GitHub: https://github.com/pluttan
VK: https://vk.com/pluttan
VK: https://vk.com/f_i_i_x_i_i

https://t.me/botva_its6

Подготовка к РК2

Аналитическая геометрия

Над файлом работали:
pluttan & fiixii

1 Базовые теоретические вопросы

1.1 Дать определение единичной, нулевой, верхней треугольной и нижней треугольной матрицы.

Единичная матрица - квадратная матрица, для элементов которой выполняется следующее условие: $a_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$
т.е. элементы главной диагонали равны 1, остальные 0.
Обозначение $[E]$

Нулевая матрица - матрица, все элементы которой равны 0, т.е. $a_{ij} = 0, \forall i, j$
Обозначение $[\Theta]$

Верхняя треугольная матрица - квадратная матрица, все элементы под главной диагональю которой равны 0.

Нижняя треугольная матрица - квадратная матрица, все элементы над главной диагональю которой равны 0.

1.2 Дать определение равенства матриц.

Матрицы называются **равными**, если:

1) они имеют одинаковый тип,

2) У них совпадают все соответствующие элементы.

$$\text{Для } A = (a_{ij}) \text{ и } B = (b_{ij})$$
$$A = B \iff A, B \in M_{mn}(\mathbb{R}) \text{ и } a_{ij} = b_{ij}\ \forall ij$$

1.3 Дать определение суммы матриц и произведения матрицы на число.

Сумма матриц $A = (a_{ij})$ **и** $B = (b_{ij})$ **одного типа** $m \times n$ - матрица $C = (c_{ij})$ того же типа $m \times n$ с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведение матрицы $A = (a_{ij})$ **типа** $m \times n$ **на число** $\alpha \in \mathbb{R}$ - матрица $C = (c_{ij})$ того же типа $m \times n$ с элементами $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

1.4 Дать определение операции транспонирования матриц.

Для матрицы $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ **ее транспонированной матрицей** называется матрица $A^T = (c_{ij})$ типа $n \times m$ с элементами $c_{ij} = a_{ji}$
При транспонировании матрицы ее строки (столбцы) страновятся столбцами (строками) с теми же номерами.

1.5 Дать определение операции умножения матриц.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **типа** $m \times n$ **и матрицы** $B = (b_{ij})$ **типа** $n \times p$ называется матрица $C = (c_{ij})$ типа $m \times p$ с элементами $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \mathbf{b_{nj}} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$ (как правило).

1.6 Дать определение обратной матрицы.

Пусть A - квадратная матрица порядка n. Матрица B называется **обратной** к матрице A, если:

1. Она того же порядка n,
2. $AB = BA = E$, где E - единичная матрица.

1.7 Дать определение минора. Какие миноры называются окаймляющими для данного минора матрицы?

Минором порядка k матрицы A типа $m \times n$ называется определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.
Обозначение: минор $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ составлен из элементов, расположенных на пересечении строк $i_1, ..., i_k$ и столбцов $j_1, ..., j_k$, причем $i_1 < ... < i_k$, $j_1 < ... < j_k$.

Минор M' матрицы A называется **окаймляющим** для минора M, если он получается из M добавлением одной новой строки и одного нового столбца, причем эти строка и столбец входят в матрицу A и не входят в минор M.

1.8 Дать определение базисного минора и ранга матрицы.

Ранг матрицы - число, равное максимальному проядку среди ее ненулевых миноров.

Минор M матрицы A называется **базисным,** если

1) он не равен нулю,
2) его порядок равен RgA.

У матрицы может быть несколько базисных миноров.

1.9 Дать определение однородной и неоднородной СЛАУ.

Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Где $a_{ij}, b_i, x_i \in \mathbb{R}$
Числа a_{ij} называются коэффициентами системы, b_{ij} называется свободными членами.
СЛАУ называется **однородной**, если все b равны 0, **неоднородной**, если хотя бы один из b_i не равен 0.

1.10 Дать определение фундаментальной системы решений однородной СЛАУ.

Пусть дана однородная СЛАУ $AX = \Theta$ с n неизвесными $x_1, ..., x_n$, и пусть $RgA = r$. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $AX = \Theta$ называется любой набор из $k = n - r$ линейно независимых столбцов $x^{(1)}, ..., x^{(k)}$ является решениями этой системы.

1.11 Записать формулы для нахождения обратной матрицы к произведению двух обратимых матриц и для транспонированной матрицы.

