

# 1 Базовые теоретические вопросы

## 1.1 Дать определение равенства геометрических векторов.

Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

## 1.2 Дать определения суммы векторов и произведения вектора на число.

Суммой двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор  $\vec{c}$ , построенный по следующим правилам

Правило параллелограмма

Правило треугольника

Пусть  $O$  любая точка.

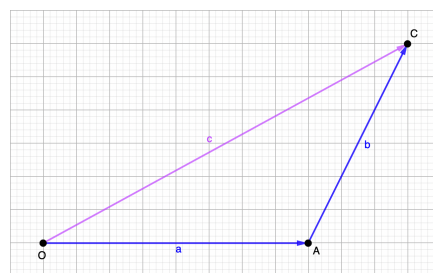
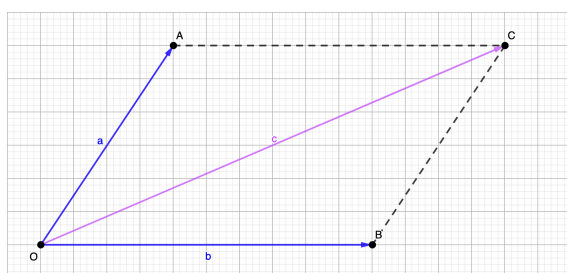
Отложим  $\vec{a}$  от  $O$ . Получим  $\vec{OA}$ .

Отложим  $\vec{b}$  от

Точки  $O$

Точки  $A$

Получим



Построим

Параллелограмм

Треугольник

Вектор  $\vec{c}$ , представителем которого является  $\vec{OC}$  - искомый.

Построение не зависит от выбора точки  $O$  и правила построения.

Произведением  $\vec{a}$  на число  $\alpha$  называется  $\vec{b}$ , если он коллинеарен  $\vec{a}$  (причем если  $\vec{a} \uparrow \vec{b} : \alpha > 0$ , иначе  $\alpha < 0$ ) и его длина равна  $|\alpha||\vec{a}|$

## 1.3 Дать определения коллинеарных и компланарных векторов.

Геометрические вектора называются

Коллинеарными

Компланарными

Если они лежат

На одной или параллельных прямых

На одной или параллельных плоскостях

## 1.4 Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Векторы  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  называются линейно

Зависимыми

Независимыми

Если существует

Если не существует

Их нетривиальная линейная комбинация, равная  $\vec{0}$ , т.е.

Если при  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  отличные от нуля  $\nexists \alpha_1, \dots, \alpha_n$  отличные от нуля

### 1.5 Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.

2 вектора линейно зависимы  $\iff$  они коллинеарны

3 вектора линейно зависимы  $\iff$  они компланарны

### 1.6 Дать определение базиса и координат вектора.

Базисом в пространстве		
$V_1$	$V_2$	$V_3$
Называется		
Любой ненулевой вектор	Любая упорядоченная пара коллинеарных векторов	Любая упорядоченная тройка некопланарных векторов
$\forall \vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R}$	$\forall \vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R}$	$\forall \vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
$\vec{x} = x\vec{e}$	$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$	$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$
Коэффициенты разложения		
$x$	$x_1, x_2$	$x_1, x_2, x_3$
Называются координатами $\vec{x}$ в базисе		
$\vec{e}$	$\vec{e}_1, \vec{e}_2$	$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

### 1.7 Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.

Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным способом

$$\forall \vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

### 1.8 Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.

Ортогональной проекцией вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется число, вычисленное по правилу:

1. Отложим вектор  $\vec{a}$  от любой точки  $A$ , получим  $\overrightarrow{AB}$
2. Возьмем любую ось  $b$ , направление которой совпадает с  $\vec{b}$
3. Спроецируем  $\overrightarrow{AB}$  на  $b$  и получим  $\overrightarrow{A_{np}B_{np}}$
4. Найдем число  $\pm |\overrightarrow{A_{np}B_{np}}|$ , где  $+$  если  $\overrightarrow{A_{np}B_{np}} \parallel \vec{b}$ , иначе  $-$

Обозначение  $pr_{\vec{b}}\vec{a}$

### 1.9 Дать определение скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением 2 векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

### 1.10 Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.

$$\begin{aligned} \forall \vec{a}, \vec{b} \forall k \in \mathbb{R} \\ (k\vec{a})\vec{b} &= k(\vec{a}\vec{b}) \\ \vec{a}(k\vec{b}) &= k(\vec{a}\vec{b}) \\ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} &= \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} \end{aligned}$$

- 1.11 Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

- 1.12 Записать формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3}{\sqrt{\vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 + \vec{a}_3^2} \sqrt{\vec{b}_1^2 + \vec{b}_2^2 + \vec{b}_3^2}}$$

- 1.13 Дать определение правой и левой тройки векторов.

