Подготовка к РК1

Аналитическая геометрия

Над файлом работали:
pluttan

1 Базовые теоретические вопросы

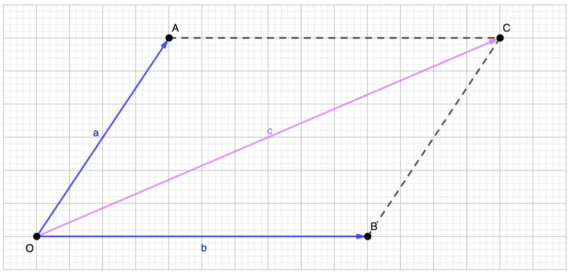
1.1 Дать определение равенства геометрических векторов.

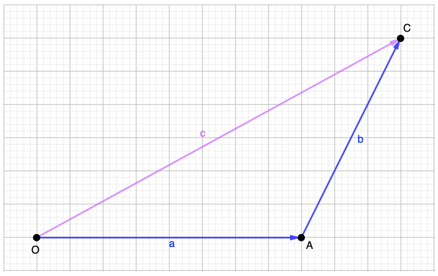
Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

1.2 Дать определения суммы векторов и произведения вектора на число.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, построенный по следующим правилам

Правило параллелограмма	Правило треугольника
Пусть O любая точка.	
Отложим $\vec{a}$ от O. Получим $\overrightarrow{OA}$.	
Отложим $\vec{b}$ от	
Точки O	Точки A
Получим	





Построим	
Параллелограмм	Треугольник
Вектор $\vec{c}$, представителем которого является $\overrightarrow{OC}$ - искомый.	
Построение не зависит от выбора точки O и правила построения.	

Произведением $\vec{a}$ на число α называется $\vec{b}$, если он коллинеарен $\vec{a}$ (причем если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}: \ \alpha > 0$, иначе $\alpha < 0$) и его длина равна $|\alpha||\vec{a}|$

1.3 Дать определения коллинеарных и компланарных векторов.

Геометрические вектора называются	
Коллинеарными	Компланарными
Если они лежат	
На одной или параллельных прямых	На одной или параллельных плоскостях

1.4 Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Векторы $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ называются линейно	
Зависимыми	Независимыми
Если существует	Если не существует
Их нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$, т.е.	
Если при $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \alpha_1\vec{a_1} + ... + \alpha_n\vec{a_n} = 0$	
$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$ отличные от нуля	$\nexists \alpha_1, ..., \alpha_n$ отличные от нуля

1.5 Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.

2 вектора линейно зависимы $\iff$ они коллинеарны
3 вектора линейно зависимы $\iff$ они компланарны

1.6 Дать определение базиса и координат вектора.

	Базисом в пространстве	
V_1	V_2	V_3
	Называется	
Любой ненулевой вектор	Любая упорядоченная пара коллинеарных векторов	Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов
$\forall \vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R}$	$\forall \vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R}$	$\forall \vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
$\vec{x} = x\vec{e}$	$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$	$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$
	Коэффициенты разложения	
x	x_1, x_2	x_1, x_2, x_3
	Называются координатами $\vec{x}$ в базисе	
$\vec{e}$	$\vec{e}_1, \vec{e}_2$	$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

1.7 Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.

Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным способом

$$\forall \vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

1.8 Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.

Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, вычисленное по правилу:

1. Отложим вектор $\vec{a}$ от любой точки A, получим $\overrightarrow{AB}$
2. Возьмем любую ось b, направление которой совпадает с $\vec{b}$
3. Спроецируем $\overrightarrow{AB}$ на b и получим $\overrightarrow{A_{np}B_{np}}$
4. Найдем число $\pm|\overrightarrow{A_{np}B_{np}}|$, где $+$ если $\overrightarrow{A_{np}B_{np}} \upuparrows \vec{b}$, иначе $-$

Обозначение $np_{\vec{b}}\vec{a}$

1.9 Дать определение скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением 2 векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

1.10 Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \forall k \in \mathbb{R}$$
$$(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$$
$$\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$
$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

1.11 Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

1.12 Записать формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.

$$cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3}{\sqrt{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3}\sqrt{\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3}}$$

1.13 Дать определение правой и левой тройки векторов.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется

Правой	Левой

Если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца $\vec{c}$ проходящей

Против часовой стрелке	По часовой стрелке

1.14 Дать определение векторного произведения векторов.

