Chapitre 3 : Optimisation d'une fonction de 2 variables sous contrainte

Il est fréquent qu'on soit amené à résoudre des problèmes sous contrainte : par exemple maximiser un profit sous une contrainte de budget, ou bien minimiser des coûts sous contrainte d'une production minimale obligatoire,...

Pour une fonction de 2 variables réelles on peut, dans certains cas, résoudre le problème par la méthode dite de « substitution » qui réduit l'étude aux variations d'une fonction d'une seule variable.

Cette méthode a l'inconvénient d'être spécifique à une catégorie de fonctions.

La méthode de substitution : un exemple

Un cultivateur dispose de 100 m de fils barbelés et veut s'en servir pour clôturer un terrain rectangulaire de surface maximale. Quelles sont les dimensions d'un tel terrain ?

Notons x et y la longueur et la largeur du rectangle.
Notre problème s'exprime alors de la façon suivante

- Maximiser : $f(x,y)=xy$ (surface maximale)
- sous la contrainte : $2x+2y=100$ (périmètre égal à 100 m)

On peut ramener le problème à l'étude d'une fonction d'une seule variable réelle.
En effet : la contrainte permet d'exprimer y en fonction de x, c'est-à-dire $2y=100-2x$
ou encore :

$$y=50-x$$

et la surface devient :

$$S=xy=x(50-x)=50x-x^2.$$

On peut maximiser ainsi la fonction S (fonction d'une seule variable) avec les méthodes habituelles.

Ecrivant que la dérivée première de S par rapport à x est égale à 0 :

$$S'=50-2x=0$$

qui donne l'unique solution $x=25$.

La dérivée seconde de S (par rapport à x) est $S''=-2$
Comme $S''<0$, on conclut qu'au point $x=25$ la fonction S atteint bien un <u>maximum</u>.

On en déduit la valeur de y correspondante en utilisant la contrainte :

$$y=50-x=50-25=25.$$

Le terrain doit donc être un carré de coté égal à 25 m (la surface est maximale, égale à $25\times 25=625\text{ m}^2$.)

Lorsque la contrainte ne permet pas d'exprimer une variable en fonction de l'autre, on a recours à une méthode plus générale : la méthode de Lagrange.

La méthode de Lagrange

Considérons une fonction $f(x, y)$ admettant des dérivées partielles première et secondes et soumise à la contrainte $g(x, y) = 0$.
Dans l'exemple précédent la contrainte serait : $g(x, y) = 2x + 2y - 100 = 0$

On appelle **lagrangien** associé à f et g, la fonction :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \times g(x, y)$$

où λ est un réel, appelé **multiplicateur** de Lagrange

La fonction L est une fonction à <u>3 variables réelles</u> qui sont : x, y et λ.

Conditions nécessaires d'optimalité (résultats admis)

Pour que f admette en un point (a, b) (appartenant au domaine de définition de f) un extremum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$ il faut qu'il existe λ réel tel que :

$$\begin{cases} L'_x(a, b, \lambda) = 0 \\ L'_y(a, b, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(a, b, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Ces conditions sont nécessaires mais non suffisantes. Elles permettent de déterminer les points critiques mais n'affirment pas si la fonction f admette un maximum ou un minimum en ces points.

Illustrons cela avec l'exemple du cultivateur.

<u>Exemple 1 (suite)</u>

$f(x, y) = xy$ (Surface maximale)
sous la contrainte : $2x + 2y = 100$ (périmètre égal à 100 m)

la contrainte s'exprime sous la forme : $g(x, y) = 2x + 2y - 100$
Le lagrangien associé à f et g, s'écrit :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \times g(x, y)$$

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \times (2x + 2y - 100)$$

La dérivée première de $L(x, y, \lambda)$ par rapport à x est $L'_x = y + 2\lambda$

La dérivée première de $L(x, y, \lambda)$ par rapport à y est $L'_y = x + 2\lambda$

La dérivée première de $L(x, y, \lambda)$ par rapport à λ est $L'_\lambda = 2x + 2y - 100$

On doit donc résoudre le système de 3 équations à 3 variables suivant :

$$y + 2\lambda = 0$$
$$x + 2\lambda = 0$$
$$2x + 2y - 100 = 0$$

Il est facile de vérifier que l'unique solution de ce système est : $x = 25$, $y = 25$ et $\lambda = -25/2$

Conditions suffisantes d'optimalité (résultats admis)

Notons $H(x, y, \lambda)$ la matrice hessienne associée à L (composée de **toutes** les dérivées secondes)

$$H(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$$

et $|H(x, y, \lambda)|$ son déterminant.

Soit (a, b, λ) un point vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité.

Alors :

- si $|H(a,b,\lambda)| < 0$: la fonction f admet en (a, b) un minimum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$
- si $|H(a,b,\lambda)| > 0$: la fonction f admet en (a, b) un maximum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$
- si $|H(a,b,\lambda)| = 0$: on ne peut pas conclure.

Remarque : $L''_{\lambda\lambda} = 0$ quelque soit f et g.

Continuons avec l'exemple 1.

