1 Определения

1.1 Сформулируйте определение окрестности точки $x \in \mathbb{R}$.

Окрестностью $U(x_0)$ точки x_0 называют любой интервал, содержащий эту точку

1.2 Сформулируйте определение ϵ-окрестности точки $x \in \mathbb{R}$.

ϵ-окрестностью $U_\epsilon(x_0)$ точки x_0 называют интервал с центром в x_0 и длиной 2ϵ т.е.

$$U_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 : x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon\}$$

.

1.3 Сформулируйте определение окрестности $+\infty$.

Окрестностью точки $+\infty$ называют интервал вида $(a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число.

$$U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, a > 0$$

1.4 Сформулируйте определение окрестности $-\infty$.

Окрестностью точки $-\infty$ называют интервал вида $(-\infty, a)$, где a — произвольное действительное число.

$$U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < -a\}, a > 0$$

1.5 Сформулируйте определение окрестности ∞.

Окрестностью бесконечности ∞ «без знака» называют объединение двух бесконечных интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число.

$$U(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > a\}, a > 0$$

1.6 Сформулируйте определение предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}, n \to +\infty$, если для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ существует номер $N = N(\epsilon)$ такой, что если порядковый номер члена последовательности $n \geqslant N$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \epsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\epsilon) \longrightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

1.7 Сформулируйте определение сходящейся последовательности.

Последовательность, придел которой существует и конечен при $n \to \infty$. Поскольку неравенство $|a - x_n| < \epsilon$ эквивалентно неравенству $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, то все элементы сходящейся последовательности за исключением конечного их числа при любом $\epsilon > 0$ лежат в ϵ-окрестности точки a.

1.8 Сформулируйте определение ограниченной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует число c_1 такое, что $x_n \geqslant c_1$ при всех $n = 1, 2, ...$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует число c_2 такое, что $x_n \leqslant c_2$ при всех $n = 1, 2, ...$

Последовательность $\{x_n\}$ ограниченная как сверху, так и снизу, называется ограниченной, то есть $c_1 \leqslant x_n \leqslant c_2$ при всех $n = 1, 2, ...$

$$\exists M > 0, M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \longrightarrow |x_n| \leqslant M(m \leqslant x_n \leqslant M, m \in \mathbb{R})$$

1.9 Сформулируйте определение монотонной последовательности.

Последовательность называется монотонной, если она неубывающая($x_{n+1} \geqslant x_n$), возрастающая($x_{n+1} > x_n$), невозрастающая($x_{n+1} \leqslant x_n$) или убывающая($x_{n+1} < x_n$) для $\forall n \in \mathbb{N}$

1.10 Сформулируйте определение возрастающей последовательности.

Последовательность называется возрастающей, если $x_{n+1} > x_n \forall n \in \mathbb{N}$

1.11 Сформулируйте определение убывающей последовательности.

Последовательность называется убывающей, если $x_{n+1} < x_n \forall n \in \mathbb{N}$

1.12 Сформулируйте определение невозрастающей последовательности.

Последовательность называется невозрастающей, если $x_{n+1} \leqslant x_n \forall n \in \mathbb{N}$

1.13 Сформулируйте определение неубывающей последовательности.

Последовательность называется неубывающей, если $x_{n+1} \geqslant x_n \forall n \in \mathbb{N}$

1.14 Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N = N(\epsilon)$ такой, что для всех $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \epsilon$.

1.15 Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности.

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

1.16 Сформулируйте определение по Гейне предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из $\mathring{U}(x_0)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

1.17 Сформулируйте определение бесконечно малой функции.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0, x_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

1.18 Сформулируйте определение бесконечно большой функции.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0, x_0 \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

1.19 Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка.

Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, то говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ являются при $x \to x_0$ бесконечно малыми одного порядка и пишут $f(x) = O(g(x))$.

1.20 Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций.

Если при $x \to x_0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ или $\frac{g(x)}{f(x)}$, то говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ не сравнимы при $x \to x_0$.