Обратная матрица к произведению двух обратимых матриц: если квадратные матрицы A и B одного порядка и имеют обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}, то их произведение AB имеет обратную матрицу AB^{-1}, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Обратная матрица для транспонированной матрицы: если квадратная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то транспонированная матрица A^T тоже имеет обратную матрицу $(A^T)^{-1}$, причем $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

1.12 Дать определение присоединённой матрицы и записать формулу для вычисления обратной матрицы.

Присоединеной матрицей для квадратной матрицы A называется матрица $A^* = (A_{ji})$, где (A_{ij}) - матрица из алгебраических дополнений для соответствующих элементов.
Формула для вычисления обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}A^*$$

1.13 Перечислить элементарные преобразования матриц.

Элементарные преобразования матриц

1) Умножение строки (столбца) матрицы на число $\lambda \neq 0$:

2) Перестановка двух строк (столбцов).

2) Добавление к одной строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), умноженной на число.

1.14 Записать формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.

СЛАУ $AX = B$, где A - квадратная и $detA \neq 0$, имеет единственное решение, причем $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta = detA$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}$$

1.15 Перечислить различные формы записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Какая СЛАУ называется совместной?

Формы записи СЛАУ:

1. Координатная:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad a_{ij}, b_i, x_i \in \mathbb{R}$$

2. Векторная:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или

$$x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + ... + x_n\vec{a_n} = \vec{b}$$

3. Матричная:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или

$$AX = B \; (A\vec{x} = \vec{b})$$

СЛАУ называется совместной (несовместной), если она имеет (не имеет) решение.

1.16 Привести пример, показывающий, что умножение матриц некоммутативно.

Некомутативность произведение матриц: $AB \neq BA$ (как правило, но бывают исключения)
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} : AB = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$

1.17 Сформулировать свойства ассоциативности умножения матриц и дистрибутивности умножения относительно сложения.

Свойства умножения матриц:

1) Ассоциативность $(AB)C = A(BC)$.
2) Дистрибутивность $(A + B)C = AC + BC$.

1.18 Сформулировать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.

Система $AX = B$ совместна $\iff$ ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы, т.е. $Rg(A|B) = RgA$

1.19 Сформулировать теорему о базисном миноре.

Теорема о базисном миноре:

1. Базисные строки (столбцы) матрицы A, соответствующие любому базисному минору M, линейно независимы.
2. Любые строки (столбцы) матрицы A, не входящие в базисный минор M, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

1.20 Сформулировать теорему о свойствах решений однородной СЛАУ.

Если $X^{(1)}, ..., X^{(S)}$ - решения однородной СЛАУ, то любая их линейная комбинация $X = \alpha_1 X^{(1)} + ... + \alpha_s X^{(S)}, \alpha_i \in \mathbb{R}$, тоже является решением.

1.21 Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$,
$X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ - ФСР соответствующей однородной СЛАУ $AX = \Theta$.
Тогда любое решение X неоднородной СЛАУ $AX = B$ можно представить в виде:

$$X = X^0 + c_1 X^{(1)} + ... + c_k X^{(k)},$$

где $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k$.

1.22 Сформулировать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Пусть $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ - любая ФСР однородной СЛАУ $AX = \Theta$.
Тогда любое решение X этой системы можно представить как линейную комбинацию ФСР:

$$X = c_1 X^{(1)} + ... + c_k X^{(k)}, \text{ где } c_i \in \mathbb{R}$$

1.23 Сформулировать теорему об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях матрицы.

При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

1.24 Сформулировать критерий существования обратной матрицы.

Для квадратной матрицы A $\exists$ обратная матрица $A^{-1} \iff detA \neq 0$ (т.е. когда A - невырожденная матрица).

2 Теоретические вопросы повышенной сложности

2.1 Доказать теорему о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ и теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Теорема (о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ).

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$, тогда:
X - решение этой же СЛАУ $\iff X = X^0 + Y$, где Y - некоторое решение соответствующей однородной СЛАУ $AX = \Theta$.

Доказательство
($\Rightarrow$)
Пусть X^0, X - решения неоднородной СЛАУ $AX = B$. Рассмотрим $Y = X - X^0$ и найдем AY:
$AY = A(X - X^0) = AX - AX^0 = B - B = \Theta$, т.е. $AY = \Theta$, а значит, Y - решение однородной СЛАУ $AX = \Theta$ и $X = X^0 + Y$.