Exemple 1 (suite)

On avait établi dans l'exemple précédent que :

$$L'_x = y + 2\lambda$$
$$L'_y = x + 2\lambda$$
$$L'_\lambda = 2x + 2y - 100$$

On en déduit :

$$L''_{xx} = 0 \ ; \ L''_{yy} = 0 \ ; \ L''_{\lambda\lambda} = 0$$
$$L''_{xy} = L''_{yx} = 1$$
$$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2$$
$$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2$$

D'où la matrice :

$$H(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $|H(x,y,\lambda)|=-1(-4)+2(2)=8>0$ (le déterminant est constant dans cet exemple)

<u>Conclusion</u> : au point $(x,y)=(25,25)$ la fonction $f(x,y)=xy$ soumise à la contrainte $2x+2y=100$ atteint un <u>maximum</u> qui vaut : $25\times 25=625$.

Remarques

- La détermination de la valeur du multiplicateur λ n'est pas toujours nécessaire pour trouver l'extremum (dans le cadre d'une optimisation sous contrainte de type égalité).
- Dans un contexte économique ou de gestion λ a une **signification concrète** : il donne, au signe près, une approximation de la variation de $f(a,b)$ lorsqu'on augmente d'une unité la constante c dans une contrainte du type $g(x,y)=c$.
  - Par exemple, si la fonction f exprime un profit (en €) et c représente la main-d'œuvre en nombre d'ouvriers, alors le profit augmenterait *approximativement* de λ € si on augmentait la main-d'œuvre d'un ouvrier supplémentaire.
  - Dans l'exemple 1 précédent (cultivateur) nous avons trouvé $\lambda=-25/2$: l'augmentation de 1 m de fils de barbelés (donc pour un périmètre de 101 m) induit une augmentation de la surface du terrain d'environ $25/2$ m² (résultat à vérifier à titre d'exercice).
- Si les variables sont liées par **plusieurs contraintes** on peut introduire autant de multiplicateurs qu'il y a de contraintes (c'est une des généralisations de la méthode de Lagrange).

Exercice 1

Soit un récipient d'eau parallélépipède rectangle de volume égal à 32 m^3. Trouver les dimensions du récipient (ouvert par le haut) qui correspond à la plus petite surface latérale (indication : on peut utiliser une substitution pour se ramener à l'optimisation sans contrainte d'une fonction à 2 variables).

Exercice 2

Utiliser la méthode de Lagrange pour étudier les extrema de la fonction f définie par :

$f(x,y)=4x^2-2xy+6y^2$ sous la contrainte : $x+y=72$.

Récapitulatif

Etapes	**Exemple**
	$f(x,y)=x^3+2xy-x+y^2-10$ Soumise à la contrainte : $g(x,y)=2x+y-1=0$
1. On pose $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\times g(x,y)$	$L=x^3+2xy-x+y^2-10+\lambda(2x+y-1)$
2. On résout le système : $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$ Les solutions sont écrites sous la forme : (x,y,λ)	$\begin{cases} 3x^2+2y-1+2\lambda=0 \\ 2x+2y+\lambda=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ On trouve 2 solutions : $(1,-1,0)$ et $(-1,3,-4)$
3. On établit la matrice hessienne : $H(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$	$H(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} 6x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. On calcule le déterminant $\lvert H(x,y,\lambda)\rvert$ pour chacune des solutions trouvées en **2**.	$\lvert H(x,y,\lambda)\rvert=-6x$ Pour les 2 solutions trouvées en **2** : $\lvert H(1,-1,0)\rvert=-6$ $\lvert H(-1,3,-4)\rvert=6$
5. On conclut : $\lvert H(a,b,\lambda)\rvert<0$: minimum local $\lvert H(a,b,\lambda)\rvert>0$: maximum local $\lvert H(a,b,\lambda)\rvert=0$: pas de conclusion.	En $(1,-1)$ minimum pour f (pour la contrainte imposée) En $(-1,3)$ maximum pour f (pour la contrainte imposée)

N'oubliez pas de calculer λ pour chaque point

Contrainte sous forme d'inégalité

On suggère souvent en économie que l'entreprise ne maximise pas le profit mais le chiffre d'affaire à condition que le profit dépass un montant minimal considéré acceptable.

La contrainte serait donc de la forme $g(x;y) \geq 0$.

Dans ces conditions il est posible d'adpater la méthode de Lagrange.

Plus précisément, il suffit de supporser que la contrainte est une égalité, puis, suivant le signe de λ, d'appliquer les régles suivantes :

Cas 1 : maximisation avec g(x;y) > 0.

- Si $\lambda > 0$ alors la contrainte est une contrainte liante et le maximum visé est celui qui est trouvé
- Si $\lambda \leq 0$ alors la contrainte n'est pas liante et le maximum visé est celui qu'on obtient en ignorant la contrainte (il faut donc recommencer une optimisation sans contrainte).

Cas 2 : maximisation avec g(x;y) < 0.

