Chapitre 4 : Programmation linéaire
Analyse de sensibilité

Préambule :

L'analyse de sensibilité a déjà été abordée à l'issue de la résolution graphique d'un programme linéaire à 2 variables.

Il s'agissait de d'étudier la marge possible sur la pente des droites de contraintes et de la fonction objectif, afin de déterminer quel couple (x;y) serait susceptible d'optimiser (min ou max) la fonction objectif (bénéfice ou coût)

Nous allons maintenant effectuer une analyse de sensibilité analytique, qui permettra de déterminer les conséquences d'une variation d'un coefficient de la fonction objectif et du second membre d'une contrainte.

Attention, on n'agit que sur 1 composante d'1 variable à la fois.

Exemples :

- Etude des variations du prix de vente d'une table (variable de décision) tout en restant sur la combinaison optimale trouvée (la valeur de Z étant susceptible de changer)
- Etude des variations de la quantité de bois (ressources) tout en restant sur la combinaison optimale trouvée (la valeur de Z étant susceptible de changer)

Nous allons reprendre l'exercice 2 du chapitre précédent :

Exercice 2 :

Une entreprise de menuiserie produit des tables, des chaises et des armoires, les ressources de cette entreprise étant limitées par trois contraintes. Le directeur de la production formule le problème de la façon suivante :

Max $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

$$
\text{Sous : } \begin{array}{rcrcrcl}
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & <= & 60 \text{ (bois)} \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & <= & 40 \text{ (heures d'assemblage)} \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & <= & 80 \text{ (heures de finition)}
\end{array}
$$

$$x_1 >= 0, \quad x_2 >= 0, \quad x_3 >= 0$$

Où Z est le chiffre d'affaire à maximiser

x1=le nombre de tables fabriquées
x2= le nombre de chaises fabriquées
x3=le nombre de d'armoires fabriquées

Variation des cj :

Important : Pour faire cette étude sur les prix, **il faut partir du primal optimal**

On étudie la variation des cj sans que cela ne change ***la combinaison optimale**** (x1;x2;x3;s1;s2;s3) (dans la base vs hors base)

*** Définition d'une combinaison optimale**, on ne parle pas de la valeur des variables, mais bien de savoir celles qui **finissent dans la base**, et celles qui **finissent hors base** à l'issue d'une optimisation avec la méthode du simplexe

Commençons par le prix des chaises

L'idée est de trouver l'encadrement de c2 (pour x2) représentant la marge de prix sur les chaises sans que cela ne change la combinaison de l'optimal primal.

A noter que x2, est une variable dans la base

Le test consiste à vérifier que la ligne des profits marginaux contient bien des valeurs ≤ 0

Cj			2	4+Δ	3	0	0	0
	VB	Q	x1	x2	x3	s1	s2	s3
4+Δ	x2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	s3	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3 +20/3Δ	23/6 +1/3Δ	4 +Δ	3	5/6 +1/3Δ	2/3 -1/3Δ	0
	Cj- Zj		-11/6 -1/3Δ	0	0	-5/6 -1/3Δ	-2/3 +1/3Δ	0

La solution donnée reste optimale si :
-11/6 - 1/3Δ <= 0
-5/6 - 1/3Δ <= 0
-2/3 + 1/3Δ <= 0

Ce système est équivalent au système suivant :

Δ >= -11/2
Δ >= -5/2
Δ <= 2

Ce qui donne -5/2 <= Δ <= 2.

Donc, comme c2 = 4+Δ, la solution obtenue pour le problème initial (c2=4) reste optimale tant que 3/2 <= c2 <= 6.

De plus, avec -5/2 ≤ Δ≤ 2, on peut donner la variation possible de Z (tout en gardant la combinaison de la solution optimale inchangée)

230/3 + 20/3 (-5/2) ≤ Z ≤ 230/3 + 20/3 (2)

Ce qui donne : 180/3 ≤ Z ≤ 270/3

Donc 60 <= Z <= 90

Exemple :

Si c2 passe de 4 à 5, alors Δ = 1. Z = 230/3 + 20/3

En termes de dual, s'2 = 0. (Surcoût pour l'acheteur potentiel de notre appareil de production), ce qui s'explique par le fait que x2 est dans la base du primal optimal.