($\Leftarrow$)
Пусть X^0 - решение неоднородной СЛАУ $AX = B$ (т.е. $AX^0 = B$),
а Y - решение однородной СЛАУ $AX = \Theta$ (т.е. $AY = \Theta$).
Рассмотрим $X = X^0 + Y$ и найдем AX:
$AX = A(X^0 + Y) = AX^0 + AY = B + \Theta = B$, т.е. X - решение неоднородной СЛАУ $AX = B$.

ЧТД

Теорема (о структуре общего решения неоднородной СЛАУ).

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$,
$X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ - ФСР (фундаментальная система решений) соответствующей однородной СЛАУ $AX = \Theta$.
Тогда любое решение X неоднородной СЛАУ $AX = B$ можно представить в виде:

$$X = X^0 + c_1 X^{(1)} + ... + c_k X^{(k)}, \text{ где } c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k.$$

Доказательство
Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$, X - любое решение той же системы.
Тогда по теореме о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ: $X = X^0 + Y$, где Y - некоторое решение соответствующей однородной СЛАУ.
По теореме о структуре общего решения однородной СЛАУ:
$Y = c_1 X^{(1)} + ... + c_k X^{(k)}$, где $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ - ФСР однородной СЛАУ, $c_i \in \mathbb{R}$. Следовательно $X = X^0 + c_1 X^{(1)} + ... + c_k X^{(k)}$.

ЧТД

2.2 Доказать свойства ассоциативности и дистрибутивности умножения матриц.

Свойство ассоциативности умножения матриц: $(AB)C = A(BC)$

Доказательство

$$\overbrace{\underbrace{(AB)}_{D}C}^{X} = \overbrace{A\underbrace{(BC)}_{F}}^{Y}$$

Докажем, что матрицы X и Y:

1) имеют одинаковый тип,
2) их соответствующие элементы равны: $x_{ij} = y_{ij}$

матрицы	типа
$A = (a_{ij})$	$m \times n$
$B = (b_{ij})$	$n \times k$
$D = (d_{ij})$	$m \times k$
$C = (c_{ij})$	$k \times l$
$F = (f_{ij})$	$n \times l$
$X = (x_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{l}$
$Y = (y_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{l}$

$x_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{k} d_{ir}c_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k}(\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr})c_{rj} = \sum\limits_{r=1}^{k}(\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}c_{rj}),$
$y_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}f_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{n}(a_{is}(\sum\limits_{r=1}^{k} b_{sr}c_{rj})) = \sum\limits_{s=1}^{n}(\sum\limits_{r=1}^{k} a_{is}b_{sr}c_{rj}) = \sum\limits_{r=1}^{k}(\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}c_{rj})$, т.е. $x_{ij} = y_{ij}$.

ЧТД

Свойство дистрибутивности умножения матриц: $(A + B)C = AC + BC$

Доказательство

$$\overbrace{\underbrace{(A+B)}_{X}C}^{Y} = \underbrace{(AC)}_{Z} + \underbrace{(BC)}_{W}$$

Докажем, что матрицы Y и $Z + W$:

1) имеют одинаковый тип,
2) их соответствующие элементы равны: $y_{ij} = z_{ij} + w_{ij}$

матрицы	типа
$A = (a_{ij})$	$m \times n$
$B = (b_{ij})$	$m \times n$
$X = (x_{ij})$	$m \times n$
$C = (c_{ij})$	$n \times k$
$Y = (y_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{k}$
$Z = (z_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{k}$
$W = (w_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{k}$

$$y_{ij} = \sum_{r=1}^{n} x_{ir}c_{rj} = \sum_{r=1}^{n}(a_{ir} + b_{ir})c_{rj} = \sum_{r=1}^{n}(a_{ir}c_{rj} + b_{ir}c_{rj}) = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}c_{rj} + \sum_{r=1}^{n} b_{ir}c_{rj} = z_{ij} + w_{ij}.$$

ЧТД

2.3 Доказать теорему о базисном миноре.

Теорема о базисном миноре

1. Базисные строки (столбцы) матрицы A, соответствующие любому базисному минору M, линейно независимы.
2. Любые строки (столбцы) матрицы A, не входящие в базисный минор M, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

Доказательство (для строк)

Пусть матрица $A = (a_{ij})$ имеет тип $m \times n$, пусть $RgA = r$ и пусть M - базисный минор матрицы A.
Рассмотрим строки, на которых построен M. Это базисные строки матрцы A.