- Si $\lambda > 0$ alors la contrainte n'est pas liante et le maximum visé est celui qu'on obtient en ignorant la contrainte (il faut donc recommencer une optimisation sans contrainte).
- Si $\lambda \leq 0$ alors la contrainte est une contrainte liante et le maximum visé est celui qui est trouvé

Cas 3 : minimisation avec g(x;y) > 0.

- Si $\lambda > 0$ alors la contrainte n'est pas liante et le minimum visé est celui qu'on obtient en ignorant la contrainte (il faut donc recommencer une optimisation sans contrainte).
- Si $\lambda \leq 0$ alors la contrainte est une contrainte liante et le minimum visé est celui qui est trouvé

Cas 4 : minimisation avec g(x;y) < 0.

- Si $\lambda > 0$ alors la contrainte est une contrainte liante et le maximum visé est celui qui est trouvé
- Si $\lambda \leq 0$ alors la contrainte n'est pas liante et le maximum visé est celui qu'on obtient en ignorant la contrainte (il faut donc recommencer une optimisation sans contrainte).

Remarque importante :

- Si vous trouvez un seul point candidat,
  - ET Si la contrainte est liante pour ce point, alors vous pouvez stopper le traitement, car la méthode stipule que si la contrainte est liante, alors l'optimum visé fait partie de la liste des points candidats pur lesquels la contrainte est liante.
- Si vous trouvez plusieurs points candidats, il faut traiter chaque point indépendemment.

Exemple 3 :

Maximiser $f(x;y) = xy$

Sous la contrainte : $g(x;y) = 2x + 2y \leq 100$

Montrez que vous trouvez le point (25 ; 25 ;-25/2).

Or $\lambda < 0$. Dans le cadre d'une maximisation sous contrainte de type $g(x;y) \leq 0$, il s'agit alors d'une contrainte liante et donc le maximum recherché sous contrainte a été trouvé (x=25; y=25).

Il n'est pas utile de faire aboutir la méthode du chapitre 3 jusqu'au bout, étant donné qu'il n'y a qu'un point, et la méthode stipule que l'optimum cherché se trouve dans la liste des points candidats trouvés.

Exemple 4 :

Minimiser $f(x;y) = x^3 + 2xy - x + y^2 - 10$

Sous la contrainte $g(x;y) = 2x + y - 1 \geq 0$

Montrez que vous trouvez les points (1 ;-1 ; 0).et (-1;3;-4)

Or $\lambda <= 0$. Dans le cadre d'une minimisation sous contrainte de type $g(x;y) \geq 0$, il s'agit alors d'une contrainte liante pour les deux points candidats, et donc le minimum recherché sous contrainte a été trouvé, malgré cela, le minimum correspond à quel point candidat ? Terminez la méthode pour le découvrir.

Exemple 5 :

Maximiser $f(x;y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$

Sous la contrainte : $g(x;y) = x + y \leq 79$

Montrez que vous trouvez le point (49 ; 30 ; 12).

Or $\lambda > 0$. Dans le cadre d'une maximisation sous contrainte de type $g(x;y) \leq 0$, il s'agit alors d'une contrainte non liante et donc le maximum recherché est celui que l'on obtient en ignorant la contrainte.

Il faut donc recommencer l'optimisation sans contrainte.

Montrez que l'on trouve le point (40 ; 24) et évidemment pas de valeur pour λ !

Récapitulatif

On peut résumer les règles précédentes dans le tableau suivant :

		Conclusion
Cas maximisation	g et λ sont de même signe	Contrainte liante
	g et λ sont de signes contraires	Contrainte non liante
Cas minimisation	g et λ sont de signes contraires	Contrainte liante
	g et λ sont de même signe	Contrainte non liante

Exercice 1

Utilisez la méthode de lagrange pour étudier les extrema de la fonction f définie par : $f(x;y) = 4x^2 - 2xy + 6y^2$ sous la contrainte $x + y = 72$

Exercice 2

Résoudre le problème :

Minimiser $f(x;y) = 4x^2 - 2xy + 6y^2$ sous la contrainte $x + y \geq 72$

Exercice 3

Soit $S=x^2y^2$ la fonction mesurant la satisfaction qu'un agent économique retire de la consommation en quantités x et y de deux biens différents.

Supposons que l'agent ne dispose que d'un budget de 5 euros maximum dans l'idée d'acquérir les deux biens (l'un et l'autre) dont chaque unité est vendue au prix de 1 euro.

Déterminer la consommation qui maximise la satisfacation de l'agent tou en respectant sa contrainte de budget.

Exercice 4

On considère un producteur caractérisé par une fonction de production Q= 2 K + KxL.

- Où K représente la quantité de facteur capital utilisée
- Et L la quantité de facteur travail utilisée.

On suppose que le coût d'une unité de facteur capital est égal à 1 et que le taux de salaire unitaire (facteur travail) est égal à 2.

1) Tracez la courbe de niveau égal à 10 (c'est-à-dire pour Q = 10).
2) Donner une interprétation économique de cette courbe (appelée isoquante)
3) Déterminer les demandes optimales d'inputs (K et L) qui permettent de minimiser les coûts de l'entreprise tout en assurant un niveau de production Q = 10.
4) En déduire le coût minimum de l'entreprise.