

Chapitre 3

Programmation linéaire – Dualité

A) Préambule :

Reprenons l'exemple du chapitre expliquant la démarche du simplexe :

Exercice 1 :

Une compagnie XYZ est spécialisée dans la production de 2 types de produits : des climatiseurs et des ventilateurs. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures machine et un certain nombre d'heures de main d'œuvre.

Le tableau suivant donne l'information nécessaire sur les deux produits, c'est-à-dire les nombres d'heures machine et de main d'œuvre nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun de ces produits, ainsi que le bénéfice généré par la production d'une unité de ce produit.

Dans toute la suite, on utilisera comme unité monétaire : l'UM, qui peut être considérée comme l'euro, le dollar, le dinar etc.

Le tableau nous donne, de plus, le nombre total d'heures machines et d'heures main d'œuvre disponibles.

	Heures machine	Main d'œuvre	Prix de vente
Climatiseur	2h /unité	3h /unité	25 UM/unité
Ventilateur	2h /unité	1h /unité	15 UM/unité
Total disponible	240h	140n	

Formulation du PL dans la base canonique :

- x_1 = nombre de climatiseurs
- x_2 = nombre de grands ventilateurs

Et Z = bénéfice obtenu

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2$$

$$\text{Sous : } \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 & \leq & 240 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 140 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Modèle standard du primal sous forme standard :

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$\text{Sous : } \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + s_1 & = & 240 \\ 3x_1 + x_2 + s_2 & = & 140 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0$$

1^{ère} itération du simplexe :

Cj			25	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	RT
0	s_1	240	2	2	1	0	240/2
0	s_2	140	3	1	0	1	140/3
	Zj	0	0	0	0	0	
	Cj- Zj		25	15	0	0	

2^{ème} itération du simplexe :

Cj			25	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	RT
0	s_1	440/3	0	4/3	1	-2/3	110
25	x_1	140/3	1	1/3	0	1/3	140
	Zj	3500/3	25	25/3	0	25/3	
	Cj- Zj		0	20/3	0	-25/3	

3^{ème} itération du simplexe

Cj			25	15	0	0
	VB	Q	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂
15	x ₂	110	0	1	3/4	-1/2
25	x ₁	10	1	0	-1/4	1/2
	Zj	1900	25	15	5	5
	Cj- Zj		0	0	-5	-5

Tous les Cj-Zj sont négatifs ou nuls → La solution est optimale.

Fin de la phase 3.

Conclusion: x₁=10, x₂=110, s₁=0, s₂=0, z=1900

A faire_: Vérifiez la satisfaction des contraintes avec la solution obtenue

B) Problématique complémentaire 1 : Augmentation du stock après optimalité :

Si l'on voulait augmenter les quantités de stock de nos deux ressources, quel prix devrait-on les payer afin de conserver l'optimum actuel ?

Soient A et B tels que :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + s_1 &= 240 + A \\ 3x_1 + 1x_2 + s_2 &= 140 + B \end{aligned}$$

Dans la situation d'optimum, s₁ et s₂ sont égales à 0.

Si l'on utilise la technique par élimination de variables sur les 2 lignes ci-dessus, en faisant 3L₁-2L₂, on obtient x₂=110 + 3/4A - 1/2B.

De même en faisant -L₁ + 2L₂, on obtient x₁=10- A/4 + B/2.

D'où Z = 25 (10- A/4 + B/2) + 15(110 + 3/4A - 1/2B)

Z = 1900 + 20/4 A + 10/2 B,

Z = 1900 + 5 A + 5 B

C) Explicitation du dual :

Min C= 240 y₁ + 140 y₂

$$\begin{aligned} \text{Sous : } 2y_1 + 3y_2 &\geq 25 \\ 2y_1 + 1y_2 &\geq 15 \\ y_1 &\geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A faire : Vous pouvez facilement représenter le PL Dual sous forme standard.

D) Signification du problème Dual :

Comment interpréter ce programme linéaire (PL) dual ?

On veut placer une valeur monétaire sur les ressources. Autrement dit, on souhaiterait connaître la contribution de chaque ressource à la valeur de l'appareil de production.

Supposons qu'un potentiel repreneur de votre appareil de production souhaite connaître le prix juste qu'il serait amené à dépenser pour racheter toutes les ressources de votre appareil de production.

A quel prix êtes-vous disposés à lui céder ? connaissant le potentiel de votre appareil de production ?

Comme nous sommes sur le PL dual, nous nous mettons du côté de l'acheteur, qui souhaite évidemment minimiser le prix à payer pour toutes vos ressources.

C'est donc le compromis entre sa demande et votre offre qui amènera la valeur de Z à être identique, que vous lanciez le simplexe sur le Primal ou le Dual.

