1 Базовые теоретические вопросы

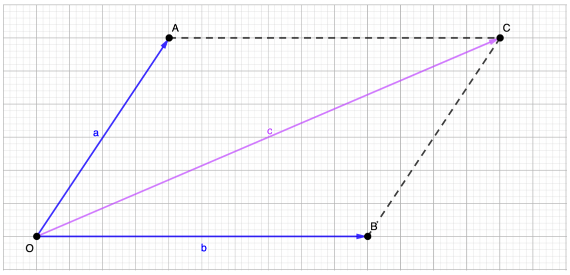
1.1 Дать определение равенства геометрических векторов.

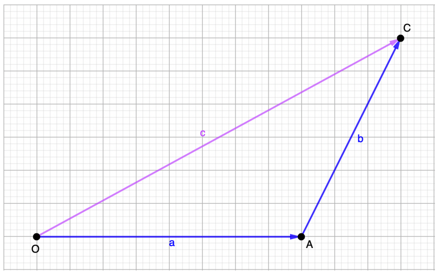
Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

1.2 Дать определения суммы векторов и произведения вектора на число.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, построенный по следующим правилам

Правило парралелограмма	Правило треугольника
Пусть O любая точка.	
Отложим $\vec{a}$ от O. Получим $\overrightarrow{OA}$.	
Отложим $\vec{b}$ от	
Точки O	Точки A
Получим	





Построим

Парралелограмм	Треугольник

Вектор $\vec{c}$, представителем которого является $\overrightarrow{OC}$ - искомый.

Построение не зависит от выбора точки O и правила построения.

Произведением $\vec{a}$ на число α называется $\vec{b}$, если он коллинеарен $\vec{a}$ (причем если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}: \ \alpha > 0$, иначе $\alpha < 0$) и его длина равна $|\alpha||\vec{a}|$

1.3 Дать определения коллинеарных и компланарных векторов.

Геометрические вектора называются

Коллинеарными	Комплонарными
Если они лежат	
На одной или парралельных прямых	На одной или парралельных плоскостях

1.4 Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Векторы $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ назваются линейно

Зависимыми	Независимыми
Если существует	Если не существует
Их нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$, т.е.	
Если при $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \alpha_1\vec{a_1} + ... + \alpha_n\vec{a_n} = 0$	
$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$ отличные от нуля	$\nexists \alpha_1, ..., \alpha_n$ отличные от нуля

1.5 Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.

2 вектора линейно зависимы $\iff$ они коллинеарны
3 вектора линейно зависимы $\iff$ они комплонарны

1.6 Дать определение базиса и координат вектора.

	Базисом в пространстве	
V_1	V_2	V_3
	Называется	
Любой ненулевой вектор	Любая упорядоченная пара коллинеарных векторов	Любая упорядоченная тройка некомплонарных векторов
$\forall\vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R}$	$\forall\vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R}$	$\forall\vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
$\vec{x} = x\vec{e}$	$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$	$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$
	Коэффициенты разложения	
x	x_1, x_2	x_1, x_2, x_3
	Называются координатами $\vec{x}$ в базисе	
$\vec{e}$	$\vec{e}_1, \vec{e}_2$	$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

1.7 Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.

Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным способом

$$\forall\vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R} \quad \forall\vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad forall\vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

1.8 Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.

Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, вычисленное по правилу:

1. Отложим вектор $\vec{a}$ от любой точки A, получим $\overrightarrow{AB}$
2. Возьмем любую ось b, направление которой совпадает с $\vec{b}$
3. Спроецируем $\overrightarrow{AB}$ на b и получим $\overrightarrow{A_{np}B_{np}}$
4. Найдем число $\pm|\overrightarrow{A_{np}B_{np}}|$, где $+$ если $\overrightarrow{A_{np}B_{np}} \upuparrows \vec{b}$, иначе $-$

Обозначение $np_{\vec{b}}\vec{a}$

1.9 Дать определение скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением 2 векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

1.10 Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.

$$\forall\vec{a}, \vec{b} \forall k \in \mathbb{R}$$
$$(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$$
$$\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$$
$$\forall\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$
$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

1.11 Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

1.12 Записать формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.

$$cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3}{\sqrt{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3}\sqrt{\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3}}$$

1.13 Дать определение правой и левой тройки векторов.

Упорядоченная тройка некомплонарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{}$называется

Правой	Левой

Если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца $\vec{c}$ проходящей

Против часовой стрелке	По часовой стрелке

1.14 Дать определение векторного произведения векторов.

Векторным произведением 2 векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющих условиям

1. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
2. Упорядоченная тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin(\vec{a}, \vec{b})$

1.15 Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.

$\forall \vec{a}, \vec{b}$

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ - симметричность скалярного произведения

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ - кососимметричность векторного произведения

1.16 Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \forall k \in \mathbb{R}$$
$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

1.17 Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

1.18 Дать определение смешанного произведения векторов.

Смешанным произведением 3 векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$
Обозначение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

1.19 Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.

При перестановке любых двух векторов, смешанное произведение меняет знак.
$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

1.20 Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \forall k \in \mathbb{R}$$
$$(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
$$\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
$$\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$$
$$(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$$
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{d})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$$
$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$$

1.21 Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}, \vec{c}\{c_1; c_2; c_3\}$$

1.22 Записать общее уравнение плоскости и уравнение «в отрезках». Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

1.23 Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

1.24 Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

1.25 Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

1.26 Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

1.27 Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.

1.28 Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

1.29 Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

1.30 Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

2 Теоретические вопросы повышенной сложности

2.1 Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.

2.2 Доказать теорему о разложении вектора по базису.

2.3 Доказать свойство линейности скалярного произведения.

2.4 Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.

2.5 Вывести формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

2.6 Доказать свойство линейности смешанного произведения.

2.7 Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

2.8 Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

2.9 Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

2.10 Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.