Chapitre 5 : Introduction à la programmation linéaire

Table des matières

1) Le programme linéaire a pour objet :

D'optimiser (recherche d'un maximum ou d'un minimum) une fonction de forme linéaire (dite fonction économique ou encore fonction-objectif)

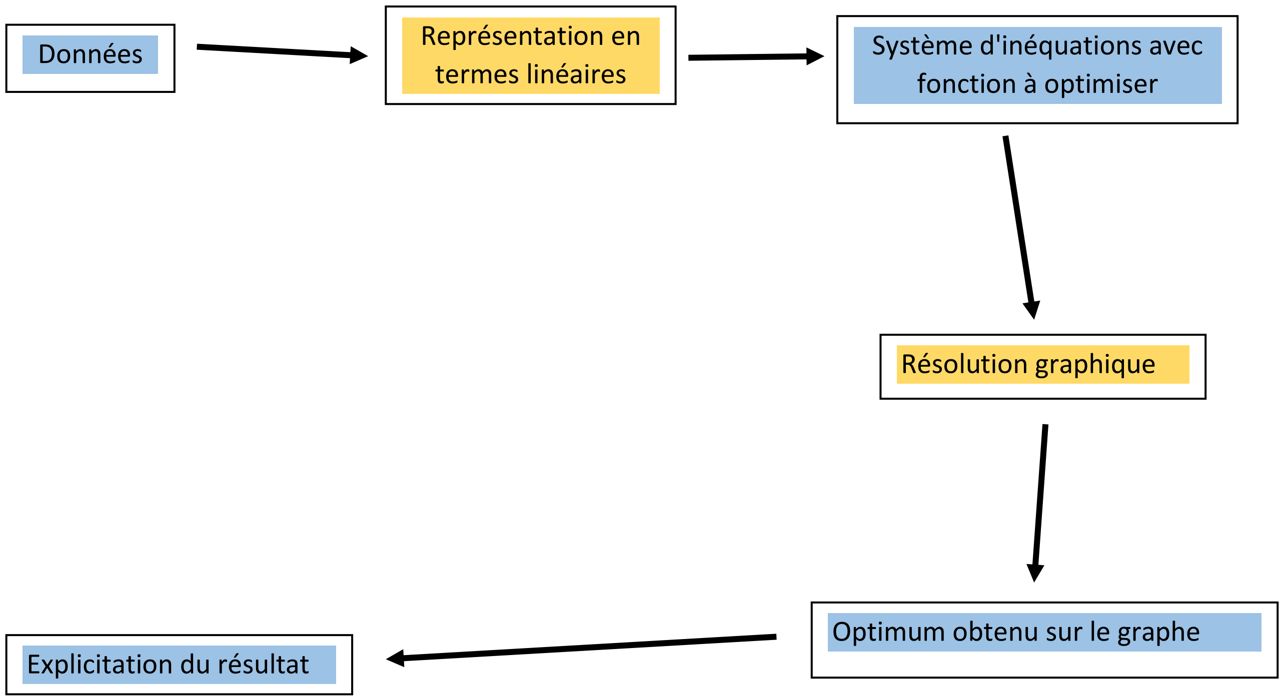
De tenir compte de contraintes linéaires (souvent des inéquations)

On cherche par exemple à déterminer l'affectation optimale de ressources rares entre des activités ou produits concurrents.

Ou encore : trouver la combinaison des produits qui maximisera les profits hebdomadaires de l'entreprise en tenant compte des contraintes techniques déterminées par l'état de la technologie et des facteurs de production.

La programmation linéaire est particulièrement utile dans le Supply Chain Management (SCM) ou gestion de la chaine logistique, dont la mission est l'anticipation et le pilotage des flux physiques de l'entreprise, de la demande du client, jusqu'aux approvisionnements provenant des fournisseurs, et ceci, au moyen d'outils de planification et d'aide à la décision.

2) Processus de résolution d'un problème par programmation linéaire



3) Première phase : la modélisation / représentation en termes linéaires

On dit que l'on met le programme linéaire sous forme canonique

C'est l'étape la plus importante de la résolution.

Il s'agit d'exprimer sous forme mathématiques un problème énoncé de manière littérale.

