# Poročilo 2. domače naloge

Nejc Hirci, 63180335

9. 7. 2024

## 1 Porazdelitvena funkcija normalne slučajne spremenljivke

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna vrednosti porazdelitvene funkcije za standardno normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko $X \sim N(0,1)$. Porazdelitvena funkcija je definirana kot:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ker gre v zgornjem primeru za določen integral ne neomejenem intervalu $(-\infty, x]$, ga moramo za uporabo numeričnih metod najprej omejiti, ali pa preoblikovati v integral na končnem intervalu. V primeru porazdelitvene funkcije normalne slučajne spremenljivke že obstaja povezava s funkcijo napake (error function), ki je definirana kot:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$$

Povezava med porazdelitveno funkcijo in funkcijo napake je naslednja:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

V svoji implementaciji bom uporabil Rombergovo metodo za računanje integralov. Rombergova metoda računa vrednost integrala oblike $\int_a^b f(x)dx$ po naslednjem algoritmu:

$$h_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad R(0,0) = h_1(f(a) + f(b))$$

$$R(n,0) = \frac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k-1)h_n)$$

$$R(n,m) = R(n,m-1) + \frac{1}{4^m - 1}(R(n,m-1) - R(n-1,m-1))$$

Red napake Rombergove metode za $R(n,m)$ je enak $O(h_n^{2m+2})$.

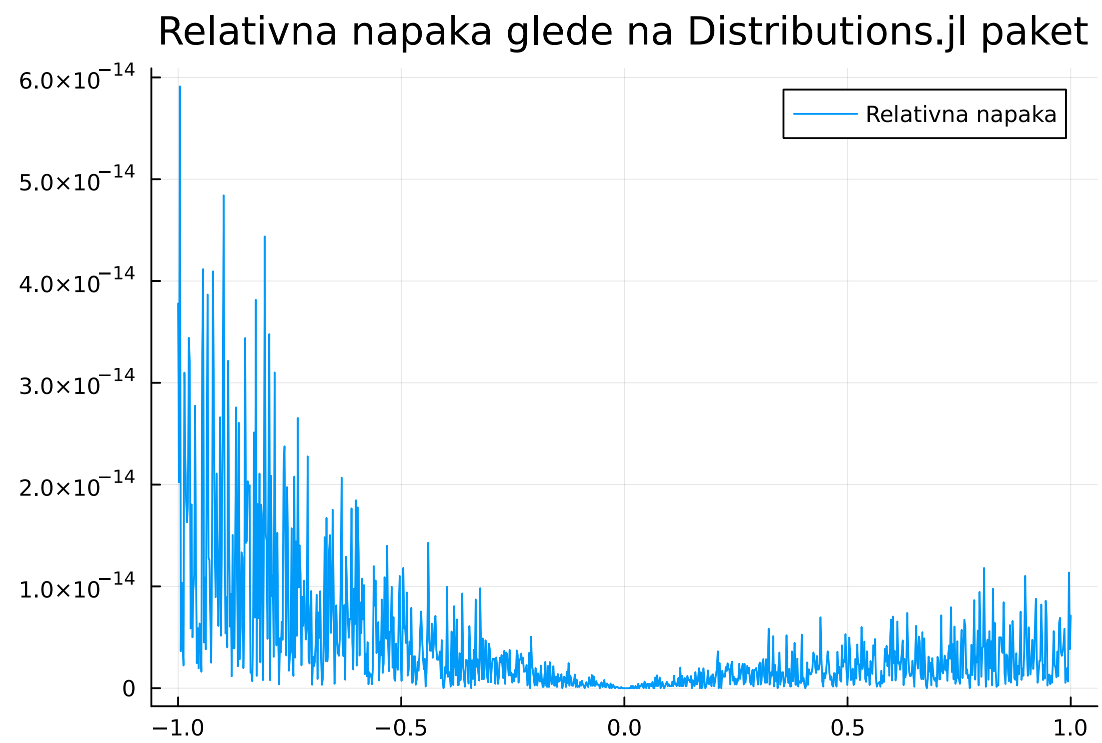
[49]:
```julia
# Dodajanje implementacije v Jupyter notebook
include("../src/main.jl");
```

