Chapitre 3
Programmation linéaire – Dualité

A) Préambule :

Reprenons l'exemple du chapitre expliquant la démarche du simplexe :

Exercice 1 :

Une compagnie XYZ est spécialisée dans la production de 2 types de produits : des climatiseurs et des ventilateurs. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures machine et un certain nombre d'heures de lain d'œuvre.

Le tableau suivant donne l'information nécessaire sur les deux produits, c'est-à-dire les nombres d'heures machine et de main d'œuvre nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun de ces produits, ainsi que le profit généré par la production d'une unité de ce produit.

Dans toute la suite, on utilisera comme unité monétaire : l'UM, qui peut être considérée comme l'euro, le dollar, le dinar etc.

Le tableau nous donne, de plus, le nombre total d'heures machines et d'heures main d'œuvre disponibles.

	Heures machine	Main d'oeuvre	Profit
Climatiseur	2h /unité	3h /unité	25 UM/unité
Ventilateur	2h /unité	1h /unité	15 UM/unité
Total disponible	240h	140n	

Formulation du PL dans la base canonique :

- x_1 = nombre de climatiseurs
- x_2=nombre de grands ventilateurs

Et Z = bénéfice obtenu

Max $Z= 25\,x_1 + 15\,x_2$

Sous :
$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & <= & 240 \\ 3x_1 & + & x_2 & <= & 140 \end{array}$$
$$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0$$

Modèle standard du primal sous forme standard :

Max $Z= 25x_1 + 15x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Sous :
$$\begin{array}{rcrcccl} 2x_1 & + & 2x_2 & + s_1 & & = & 240 \\ 3x_1 & + & 1x_2 & & + s_2 & = & 140 \end{array}$$
$$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0 \quad s_1 >= 0, \quad s_2 >= 0$$

1ère itération du simplexe :

Cj			25	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	RT
0	s1	240	2	2	1	0	240/2
0	s2	140	3	1	0	1	140/3
	Zj	0	0	0	0	0	
	Cj- Zj		25	15	0	0	

2ème itération du simplexe :

Cj			25	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	RT
0	s1	440/3	0	4/3	1	-2/3	110
25	x1	140/3	1	1/3	0	1/3	140
	Zj	3500/3	25	25/3	0	25/3	
	Cj- Zj		0	20/3	0	-25/3	

3ème itération du simplexe

Cj			25	15	0	0
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2
15	x2	110	0	1	3/4	-1/2
25	x1	10	1	0	-1/4	1/2
	Zj	1900	25	15	5	5
	Cj- Zj		0	0	-5	-5

Tous les Cj-Zj sont négatifs ou nuls ➔ La solution est optimale.

Fin de la phase 3.

Conclusion: x1=10, x2=110, s1=0, s2=0, z=1900

A faire : Vérifiez la satisfaction des contraintes avec la solution obtenue

B) Problématique complémentaire 1 : Augmentation du stock après optimalité :

Si l'on voulait augmenter les quantités de stock de nos deux ressources, quel prix devrait-on les payer afin de conserver l'optimum actuel ?

Soient A et B tels que :

$$2x_1 + 2x_2 + s_1 = 240 + A$$
$$3x_1 + 1x_2 + s_2 = 140 + B$$

Dans la situation d'optimum, s1 et s2 sont égales à 0.

Si' l'on utilise la technique par élimination de variables sur les 2 lignes ci-dessus, en faisant 3L1-2L2, on obtient x2=110 + 3/4A – 1/2B.

De même en faisant -L1 + 2L2, on obtient x1=10- A/4 + B/2.

D'où Z = 25 (10- A/4 + B/2) + 15(110 + 3/4A – 1/2B

Z = 1900 + 20/4 A + 10/2 B,

Z = 1900 + 5 A + 5 B

C) Explicitation du dual :

Min C= 240 y1 + 140 y2

Sous : 2y1 + 3y2 ≥ 25
2y1 + 1y2 ≥ 15

y1 ≥ 0, y2 ≥ 0

A faire : Vous pouvez facilement représenter le PL Dual sous forme standard.

D) Signification des variables du Dual :

Signification de y1 et y2 :

- y1 : coût d'1h machine
- y2 : coût d'1h de main d'œuvre

Signification d'une contrainte :

2 unités de Cout machine + 3 unités de coût personnel sont nécessaires pour fabriquer 1 climatiseur à 25€

A faire : Déduisez-en la signification de la 2eme contrainte

Signification des variables s1' et s2' :

s1' représente le coût supplémentaire généré sur les climatiseurs.