1. Докажем, что базисные строки линейно независимы.

   Пусть от противного они линейно зависимы $\overset{\text{по критерию}}{\Rightarrow}$ хотя бы одна строка из них в матрице A является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ в миноре M хотя бы одна строка является линейной комбинацией остальных $\overset{\text{по св-ву det}}{\Rightarrow}$ $detM = 0$,

   Противоречие, т.к. M - базисный минор.

2. Докажем, что любая строка матрицы A, не входящая в базисный минор M, является линейной комбинацией базисных строк.

   Пусть базисный минор M расположен в верхнем левом углу матрицы A:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

   Добавим к M любую i-ю **не базисную** строку и любой j-й столбец (возможно даже базисный):

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}$$

Порядок Δ_j равен $r+1$, следовательно $\Delta_j = 0$.

Разложим Δ_j по последнему столбцу:

$\Delta_j = a_{1j}A_{1j} + ... + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$, где A_{kj} - это алгебраические дополнения элементов a_{kj} в Δ_j.

Заметим, что

1) эти алгебраические дополнения A_{kj} не зависят от номера j, т.к. при их вычислении j-й столбец вычеркивается.
2) $A_{ij} = (-1)^{(r+1)+(r+1)}M = (-1)^{2(r+1)}M = M \neq 0$,

Выразим элемент a_{ij} :

$$a_{ij} = \underbrace{\frac{-A_{1j}}{M}}_{b_1} a_{1j} - ... - \underbrace{\frac{-A_{rj}}{M}}_{b_r} a_{rj},\ \text{т.е.}$$

$$a_{ij} = b_1 a_{1j} + ... + b_r a_{rj},\ \text{где } b_1, ..., b_r \text{ не зависят от номера j.}$$

Если поставить на место j-го столбца в Δ_j его 1-й столбец, то получим

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r1} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{i1} \end{pmatrix}$$

и $\Delta_1 = a_{11}A_{1j} + ... + a_{r1}A_{rj} + a_{i1}A_{ij}$,

выразим элемент a_{i1} :

$$a_{i1} = \underbrace{\frac{-A_{1j}}{M}}_{b_1} a_{11} - ... - \underbrace{\frac{-A_{rj}}{M}}_{b_r} a_{r1},\ \text{т.е.}$$

$a_{i1} = b_1 a_{11} + ... + b_r a_{r1}$, (с теми же коэффициентами $b_1, ..., b_r$).

Аналогично ставим на место j-го столбца в Δ остальные столбцы по очереди и будем получать аналогичные равенства, в частности,

$$a_{ir} = b_1 a_{1r} + ... + b_r a_{rr}.$$

Следовательно, вся i-я строка матрицы A является линейной комбинацией ее первых r строк (базисных) с коэффициентами $b_1, ..., b_k$.

ЧТД

2.4 Доказать критерий существования обратной матрицы.

критерий существования обратной матрицы

Для квадратной матрицы A $\exists$ обратная матрица $A^{-1} \iff detA \neq 0$ (т.е. когда A - невырожденная матрица).

Доказательство

($\Rightarrow$)

Пусть $\exists A^{-1}$. Докажем, что $detA \neq 0$.

По определению обратной матрицы,

$$AA^{-1} = E.$$

Возьмем det от левой и правой части:

$$det(AA^{-1}) = detE$$

По свойствам det:

$$detA \cdot detA^{-1} = 1,$$

произведение чисел равно $1 \to detA \neq 0$, $det(A^{-1}) \neq 0$.

($\Leftarrow$)

Пусть $detA \neq 0$.

1. Построим матрицу A^{-1} :
   1) Найдем $\forall$ алгебраические дополнения A_{ij} и составим из них матрицу (A_{ij}).
   2) Транспонируем матрицу (A_{ij}) :
   $$(A_{ji}) = (A_{ij})^T$$
   3) Рассмотрим матрицу $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{detA}$, т.е. $B = \frac{1}{detA}(A_{ji})$
2. Проверим, что построенная матрица B и будет A^{-1}.

   В самом деле, B - квадратная и осталось проверить, что $AB = E$ (и $BA = E$).