[50]:
```
# Testiranje implementacije izracuna porazdelitvene funkcije normalne slucajne␣
 ↪spremenljivke
include("../tests/runtests_part1.jl");
```

```
Test Summary:                                                    |
Pass  Total  Time
Testiranje porazdelitvene funkcije normalne porazdelitve |  104
104  0.0s
  s tabeliranimi vrednostmi                                      |    4
4  0.0s
  z uporabo paketa Distributions.jl                              |  100
100  0.0s
```

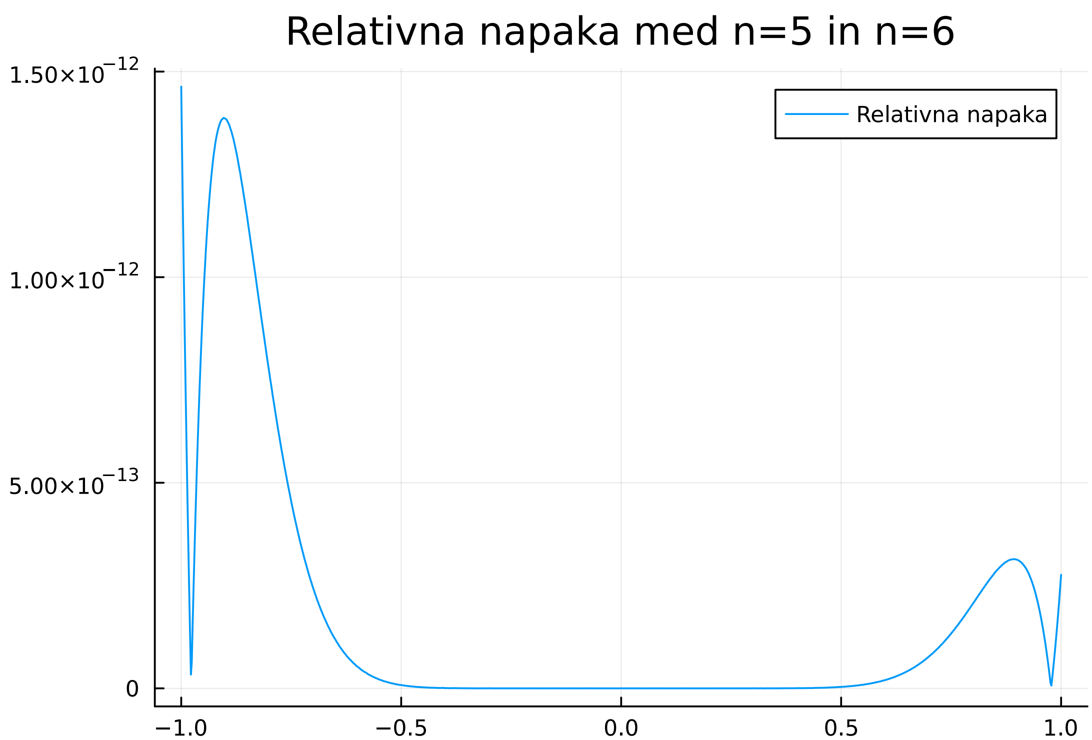
[51]:
```
using Plots, Distributions

x_arr = range(-1.0, 1.0, length=1000)
y_arr = gaussian_cdf.(x_arr, 20, 1e-20, true)
acc_y = cdf.(Normal(), x_arr)
rel_diff = [abs(y_arr[i] - acc_y[i]) / abs(acc_y[i]) for i in 1:length(x_arr)]
plot(x_arr, rel_diff, title="Relativna napaka glede na Distributions.jl paket",␣
 ↪legend=:topright, label="Relativna napaka", dpi=300)
```