Векторным произведением 2 векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющих условиям

1. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
2. Упорядоченная тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin(\vec{a}, \vec{b})$

1.15 Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.

$\forall \vec{a}, \vec{b}$

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ - симметричность скалярного произведения

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ - кососимметричность векторного произведения

1.16 Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \forall k \in \mathbb{R}$$
$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

1.17 Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

1.18 Дать определение смешанного произведения векторов.

Смешанным произведением 3 векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$
Обозначение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

1.19 Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.

При перестановке любых двух векторов, смешанное произведение меняет знак.
$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

1.20 Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \forall k \in \mathbb{R}$$
$$(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
$$\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
$$\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$$
$$(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$$
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{d})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$$
$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$$

1.21 Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}, \vec{c}\{c_1; c_2; c_3\}$$

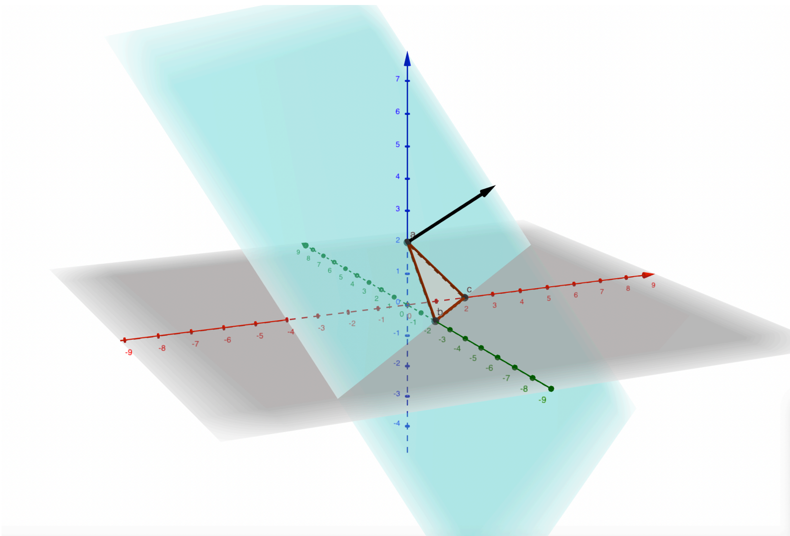
1.22 Записать общее уравнение плоскости и уравнение «в отрезках». Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где A, B, C - координаты вектора нормали плоскости $\vec{n}\{A, B, C\}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

a, b, c–соответствующие координаты точек лежащих на осях OX, OY и OZ соответственно.



1.23 Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

Пусть известны 3 точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ Тогда уравнение плоскости, которую они образуют будет равно

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)u + (y_3 - y_1)v \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)u + (z_3 - z_1)v \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

1.24 Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Пусть $\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ плоскости в пространстве, заданные в аффинной системе координат. Тогда

1. $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
2. (Если система координат прямоугольная) $\pi_1 \perp \pi_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

1.25 Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

$$\begin{cases} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \end{cases} : \rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.26 Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