   Обозначим AB через $C = (c_{ik})$

   Найдем $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{A_{kj}}{detA} = \frac{1}{detA} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$

   т.к. $\sum\limits_{j=1} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} detA, i = k \\ 0, i \neq k \text{ (по т. о ”фальшивом” разложении определителя*)} \end{cases}$

   Следовательно, $C = E$, и $AB = E$. Аналогично показывается, что $BA = E$. Из $1, 2 \Rightarrow B$ является A^{-1} для A.

ЧТД

2.5 Доказать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.

Критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ

Система $AX = B$ совместна $\iff$ ранг расширенной матрицы = рангу матрицы, т.е. $Rg(A|B) = RgA$

Доказательство
($\Rightarrow$)
Пусть система $AX = B$ совместна. Докажем, что $Rg(A|B) = RgA$.

1) Столбцы матрицы A являются столбцами матрицы $(A|B) \Rightarrow RgA \leqslant Rg(A|B)$

2) Докажем, что $RgA \geqslant Rg(A|B)$

Т.к. система $AX = B$ совместна, то $\exists$ ее решение $x_1, ..., x_n$:
$x_1\vec{a_1} + ... + x_n\vec{a_n} = \vec{b}$
Пусть $\vec{a_1}, ...\vec{a_k}$ - базисные столбцы в матрице A $\Rightarrow$ по теореме о базисном миноре, столбцы $a_{\vec{k+1}}, ..., \vec{a_n}$ выражаются через столбцы $\vec{a_1}, ...\vec{a_k}$ $\Rightarrow$ столбец $\vec{b}$ выражается через $\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}$ $\Rightarrow$ $\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}$ - базисные столбцы в матрице $(A|B)$.
Это означает, что число базисных столбцов в матрице $(A|B)$ не может быть больше числа базисных столбцов в матрице $A \Rightarrow Rg(A|B) \leqslant RgA$.
Из $1), 2) \Rightarrow Rg(A|B) = RgA$.

($\Leftarrow$)
Пусть $Rg(A|B) = RgA$.
Докажем, что система $AX = B$ совместна.
Пусть M - базисный минор в A ($M \neq 0$ и максимального порядка) $\Rightarrow$ M будет базисным минором в $(A|B)$.
Пусть M расположен в столбцах $\vec{a_1}, ...\vec{a_k}$ в $A \Rightarrow \vec{a_1}, ...\vec{a_k}$, будут базисными столбцами и в A и в $(A|B)$.
Выразим через них столбец $\vec{b}$ (это можно сделать по теореме о базисном миноре):
$x^0\vec{a_1} + ... + x_k^0\vec{a_k} = \vec{b}$ (с какими-то $x_1^0, ..., x_k^0$)
Дополним это равенство:

$$x^0\vec{a_1} + ... + x_k^0\vec{a_k} + 0a_{\vec{k+1}} + ... + 0\vec{a_n} = \vec{b}$$

Эта запись является векторной записью СЛАУ $AX = B$;
Она означает, что $x_1 = x_1^0, ..., x_k = x_k^0, x_{k+1} = 0, ..., x_n = 0$ является решением СЛАУ $AX = B$, т.е. система совместна.

ЧТД

2.6 Доказать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ.

Теорема (о существовании ФСР однородной СЛАУ)

Пусть дана однородная СЛАУ $AX = \Theta$ с n неизвестными $x_1, ..., x_n$, и пусть $RgA = r < n$. Тогда для нее $\exists$ ФСР (т.е. $\exists$ набор из $k = n - r$ линейно независимых решений $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$)

Доказательство

(1) Построение ФСР

1) Дана система $AX = \Theta$ с n неизвестными $x_1, ..., x_n$, и, $RgA = r < n$.

   Можно считать, что базисным минором порядка r является $M^{1..r}_{1..r}$

   $$\Downarrow \text{ по т. о базисном миноре}$$

   Строки $(r + 1)$-я, ..., n-я матрицы A являются линейными комбинациями базисных строк 1-й, ..., r-й $\Rightarrow$ уравнения $(r + 1)$-е, ..., n-е можно отбросить.

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r + a1r + 1x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rr}x_r + arr + 1x_{r+1} + ... + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

2) Переменные $x_1, ..., x_r$ - базисные,

   $x_{r+1}, ..., x_n$ - свободные.

