Exercice 1

Soit f défini par $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$, $x\in \mathrm{R}-\{-1\}$. On pose $x_o=-\frac{1}{2}$, $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{4}$, $x_3=1$. On voudrait faire une approximation du graphe de f dans $[-\frac{1}{2},1]\times\mathrm{R}$ par le graphe d'un polynôme d'interpolation de Lagrange.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$\mathrm{P}(x)=\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\mathrm{L}_j(x) \quad \text{avec} \quad \mathrm{L}_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{3}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

2) Tracer le graphe de f et le graphe de P dans R^2. Conclusions.

Exercice 2

Chercher la meilleure parabole qui approche les données suivantes:

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1.5	3
y_i	-1.6	1.6	2.5	0.2	-6.6

Exercice 3

On considère le tableau de points suivants

i	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	-4.9	-0.6	0.1	0.6	5.1

1) Calculer les paramètres A et B de la droite de régression $y=\mathrm{A}x+\mathrm{B}$ qui passe au plus près de ces points. Reporter sur le même graphe les points du tableau et la droite de régression.
2) Calculer le polynôme $y = ax^3+bx+c$ qui passe au plus près de ces points (démontrer les formules qui permettent de calculer a, b, c. Reporter sur le même graphe les points du tableau et le polynôme cubique de régression.
3) Laquelle de deux méthodes est préférable (droite ou polynôme de degré 3) pour représenter le nuage de points ?

Exercice 4

Effectuer le lissage exponentiel (en utilisant des logarithmes) des points dont les cordonnées sont données dans le tableau :

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
y_i	1	0.34	0.14	0.035

Exercice 5

Soit $J = \int_0^1 \exp(-x^2)dx$.

a) Calculer J par la méthode des trapèzes en prenant n = 10 pas d'intégration.

b) Donner la majoration de l'erreur de la méthode des trapèzes pour J.

Exercice 6

Soit $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

a) Calculer I par la méthode des trapèzes avec n = 10 pas d'intégration. Donnez une majoration du reste.

b) Calculer I par la méthode des Simpson avec $2n$ = 10 pas d'intégration. Donnez une majoration du reste.

c) Calculer la valeur exacte de I. Comparer les deux méthodes.

Exercice 7

Soit f une fonction définie par $f(x) = x^3+x-1$.

a) Montrer que on peut résoudre l'équation $f(x) = 0$ à l'aide de la méthode du point fixe. Considérer les deux cas:

$$x = g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et $x = g_1(x) = 1 - x^3$.

Calculer la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, n = 0,1,..16, $x_0 = 1$ et la suite $x_{n+1} = g_1(x_n)$, n = 0,1,..9, $x_0 = 1$.

b) Déterminer l'ordre de convergence de la méthode du point fixe dans le premier cas.

Exercice 8

Soit $f(x) = x - 0.2\sin x - 0.5$.

a) Calculez une racine de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton en prenant la valeur initial $x_0 = 1$.

b) Déterminer l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour f.

c) Calculez une racine de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de la sécante en prenant $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

Exercice 9

Résoudre, à l'aide de la méthode de Cramer le système suivant:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Même question pour la méthode de Gauss.

Exercice 10

Soit une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que la matrice A admet une décomposition LU .
2) Décomposer la matrice A en produit LU en utilisant l'écriture matricielle de la méthode de Gauss.
2) Résoudre le système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Résoudre le système par la méthode de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -10 \\ 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_3 - 3x_4 = 13 \end{cases}$$

Exercice 12

a) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_2 + 4x_1 = 3 \\ -2x_2 + x_1 = -15 \end{cases}$

Appliquer la méthode de Jacobi aux systèmes donnés. Prenez le vecteur $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme les valeurs initiales. Est-ce que la méthode de Jacobi converge dans le deux cas?

Exercice 13

Soit le système linéaire Ax = b où $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer la relation d'itération de Jacobi relative à ce système sachant que

$$x^{(k+1)} = \left(I - D^{-1}A\right)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

b) Quel est le rayon spectral de la matrice d'itération de Jacobi ? La méthode de Jacobi converge-t-elle?

Exercice 14

Soit le système linéaire Ax = b où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer la relation d'itération de Gauss-Seidel relative à ce système sachant que

$$x^{(k+1)} = \left(I - (D+E)^{-1}A\right)x^{(k)} + (D+E)^{-1}b.$$

b) Quel est le rayon spectral de la matrice d'itération de Gauss-Seidel ? Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel converge? Calculer $x^{(k)}$ de quatre premières itérations de la relation d'itération de Gauss-Seidel. Prendre comme le vecteur initial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Soit $y'(x) = x + y(x)$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

A l'aide de la méthode d'Euler améliorée résoudre cette équation différentielle en prenant 5 pas de discrétisation h = 0,2. Calculer les valeurs exactes de la solution analytique $y(x) = \exp(x) - x - 1$ et déterminer l'erreur commis à chaque pas.

Exercice 16

Résoudre
$$y'(x) = -2\,x\,y(x)$$
$$y(0) = 1$$

avec 10 pas de discrétisation h = 0,1 avec les méthodes d'Euler amé1iorée et Runge-Kutta d'ordre 4. Comparer avec la solution exact $y = \exp(-x^2)$.