Упорядоченная тройка некопланарных векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется

Правой

Левой

Если кратчайший поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  виден из конца  $\vec{c}$  проходящей

Против часовой стрелке

По часовой стрелке

- 1.14 Дать определение векторного произведения векторов.

Векторным произведением 2 векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , удовлетворяющих условиям

1.  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
2. Упорядоченная тройка  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  правая
3.  $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

- 1.15 Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}$$

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} - \text{симметричность скалярного произведения}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} - \text{кососимметричность векторного произведения}$$

- 1.16 Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \forall k \in \mathbb{R}$$

$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

- 1.17 Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

### 1.18 Дать определение смешанного произведения векторов.

Смешанным произведением 3 векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется число, равное  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$

Обозначение  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \vec{a}\vec{b}\vec{c}$

### 1.19 Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.

При перестановке любых двух векторов, смешанное произведение меняет знак.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$$

### 1.20 Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.

$$\begin{aligned} &\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \forall k \in \mathbb{R} \\ &(\vec{a})\vec{b}\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \\ &\vec{a}(\vec{b})\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \\ &\vec{a}\vec{b}(\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \\ &\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \\ &(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c} \\ &\vec{a}(\vec{b} + \vec{d})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c} \\ &\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d} \end{aligned}$$

### 1.21 Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}, \vec{c}\{c_1; c_2; c_3\}$$

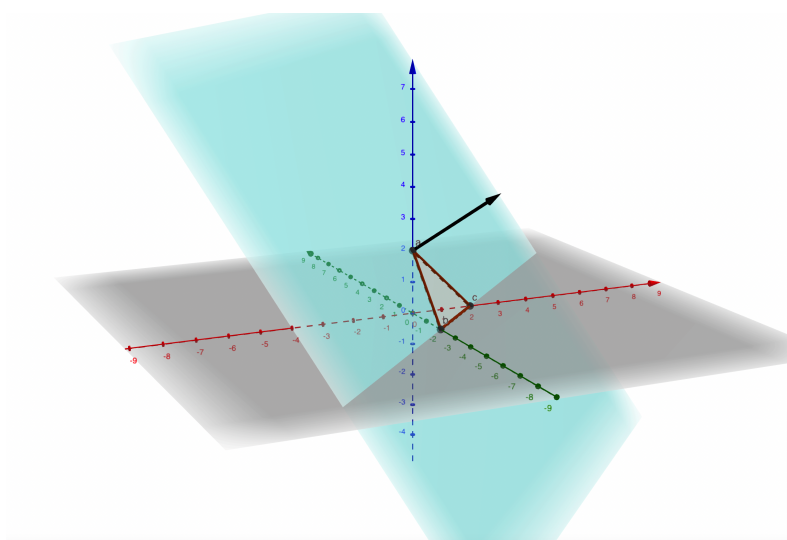
### 1.22 Записать общее уравнение плоскости и уравнение «в отрезках». Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где  $A, B, C$  - координаты вектора нормали плоскости  $\vec{n}\{A, B, C\}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$a, b, c$ —соответствующие координаты точек лежащих на осях  $OX, OY$  и  $OZ$  соответственно.



