report

April 21, 2024

1 Naravni zlepek

Danih je n interpolacijskih točk $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n$. Naravni interpolacijski zlepek S je funkcija, ki izpolnjuje naslednje pogoje:

1. $S(x) = y_i, \quad i = 1, 2, ..., n$
2. S je polinom stopnje **3 ali manj** na vsakem podintervalu $[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, ..., n-1$
3. S je dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na interpolacijskem intervalu $[x_1, x_n]$
4. $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$

Zlepek S določimo tako, da predpostavimo:

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

nato pa izpolnemo zahtevane pogoje.

Vemo, da $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$, torej lahko formuliramo drugi odvod zlepka, ki deluje na vrednostih (x_i, z_i) kot:

$$S_i''(x) = z_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + z_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Če dolžine posameznih intervalov označimo kot $h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, ..., n$, lahko zapišemo:

$$S''(x) = z_{i+1} \frac{x - t_i}{h_i} + z_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

Z dvojnim integriranjem dobimo enačbo za $S_i(x)$:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)$$

Iz tega dobimo naslednje enačbe interpolacijskega zlepka:

$$S_i(x_i) = y_i \Rightarrow \frac{z_i}{6} h_i^2 + d_i h_i = y_i, \quad i = 1, ..., n$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \Rightarrow \frac{z_{i+1}}{6} h_i^2 + c_i h_i = y_{i+1}, \quad i = 1, ..., n$$

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}}{6} h_i\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i\right)(x_{i+1} - x)$$

Vzamemo odvod zgornje enačbe, da dobimo:

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6}(z_{i+1} - z_i)$$

$$m_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

To nam, da naslednji sistem enačb iz podanih točk:

$$S_i'(x_i) = -\frac{1}{2}z_i h_i + m_i - \frac{h_i}{6}z_{i+1} + \frac{1}{6}h_i z_i$$

$$S_i'(x_{i+1}) = \frac{z_{i+1}}{2}h_i + m_i - \frac{h_i}{6}z_{i+1} + \frac{1}{6}h_i z_i$$

$$S_{i-1}(x_i) = \frac{1}{3}z_i h_{i+1} + \frac{1}{6}h_{i-1}z_{i-1} + b_{i-1}$$

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i) \Rightarrow 6(m_i - m_{i-1}) = h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1}$$

Torej lahko rešujemo linearni sistem naslednje oblike:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, ..., n \quad m_i = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, ..., n$$

$$v_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad i = 2, ..., n-1 \quad u_i = 6(m_i - m_{i-1}), \quad i = 2, ..., n z_0 = z_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & v_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & v_3 & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{n-2} & v_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Iz rešenih vrednosti z_i lahko nato preprosto izračunamo koeficiente za $S_i(x)$:

$$p_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i} \quad p_{i+1}(x) = \frac{z_i}{6h_i}$$

$$p_{i+2}(x) = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}}{6}h_i \quad p_{i+3}(x) = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i$$

$$S_i(x) = p_i(x)(x - x_i)^3 + p_{i+1}(x)(x_{i+1} - x)^3 + p_{i+2}(x)(x - x_i) + p_{i+3}(x)(x_{i+1} - x)$$

1.1 Naloga

Napišite funkcijo `Z = interpoliraj(x, y)`, ki izračuna koeficient polinoma S_i in vrne lement tipa `Zlepek`. Tip `Zlepek` definirajte sami in naj vsebuje koeficiente polinoma in interpolacijske točke. Za tip `Zlepek` definirajte funkciji:

- `y = vrednost(Z, x)`, ki vrne vrednost zlepka v točki `x`
- `plotZlepek(Z)`, ki nariše graf zlepka, tako da različne odseke izmenično nariše z rdečo in modro barvo (uporabi paket `Plots`)

Funkcijo `interpoliraj(x, y)` definiramo z reševanjem tridiagonalnega linearnega sistema, ki smo ga definirali zgoraj. Za reševanje uporabimo integriran operator `\` iz paketa `LinearAlgebra`. Koeficiente posameznih segmentov funkcije izračunamo po prej podani enačbi.