Il faut commencer par définir avec précision les variables :

Remarque importante : Le principal écueil est de se tromper entre les variables de décision (x et y) et les variables secondaires (qui serviront à établir les contraintes). Si c'est le cas, votre erreur vous amènera inéluctablement dans une impasse.

Algorithme de prise en compte des informations du cahier des charges :

a) Exemple de programme linaire

Une usine dispose de 2 ateliers A_1 et A_2 d'une capacité mensuelle de 140 heures chacun.

Elle y fabrique 2 produits P_1 et P_2 : chaque unité de P_1 nécessite 5 heures dans A_1, et 8 heures dans A_2, tandis que chaque unité de P_2 nécessite 6 heures dans A_1, et 4 heures dans A_2.

Le bénéfice net est de 240€ par unité de P_1 et 200€ par unité de P_2.

b) Explicitation des variables

x : nombre d'unités de produits finis P_1 à produire
y : nombre d'unités de produits finis P_2 à produire

Récapitulatif des données dans le tableau :

	Produit P_1	Produit P_2	Capacités
Atelier A_1	5	6	140
Atelier A_2	8	4	140
Bénéfice	240	200	

c) Du tableau à la forme canonique

	Produit P_1	Produit P_2	Capacités
Atelier A_1	5 +	6 ≤	140
Atelier A_2	8 +	4 ≤	140
Bénéfice	240	200	

d) PL sous forme canonique

Max (240x+200y)

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{contrainte évidente} \\ y \geq 0 & \text{contrainte évidente} \\ 5x + 6y \leq 140 & \text{contrainte de l'atelier } A_1 \\ 8x + 4y \leq 140 & \text{contrainte de l'atelier } A_2 \end{cases}$$

e) Exercice 1 : le camelot

Un camelot vend des chaussettes sur les marchés et dans les grandes artères commerçantes. Sa clientèle l'astreint à n'utiliser qu'une gamme particulièrement restreinte de produits bon marché. En fait, il ne vend que des chaussettes de 2 types : des mi-bas de coton, et des chaussettes en laine.

Economiste en puissance, notre homme est doué comme tout bon commerçant d'une psychologie fine.

Le client étant particulièrement sensible aux îlots bradés par le camelot, la longue expérience de celui-ci a montré que la clientèle portait son choix indifféremment sur :

Un lot à 8€ comprenant 2 paires de chaussettes en coton et 8 paires en laine.
Un lot à 6€ comprenant 2 paires de chaussettes en coton et 4 paires en laine.

Il dispose au total de 24 paires de chaussettes en fil de coton et 84 paires en laine et il se demande alors quelle combinaison de lots à 6^e et à 8^e pourrait lui permettre de réaliser une recette maximale.

f) Exercice 2 : minimisation

Un commerçant a l'occasion d'acheter un certain nombre de vêtements à des tarifs intéressants.

Cette occasion se présente sous la forme de lots :

Un lot de type A comprend 1 manteau, 2 robes et 3 tailleurs.
Un lot de type B comprend 2 manteaux, 2 robes et 1 tailleur.

Le commerçant veut constituer une collection contenant au moins 40 manteaux, 60 robes et 60 tailleurs.

Les lots de type A coutent : 600€ et les lots de type B coutent 500€.

Déterminer le nombre de lots de chaque sorte à acheter pour que la dépense soit minimale.
Quelle est alors le montant de cette dépense ?

<u>Remarques importantes :</u>

- L'algorithmique est le même
- Le programme linéaire d'une minimisation est "symétrique" au PL d'une maximisation. On dit qu'il est DUAL
- Les contraintes en sont forcément impactées. (sens des inéquations inversées pour que les contraintes aient du sens)

g) Exercice 3 : Les deux usines

Une société possède deux usines fabricant chacune 3 types de biens.

La première usine produit par semaine :
12000 unités du bien A
4000 unités du bien B
8000 unités du bien C

La deuxième usine produit par semaine :
4000 unités du bien A
4000 unités du bien B
24000 unités du bien C

La société doit respecter un contrat portant sur la livraison par mois de :
24000 unités du bien A
16000 unités du bien B
48000 unités du bien C

Le cout de fabrication des produits est respectivement de :
400000€ par semaine pour l'usine 1
320000€ par semaine pour l'usine 2

Combien de semaine dans le mois chaque usine dit-elle tourner pour remplir le contrat de manière la plus économique ?

