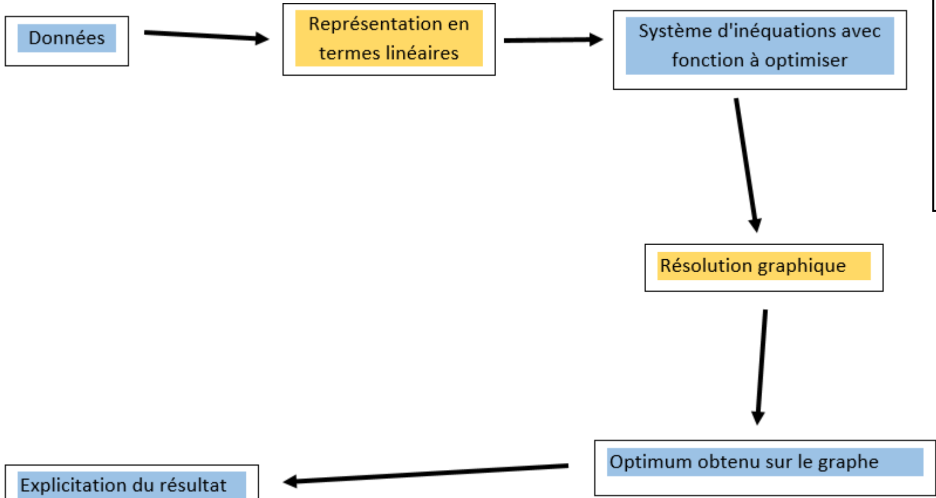
Chapitre 1 :
Programmation linéaire – Méthode du simplexe

Connaissances préalables nécessaires :

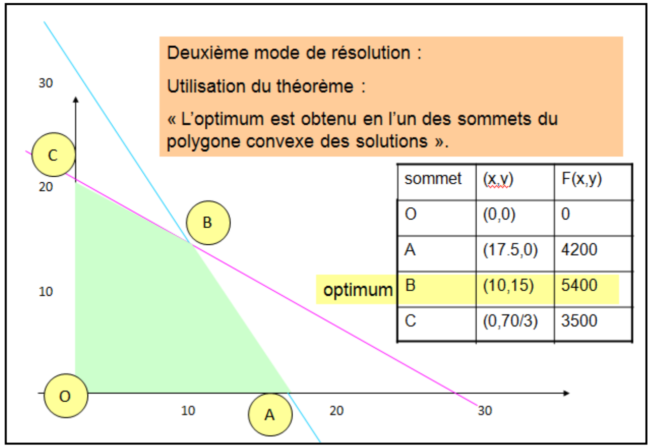
<u>Semestre 7 :</u> Chapitre 5 : initiation à la programmation linéaire (résolution graphique)

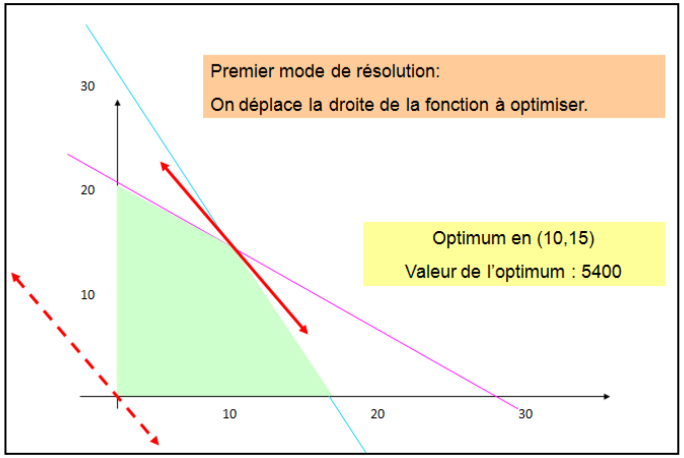


PL sous forme canonique

Max (240x+200y)

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{contrainte évidente} \\ y \geq 0 & \text{contrainte évidente} \\ 5\,x + 6\,y \leq 140 & \text{contrainte de l'atelier } A_1 \\ 8\,x + 4\,y \leq 140 & \text{contrainte de l'atelier } A_2 \end{cases}$$





N'hésitez pas à revoir les chapitres cités, si vous pensez que cela est nécessaire.
Dès le début du semestre 8, nous démarrons

Exercice 1 :

Soit le modèle de programmation linéaire suivant :

- x_1 = nombre de produits A à vendre
- x_2=nombre de produits B à vendre.

