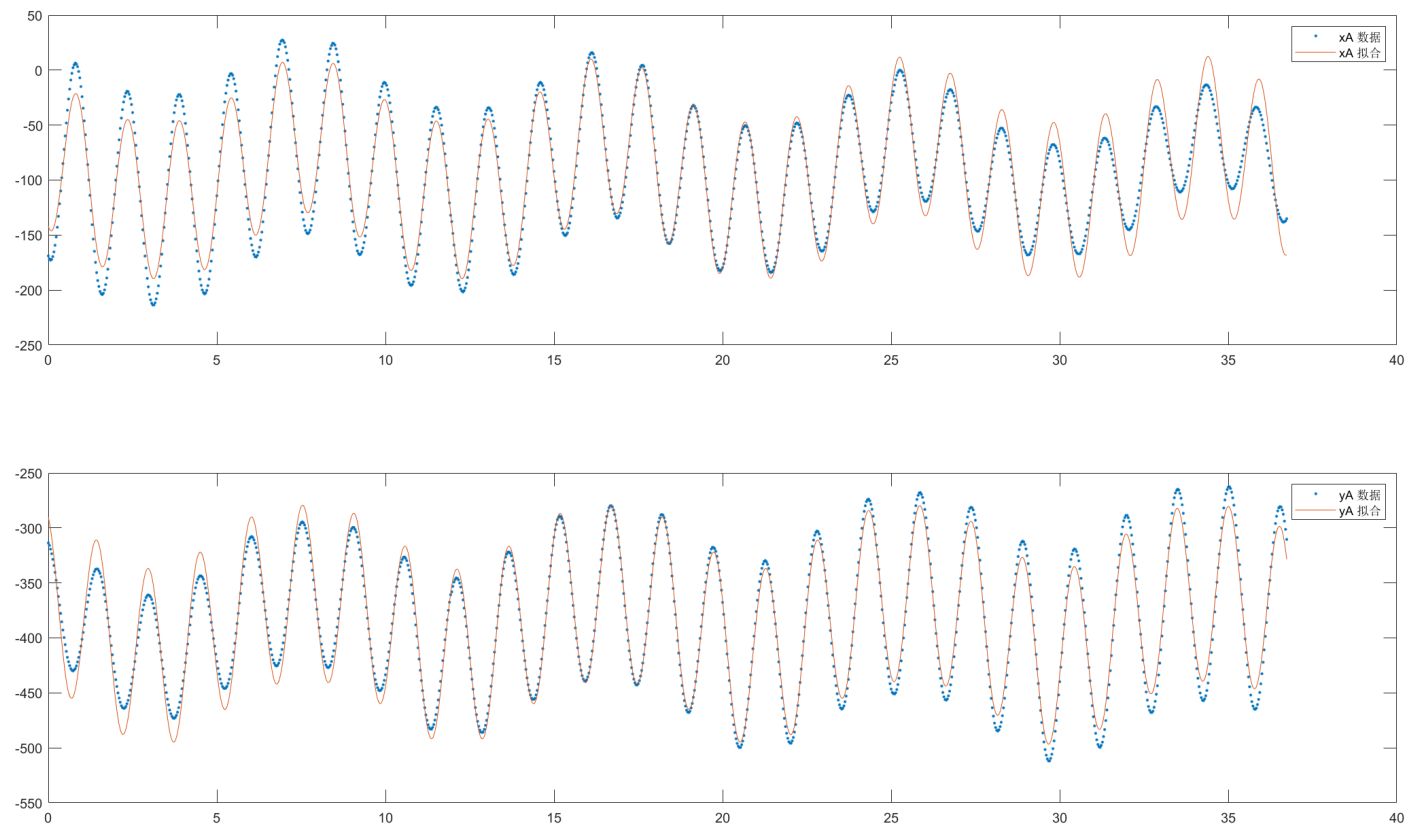


图9：A点横纵坐标——时间拟合图

