Chapitre 2 : Programmation linéaire – Méthode du simplexe
Les problèmes irréguliers et les solutions apportées

Exercice 4 : Problème de minimisation

Résoudre en utilisant la méthode du simplexe à partir de ce **PL en forme canonique** :

Min $Z = 24\ x_1 + 20\ x_2$

Sous :
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &>= 30 \\ x_1 + 2\,x_2 &>= 40 \end{aligned}$$

$$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0$$

Introduction de variables d'écart : s1 et s2 :

s1 et s2 sont aussi des variables positives. Sachant que s1 et s2 affublés d'un signe négatif ne pourront pas jouer le rôle de base initiale au programme linéaire.

Pour conserver la propriété de non négativité des variables, nous sommes obligés d'introduire des variables artificielles a1 et a2 qui n'ont aucune signification et comme seul intérêt de démarre le programme linéaire.

Comme ces variables sont sans signification, il faut trouver un moyen de les sortir le plus rapidement de la base.

C'est pourquoi nous les associons à un coefficient M (supposé très grand), ce qui, dans un PL de minimisation devrait amener l'algorithme à les "sortir" en tout premier lieu.

On obtient le **PL sous la forme standard suivante** :

Min $Z = 24x_1 + 20x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 + Ma_2$

Sous :
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 + a_1 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 &= 40 \end{aligned}$$

$$x_1 >= 0 \quad x_{2>=0} \quad s_1 >= 0 \quad s_2 >= 0 \quad a_1 \geq 0 \quad a_2 \geq 0$$

A faire

1. Finalisez le premier tableau du simplexe ci-dessous

Cj			24	20	0	0	M	M	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	a1	a2	RT
M	a1	30	1	1	-1	0	1	0	
M	a2	40	1	2	0	-1	0	1	
	Zj	70M	2M	3M	-M				
	Zj-Cj		2M-24	3M-20	-M				

2. Puis résolvez la minimisation sur le même principe que la maximisation

Quantités Q_i négatives :

La contrainte : $x_1 + x_2 >= -8$
est transformée en $-x_1 - x_2 <= 8$

Exercice 5 : Variables sans contrainte de signe :

Min $Z = x_1 + 2\,x_2$

Sous :
$$\begin{aligned} 3x_1 &+ 2x_2 &\le 30 \\ x_1 &- x_2 &\ge 30 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0$,

Est transformée en :

Min $Z = x_1 + 2\,(x_2^+ - x_2^-)$

Sous :
$$\begin{aligned} 3x_1 &+ 2(x_2^+ - x_2^-) &\le 30 \\ x_1 &- (x_2^+ - x_2^-) &\ge 30 \end{aligned}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2^+ \ge 0$, $x_2^- \ge 0$,

Le subterfuge ici est de décomposer la variable quelconque en deux parties :

L'une positive : x_2^+

L'autre négative : x_2^-,

Mais avec x_2^+ et x_2^- positives.

Ce qui permet de satisfaire la clause de non négativité des variables indispensable au déroulement du Simplexe.

Exercice 6 : Problème impossible

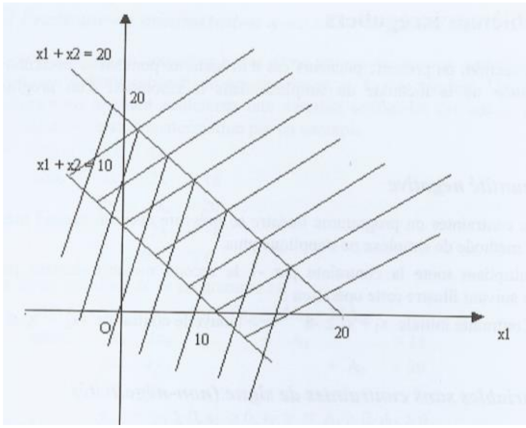
Min $Z = 2\,x_1 + 3\,x_2$

Sous :
$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &\le 10 \\ x_1 &+ x_2 &\ge 20 \end{aligned}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

Nous prenons ici un exemple avec seulement 2 variables afin de vous laisser la possibilité de résoudre l'optimisation avec la méthode graphique.