[ ]:
```julia
# Primer uporabe funkcije interpoliraj
include("spline.jl")

x = range(0, 2pi, length=10) .+ 0.5 * rand(10)
y = sin.(x)
zlepek = interpoliraj(x, y)
```

```
Zlepek([0.2899310600670662 0.28588616315685117; 0.903778759772657 0.
↪7856702262140631; … ; 5.6505664344922835 -0.5912588563736939; 6.
↪756411920295278 0.45576066881484334], [-0.28082430818849846 0.0 1.
↪3857278054368163 0.4657281656247402; -0.15871852859560429 -0.17616154816063218␣
↪1.1247098854972233 0.9715762590283774; … ; 0.17154747512089524 0.
↪46820304980189564 -2.1245436427540345 -2.8615351279561696; 0.0 0.
↪04344715549908849 0.4121377485968566 -0.5877980663579006])
```

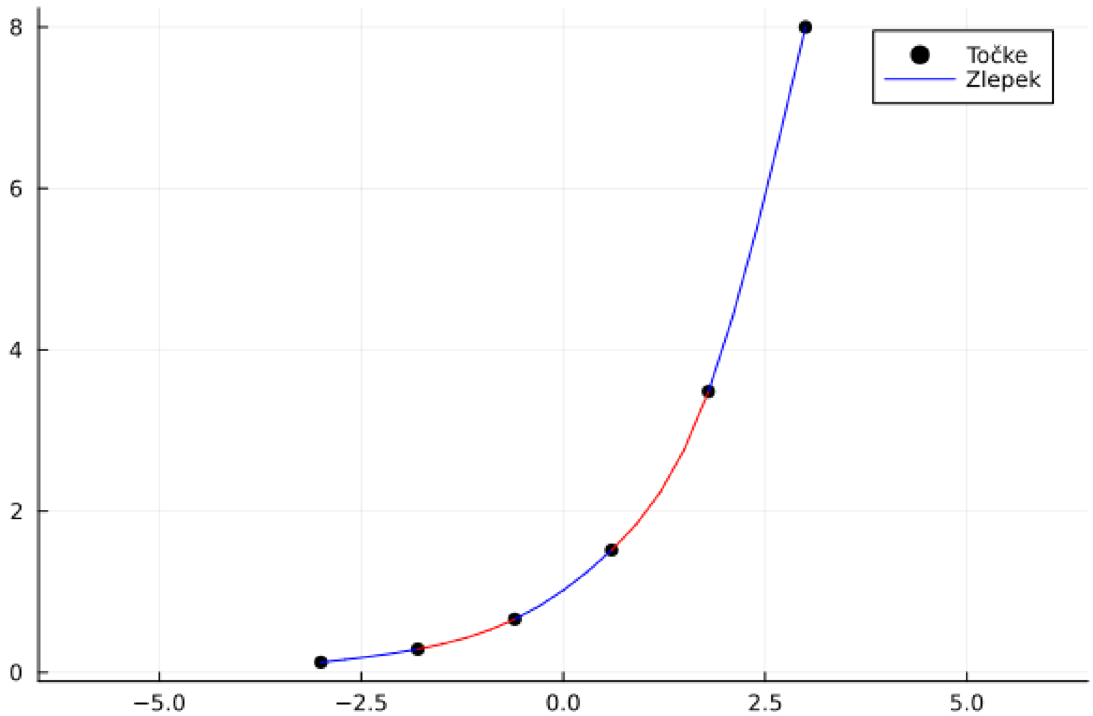
Funkcijo `vrednost(Z, x)` implementiramo tako, da najdemo interval, v katerem se nahaja točka `x` in nato uporabimo formulo za izračun vrednosti zlepka v točki `x` glede na izračunane koeficiente.

[ ]:
```julia
x = [a for a in range(0, 2pi, length=5)]
y = sin.(x)
zlepek = interpoliraj(x, y)
println("Izracun v tocki x=4.5 :", vrednost(zlepek, 2.3))
println("Pravilna vrednost v tocki x=4.5 :", sin(2.3))
```

```
Izracun v tocki x=4.5 :0.726763584183818
Pravilna vrednost v tocki x=4.5 :0.7457052121767203
```