   Выразим базисные через свободные:

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases}$$

   $\forall$ набора $x_{r+1}, ..., x_n$ получим СЛАУ из r уравнений с r неизвестными $x_1, ..., x_r$, det системы = $M^{1..r}_{1..r} \neq 0 \Rightarrow$ по теореме Крамера эта система имеет единственное решение.

3) Будем придавать свободным переменным различные значения:

   $$\begin{aligned} &x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \quad ..., \quad x_n = 0; \\ &x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \quad ..., \quad x_n = 0; \\ &\qquad \vdots \\ &x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad ..., \quad x_n = 1. \end{aligned}$$

   Для каждого набора значений свободных переменных найдем базисные, получим решение системы:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_r^{(k)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Обозначим их } X^{(1)}, X^{(2)}, ..., X^{(k)}, k = n - r.$$

(2) Покажем, что мы построили именно ФСР

$X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ - решения (по построению), их k = n - r.

Осталось доказать, что $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ - линейно независимы.

Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_1 X^{(1)} + ... + \alpha_k X^{(k)} = \Theta$. Из последних строк имеем:

Из $(r+1)$-й строки: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + ... + \alpha_k \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Из $(r+2)$-й строки: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + ... + \alpha_k \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

...

Из (n)-й строки: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + ... + \alpha_k \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$,

Следовательно $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ линейно независимы. Мы построили ФСР.

ЧТД

2.7 Вывести формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.

Теорема

СЛАУ $AX = B$, где A - квадратная и $detA \neq 0$, имеет единственное решение, причем $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \Delta = detA$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Доказательство

СЛАУ $AX = B$, где $A - (n \times n), X - (n \times 1), B - (n \times 1)$ является частным случаем матричного уравнения. По условию $detA \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$ решение матричного уровнения однозначно находится $X = A^{-1}B$

Распишем нахождение решения X более подробно: $A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \frac{1}{\Delta}(A_{ji})$, где A^* - присоединенная матрица.

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 & A_{21}b_2 & \dots & A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 & A_{22}b_2 & \dots & A_{n2}b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}b_1 & A_{2n}b_2 & \dots & A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Следовательно

$x_1 = \frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+...+b_nA_{n1}+}{\Delta} = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, и тд, $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

ЧТД

2.8 Доказать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

теорема (о структуре общего решения однородной СЛАУ)

Пусть $X_1^{(1)}, ..., X_k^{(k)}$ - любая ФСР однородной СЛАУ $AX = \Theta$
Тогда любое решение X этой системы можно представить как линейную комбинацию ФСР:
$X = c_1X^{(1)} + ... + c_kX^{(k)}$, где $c_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство
Рассмотрим матрицу B, состоящую из столбцов X и $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$:

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r & \dots & x_r^{(1)} & \dots & x_r^{(k)} \\ x_{r+1} & \dots & x_{r+1}^{(1)} & \dots & x_{r+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & \dots & x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Напомним, что в системе $AX = \Theta$, $RgA = r : x_1, ..., x_r$ - базисные неизвестные, $x_{r+1}, ..., x_n$ - свободные
Докажем, что $RgB = k$.
Тогда, т.к. столбцы $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ по определению ФСР линейно независимы и их k штук, по следствию 2 из теоремы о базисном миноре (ранг матрицы равен максимальному количеству ее линейно независимых столбцов(строк)) столбцы $X^{(1)}, ..., X^{(k)}$ являются базисными. Следовательно, по п2 теоремы о базисном миноре, столбец X является их линейной комбинацией.
1) $RgB \geqslant k$, т.к. RgB равен максимальному количеству линейно независимых столбцов(строк) матрицы, а мы знаем, что r столбцов матрицы B линейно независимы.
2) Докажем, что $RgB \leqslant k$.

Для этого с помощью элементарных преобразований получим из B матрицу B' вида

$$B \sim B' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow RgB = RgB' \leqslant k$$

Как получить матрицу B'?
Базисные неизвестные (первые r штук) однозначно выражаются через свободные (последние $n - r = k$ штук). Следовательно в матрице B вся первая строка является линейной комбинацией последних k строк. Вычтем из первой строки линейную комбинацию k последних строк. Получим нулевую строку. Аналогично в матрице B вся вторая строка является линейной комбинацией k последних строк. Вычтем из второй строки линейную комбинацию k последних. Получим нулевую строку. И т.д. до r-ой строки матрицы B. Получили B'.
Из $1), 2) \Rightarrow RgB = k$.

ЧТД