1.21 Сформулируйте определение эквивалентных бесконечно малых функций.

В случае $C = 1$, т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, функции $f(x)$ и $g(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми и пишут $f(x) \sim g(x)$, при $x \to x_0$.

1.22 Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые при $x \to x_0$. Если при некотором k бесконечно малые $f(x)$ и $(g(x))^k$ являются бесконечно малыми одного порядка, то говорят, что $f(x)$ имеет порядок малости k по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$.

1.23 Сформулируйте определение приращения функции.

Приращением функции называют $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

1.24 Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое).

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполняется 3 пункта:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$
2. $\exists f(x_0)$
3. $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$

1.25 Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале.

Функция непрерывна на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

1.26 Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке.

Функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b), в точке $x = a$ слева, и в точке $x = b$ справа.

1.27 Сформулируйте определение точки разрыва.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если не выполняется хотя бы один из 3 пунктов:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$
2. $\exists f(x_0)$

3. $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$

1.28 Сформулируйте определение точки устранимого разрыва.

Если $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, то x_0 называют точкой устранимого разрыва функции $f(x)$.

1.29 Сформулируйте определение точки разрыва I-го рода.

Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$, то x_0 называется точкой разрыва первого рода.

1.30 Сформулируйте определение точки разрыва II-го рода.

Функция $f(x)$ имеет точку разрыва второго рода при $x = x_0$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

2 Определение предела по Коши

2.1 Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = b$, где $b \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

Пусть $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки $x_0 = 0$. Число $b \in \mathbb{R}$ называется приделом функции $f(x)$ в точке $x \to x_0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$

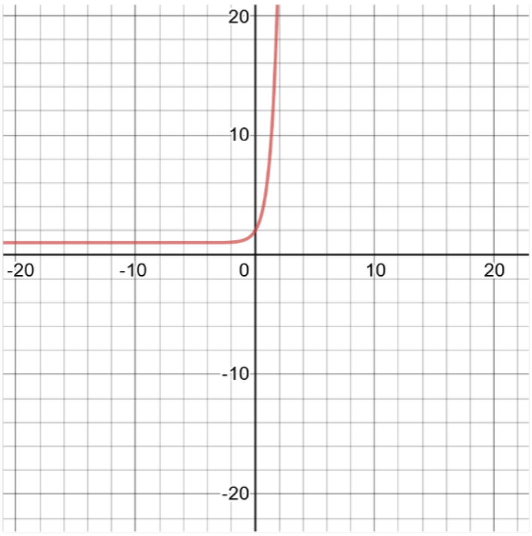

Рис. 1: $f(x)$

2.2 Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

Пусть $f(x)$ определена в проколотой окресности $\mathring{U}(x_0), x_0 = a$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, если существует сколь угодно малое $\epsilon > 0$, такое что найдется число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, при котором если $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ $0 < |x - x_0| < \delta$, то справедливо неравенство $f(x) > \epsilon$

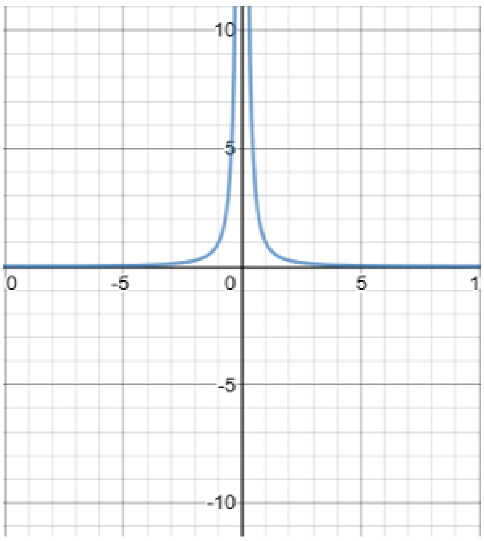

Рис. 2: $f(x)$

2.3 Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Приведите соответствующии пример (с геометрической иллюстрацией).