Or on a 2y1 + 3y2 - s1' = 25
D'ou 2y1 + 3y2 = 25 + s1'

A faire : Déduisez-en la signification de s'2

E) Résolution du Dual par la méthode du simplexe :

Après 2 itérations à partir du modèle dual, vous obtenez :

Cj			240	140	0	0	
	VB	Q	Y1	Y2	S1’	S2’	RT
140	y2	5	0	1	-1/2	½	
240	y1	5	1	0	¼	-3/4	
	Zj	1900	240	140	-10	-110	
	Zj -Cj		0	0	-10	-110	

Solution optimale : y1=5, y2=5, Z=1900

F) Problématique complémentaire 2 : Augmentation des moyens de production après optimalité

Si vous aviez les moyens (trésorerie) d’investir dans votre appareil de production, vous pourriez acheter des unités supplémentaires d’heures machine et d’heures de main d’œuvre.

Autrement dit, vous pourriez acheter de nouvelles machines pour augmenter les 240 heures machines disponibles, ainsi que décider d’embaucher du personnel afin d’augmenter les 140 heures de main d’œuvre disponibles.

Le dual du problème initial page précédente serait de trouver le coût juste pour produire la quantité de produits finis

Donc d'après le dual optimal si on augmente de 1 la variable s1', alors on augmente le coût d'un climatiseur de 1^{e}. Le coût du climatiseur passe alors à 26€.

Or comme on produit 10 climatiseurs (d'après le primal optimal), le surcout total sera donc de 10, ce qui diminuerait la valeur de mon outil de production de 10€ ($110^{€}$ pour les ventilateurs).

Ou bien le repreneur de mon entreprise devrait racheter l'outil de production 10€ de plus (on passerait à 1910€).

G) Comparaison du primal optimisé avec le dual optimisé :

Cj			25	15	0	0
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2
15	x2	110	0	1	3/4	-1/2
25	x1	10	1	0	-1/4	1/2
	Zj	1900	25	15	5	5
	Cj- Zj		0	0	-5	-5

Il semble que par blocs de données on retrouve toutes les informations du primal optimal :

- A un signe prés
- Dépendant du fait que les variables soient ou non dans la base

Exercice 2 :

Une entreprise de menuiserie produit des tables, des chaises et des armoires, les ressources de cette entreprise étant limitées par trois contraintes. Le directeur de la production formule le problème de la façon suivante :

Max $Z= 2 x_1 + 4 x_2 + 3x_3$

Sous :
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 <= 60$ (bois)
$2x_1 + x_2 + 2x_3 <= 40$ (heures d'assemblage)
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 <= 80$ (heures de finition)

$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0, \quad x_3 >= 0$

Où x_1=le nombre de tables fabriquées

x_2= le nombre de chaises fabriquées

x_3=le nombre de d'armoires fabriquées

Rappel précédent :

Primal initial

Max $Z= 25 x_1 + 15 x_2$

Sous :
$2x_1 + 2x_2 <= 240$
$3x_1 + x_2 <= 140$

$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0$

Dual initial correspondant :

Min C= 240 y1 + 140 y2

Sous :
$2y1 + 3y2 \geq 25$
$2y1 + 1y2 \geq 15$

$y1 \geq 0, \quad y2 \geq 0$

H) Passage du primal initial au dual initial :

Pour déterminer le dual d'un programme linéaire, on doit suivre les règles suivantes :

1) Si le primal est un problème de maximisation sous contraintes de type inférieur ou égal, alors le dual est un problème de minimisation avec contraintes du type supérieur ou égal et vice versa.
2) Dans un contaxte de maximisation, si certaines contraintes sont de type supérieur ou égale, on doit passer par une phase de transformation du primal afin d'obtenir obligatoirement QUE des contraintes inférieures ou égales, ou bien égale (voir 6), si besoin est, en obtenant un 2eme terme négatif. La négativité ainsi créée sera résorbée durant la conversion en PL dual.
3) On transforme les contraintes d telle sorte que l'on obtient une maximisation sous contrainte du type inférieur ou égal, ou bien une minimisation sous contrainte de type supérieur ou égal (en multipliant par -1 les contraintes non formes à cette considération)
4) A toute contrainte du primal, on associe une variable dans le dual et, à toute variable du primal, on associe une contrainte du dual.
5) On écrit le dual d'une manière similaire à celle développée dans la partie précédente.
6) Si une contrainte est une égalité, alors la variable qui lui est associée dans le dual est sans contrainte de signe. Si une variable du primal est sans contrainte de signe, la contrainte qui lui est associée dans le dual est une égalité.