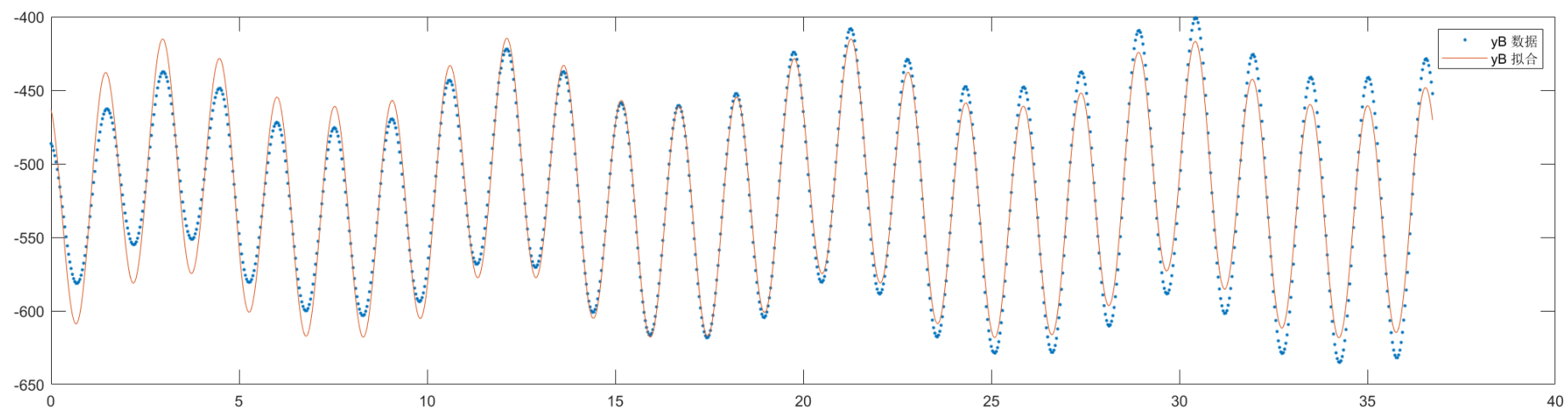
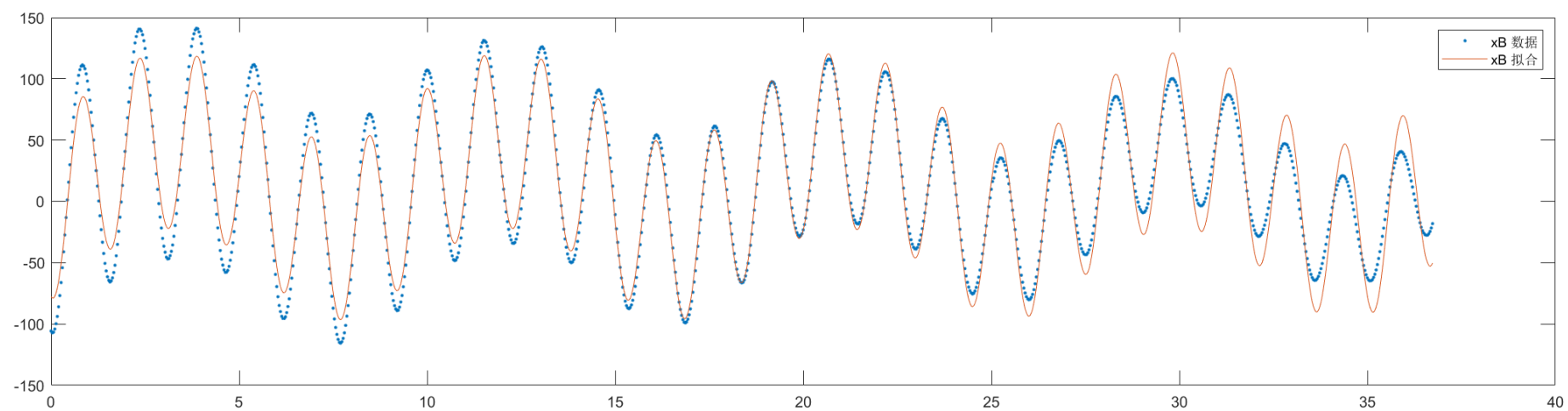


