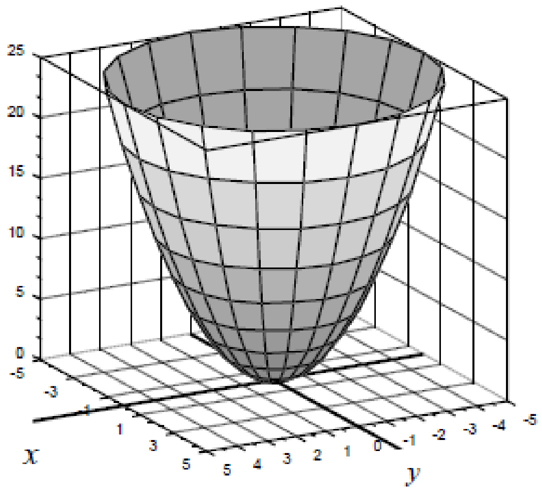
Chapitre 2 : Optimisation d'une fonction de 2 variables sans contraintes

Comme pour le cas d'une fonction d'une seule variable, on peut poser le problème de la recherche d'un minimum ou maximum (extremum) pour une fonction à 2 variables.

Dans l'exemple suivant (fonction f définie par $f(x,y)=x^2+y^2$), on voit (graphiquement) qu'au point $(x,y)=(0,0)$ la fonction atteint un **minimum global**.



(Tracé réalisé avec Scilab 4.1.2)

Soit f une fonction de 2 variables réelles et un point particulier (a,b) de son domaine de définition D.
On dit que la fonction f :

- admet un minimum **global** au point (a,b) si : $f(x,y)\geq f(a,b)$ pour tout $(x,y)\in D$
- admet un maximum **global** au point (a,b) si : $f(x,y)\leq f(a,b)$ pour tout $(x,y)\in D$
- admet un minimum **local** au point (a,b) si au **voisinage** de (a,b) : $f(x,y)\geq f(a,b)$
- admet un maximum **local** au point (a,b) si au **voisinage** de (a,b) : $f(x,y)\leq f(a,b)$

On se limite dans ce cours à l'étude des extrema **locaux**.

Conditions nécessaires d'optimalité

Dans le cas d'une fonction d'une seule variable on sait qu'une condition nécessaire pour qu'un point soit un maximum local, ou un minimum local, est que la dérivée (première) s'annule en ce point. Dans le cas d'une fonction à 2 variables, on obtient une condition **similaire**.

Plus précisément si la fonction f de 2 variables réelles admet un maximum local, ou un minimum local en un point particulier (a,b) de son domaine de définition, on a (résultat admis) :

$$\begin{cases} f_x'(a,b) = 0 \\ f_y'(a,b) = 0 \end{cases}$$

Tout point (a,b) vérifiant ces 2 égalités est appelé point **critique** ou point **stationnaire** ou encore **candidat**.

Attention !

Les 2 égalités précédentes ne traduisent pas l'existence d'un extremum (maximum ou minimum).
Elles permettent de connaître les points susceptibles de présenter un extremum pour f.

Une fois ces points (a,b) repérés, il reste à vérifier si $f(a,b)$ est localement la plus grande ou la plus petite valeur de f, ou encore si $f(a,b)$ n'est pas un extremum.

Remarque : ces conditions se généralisent pour n variables (c'est-à-dire les n dérivées partielles premières soient nulles).

Conditions suffisantes d'optimalité (ou conditions du 2nd ordre)

Soit f une fonction de 2 variables réelles admettant des dérivées partielles premières et secondes.
Soit (a,b) un point **critique** ; c'est-à-dire un point (a,b) qui vérifie les conditions nécessaires évoquées précédemment.

Notons $H(x,y)$ la matrice hessienne de la fonction f,

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}''(x,y) & f_{xy}''(x,y) \\ f_{yx}''(x,y) & f_{yy}''(x,y) \end{bmatrix}$$

et $H(a,b)$ la matrice hessienne évaluée en $(x,y) = (a,b)$:

$$H(a,b) = \begin{bmatrix} f_{xx}''(a,b) & f_{xy}''(a,b) \\ f_{yx}''(a,b) & f_{yy}''(a,b) \end{bmatrix}$$

Notons $|H(a,b)|$ le déterminant de la matrice $H(a,b)$. Nous admettons les résultats suivants.