Signification des variables de décision du Dual :

Signification de y_1 et y_2 :

- y_1 : le juste prix d'1h machine
- y_2 : le juste prix d'1h de main d'œuvre

Ce prix représente la valeur répartie du bénéfice par unité de ressource

E) Signification d'une contrainte :

2 unités de valeur machine + 3 unités de valeur personnel sont nécessaires pour fabriquer 1 climatiseur générant 25€ de bénéfice

Autrement dit, si la valeur totale des ressources nécessaires à la fabrication d'1 climatiseur et le bénéfice d'1 climatiseur s'équilibrent, alors nous saurons comment le bénéfice d'un climatiseur se décompose en terme de ressources.

A faire : Déduisez-en la signification de la 2eme contrainte

F) Signification des variables d'écart du Dual :

Signification des variables s_1' et s_2' :

s_1' représente la marge négative imposée par la production d'1 climatiseur

Autrement dit, si la valeur totale des ressources nécessaires à fabrication d'1 climatiseur et le PV d'1 climatiseur ne s'équilibrent pas, alors nous saurons quelle est la valeur de cette marge négative

Nul doute que si un produit fini venait à générer une marge négative, le simplexe nous aurait incité à ne pas le produire lorsque nous avons effectué les calculs de maximisation du bénéfice

$$\text{Or on a } 2y_1 + 3y_2 - s_1' = 25$$

$$\text{D'ou } 2y_1 + 3y_2 = 25 + s_1'$$

A faire : Déduisez-en la signification de s_2'

G) Résolution du Dual par la méthode du simplexe :

Après 2 itérations à partir du modèle dual, vous obtenez :

Cj			240	140	0	0	
	VB	Q	Y1	Y2	S1'	S2'	RT
140	y2	5	0	1	-1/2	1/2	
240	y1	5	1	0	1/4	-3/4	
	Zj	1900	240	140	-10	-110	
	Zj - Cj		0	0	-10	-110	

Solution optimale : $y_1=5$, $y_2=5$, $Z=1900$

H) Problématique complémentaire 2 : Augmentation des moyens de production après optimalité

Si vous aviez les moyens (trésorerie) d'investir dans votre appareil de production, vous pourriez acheter des unités supplémentaires d'heures machine et d'heures de main d'œuvre.

Autrement dit, vous pourriez acheter de nouvelles machines pour augmenter les 240 heures machines disponibles, ainsi que décider d'embaucher du personnel afin d'augmenter les 140 heures de main d'œuvre disponibles.

Le dual du problème initial page précédente serait de trouver le coût juste pour produire la quantité de produits finis

Donc d'après le dual optimal si on augmente de 1 la variable s_1' , alors on augmente le coût d'un climatiseur de 1€. Le coût du climatiseur passe alors à 26€.

Or comme on produit 10 climatiseurs (d'après le primal optimal), le surcout total sera donc de 10, ce qui diminuerait la valeur de mon outil de production de 10€ (110€ pour les ventilateurs).

Ou bien le repreneur de mon entreprise devrait racheter l'outil de production 10€ de plus (on passerait à 1910€).

I) Comparaison du primal optimisé avec le dual optimisé :

Cj			25	15	0	0
	VB	Q	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂
15	x ₂	110	0	1	3/4	-1/2
25	x ₁	10	1	0	-1/4	1/2
	Zj	1900	25	15	5	5
	Cj- Zj		0	0	-5	-5

Il semble que par blocs de données on retrouve toutes les informations du primal optimal :

- A un signe prés
- Dépendant du fait que les variables soient ou non dans la base

Exercice 2 :

Une entreprise de menuiserie produit des tables, des chaises et des armoires, les ressources de cette entreprise étant limitées par trois contraintes. Le directeur de la production formule le problème de la façon suivante :

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sous : } \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \text{ (bois)} \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \text{ (heures d'assemblage)} \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \text{ (heures de finition)} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Où x_1 = le nombre de tables fabriquées

x_2 = le nombre de chaises fabriquées

x_3 = le nombre de d'armoires fabriquées

Rappel précédent :

Primal initial

$$\text{Max } Z = 25x_1 + 15x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sous : } \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 140 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual initial correspondant :

$$\text{Min } C = 240y_1 + 140y_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sous : } \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 25 \\ & 2y_1 + 1y_2 \geq 15 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

J) Passage du primal initial au dual initial :

Pour déterminer le dual d'un programme linéaire, on doit suivre les règles suivantes :

- 1) Si le primal est un problème de maximisation sous contraintes de type inférieur ou égal, alors le dual est un problème de minimisation avec contraintes du type supérieur ou égal et vice versa.
- 2) Dans un contexte de maximisation, si certaines contraintes sont de type supérieur ou égale, on doit passer par une phase de transformation du primal afin d'obtenir obligatoirement QUE des contraintes inférieures ou égales, ou bien égale (voir 6), si besoin est, en obtenant un 2eme terme négatif. La négativité ainsi créée sera résorbée durant la conversion en PL dual.
- 3) On transforme les contraintes d telle sorte que l'on obtient une maximisation sous contrainte du type inférieur ou égal, ou bien une minimisation sous contrainte de type supérieur ou égal (en multipliant par -1 les contraintes non formes à cette considération)
- 4) A toute contrainte du primal, on associe une variable dans le dual et, à toute variable du primal, on associe une contrainte du dual.
- 5) On écrit le dual d'une manière similaire à celle développée dans la partie précédente.
- 6) Si une contrainte est une égalité, alors la variable qui lui est associée dans le dual est sans contrainte de signe. Si une variable du primal est sans contrainte de signe, la contrainte qui lui est associée dans le dual est une égalité.