Voici graphiquement ce que cela donne :



Que ce soit graphiquement, ou algébriquement, vous pouvez vous rendre compte que les contraintes rendent le problème caduque (autrement dit, impossible)

A faire

1. Modélisez le problème sous forme standard
2. Vérifiez que vous maîtrisez bien :
   - L'ajout de variables d'écart
   - L'ajout de variables artificielles
3. Résolvez-le avec la méthode du simplexe

On obtient après 2 itérations le tableau optimal suivant :

Cj			2	3	0	0	M	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	a2	RT
2	x1	10	1	1	1	0	0	
M	a2	10	0	0	-1	-1	1	
	Zj	10M+20	2	+2	-M+2	-M	M	
	Zj-Cj		0	-1	-M+2	-M	0	

Toutes les quantités Zj-Cj sont négatives ou nulles, nous avons donc la certitude d'avoir atteint la solution optimale.

Or la variable artificielle a2 est dans la base de la solution optimale, avec la valeur 10.

Sachant qu'il s'agit d'une variable artificielle (ayant un coefficient M nombre positif très grand, alors que l'on souhaite minimiser Z) on peut conclure que la solution trouvée est impossible.

Exercice 7 : Solutions infinies

Max $Z= x_1 + x_2$

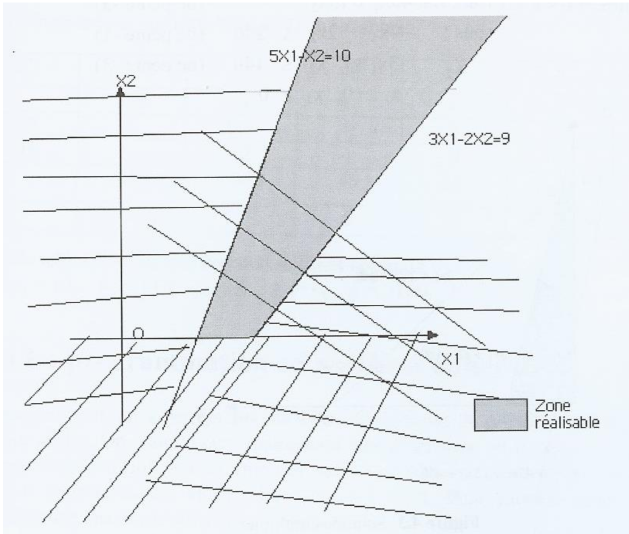
$$\text{Sous :}\quad \begin{array}{rcrcr} 5x_1 & - & x_2 & >= & 10 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & <= & 9 \end{array}$$

$$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0$$

Notez un "jeu" de contraintes un peu atypique

Nous prenons ici un exemple avec seulement 2 variables afin de vous laisser la possibilité de résoudre l'optimisation avec la méthode graphique.

Voici graphiquement ce que cela donne :



Que ce soit graphiquement, ou algébriquement, vous pouvez vous rendre compte que les contraintes laissent une infinité de solutions.

A faire

1. Essayez avec x1 = 100 000, vous obtiendrez un encadrement de x2 que vous devrez calculer
2. Modélisez le problème sous forme standard
3. Vous devrez utiliser une variable artificielle a1.

   Pouvez-vous expliquer pourquoi a_1 doit être associé à un coefficient (-M) dans la fonction objectif ?
4. Résolvez le PL avec la méthode du simplexe (2 itérations prévues)

On obtient après 2 itérations le tableau optimal suivant :

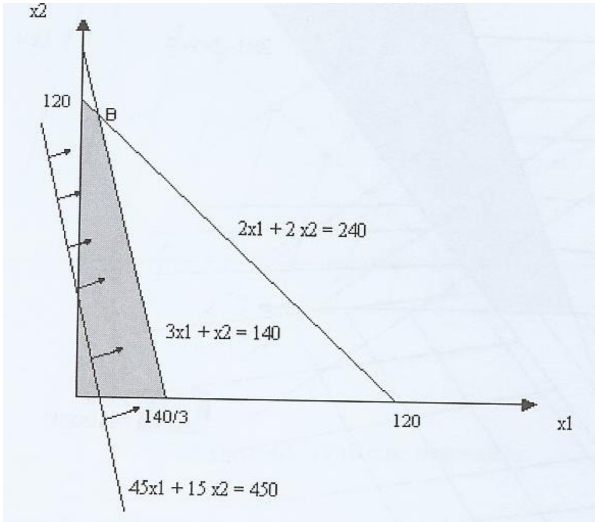
Cj			1	1	0	0	-M	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	a1	RT
1	x1	2	1	-1/5	-1/5	0	1/5	neg
0	s2	3	0	-7/5	3/5	1	-3/5	neg
	Zj	2	1	-1/5	-1/5	0	1/5	
	Cj-Zj		0	6/5	1/5	0	-M-1/5	