- Si $|H(a,b)| > 0$ et $f_{xx}''(a,b) > 0$: alors la fonction f admet un minimum **local** en (a,b)
- Si $|H(a,b)| > 0$ et $f_{xx}''(a,b) < 0$: alors la fonction f admet un maximum **local** en (a,b)
- Si $|H(a,b)| < 0$: alors la fonction f n'admet pas d'extremum en (a,b) (c'est un point col)
- Si $|H(a,b)| = 0$: on ne peut pas conclure

Exemple 1

Soit la fonction de 2 variables réelles : $f(x,y) = 2x - x^2 + 8y - 2y^2$.
Etudions ses extrema.

Conditions nécessaires d'optimalité

Cherchons les points critiques, c'est-à-dire les points (x,y) qui vérifient :

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 0 \\ f_y'(x,y) = 0 \end{cases}$$

Les dérivées partielles premières donnent :

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 2 - 2x \\ f_y'(x,y) = 8 - 4y \end{cases}$$

Les points critiques vérifient donc le système :

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 8 - 4y = 0 \end{cases}$$

Ce système admet l'unique solution : $x = 1$ et $y = 2$.

Conditions suffisantes d'optimalité

Les dérivées partielles secondes sont :

$$f_{xx}''(x,y) = -2$$
$$f_{yy}''(x,y) = -4$$
$$f_{xy}''(x,y) = 0$$
$$f_{yx}''(x,y) = 0$$

Ce qui permet d'écrire la matrice hessienne $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}''(x,y) & f_{xy}''(x,y) \\ f_{yx}''(x,y) & f_{yy}''(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Notons ici que $H(x,y)$ est une matrice *constante* (qui ne dépend ni de x ni de y).
Le déterminant de cette matrice est $|H(1;2)| = 8$; et $f_{xx}''(1;2) = -2$.

$$|H(x,y)| = 8 > 0$$
$$f_{xx}''(1;2) = -2 < 0$$

On en déduit qu'au point trouvé $(1;2)$ la fonction f admet un maximum local qui vaut $f(1;2) = 9$.

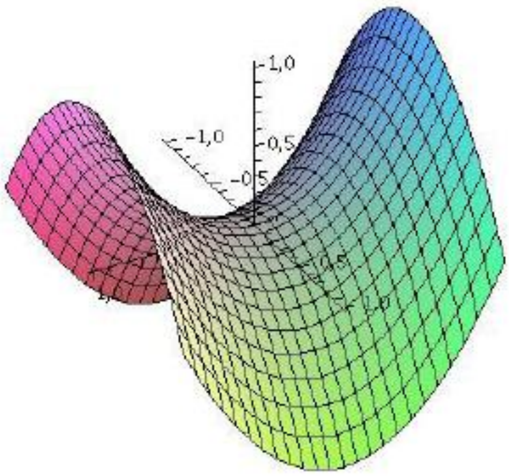
Récapitulatif

Etapes	Exemple
	$f(x,y) = x^3 + 2xy - x + y^2 - 10$
1. On résout le système : $\begin{cases} f_x^{'}(x,y) = 0 \\ f_y^{'}(x,y) = 0 \end{cases}$ Les solutions sont écrites sous la forme (x,y)	$\begin{cases} f_x^{'}(x,y) = 3x^2 + 2y - 1 = 0 \\ f_y^{'}(x,y) = 2x + 2y = 0 \end{cases}$ On trouve 2 solutions : $(1,-1)$ et $(-1/3,1/3)$
2. On établit la matrice hessienne : $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}^{''}(x,y) & f_{xy}^{''}(x,y) \\ f_{yx}^{''}(x,y) & f_{yy}^{''}(x,y) \end{pmatrix}$	$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
3. On calcule le déterminant $\lvert H(x,y) \rvert$	$\lvert H(x,y) \rvert = 12x - 4$
4. On détermine les signes de : $\lvert H(x,y) \rvert$ et $f_{xx}^{''}(x,y)$ pour <u>chacune</u> des solutions trouvées en **1**. Et on conclut.	<u>Au point (1,-1)</u> $\lvert H(1,-1) \rvert = 8 > 0$ $f_{xx}^{''}(1,-1) = 6 > 0$ En (1,-1) il s'agit d'un <u>minimum</u> qui vaut $f(1,-1) = -11$. <u>Au point (1/3,-1/3)</u> $\lvert H(-1/3,1/3) \rvert = -8 < 0$ En (-1/3,1/3) il n'y a pas d'extremum

Cas particulier d'un point « col » (appelé aussi point « selle »)

Il s'agit d'un point critique de la fonction f et pour lequel elle ne présente pas d'extremum local.