图10: B点横纵坐标—时间拟合图

5. 数据处理

- (c) A, B 两点反推得到的两组 $(x_c(t), y_c(t))$ 的坐标轨迹图:

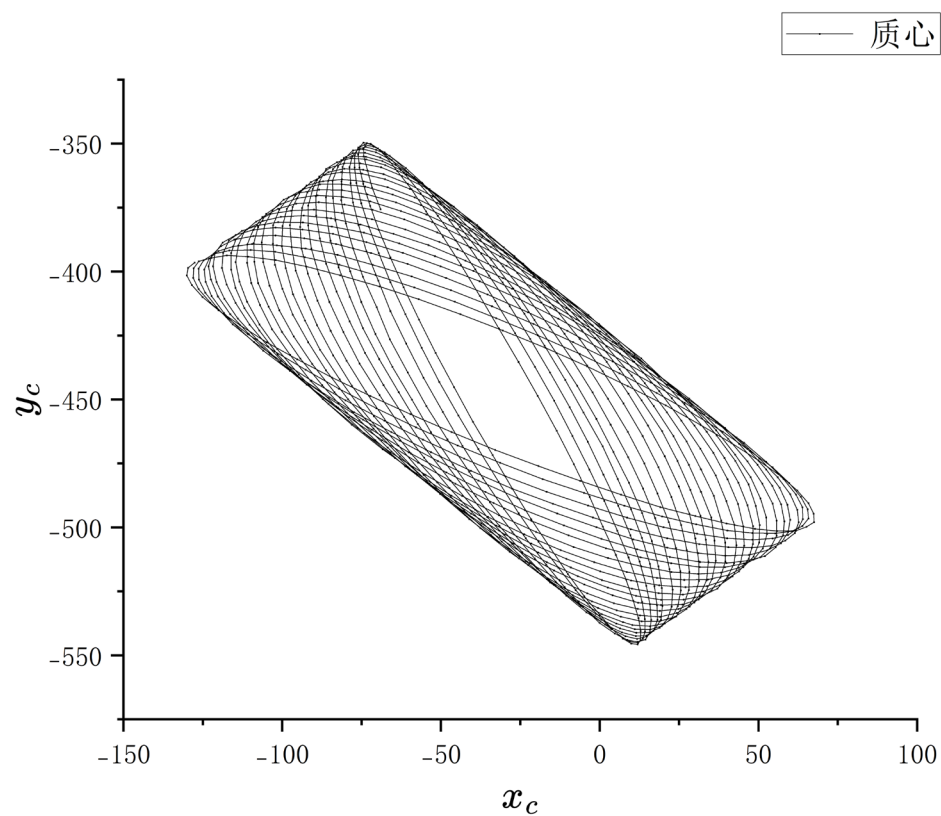


图11: A点反推的质心坐标轨迹图

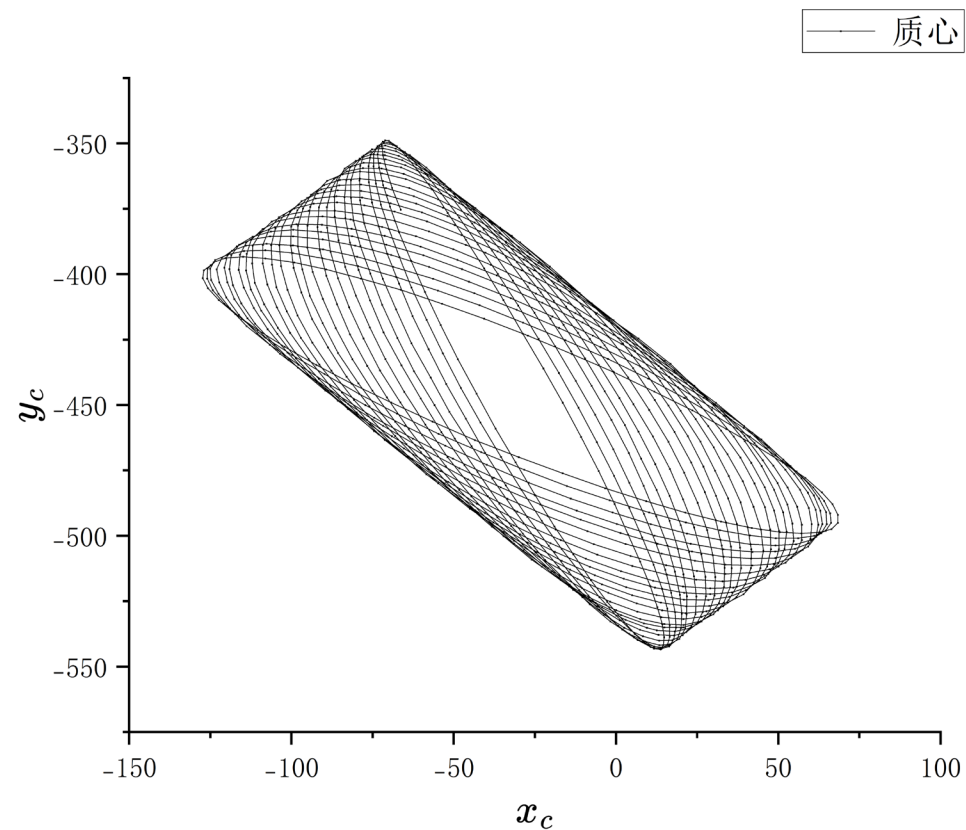


图12: B点反推的质心坐标轨迹图

5.数据处理

- 3) 对比分析:

相比之下, 第二个实验增加了圆环, 转动惯量变大, 扭摆的圆频率变小, 球面摆的圆频率几乎不变, 符合猜想。

实验一中, 测量出扭摆圆频率 $\omega = 1.1947 \text{ rad/s}$, 球面摆圆频率 $\omega_g = 4.1060 \text{ rad/s}$,

实验二中, 测量出扭摆圆频率 $\omega = 0.7048 \text{ rad/s}$, 球面摆圆频率 $\omega_g = 4.1177 \text{ rad/s}$,

6.误差分析

1. tracker 软件自动识别标记点的过程存在微小的偏差;
2. 测量绳长时仪器带来的误差;
3. 球面摆存在进动, 对结果造成影响;
4. 扭摆与球面摆之间存在相互影响;
5. 扭摆的转动中心并未与质心完美重合;
6. 钢丝有弹性, 摆动过程中会有微小的伸缩;
7. 摆动过程中刚体在竖直方向有微小抖动;
8. 数据拟合带来的误差。

7.实验结论

1.成功的验证了刚体的运动是球面摆运动和扭摆运动的复合，其拟合方程为：

$$x(t) = x_c + a \cdot \cos(\omega_g t + \varphi_x) + R \cdot \cos(\theta(t) + \theta_x)$$

$$y(t) = y_c + b \cdot \sin(\omega_g t + \varphi_y) + R \cdot \sin(\theta(t) + \theta_y)$$

$$\text{其中： } \theta(t) = \theta_0 + A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

2.通过实验一与实验二的对比发现，转动惯量只影响扭摆的圆频率，两者呈负相关。

8.参考文献

[1] 实验讲义,18.切变模量的测量-2025

[2]杨仲准. 台湾中原大学 Tracker 软件安装与使用教学 [EB/OL]. 中原大学物理实验室,

http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/file/resources/How%20to%20use%20TrackerCYCU_CCYang.pdf

[3] 周子栋,邵明珍,王才林,等.利用扭摆实验探究简谐运动规律[J].物理实验,2022,42(02):53-57.

Thanks all