4) Deuxième phase : visualisation du domaine des solutions acceptables

a) Tracez les droites de contrainte :

$5x + 6y = 140$ D1 : (0;70/3) (28;0) contrainte de l'atelier A1

$8x + 4y = 140$ D2 : (0;35) (35/2;0) contrainte de l'atelier A2

b) Puis détectez la zone admissible pour chaque droite.

N'oubliez pas, vous avez aussi les contraintes suivantes : $x \geq 0$ et $y \geq 0$).

C'est dire, pour chaque droite, décidez quelle zone est admissible d'après le sens de l'inéquation appliquée à cette droite.

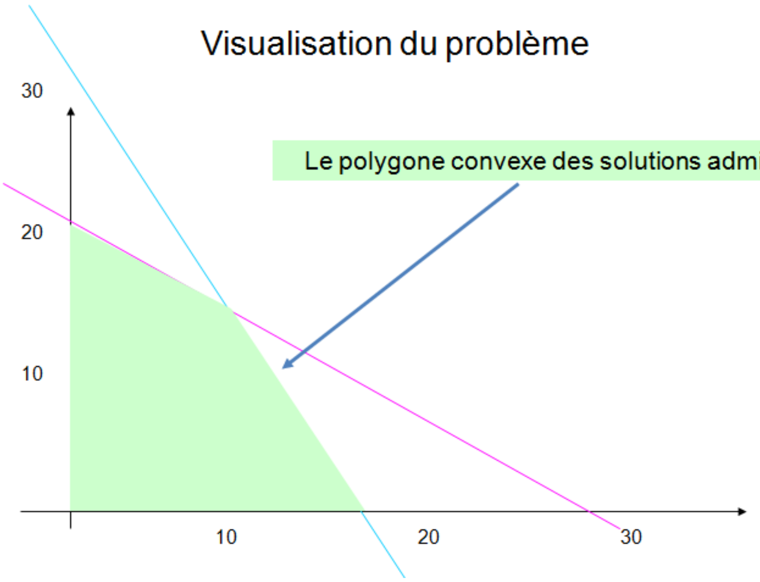
Il suffit alors de conserver l'intersection de toutes ces zones pour obtenir le polygone des solutions admissibles

c) Vous obtenez le polygone des solutions admissibles

C'est-à-dire la partie du plan telle que les couples (x ; y) vérifient les contraintes.

D'un point de vue géométrique, les contraintes linéaires délimitent un ensemble convexe, c'est-à-dire un ensemble tel que chaque fois que l'on y prend deux points M et N, le segment [M ; N] qui les joint y est entièrement contenu.

Chaque contrainte partage le plan en 2 parties. Le point origine (0 ; 0) permet de définir le demi plan qui fait partie du domaine des solutions admissibles.



Astuces pour obtenir un graphe qui puisse vous fournir le bon résultat :

Ou placer votre graphe sur la feuille ?

Comment choisir l'échelle optimale ?

<u>Suite exercice 1 : le camelot</u>

<u>Suite exercice 2 : minimisation</u>

<u>Remarques importantes :</u>

- Méthode de tracé de droites identique
- Polygone des solutions admissibles correspondant aux inéquations, ce qui amène à tracer un polygone "complémentaire"

<u>Suite exercice 3 : les deux usines</u>

5) Troisième phase : résolution graphique

2 méthodes sont à votre disposition.