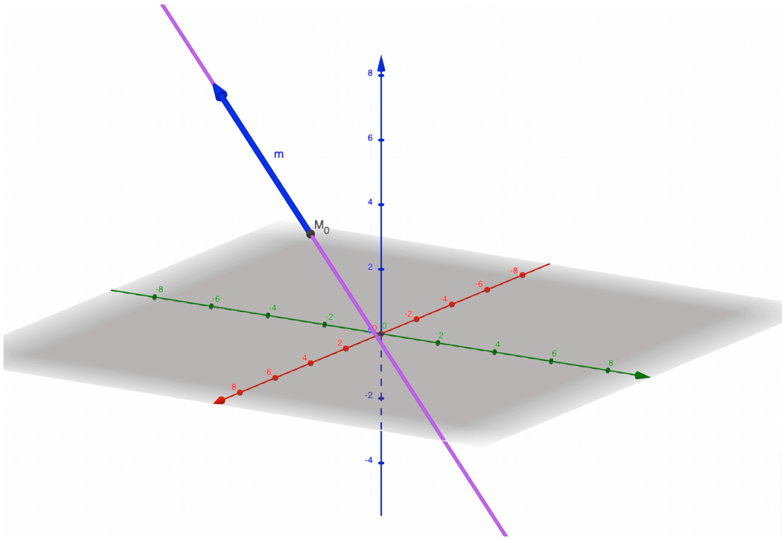
Канонические

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Параметрические

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Где $\vec{m}\{a,b,c\}$ направляющий вектор прямой, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, точка от которой отложен вектор $\vec{m}$



1.27 Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.

$$\begin{cases} M_1(x_1,y_1,z_1) \\ M_2(x_2,y_2,z_2) \end{cases} : \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

1.28 Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

l_1(задан точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{m}_1$) и l_2(Задан точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{m}_2$) лежат в одной плоскости $\iff$ $\overrightarrow{M_1M_2}\vec{m}_1\vec{m}_2 = 0$ Т.е. $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}_1, \vec{m}_2$ компланарны.

1.29 Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Пусть l_1(задан точкой $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и направляющим вектором $\vec{m}_1\{a,b,c\}$) и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ тогда

$$\rho(M_0,l_1) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0-x_1 & z_0-z_1 \\ a & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1.30 Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Пусть l_1(задан точкой $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и направляющим вектором $\vec{m}_1\{a_1,b_1,c_1\}$) и l_2(Задан точкой $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и направляющим вектором$\vec{m}_2\{a_2,b_2,c_2\}$)

$$\rho(l_1,l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{m}_1\vec{m}_2|}{|\vec{m}_1\times\vec{m}_2|} = \frac{|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

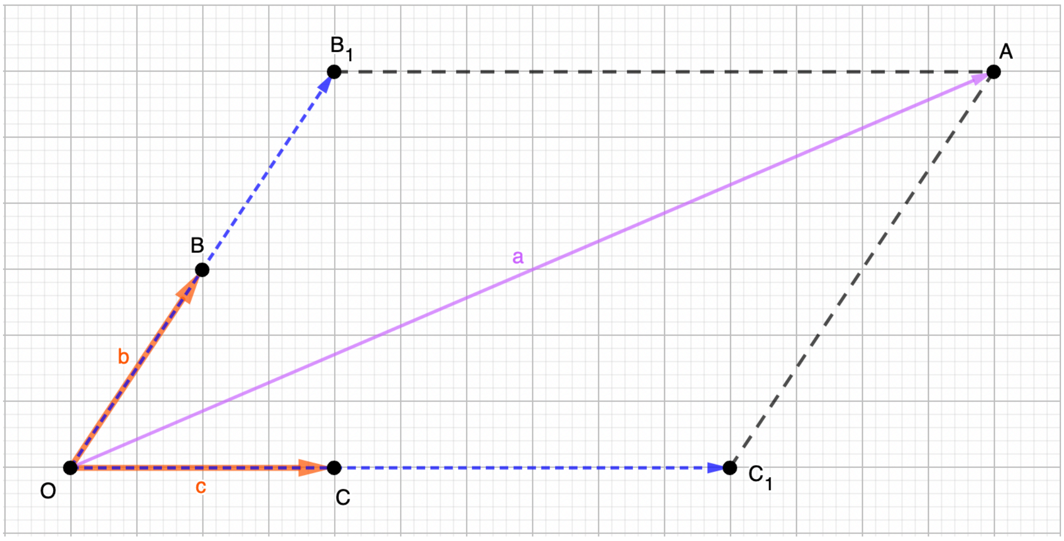
2 Теоретические вопросы повышенной сложности

2.1 Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.