Et Z = bénéfice obtenu

Max $Z= 25\ x_1 + 15\ x_2$

Sous :
$$\begin{aligned} 2x_1 &+ 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 &+ x_2 \leq 140 \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

1ère phase :

Transformation des contraintes à l'aide des variables d'écart afin d'obtenir un système d'équations

Max $Z= 25x_1 + 15x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Sous :
$$\begin{aligned} 2x_1 &+ 2x_2 + s_1 &= 240 \\ 3x_1 &+ 1x_2 \quad + s_2 &= 140 \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0$$

			Coefficients C_j correspondants aux variables	
	Variable Base (VB)	Quantité (Q_i)	Toutes les variables	
Coefficients Ci_B des variables de base	Variables de base	Seconds membres des équations	a_{ij} Matrice des coefficients des contraintes du programme standard	RT Q_i/ a_{ije}
		Q_iC_i	$Z_j = \sum_{i\in\{i_B\}} C_i a_{ij}$	
			$D_j = C_j - Z_j$ première ligne moins dernière ligne	

2ème phase :

1er tableau du simplexe (j colonnes et i lignes)

	Cj→		25	15	0	0
Ci↓	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2
0	s1	240	2	2	1	0
0	s2	140	3	1	0	1

3ème phase :

Méthode itérative

1) 1ère itération du simplexe :

Cj			25	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	RT
0	s1	240	2	2	1	0	
0	s2	140	3	1	0	1	
	Zj	0	0	0	0	0	
	Cj -Zj		25	15	0	0	

a) Détermination de la colonne pivot : Le plus grand (Cj-Zj). Strictement positif (Le plus petit coefficient Cj en cas d'égalité)

Cj			25	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	RT
0	s1	240	2	2	1	0	240/2
0	s2	140	3	1	0	1	140/3
	Zj	0	0	0	0	0	
	Cj -Zj		25	15	0	0	

b) **Attention**, seulement pour les aij **strictement positifs** sur la colonne pivot, détermination de la ligne pivot : le plus petit ratio (Qj/aij) positif ou nul

Deuxième tableau issu des combinaisons linéaires : (l'ensemble devant être effectué "en un seul tenant" sur le même tableau)

c) Passer dans la base (à la place de la variable s2 de la ligne pivot), la variable de la colonne pivot (ici x1 qui est actuellement hors base)

d) Diviser chaque valeur de la ligne pivot par le nombre pivot qui est à l'intersection de la ligne et de la colonne pivot (ici diviser par 3)

Cj			25	15	0	0
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2
0	s1	240	2	2	1	0
25	x1	140/3	1	1/3	0	1/3
	Zj	0	0	0	0	0
	Cj -Zj		25	15	0	0

e) Pour chaque ligne restante, soustraire un multiple approprié de la nouvelle ligne pivot. Ce multiple est égal à la valeur située à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne courante

Ici L1<- L1 – 2 L2 avec L2 ligne pivot. (On pratique ici comme pour le pivot de Gauss vu en IR3)

Cj			25	15	0	0
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2
0	s1	440/3	0	4/3	1	-2/3
25	x1	140/3	1	1/3	0	1/3
	Zj	3500/3	25	25/3	0	25/3
	Cj -Zj		0	20/3	0	-25/3

2ème itération du simplexe :

Cj			25	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	RT
0	s1	440/3	0	4/3	1	-2/3	110
25	x1	140/3	1	1/3	0	1/3	140
	Zj	3500/3	25	25/3	0	25/3	
	Cj -Zj		0	20/3	0	-25/3	

a) Détermination de la colonne pivot : Le plus grand (Cj-Zj)

b) Détermination de la ligne pivot : le plus petit (Qj/aij) positif ou nul

Le pivot est 4/3

Troisième tableau issu des combinaisons linéaires : (l'ensemble étant ici effectué "en un seul tenant" sur le même tableau)

c) Passer dans la base (à la place de la variable s1 de la ligne pivot), la variable de la colonne pivot (ici x2 qui est actuellement hors base)

d) Diviser chaque valeur de la ligne pivot par le nombre pivot qui est à l'intersection de la ligne et de la colonne pivot (ici diviser par 4/3)

e) Pour chaque ligne restante, soustraire un multiple approprié de la nouvelle ligne pivot. Ce multiple est égal à la valeur située à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne courante

Ici L2<- L2 – 1/3 L1 avec L1 ligne pivot. (On pratique ici comme pour le pivot de Gauss vu en IR3)

Cj			25	15	0	0
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2
15	x2	110	0	1	3/4	-1/2
25	x1	10	1	0	-1/4	1/2
	Zj	1900	25	15	5	5
	Cj -Zj		0	0	-5	-5

Tous les Cj-Zj sont négatifs ou nuls ➔ La solution est optimale.

<u>Fin de la phase 3.</u>

Conclusion :

- x1=10
- x2=110
- s1=0
- s2=0
- z=1900

<u>Remarques :</u>

- Chaque itération est l'occasion de choisir une variable qui ***entre*** dans la base et une variable qui ***sort*** de la base. Ces variables sont respectivement ***entrantes*** et ***sortantes***.
- L'équation correspondant à la variable sortante est appelée ***ligne pivot***. Le coefficient de la variable entrante pour cette équation est appelé ***valeur pivot***. L'opération qui consiste à créer un nouveau tableau issu de combinaisons linéaires à partir du tableau précédent est appelée ***pivot*** (de Gauss)

<u>Exercice 2 :</u>

Résoudre en utilisant la méthode du simplexe :

Max Z= 100 x + 150 y

Sous :
$$\begin{aligned} 10x + 4y &\leq 160 \\ x + y &\leq 20 \\ 10x + 20y &\leq 300 \end{aligned}$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

<u>Exercice de synthèse :</u>

Fournissez l'algorithme du simplexe tel que présenté pas à pas dans cette documentation.

Vous présenterez l'algorithme en pseudo-code