D'un point de vue graphique (voir graphique ci-dessous), au point « col » il existe une « direction » où la fonction va croître et une autre direction où la fonction va décroître : dans la direction d'une vallée à une autre on est à une altitude maximum et dans la direction perpendiculaire on monte pour aller au sommet de la montagne.
Le point « col » est aussi appelé « point selle » *(fig. ci-dessous un cas particulier)* dont la terminologie fait référence à une selle de cheval…



Exercices

Etudier les extrema des fonctions f suivantes.

1°) $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$

2°) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - xy - 4x - 7y + 12$

3°) $f(x,y) = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 5$

Aperçu de la démonstration des conditions du second ordre

On montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au **voisinage** d'un point peut être approximée par une fonction polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Dans le cas d'une fonction f **d'une seule variable** x, dérivable n fois, le développement d'ordre n au voisinage de x donne (théorème de Taylor-Young), pour h réel :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}h^1 f'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \ldots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x) + h^n \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Cas particulier : f dérivable 2 fois, le développement d'ordre 2 au voisinage de x donne :

$$f(x+h) \approx f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x).$$

Une condition **nécessaire** pour qu'en $x = a$ la fonction f soit extrémale est que la dérivée soit nulle :

C'est-à-dire : $f'(a) = 0$.

On en déduit :

$f(a+h) - f(a) \approx \frac{1}{2}h^2 f''(a)$.

Et on retrouve les propriétés classiques :

- Si $f''(a) > 0$ alors $f(a+h) - f(a) > 0$: donc en $x = a$ f atteint un minimum.
- Si $f''(a) < 0$ alors $f(a+h) - f(a) < 0$: donc en $x = a$ f atteint un maximum.
- Si $f''(a) = 0$ alors $f(a+h) - f(a) = 0$ (point d'inflexion).

Généralisation : dans le cas d'une fonction f de **2 variables**, admettant des dérivées partielles premières et secondes, le développement **d'ordre 2** au voisinage de (x, y) s'écrit pour h, k réels :

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + h f'_x(x,y) + k f'_y(x,y) + \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hk f''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{yy}(x,y)\right]$$

(Développement admis)

Les conditions **nécessaires** (cf. page 64) pour qu'en $(x, y) = (a, b)$ la fonction f soit extrémale sont :

$$\begin{cases} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{xx}(a,b) + 2hk f''_{xy}(a,b) + k^2 f''_{yy}(a,b)\right]$.

Ou encore :

$f(a+h, b+k) - f(a,b) \approx \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{xx}(a,b) + 2hk f''_{xy}(a,b) + k^2 f''_{yy}(a,b)\right]$.

Pour $k \neq 0$ posons : $\alpha = \dfrac{h}{k}$.

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) \approx \frac{k^2}{2}\left[\alpha^2 f''_{xx}(a,b) + 2\alpha f''_{xy}(a,b) + f''_{yy}(a,b)\right].$$

Le signe du second membre détermine le signe $f(a+h,b+k) - f(a,b)$.
Dans le second membre on reconnait un trinôme du second degré en α, que nous notons T :

$T = \alpha^2 f''_{xx}(a,b) + 2\alpha f''_{xy}(a,b) + f''_{yy}(a,b)$.

Le discriminant de T est : $\Delta = 4\left[\ (f''_{xy}(a,b))^2 - f''_{xx}(a,b)\, f''_{yy}(a,b)\ \right]$.

Ce discriminant peut s'écrire : $\Delta = -4\left[\ f''_{xx}(a,b)\, f''_{yy}(a,b) - (f''_{xy}(a,b))^2\ \right] = -4\left|H(a,b)\right|$

où H est la matrice hessienne associée à f.

Examinons tous les cas possibles :

1°) Si $\Delta < 0$ le trinôme T a le signe de $f''_{xx}(a,b)$.

Autrement dit : si $\left|H(a,b)\right| > 0$ la différence $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ est du même signe de $f''_{xx}(a,b)$.

- Si $f''_{xx}(a,b) > 0$ alors $f(a+h,b+k) - f(a,b) > 0$ et donc f présente un minimum en (a,b).
- Si $f''_{xx}(a,b) < 0$ alors $f(a+h,b+k) - f(a,b) < 0$ et donc f présente un maximum en (a,b).

2°) Si $\Delta > 0$ (autrement dit si $\left|H(a,b)\right| < 0$) : le trinôme T a 2 racines réelles distinctes.
Donc T n'a pas un signe constant. Ce qui signifie qu'il n'y a pas d'extremum en (a,b).

3°) Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $\left|H(a,b)\right| = 0$, on ne peut rien conclure.
(Pour conclure il faut développer f à un ordre supérieur à 2).

Ce qui démontre les propriétés précédemment énoncées.