[52]:
```
x_arr = range(-1, 1, length=1000)

# Izris grafa relativne napake z uporabo različnega števila korakov
y_arr_low = gaussian_cdf.(x_arr, 5, 1e-10, true)
y_arr_high = gaussian_cdf.(x_arr, 6, 1e-10, true)
rel_dif = [abs(y_arr_low[i] - y_arr_high[i]) / abs(y_arr_high[i]) for i in 1:length(x_arr)]
plot(x_arr, rel_dif, title="Relativna napaka med n=5 in n=6", legend=:topright, label="Relativna napaka", dpi=300)
```




## 2 Ploščina Hipotrohoide

Izračunajmo ploščino območja, ki ga omejuje hipotrohoida podana parametrično z enačbama:

$$x(t) = (a+b)cos(t) + bcos(\frac{a+b}{b}t)y(t) = (a+b)sin(t) + bsin(\frac{a+b}{b}t)a = 1, b = -\frac{11}{7}$$

Izhajali bomo iz formule za ploščino krivočrtnega trikotnika pod krivuljo:

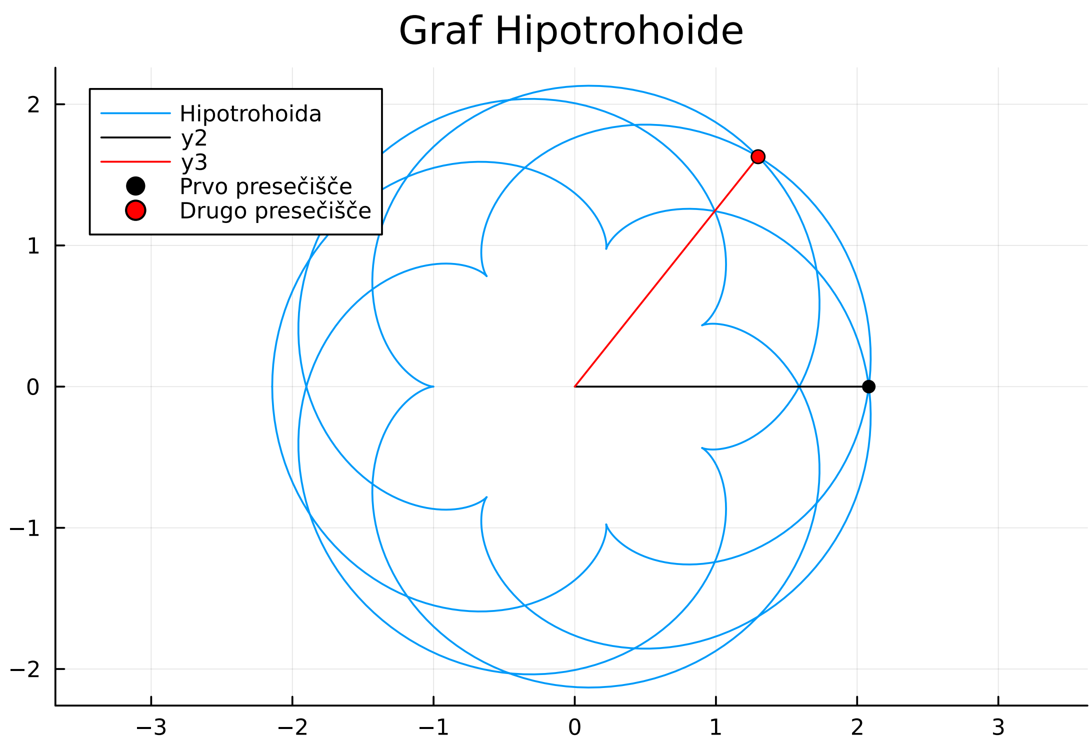
$$P = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt$$