Continuons avec le prix des tables :

A noter que x1 n'est pas dans la base

Cj			2+Δ	4	3	0	0	0
	VB	Q	x1	x2	x3	s1	s2	s3
4	x2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	s3	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj- Zj		-11/6 + Δ	0	0	-5/6	-2/3	0

La solution reste optimale si :

-11/6 + Δ <= 0, c'est-à-dire si Δ <= 11/6.

Donc tant que c1 <= 23/6, la solution du programme initial reste optimale.

La valeur de Z reste inchangée.

Exemple :

Si c1 passe de 2 à 3, alors Δ = 1. Z = 230/3 + 0

En termes de dual, s'1 = 11/6. (Surcoût pour l'acheteur potentiel de notre appareil de production), ce qui s'explique par le fait que x1 n'est pas dans la base du primal optimal.

Finissons avec le prix des armoires :

A noter que x3 est dans la base

A faire : Suivez le protocole de c2

1) Partez du primal optimal
2) Le test consiste à vérifier que la ligne des profits marginaux contient bien des valeurs ≤ 0

Ce qui donne -1 <= Δ <= 5.

Donc, comme C3 = 3+Δ, la solution obtenue pour le problème initial (C3=3) reste optimale tant que 2 <= C3 <= 8.

De plus, avec -1 ≤ Δ≤ 5, on peut donner la variation possible de Z (tout en gardant la combinaison de la solution optimale inchangée)

230/3 + 50/3 (-1) ≤ Z ≤ 230/3 + 50/3 (5)

Ce qui donne : 180/3 ≤ Z ≤ 480/3 (60<=Z<=160)

Variation des Qi

Dans l'exercice 2 : il s'agit de quantité de ressources disponibles

Important : Pour faire cette étude sur les quantités, **il faut partir du primal initial**, pour trouver une colonne similaire au vecteur de variation.

Il suffira de reporter le contenu de cette colonne obtenue dans le primal optimal sur le vecteur de variation du primal optimal

Le test consiste à vérifier que les quantités restent bien ≥0

Variation des Qi sans que cela ne change la solution optimale.

Commençons par le stock de bois.

Sachant que Q1 n'est présent que dans la 1ère contrainte, on obtient la correspondance entre la colonne Q et la colonne de s1, ce qui est normal vu que s1 est la quantité de stock de la ressource Q1 :

D'après le primal initial :

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	Q	x1	x2	x3	s1	s2	s3
0	s1	60+1Δ	3	4	2	1	0	0
0	s2	40+0Δ	2	1	2	0	1	0
0	s3	80+0Δ	1	3	2	0	0	1
	Zj	0+0Δ	0	0	0	0	0	0
	Cj- Zj		2	4	3	0	0	0

Le vecteur de variation dans la colonne Q est identique au vecteur trouvé dans la colonne de s1.

Tout au long des itérations du simplexe, ces 2 vecteurs vont donc varier de la même manière, jusqu'au primal optimal.

On peut donc prendre le contenu de la colonne de s1 obtenue dans le primal optimal, et l'ajouter à la colonne Q en tant que vecteur de variation optimale sur les quantités

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	Q	x1	x2	x3	s1	s2	s3
4	x2	20/3 + 1/3Δ	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x3	50/3 -1/6Δ	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	s3	80/3 – 2/3Δ	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3+5/6Δ	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj- Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

la ***combinaison optimale**** (x1;x2;x3;s1;s2;s3) (dans la base vs hors base) reste optimale tant que :

20/3 + 1/3Δ >= 0
50/3 – 1/6Δ >= 0
80/3 – 2/3Δ >= 0

C'est-à-dire que : -20 <= Δ <= 40,

Ce qui signifie pour Q1 (valeur que quantité disponible initialement):
40 <= Q1 <= 100. (le nombre de mètres cubes de bois reste entre 40 et 100)

Et donc 60 <= Z <= 110

Donc, si Q1 = 78,
On aura: x1 = 0, x2 = 38/3, x3 = 41/3, s1 = s2 = 0, s3 = 142/3, Z = 275/3

On notera que tant que 40 <= Q1 <= 100, les valeurs marginales des ressources restent valables.