3 вектора линейно зависимы $\iff$ они компланарны

2.1.1 Необходимость

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы, тогда один их них является линейной комбинацией остальных. К примеру $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}(\beta, \gamma \in \mathbb{R})$ Приложим $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ к одной точке O, получим $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OA} = \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$. Тогда $\overrightarrow{OA}$ диагональ параллелограмма. Следовательно $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ лежат в одной плоскости, значит они компланарны, тогда и векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ тоже компланарны.

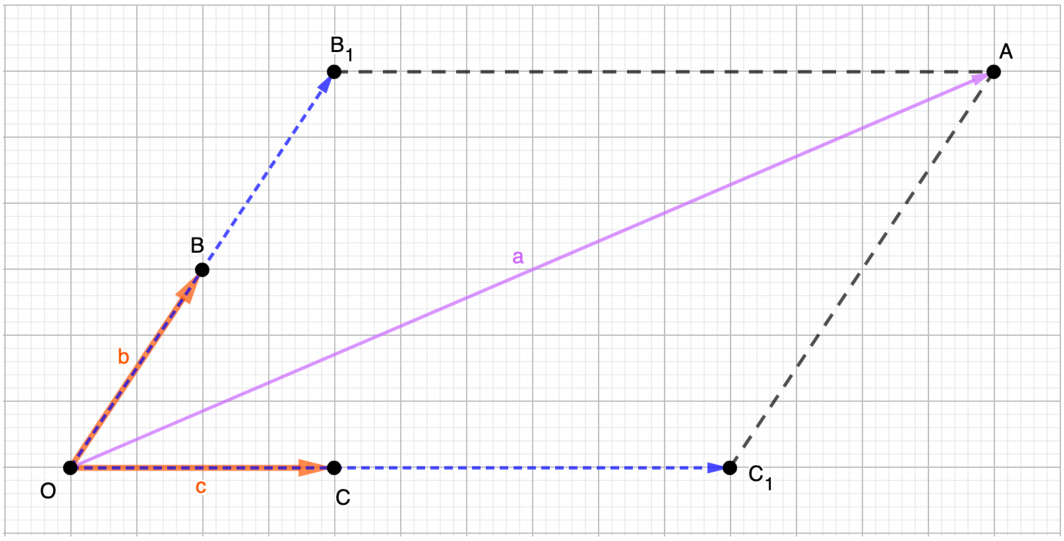


2.1.2 Достаточность

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ комплонарны. Рассмотрим 2 случая:

1. Хотя бы один нулевой ($\vec{a} = \vec{0}$). Тогда $\vec{a} = \vec{0}\vec{b} + \vec{0}\vec{c}$ т.е. $\vec{a}$ является линейной комбинацией $\vec{b}, \vec{c}$ тогда по основной теореме $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы.

2. Ни один не нулевой. Приложим $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ к одной точке O, получим $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, которые лежат в одной плоскости.



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$. Т.к. $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB_1}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}$, аналогично $\overrightarrow{OC_1} = \beta\overrightarrow{OC}$ $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, тогда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы.

2.2 Доказать теорему о разложении вектора по базису.

Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным способом

$$\forall\vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R} \quad \forall\vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \forall\vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

2.2.1 Существование

Из геометрических критериев следует, что 4 вектора $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Тогда $\exists\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (не все равны нулю), что $\alpha_0\vec{x} + \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3} = \vec{0}(1)$. Тогда по определению линейно зависимых $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ линейно зависимы, т.е. компланарны. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - базис в V_3 $\alpha_0 \neq 0$. Умножим (1) на $\frac{1}{\alpha_0}$ и выразим $\vec{x}$. $\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\vec{e_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\vec{e_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_0}\vec{e_3}$. Пусть $-\frac{\alpha_i}{\alpha_0} = x_i$, тогда $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$

2.2.2 Единственность

От противного. Пусть существуют 2 разложения для $\vec{x} : \vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}; \vec{x} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}$ Рассмотрим разность $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (x_1 - y_1)\vec{e_1} + (x_2 - y_2)\vec{e_2} + (x_3 - y_3)\vec{e_3}$ - линейная комбинация $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Т.к. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ не компланарны тогда их линейная комбинация равна $\vec{0}$, $x_1 - y_1 = 0$ $x_2 - y_2 = 0$ $x_3 - y_3 = 0$ Получили $x_1 = y_1$ $x_2 = y_2$ $x_3 = y_3$ разложение единственно.

2.3 Доказать свойство линейности скалярного произведения.

$$\forall\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\forall k \in \mathbb{R}$$

2.3.1 $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$

1. $\vec{b} = \vec{0}$ левая часть $= (k\vec{a})\vec{0} = \vec{0}$, правая часть $= k(\vec{a}\vec{0}) = \vec{0}$
2. $\vec{b} \neq \vec{0}$ левая часть $= (k\vec{a})\vec{b} = \vec{b}(k\vec{a}) = |\vec{b}|np_{\vec{b}}(k\vec{a}) = k|\vec{b}|np_{\vec{b}}(\vec{a}) = k(\vec{b}\vec{a}) = k(\vec{a}\vec{b}) =$ правая часть

2.3.2 $\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$

Левая часть $= \vec{a}(k\vec{b}) = (k\vec{b})\vec{a} = k(\vec{a}\vec{b}) =$ правая часть

2.3.3 $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$

1. $\vec{c} = \vec{0}$ левая часть $= (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$, правая часть $= \vec{a}\vec{0} + \vec{b}\vec{0} = \vec{0}$
2. $\vec{c} \neq \vec{0}$ левая часть $= \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} =$ правая часть

2.3.4 $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

Левая часть $= \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c})\vec{a} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} =$ правая часть

2.4 Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Распишем по свойствам линейности $\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i}\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}\vec{k}) + a_2b_1(\vec{j}\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}\vec{k}) + a_3b_1(\vec{k}\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}\vec{k}) = |\vec{i}\vec{i} = 1, \vec{i}\vec{j} = 0, \vec{i}\vec{k} = 0, \vec{j}\vec{j} = 1, \vec{j}\vec{k} = 0, \vec{k}\vec{k} = 0| = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

2.5 Вывести формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i} \times \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i} \times \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i} \times \vec{k}) + a_2b_1(\vec{j} \times \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j} \times \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j} \times \vec{k}) + a_3b_1(\vec{k} \times \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k} \times \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k}) = |\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}| = \vec{i}(\vec{a}_2\vec{b}_3 + \vec{a}_3\vec{b}_2) + \vec{j}(\vec{a}_1\vec{b}_3 + \vec{a}_3\vec{b}_1) + \vec{k}(\vec{a}_1\vec{b}_2 + \vec{a}_2\vec{b}_1) = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

2.6 Доказать свойство линейности смешанного произведения.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \forall k \in \mathbb{R}$$

2.6.1 $(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = ((k\vec{a}) \times \vec{b})\vec{c} = (k(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{c} = k((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

2.6.2 $\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = (k\vec{b})\vec{c}\vec{a} = k(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

2.6.3 $\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = (k\vec{c})\vec{a}\vec{b} = k(\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

2.6.4 $(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$

$$(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = ((\vec{a} + \vec{d}) \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$$