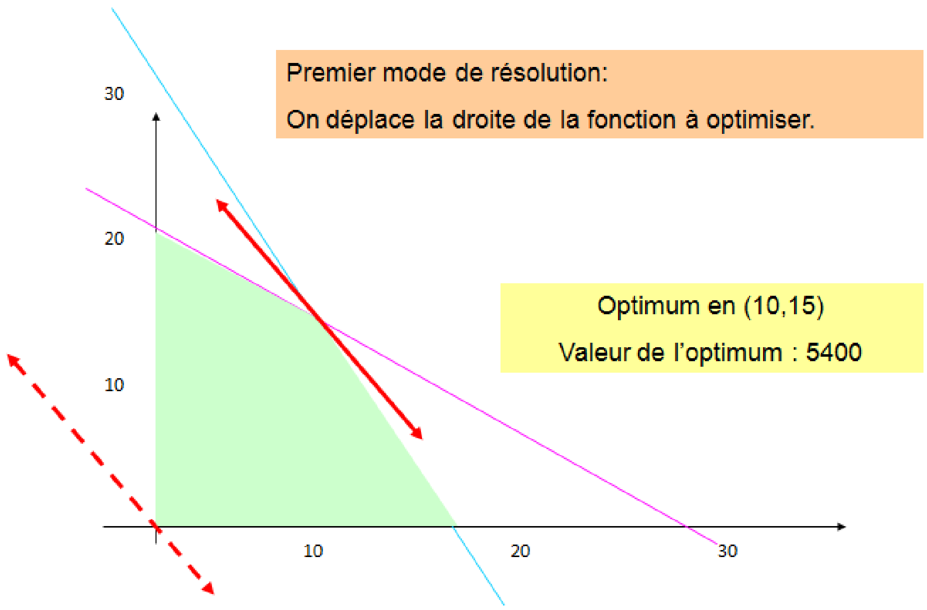
N'oubliez pas qu'il vous faut expliquer ce que vous faites dans vos exercices.

- Méthode 1 : tracé de la droite objectif, puis translation
- Méthode 2 : utilisation d'un résultat admis, puis énumération

a) •Méthode 1 : tracé de la droite objectif, puis translation

On trace la fonction objectif :

L'équation de cette fonction s'écrit ax + by = R ou R est une constante.
On étudie l'équation en donnant une valeur arbitraire à R



Problème du point B (10,15) :

Sommes-nous sensés obtenir ses coordonnées à partir d'un graphe assurément peu fiable ?

Evidemment non !

Résolvez le système de deux équations à deux inconnues entre les deux droites identifiées afin d'obtenir les coordonnées exactes du point B

Dans l'exemple du cours, la fonction à optimiser est 240 x + 200 y = R

Vous pouvez choisir de donner à R la valeur 0 (ce qui vous donnera une droite), ou bien … pour quoi pas 2400 ? (pourquoi cette valeur et pas une autre ?)

Puis vous la faites translater jusqu'à atteindre le dernier point du polygone convexe

Il ne vous reste plus qu'à fournir votre conclusion avec une phrase explicite

Suite exercice 1 : le camelot

Suite exercice 2 : minimisation

Dans le cas d'une maximisation : plus **grande** est R, meilleur est le résultat. La solution se trouve sur le sommet par lequel passe la droite ax + by = R la plus **éloignée** de l'origine (0 ; 0)

Dans le cas d'une minimisation : plus **petite** est R, meilleur est le résultat. La solution se trouve sur le sommet par lequel passe la droite ax + by = R la plus **proche** de l'origine (0 ; 0)

Suite exercice 3 : les deux usines

b) Méthode 2 : utilisation d'un résultat admis, puis énumération

Remarque importante : la visualisation graphique en montrant les limites du polygone des solutions admissibles a permis d'écarter un certain nombre de points intersections entre toutes les droites de contraintes.

Plus il y a de droites de contraintes, plus il y a de points intersections :

- La réalité étant complexe,
- Alors les paramètres sont nombreux dans la réalité,
- Ce qui multiplie le nombre de contraintes,
- ce qui multiplie encore le nombre de points potentiellement intéressants à étudier (points candidats)