Vérifions pour la marge minimal de Δ :
Si Δ = -20

Quel effet sur les quantités disponibles initiales ?

Q1 initial = 40
Sachant que Q2 reste à 40
Et Q3 reste à 80

Quelle serait alors la valeur des différentes variables à l'issue du simplexe ?
x1 = 0,
x2 = 20/3-20/3 = 0
x3 = 50/3 + 20/6 = 20

Quel serait l'effet sur les contraintes initiales ?

Contrainte 1 :	Contrainte 2 :	Contrainte 3 :
0 + 0 + 2*20 = 40, Or 40<=40, Donc s1=0	0 + 0 + 2*20 = 40, Or 40<=40, Donc s2=0	0 + 0 + 2*20 = 40, Or 40<=80, Donc s1=80/3-2/3*20 s1=40

Pour être complet, Z = 230/3 – 50/3

Remarque : on retrouve -50/3 sur la cellule du simplexe optimal dual :
ligne Zj / colonne s'3

Continuons avec une variation de Q3, le nombre d'heures de finition,

Correspondant au nombre d'heures de finition. On obtient le tableau de la solution optimale suivant :

On utilise le même principe.

Si ce n'est que s3 dans le primal optimal est dans la base. Le vecteur de la colonne s1 fait partie de la matrice identité.

Ce qui va donc générer des calculs très simples (1 seul calcul d'ailleurs) :

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	Q	x1	x2	x3	s1	s2	s3
4	x2	20/3 + 0Δ	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x3	50/3 + 0Δ	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	s3	80/3 +1Δ	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3+0Δ	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj- Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

La base reste optimale tant que :

80/3 + Δ >=0,

C'est-à-dire, tant que Δ >= -80/3

Ce qui signifie que Q3 (valeur de quantité disponible initiale) >= 160/3

Et donc Z reste identique (c'est normal étant donné que toute augmentation de Q3 sera transformée en quantité stockée s3. Or le stock d'heures de finition ne rapporte aucun Chiffre d'affaire, illustré notamment par le fait que le cj de s3 est égal à 0).

Vérifions pour la marge minimal de Δ :
Si Δ = -80/3

Quel effet sur les quantités disponibles initiales ?
Alors Q3 = 60 – 80/3 = 160/3
Sachant que Q2 reste à 40
Et Q3 reste à 80

Quelle serait alors la valeur des différentes variables à l'issue du simplexe ?
x2 reste à 20/3
x3 reste à 50/3
s3 passe de 80/3 à 80/3-80/3 c'est-à-dire 0
on a toujours x1=0 et s1 = s2 = 0

Quel serait l'effet sur les contraintes initiales ?

Contrainte 1 : 0 + 4*20/3 + 2*50/3 = 180/3 Or 180/3 <= 60, Donc s1=0	Contrainte 2 : 0 + 20/3 + 2*50/3 = 40 Or 40 <= 40, Donc s2=0	Contrainte 3 : 0 + 3*20/3 + 2*50/3 = 160/3 Or 160/3 <= 160/3 Donc s3 = 0

Finissons avec Q2, le nombre d'heures d'assemblage

Correspondant au nombre d'heures d'assemblage.

A faire : Suivez le protocole de Q1

3) Partez du primal initial. Trouvez la colonne correspondante
4) Utilisez le primal optimal et exprimez toutes les conditions de variation

Ce qui donne -25 <= Δ <= 20

Ce qui signifie pour Q2 optimal après variation de Δ : 15 <= Q2 <= 60.