A faire : Fournissez le dual initial de l'exercice 2
Avec y1, y2, y3, s'1, s'2, s'3

A faire :

1) Que signifient les variables y1, y2, y3 ?
2) Que signifient les variables s'1, s'2, s'3 ?
3) Que peut-on dire que les contraintes du dual ?
4) Fournissez le primal standard
5) Fournissez le dual standard

A faire :

6) Résolvez le primal optimal avec la méthode du simplexe

Vous devez obtenir la solution **optimale primale** suivante :

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	Q	x1	x2	x3	s1	s2	s3
4	x2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	s3	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj- Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

La solution optimale est :
x1=0, x2=20/3, x3=50/3, s1=0, s2=0, s3=80/3, et Z=230/3

I) Problématique complémentaire 3 : Décomposition du primal optimal :

Donnons maintenant une décomposition du profit du primal suivant les ressources utilisées :

Bois	60 m3	*	5/6 UM / m3	=	50 UM
h d'assemblage	40 h	*	2/3 UM / h	=	80/3 UM
h de finition	80 h	*	0	=	0
			Profit	=	230/3 UM

A faire :

7) Quelle est votre interprétation du primal optimal ?

A faire :

8) Résolvez le dual optimal avec la méthode du simplexe

Vous devez obtenir la solution **optimale duale** suivante :

Cj			60	40	80	0	0	0
	VB	Q	y1	y2	y3	s'1	s'2	s'3
60	y1	5/6	1	0	2/3	0	-1/3	1/6
0	s'1	11/6	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6
40	y2	2/3	0	1	1/3	0	1/3	-2/3
	Z^dj	230/3	60	40	160/3	0	-20/3	-50/3
	Z^dj- C^dj		0	0	-80/3	0	-20/3	-50/3

La solution optimale est :
y1=5/6, y2=2/3, y3=0, s'1=11/6, s'2=0, s'3=0, et C=230/3

J) Vérification des résultats du dual optimal :

1) A l'optimum, la valeur de la fonction objective du primal est égale à la valeur de la fonction objectif du dual.
2) Vérifiez avec les valeurs optimales de y1=5/6, y2=2/3 et y3=0 la valeur du surcoût pour les 3 produits finis (tables, chaises, armoires)

   En effet les 3 contraintes fournissent les inéquations suivantes :

   23/6 >= 2 (vrai), 24/6 >= 4 (vrai), et 18/6 >= 3 (vrai)

   Mais 23/6 = 2 + 11/6 (surcoût) pour le prix d'une table fabriquée

   Et 24/6 = 4 et 18/6=3, donc aucun surcoût pour les chaises et les armoires

3) Aucune table n'a été créé par le primal

- Quel est le profit généré par la vente d'une table ? Réponse : 2 UM.
- Quel serait le coût d'une table ? Réponse : la valeur des ressources nécessaires à la fabrication d'une table (3y1 + 2y2 + 1y3 = 23/6 UM)
- Or $23/6 \geq 2$, Ce qui fait un surcoût de $23/6 - 2 = 11/6$ par table.

4) Même question pour une chaise :

- Le profit lié à une chaise est de 4 UM
- Produire une chaise coutera donc : 4y1+y2+3y3= 4*5/6+2/3+0=4, ce qui n'engendre aucun surcoût

5) Idem pour les armoires :

- Le profit généré par une armoire : 3 UM
- Coût généré par une armoire : 3 UM (par un calcul identique), ce qui n'engendre aucun surcoût

Exercice 3 : Exprimer le Dual dans chacun des cas suivants. (pensez à passer par le primal transformé si nécessaire, avant d'obtenir le dual correspondant)

3.1 Primal :

Min $Z = 20\,x_1 + 24\,x_2$

Sous :
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & >= & 30 \\ x_1 & + & 2x_2 & >= & 40 \end{array}$$
$$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0,$$

3.2 Primal :

Max $Z = 10\,x_1 + 6\,x_2$

Sous :
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 4x_2 & <= & 40 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 60 \\ 2x_1 & + & x_2 & >= & 25 \end{array}$$
$$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0,$$

3.3 Primal :

Min $Z = x_1 + 3\,x_2$

Sous :
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & <= & 30 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 10 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & >= & 20 \end{array}$$
$$x_1 >= 0,$$