### 1.23 Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

Пусть известны 3 точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$  Тогда уравнение плоскости, которую они образуют будет равно

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)u + (y_3 - y_1)v \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)u + (z_3 - z_1)v \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

### 1.24 Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Пусть  $\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$  плоскости в пространстве, заданные в аффинной системе координат. Тогда

1.  $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

2. (Если система координат прямоугольная)  $\pi_1 \perp \pi_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

### 1.25 Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

$$\begin{cases} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \end{cases} : \rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

### 1.26 Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

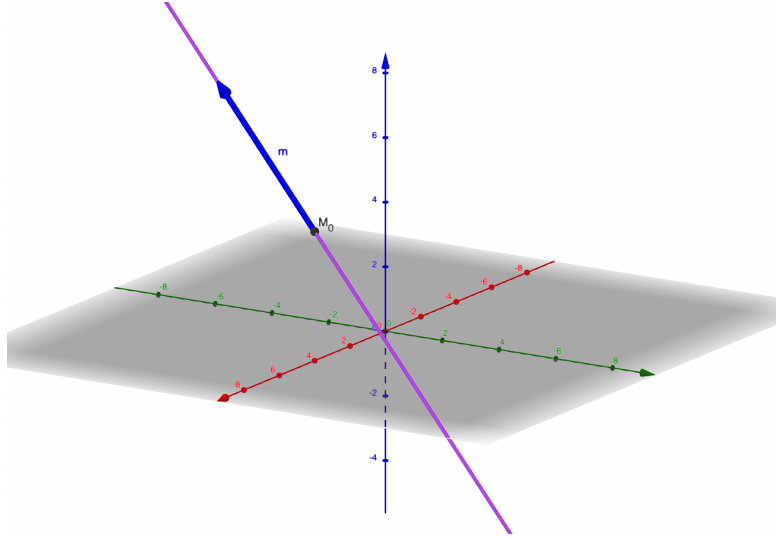
Канонические

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Параметрические

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Где  $\vec{m}\{a, b, c\}$  направляющий вектор прямой,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , точка от которой отложен вектор  $\vec{m}$



**1.27** Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{cases} : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

**1.28** Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

$l_1$  (задан точкой  $M_1$  и направляющим вектором  $\vec{m}_1$ ) и  $l_2$  (задан точкой  $M_2$  и направляющим вектором  $\vec{m}_2$ ) лежат в одной плоскости  $\iff \overrightarrow{M_1M_2} \vec{m}_1 \vec{m}_2 = 0$  Т.е.  $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}_1, \vec{m}_2$  компланарны.

**1.29** Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Пусть  $l_1$  (задан точкой  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и направляющим вектором  $\vec{m}_1\{a, b, c\}$ ) и точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  тогда

$$\rho(M_0, l_1) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & z_0 - z_1 \\ a & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**1.30** Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Пусть  $l_1$  (задан точкой  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и направляющим вектором  $\vec{m}_1\{a_1, b_1, c_1\}$ ) и  $l_2$  (задан точкой  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и направляющим вектором  $\vec{m}_2\{a_2, b_2, c_2\}$ )

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \vec{m}_1 \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1 \times \vec{m}_2|} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

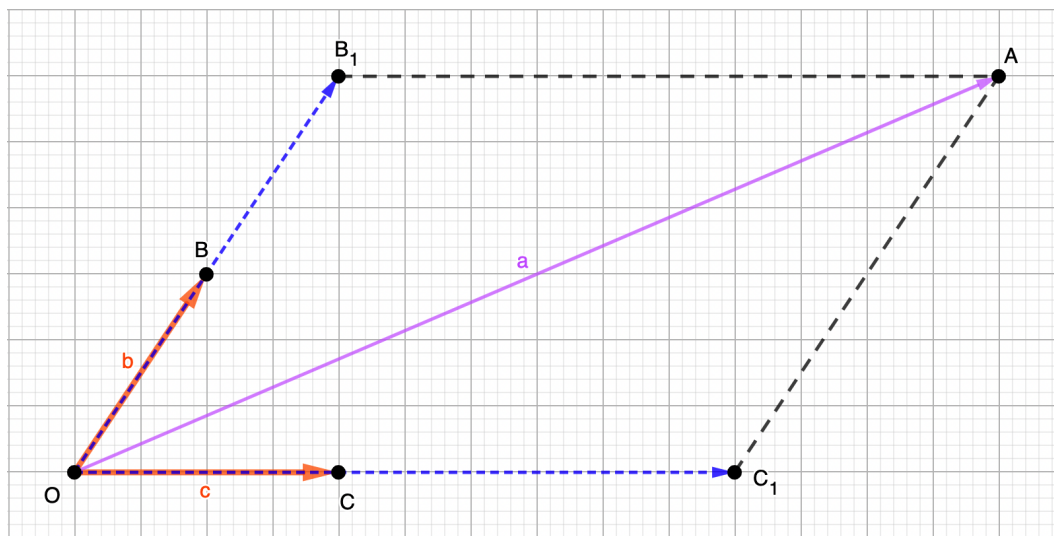
## 2 Теоретические вопросы повышенной сложности