Пусть $f(x)$ определена в окресности $+\infty$. Тогда число 0 является пределом функции $f(x)$, если для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что если $\forall x > \delta$, то верно неравенство $|f(x)| < \epsilon$

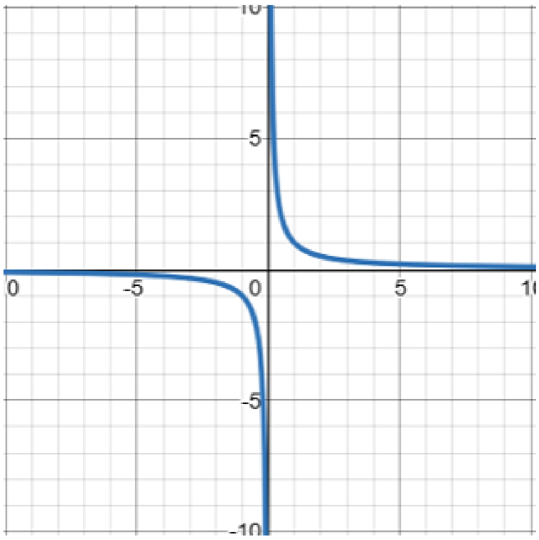

Рис. 3: $f(x)$

2.4 Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$ - левосторонний предел функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что если $x \in \mathring{U}_\delta^-(x_0)$, то верно неравенство $f(x) < -\epsilon$

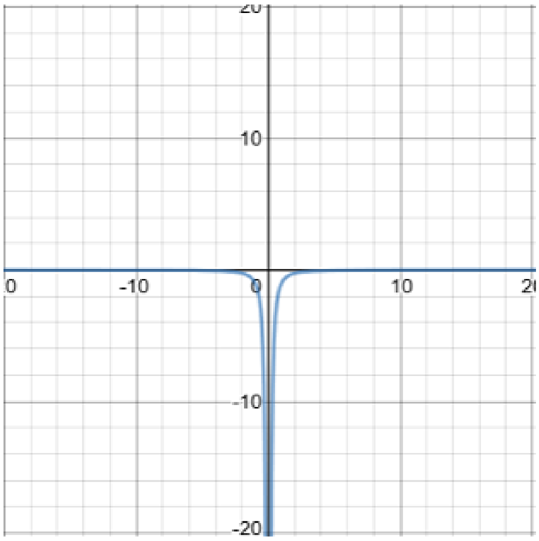

Рис. 4: $f(x)$

3 Теоремы

3.1 Сформулируйте теорему об ограниченности сходящейся числовой последовательности.

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

$$\exists \lim_{x\to\infty} x_n = a, a \in \mathbb{R} \to \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in M$$

3.2 Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Если существует конечный $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то $f(x)$ представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ - бесконечно малая при $x \to a$

3.3 Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций.

Сумма конечного числа функций, являющихся бесконечно малыми, при $x \to a$, есть величина бесконечно малая при $x \to a$

$$\exists \lim_{x\to a} \alpha_k(x) = 0 \to \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) = 0$$

3.4 Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to a$, а $f(x)$ ограниченная функция, то $\alpha(x) \times f(x)$ бесконечно малая, при $x \to a$.

3.5 Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

Если $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to a$. Если $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to a$ и отличная от нуля, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая при $x \to a$

3.6 Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

Две бесконечно малые ф-ции при $x \to a$ эквивалентны $\iff$ их разность есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них

$$(f(x) \sim g(x)\ x \to a) \iff (f(x) - g(x) = o(f(x))) \vee (f(x) - g(x) = o(g(x)))$$

3.7 Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых разных порядков.

Если функции $\alpha(x), \beta(x), ..., \gamma(x)$ бесконечно малые при $x \to a$, то $\alpha(x) + \beta(x) + ... + \gamma(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$, где $\lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0; ... \lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0$