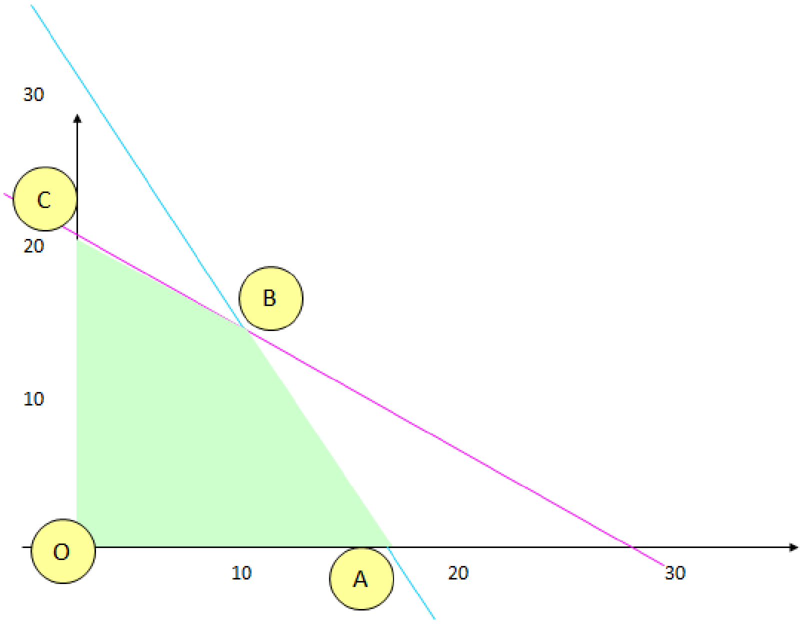
Théorème admis : "L'optimum est obtenu en l'un des sommets du polygone des solutions"

Dans l'exemple du cours, nous avons 4 points candidats

Il suffit alors de les réunir dans un tableau et de calculer la valeur de la fonction f(x;y) pour chacun de ces points :

sommet	(x ; y)	f(x ; y)
O	(0 ; 0)	0
A	(35/2 ; 0)	4200 €
B	(10 ; 15)	5400 €
C	(0 ; 70/3)	14000/3 €

Il ne vous reste plus qu'à fournir votre conclusion avec une phrase explicite



Problème du point B (10,15) :

Sommes-nous sensés obtenir ses coordonnées à partir d'un graphe assurément peu fiable ?

Evidemment non !

Résolvez le système de deux équations à deux inconnues entre les deux droites identifiées afin d'obtenir les coordonnées exactes du point B

Suite exercice 1 : le camelot

Suite exercice 2 : minimisation

Suite exercice 3 : les deux usines

6) Sensibilité graphique :

L'idée est de savoir quand l'optimalité bascule d'une solution à une autre. Cela revient à suivre pas à pas un algorithme nous faisant parcourir les points candidats. Ce raisonnement nous permettrait de rapidement réadapter notre réponse au problème de programmation linéaire, si l'un des paramètres (coefficient dans une contrainte ou sur la fonction objectif) changeait.

a) Prenons l'exemple 2 :

Modèle complet

x : nombre d'unités de P_1 à produire

y : nombre d'unités de P_2 à produire

Sous les contraintes suivantes :

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$
$$5x + 6y \leq 140$$
$$8x + 4y \leq 140$$

Posons la fonction objectif max Z = ax + by

Dans quelle mesure la solution reste-t-elle optimale ?

<u>Résolution pour l'exemple 2 :</u>

Pente de la fonction objectif : -a/b

Pente de la droite de 1ère contrainte : -5/6

Pente de la droite de 2ème contrainte : -2

La solution optimale du problème dépendra du tableau fourni ci-dessous :

-a/b	- ∞	-2	-5/6	0
Solution	A	B	C	

On vérifie bien que lorsque Z = 240x+200y, le point optimal est B (-a/b = -1.2)

b) Exercice 4 :

1. Résoudre graphiquement :

Min Z= 5x + 10y

$$\text{Sous :}\quad \begin{aligned} 2x + 2y &\leq 240 \\ 3x + y &\leq 140 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Que pensez-vous du résultat trouvé et de la pertinence de cet exercice ?
3. Résoudre graphiquement :

Min Z= 5x + 10y

$$\text{Sous :}\quad \begin{aligned} 2x + 2y &\geq 240 \\ 3x + y &\geq 140 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Exercice 5 :

Résoudre graphiquement :

Max Z= 6x + 10y

$$\text{Sous :}\quad \begin{aligned} 2x + 4y &\leq 40 \\ x + y &\leq 15 \\ x &\leq 8 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

d) Exercice 6 :

Résoudre graphiquement :

Min Z= 3x + 4y

$$\text{Sous :}\quad \begin{aligned} x + y &\geq 9 \\ x - y &\leq 9 \\ x + 3y &\geq 17 \\ x &\geq 3 \\ y &\leq 10 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$