### 2.1 Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.

3 вектора линейно зависимы  $\iff$  они компланарны

#### 2.1.1 Необходимость

Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  линейно зависимы, тогда один из них является линейной комбинацией остальных. К примеру  $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$  ( $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ). Приложим  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  к одной точке  $O$ , получим  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ :  $\vec{OA} = \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}$ . Тогда  $\vec{OA}$  диагональ параллелограмма. Следовательно  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  лежат в одной плоскости, значит они компланарны, тогда и векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  тоже компланарны.

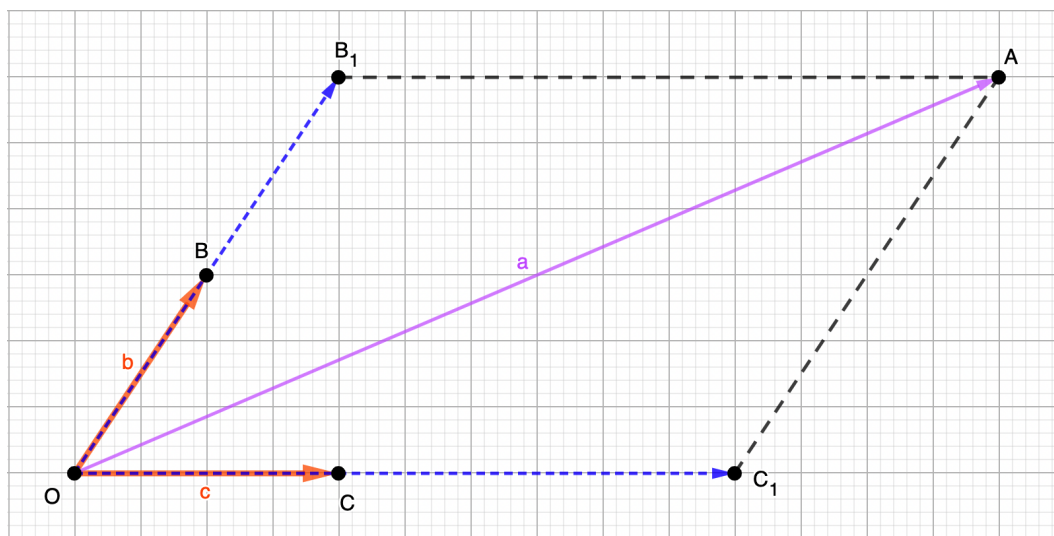


#### 2.1.2 Достаточность

Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны. Рассмотрим 2 случая:

1. Хотя бы один нулевой ( $\vec{a} = \vec{0}$ ). Тогда  $\vec{a} = \vec{0}\vec{b} + \vec{0}\vec{c}$  т.е.  $\vec{a}$  является линейной комбинацией  $\vec{b}, \vec{c}$  тогда по основной теореме  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  линейно зависимы.

2. Ни один не нулевой. Приложим  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  к одной точке  $O$ , получим  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ , которые лежат в одной плоскости.



$\vec{OA} = \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1$ . Т.к.  $\vec{OB}, \vec{OB}_1$  коллинеарны, то  $\vec{OB}_1 = \beta\vec{OB}$ , аналогично  $\vec{OC}_1 = \gamma\vec{OC}$   $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ , тогда  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  линейно зависимы.