A faire : Fournissez le dual initial de l'exercice 2

Avec $y_1, y_2, y_3, s'_1, s'_2, s'_3$

A faire :

- 1) Que signifient les variables y_1, y_2, y_3 ?
- 2) Que signifient les variables s'_1, s'_2, s'_3 ?
- 3) Que peut-on dire que les contraintes du dual ?
- 4) Fournissez le primal standard
- 5) Fournissez le dual standard

A faire :

- 6) Résolvez le primal optimal avec la méthode du simplexe

Vous devez obtenir la solution **optimale primale** suivante :

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	Q	x1	x2	x3	s1	s2	s3
4	x2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	s3	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj- Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

La solution optimale est :

$x_1=0, x_2=20/3, x_3=50/3, s_1=0, s_2=0, s_3=80/3$, et $Z=230/3$

A faire :

- 7) Quelle est votre interprétation du primal optimal ?

A faire :

8) Résolvez le dual optimal avec la méthode du simplexe

Vous devez obtenir la solution **optimale duale** suivante :

Cj			60	40	80	0	0	0
	VB	Q	y1	y2	y3	s'1	s'2	s'3
60	y1	5/6	1	0	2/3	0	-1/3	1/6
0	s'1	11/6	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6
40	y2	2/3	0	1	1/3	0	1/3	-2/3
	Z ^d j	230/3	60	40	160/3	0	-20/3	-50/3
	Z ^d j- C ^d j		0	0	-80/3	0	-20/3	-50/3

La solution optimale est :

$y_1=5/6$, $y_2=2/3$, $y_3=0$, $s'1=11/6$, $s'2=0$, $s'3=0$, et $C=230/3$

K) Vérification des résultats du dual optimal :

- 1) A l'optimum, la valeur de la fonction objective du primal est égale à la valeur de la fonction objectif du dual. (le compromis entre prix minimum souhaité de l'acheteur, et prix maximum souhaité du vendeur, sachant quelle est la valeur réelle de l'appareil de production grâce que simplexe appliqué sur le Primal)
- 2) Vérifiez avec les valeurs optimales de $y_1=5/6$, $y_2=2/3$ et $y_3=0$ la valeur de la marge négative pour les 3 produits finis (tables, chaises, armoires)

En effet les 3 contraintes fournissent les inéquations suivantes :

$23/6 \geq 2$ (vrai), $24/6 \geq 4$ (vrai), et $18/6 \geq 3$ (vrai)

Mais $23/6 = 2 + 11/6$ (marge négative) pour le bénéfice d'une table fabriquée

Et $24/6 = 4$ et $18/6=3$, donc aucune marge négative pour les chaises et les armoires

3) Aucune table n'a été créé par le primal

- Quel est le profit généré par la vente d'une table ? Réponse : 2 UM.
- Quel serait la marge réalisée sur la fabrication d'une table ? Réponse : la valeur des ressources nécessaires à la fabrication d'une table ($3y_1 + 2y_2 + 1y_3 = 23/6$ UM)
- Or $23/6 \geq 2$, Ce qui fait une marge négative de $23/6 - 2 = 11/6$ par table.

4) Même question pour une chaise :

- Le profit lié à une chaise est de 4 UM
- Produire une chaise nécessite donc : $4y_1+y_2+3y_3= 4*5/6+2/3+0=4$, valeur totale des ressources nécessaires à la production d'un table générant un bénéfice unitaire de 4€ ce qui n'engendre aucune marge négative

5) Idem pour les armoires :

- Le profit généré par une armoire : 3 UM
- Produire une armoire nécessite donc une valeur de production de 3 €, valeur totale des ressources nécessaires à la production d'une armoire, générant un bénéfice unitaire de 3€ ce qui n'engendre aucune marge négative

L) Problématique complémentaire 3 : Décomposition du Dual optimal :

Donnons maintenant une décomposition du bénéfice du dual suivant les ressources utilisées :

Bois	60 m3	*	5/6 UM / m3	=	50 UM
h d'assemblage	40 h	*	2/3 UM / h	=	80/3 UM
h de finition	80 h	*	0	=	0
Profit					= 230/3 UM

Exercice 3 : Exprimer le Dual dans chacun des cas suivants. (pensez à passer par le primal transformé si nécessaire, avant d'obtenir le dual correspondant)

3.1 Primal :

$$\text{Min } Z = 20 x_1 + 24 x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sous : } \quad x_1 + x_2 &\geq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 40 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

3.2 Primal :

$$\text{Max } Z = 10 x_1 + 6 x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sous : } \quad x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 60 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 25 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

3.3 Primal :

$$\text{Min } Z = x_1 + 3 x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sous : } \quad x_1 - x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 &\geq 20 \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned}$$