Ainsi 60 <= Z <= 90

Exercice 4 - Synthèse chapitre 3 et 4

Dualité – analyse de sensibilité

Soit le programme linéaire suivant :
Vous voulez maximiser le Chiffre d'affaires d'une entreprise qui produit deux types d'ordinateurs : la version Alpha à 400 €, la version Beta à 800 €

Max $Z = 4x_1 + 8x_2$ (prix x100)

Sous :	$x_1 + x_2$	$\le$	10	Stock de µprocesseurs (x1000)
	$2x_1 + 6x_2$	$\le$	48	Stock de barrettes mémoire (x1000)
	$3x_1 + x_2$	$\le$	24	Nb heures assemblage (x100)

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$

Préalable :

1) Fournissez le PL primal initial au format Standard

Analyse de sensibilité – compréhension des informations obtenues par le solveur

2) Implémenter le PL standard sur le solveur d'Excel et cliquez sur l'obtention du **rapport de sensibilité**
3) Dans le tableau Cellules variables :

   Les marges inférieures et supérieures vous fournissent la variation des **cj** réalisable si l'on souhaite rester avec ***la combinaison optimale*** obtenue
4) Dans le tableau Contraintes :

   Les marges inférieures et supérieures vous fournissent la variation de **Qi** réalisable si l'on souhaite rester avec ***la combinaison optimale*** obtenue

Analyse de sensibilité – résolution algébrique

5) A partir du primal initial :
   a. Effectuez une analyse e sensibilité pour chaque coefficient **cj**
   b. Effectuez une analyse de sensibilité pour chaque coefficient **Qi**
   c. Comparez vos résultats algébriques avec les informations obtenues à l'aide du rapport de sensibilité du solveur

Primal / dual – résolution algébrique

6) A partir du primal initial dans la base canonique, fournissez le dual initial dans la base canonique
7) Résolvez le simplexe sur le dual initial, afin d'obtenir le dual optimal
8) Appliquez la méthode de passage d'un primal optimal vers un dual optimal (dans un sens ou bien l'autre sens d'ailleurs)
9) Vérifez que vous obtenez exactement le même contenu que celui que vous avez obtenu par le calcul algébrique du simplexe

Dual – solveur – analyse de sensibilité

10) Implémentez le PL dual initial standard sur le solveur d'Excel et cliquez sur l'obtention du rapport de sensibilité
11) Vérifiez le résultat du Dual optimal obtenu
12) Interprétez les informations trouvées dans le rapport de sensibilité du Dual optimal

Exercice 5 : synthèse chapitres 1, 3 et 4

Modélisation d'un PL, dualité, analyse de sensibilité

La société AC produit 3 genres de fruits en lot de boîtes : fruitel, cocktail de fruits et fruit délice.

Les ingrédients principaux sont les poires et les pêches.
Il faut 20 kg de poires et 10 kg de pèches pour obtenir un lot de fruitel.
De même, Il faut 10 kg de poires et 20 kg de pèches pour obtenir un lot de cocktail de fruit.
Enfin, Il faut16 kg de poires et 16 kg de pèches pour obtenir un lot de fruit délice.
On a un stock disponible de 320 kg de poires et 400 kg de pêches pour la période d'étude.

Chacun de ces lots de produits finis doit passer par 3 processus de fabrication : mixage, mise en boîte et emballage.
1 lot de fruitel nécessite 1h de mixage, 1 heure de mise en boîte et 2 heures d'emballage.

Enfin, 1 lot de cocktail de fruits, (et de manière identique pour 1 lot de fruit délice) nécessite 2heures de mixage, 1 heure de mise en boîte et 1 heures d'emballage.
Pour la période d'étude, l'entreprise peut compter sur une masse salariale capable de fournir 43 heures de mixage, 60 heures de mise en boîte et 40 heures d'emballage.

L'objectif est d'obtenir le plus grand chiffre d'affaire sur la période étudiée, sachant que l'on vend 10€ un lot de fruitel, 6€ un lot de cocktail de fruits et enfin 8€ un lot de fruit délice.

1) Modélisez le problème de maximisation appelé le primal
2) Fournissez le dual initial sous forme standard
    a. Explicitez chaque variable ainsi obtenue
    b. Explicitez chaque contrainte ainsi obtenue
    c. Explicitez la fonction objectif ainsi obtenue
3) Résolvez le simplexe sur le primal du 1)
    a. Interprétez la solution optimale obtenue
    b. Explicitez chaque valeur de la dernière ligne du primal optimal
4) Convertissez le primal optimal en dual optimal
5) A partir du primal, faites varier
    a. Chaque paramètre cj, et interprétez
    b. Chaque paramètre Qi et interprétez
6) Retrouvez chaque résultat précédent avec le solveur