## 2.2 Доказать теорему о разложении вектора по базису.

Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным способом

$$\forall \vec{x} \in V_1 \exists! x \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in V_2 \exists! x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in V_3 \exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

### 2.2.1 Существование

Из геометрических критериев следует, что 4 вектора  $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Тогда  $\exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (не все равны нулю), что  $\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{0}(1)$ . Тогда по определению линейно зависимых  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  линейно зависимы, т.е. компланарны.  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - базис в  $V_3$   $\alpha_0 \neq 0$ . Умножим (1) на  $\frac{1}{\alpha_0}$  и выразим  $\vec{x}$ .  $\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \vec{e}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \vec{e}_3$ . Пусть  $-\frac{\alpha_i}{\alpha_0} = x_i$ , тогда  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$

### 2.2.2 Единственность

От противного. Пусть существуют 2 разложения для  $\vec{x}$ :  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ ;  $\vec{x} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$ . Рассмотрим разность  $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (x_1 - y_1) \vec{e}_1 + (x_2 - y_2) \vec{e}_2 + (x_3 - y_3) \vec{e}_3$  - линейная комбинация  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Т.к.  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  не компланарны тогда их линейная комбинация равна  $\vec{0}$ ,  $x_1 - y_1 = 0$   $x_2 - y_2 = 0$   $x_3 - y_3 = 0$ . Получили  $x_1 = y_1$   $x_2 = y_2$   $x_3 = y_3$  разложение единственно.

## 2.3 Доказать свойство линейности скалярного произведения.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \forall k \in \mathbb{R}$$

### 2.3.1 $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$

1.  $\vec{b} = \vec{0}$  левая часть  $= (k\vec{a})\vec{0} = \vec{0}$ , правая часть  $= k(\vec{a}\vec{0}) = \vec{0}$
2.  $\vec{b} \neq \vec{0}$  левая часть  $= (k\vec{a})\vec{b} = \vec{b}(k\vec{a}) = |\vec{b}|np_{\vec{b}}(k\vec{a}) = k|\vec{b}|np_{\vec{b}}(\vec{a}) = k(\vec{b}\vec{a}) = k(\vec{a}\vec{b})$  = правая часть

### 2.3.2 $\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$

Левая часть  $= \vec{a}(k\vec{b}) = (k\vec{b})\vec{a} = k(\vec{a}\vec{b})$  = правая часть

### 2.3.3 $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$

1.  $\vec{c} = \vec{0}$  левая часть  $= (\vec{a} + \vec{b})\vec{0} = \vec{0}$ , правая часть  $= \vec{a}\vec{0} + \vec{b}\vec{0} = \vec{0}$
2.  $\vec{c} \neq \vec{0}$  левая часть  $= \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$  = правая часть

### 2.3.4 $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

Левая часть  $= \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c})\vec{a} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$  = правая часть

## 2.4 Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Распишем по свойствам линейности

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k})(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_1 (\vec{i}\vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i}\vec{j}) + a_1 b_3 (\vec{i}\vec{k}) + a_2 b_1 (\vec{j}\vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j}\vec{j}) + a_2 b_3 (\vec{j}\vec{k}) + a_3 b_1 (\vec{k}\vec{i}) + a_3 b_2 (\vec{k}\vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k}\vec{k})$$



## 2.5 Вывести формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i} \times \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i} \times \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i} \times \vec{k}) + a_2b_1(\vec{j} \times \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j} \times \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j} \times \vec{k}) + a_3b_1(\vec{k} \times \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k} \times \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k} \times \vec{k})$$

## 2.6 Доказать свойство линейности смешанного произведения.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \forall k \in \mathbb{R}$$

### 2.6.1 $(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = ((k\vec{a}) \times \vec{b})\vec{c} = (k(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{c} = k((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

### 2.6.2 $\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = (k\vec{b})\vec{c}\vec{a} = k(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

### 2.6.3 $\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = (k\vec{c})\vec{a}\vec{b} = k(\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

### 2.6.4 $(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$

$$(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = ((\vec{a} + \vec{d}) \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$$

### 2.6.5 $\vec{a}(\vec{b} + \vec{d})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{d})\vec{c} = (\vec{b} + \vec{d})\vec{c}\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} + \vec{d}\vec{c}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$$

### 2.6.6 $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{c} + \vec{d})\vec{a}\vec{b} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} + \vec{d}\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$$

## 2.7 Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \left( \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \vec{c} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 2.8 Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
- 2.9 Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
- 2.10 Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.