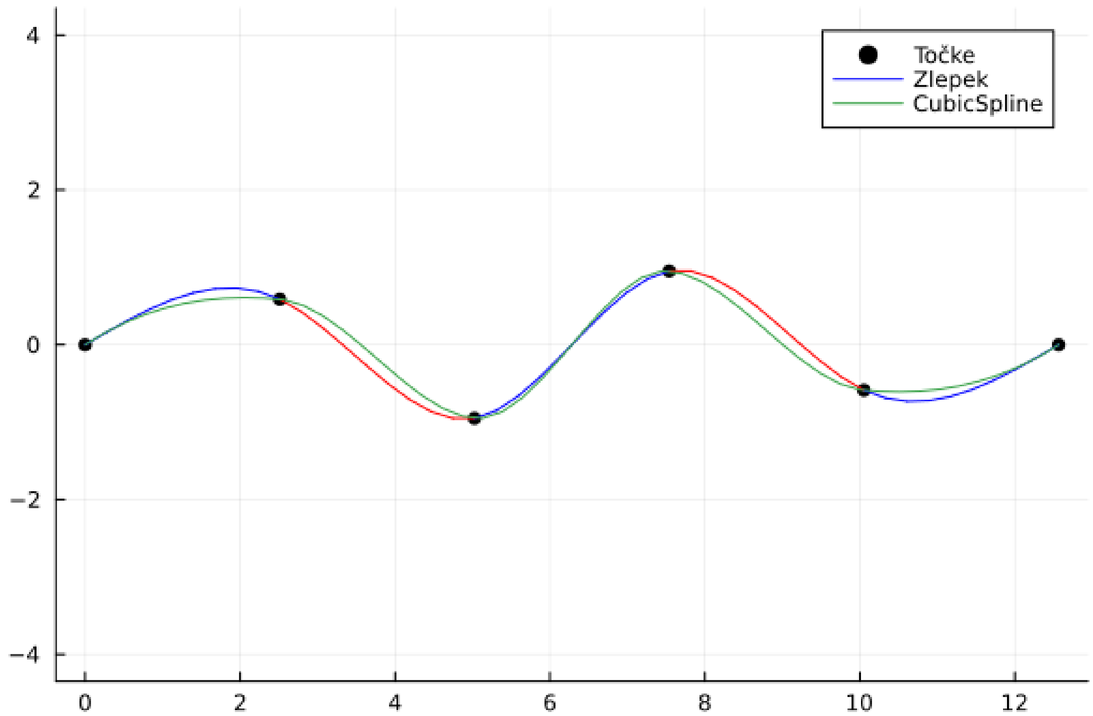
Funkcijo `plotZlepek(Z)` implementiramo tako, da za vsak segment zlepka izračunamo vrednosti v želenem številu točk na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ in jih nato narišemo z rdečo ali modro barvo.

[ ]:
```julia
x = [a for a in range(-3, 3, length=6)]
y = 2 .^ x
zlepek = interpoliraj(x, y)
plotZlepek(zlepek, 5)
```



[ ]:

```
# Primer primerjave implementiranega zlepka s knjiznico CubicSplines
# za instalacijo: using Pkg; Pkg.add("CubicSplines")

import Random
Random.seed!(1234)

xdata = [x for x in range(0,stop=4pi,length=6)]
ydata = sin.(xdata)

zlepek = interpoliraj(xdata, ydata)


using CubicSplines
spline = CubicSpline(xdata, ydata)
xs = range(xdata[1], stop=xdata[end], length=50)
ys = spline[xs]

plotZlepek(zlepek)
plot!(xs, ys, label="CubicSpline")
```




```
[ ]: # Testiramo pravilnost implementacije
     a = include("runtests.jl")
```

```
Test Summary:                           | Pass

Total  Time
Testiranje naravnega kubicnega zlepka |    4      4

0.2s
  Testi funkcije interpoliraj           |    1      1

0.1s
  Testi funkcije vrednost               |    3      3

0.1s

Test.DefaultTestSet("Testiranje naravnega kubicnega zlepka", Any[Test.
↪DefaultTestSet("Testi funkcije interpoliraj", Any[], 1, false, false, true, 1.
↪713699524136e9, 1.713699524208e9, false, "e:\\git\\NM-Spline\\runtests.jl"),␣
↪Test.DefaultTestSet("Testi funkcije vrednost", Any[], 3, false, false, true, 1.
↪713699524208e9, 1.713699524299e9, false, "e:\\git\\NM-Spline\\runtests.jl")],␣
↪0, false, true, true, 1.713699524136e9, 1.7136995243e9, false, "e:
↪\\git\\NM-Spline\\runtests.jl")
```