2.6.5 $\vec{a}(\vec{b} + \vec{d})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{d})\vec{c} = (\vec{b} + \vec{d})\vec{c}\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} + \vec{d}\vec{c}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$$

2.6.6 $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{c} + \vec{d})\vec{a}\vec{b} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} + \vec{d}\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$$

2.7 Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})\vec{c} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.8 Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

$$\begin{cases}\pi : Ax+By+Cz+D=0\\ M_0(x_0,y_0,z_0)\end{cases} : \rho(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

1. $\rho(M_0,\pi)=|\overrightarrow{HM_0}|$, где $\overrightarrow{HM_0}\{x_0-x_H, y_0-y_H, z_0-z_H,\}$
Пусть $\vec{n}$ - нормаль. Тогда $\vec{n}\overrightarrow{HM_0} = |\vec{n}||\overrightarrow{HM_0}|cos(\vec{n},\overrightarrow{HM_0}) = \pm|\vec{n}||\overrightarrow{HM_0}| \rightarrow |\vec{n}\overrightarrow{HM_0}| = |\vec{n}||\overrightarrow{HM_0}|, |\overrightarrow{HM_0}| = \frac{|\vec{n}\overrightarrow{HM_0}|}{|\vec{n}|}$
2. Знаменатель $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$
3. Числитель $\vec{n}\overrightarrow{HM_0} = A(x_0-x_H)+B(y_0-y_H)+C(z_0-z_H) = Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_H+By_H+Cz_H) = Ax_0+By_0+Cz_0+D$
4. $|\overrightarrow{HM_0}| = \rho(M_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

2.9 Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Пусть l_1(задан точкой $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и направляющим вектором $\vec{m}_1\{a,b,c\}$) и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ тогда

$$\rho(M_0,l_1)=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_0-y_1 & z_0-z_1\\ b & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & z_0-z_1\\ a & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & y_0-y_1\\ a & b\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. Рассмотрим параллелограмм построенный на $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\vec{m}$ $\rho(M_0,l_1)=h$, где h высота параллелограмма. $h=\frac{S}{|\vec{m}|}=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}|}{|\vec{m}|}$
2. Знаменатель $|\vec{m}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
3. Числитель $|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}| = |\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\\ a & b & c\end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix}y_0-y_1 & z_0-z_1\\ b & c\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}x_0-x_1 & z_0-z_1\\ a & c\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & y_0-y_1\\ a & b\end{vmatrix}\vec{k}| = \sqrt{\begin{vmatrix}y_0-y_1 & z_0-z_1\\ b & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & z_0-z_1\\ a & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & y_0-y_1\\ a & b\end{vmatrix}^2}$
4.$h=\rho(M_0,l_1)=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_0-y_1 & z_0-z_1\\ b & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & z_0-z_1\\ a & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & y_0-y_1\\ a & b\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

2.10 Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Пусть l_1(задан точкой $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и направляющим вектором $\vec{m}_1\{a_1,b_1,c_1\}$) и l_2(Задан точкой $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и направляющим вектором$\vec{m}_2\{a_2,b_2,c_2\}$)

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{m}_1\vec{m}_2|}{|\vec{m}_1\times\vec{m}_2|}=\frac{|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}|}{\sqrt{\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2}}$$

1. Рассмотрим параллелепипед, построенный на $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}_1, \vec{m}_2$ Пусть π_1 и π_2 плоскости нижнего и верхнего оснований, тогда $\rho(l_1,l_2)=h$ параллелепипеда $h=\frac{V}{S}=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{m}_1\vec{m}_2|}{|\vec{m}_1\times\vec{m}_2|}$

2.Числитель $|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{m_1}\vec{m_2}| = |\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}|$

3. Знаменатель $|\vec{m_1} \times \vec{m_2}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}| = |\vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}| =$
$= \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$

4. $h = \rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{m_1}\vec{m_2}|}{|\vec{m_1}\times\vec{m_2}|} = \frac{|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$