A l'issue de cette itération, la variable que l'on souhaitait faire entrer dans la base x2 n'admet aucun ratio positif.

Ce qui signifie que les ressources sont illimitées.

Ce qui n'est pas réaliste.

Voici graphiquement ce que cela donne :



Exercice 8 : Solutions multiples

Max $Z = 45x_1 + 15x_2$

Sous :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 240$$
$$3x_1 + x_2 \leq 140$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq$$

Nous prenons ici un exemple avec seulement 2 variables afin de vous laisser la possibilité de résoudre l'optimisation avec la méthode graphique.

A faire

1. Que ce soit d'un point de vue graphique ou algébrique :
   - Notez la pente des différentes droites de contraintes.
   - Comparez avec la pente de la fonction objectif
2. Modélisez le problème sous forme standard
3. Résolvez le PL avec la méthode du simplexe

Vous devez obtenir la solution optimale suivante

Cj			45	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	RT
0	s1	440/3	0	4/3	1	-2/3	110
45	x1	140/3	1	1/3	0	1/3	140
	Zj	2100	45	15	0	15	
	Cj-Zj		0	0	0	-15	

Voici une solution optimale :
x1= 140/3, x2=0, s1=440/3, s2=0 et Z=2100

L'une des variables hors base (x2) a un Cj-Zj égal à 0.
Ceci indique que la variable x2 peut rentrer dans la base sans que cela ne change la fonction objective.
Situation inédite.

Continuons l'itération, pour obtenir :

Cj			45	15	0	0	
	VB	Q	x_1	x_2	s1	s2	
15	x2	110	0	1	3/4	-1/2	
45	x1	10	1	0	-1/4	½	
	Zj	2100	45	15	0	15	
	Cj-Zj		0	0	0	-15	

Ce tableau donne une seconde solution optimale :
x1= 10, x2=110, s1=0, s2=0 et Z=2100

de plus, la variable S1 serait susceptible de rentrer dans la base à la place de la variable x2, ce qui ramènerait le PL à la situation précédente.

Le système boucle. Il est dit dégénéré, car la fonction objectif n'est pas améliorée.

Exercice 9 :

Ecrire le premier tableau du simplex.

Max $Z= 3x_1 + x_2-2x_3$

Sous :
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & >= & 10 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & & & + & x_3 & <= & 8 \end{array}$$

$x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,\ x_3 >= 0$

Exercice 10 : (4 tableaux)

Résoudre en utilisant la méthode du simplexe :
Min $Z= 5x_1 + 10\ x_2$

Sous :
$$\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & >= & 36 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & >= & 50 \end{array}$$

$x_1 >= 0,\ x_2 >= 0,$

Interprétation du problème posé :

Une entreprise produit des produits finis P1 et P2.

La fabrication de ces produits finis est réalisée à l'aide de 2 composants C1 et C2 (ce peut être d'autres types de ressources : matières premières, heures de travail, quantités d'énergie utilisée …)

x1 est le coût d'une unité de C1, et x2 est le coût d'une unité de C2

L'objectif est de minimiser les coûts des ressources utilisées avec le meilleur couple de coûts unitaires, sachant que l'on utilise en totalité les stocks de ressources disponibles : une quantité de 5 pour C1 et une quantité de 10 pour C2.

6 UM de coût de C1 + 2 UM de coût de C2 sont nécessaires pour produire 1 unité de P1 d'une valeur de 36 UM

De même, 5 UM de coût de C1 + 5 UM de coût de C2 sont nécessaires pour produire 1 unité de P2 d'une valeur de 50 UM