[53]:
```
using Plots

a = 1.0
b = -11.0 / 7.0
ts = range(0, 22*pi , length=1000)
xs = [hypotrochoid(t, a, b)[1] for t in ts]
ys = [hypotrochoid(t, a, b)[2] for t in ts]

t0, t1 = hypotrochoid_intersect()
val1 = hypotrochoid(t0, a, b)
val2 = hypotrochoid(t1, a, b)

plot(xs, ys, aspect_ratio=:equal, legend=:topleft, title="Graf Hipotrohoide",␣
 ↪label="Hipotrohoida", dpi=300)
plot!([0.0, val1[1]], [0.0, val1[2]], color="black")
plot!([0.0, val2[1]], [0.0, val2[2]], color="red")
scatter!([val1[1]], [val1[2]], color="black", label="Prvo presečišče")
scatter!([val2[1]], [val2[2]], color="red", label="Drugo presečišče")
```




[54]:
```
# Izračunamo površino
hypotrochoid_area(15, 1e-10, true)
```

14.158197590966063

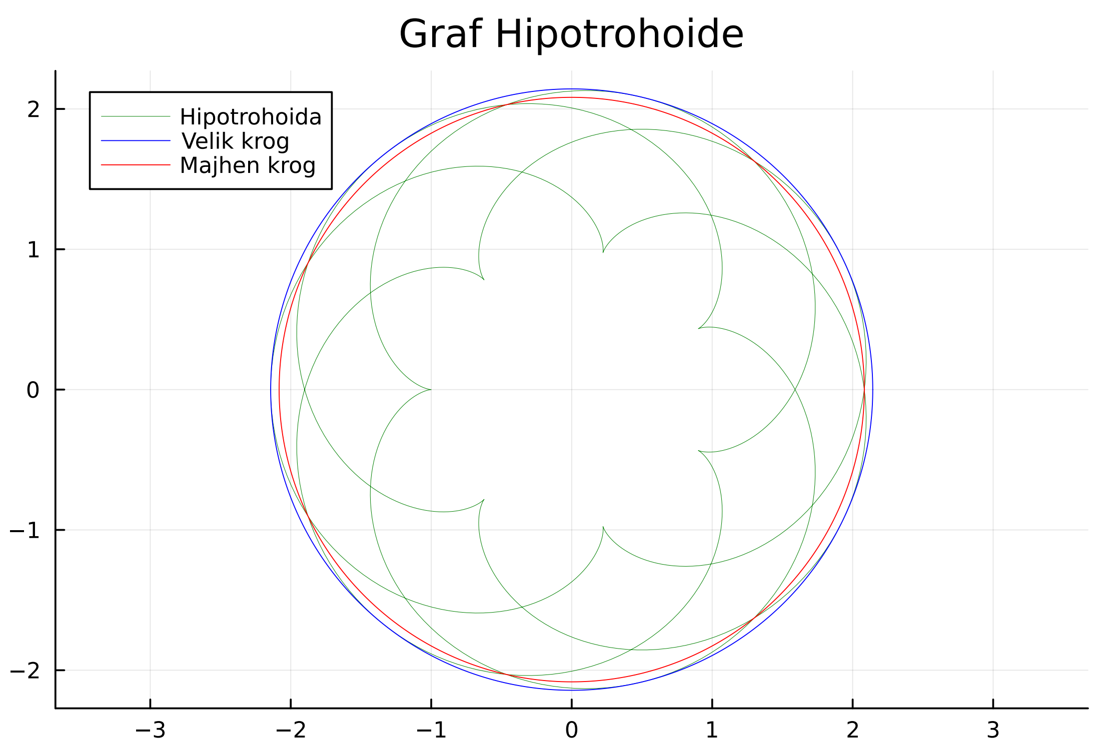
### 2.1 Obrazložitev pravilnosti rešitve

Čeprav ne moremo analitično pokazati, da gre za pravilno rešitev, lahko pravilnost slednje primerjamo z izračunanima površinama dveh krožnic, ki ju dobimo, če za njuna radija uporabimo $r_1 = |a + 2b|$ in $r_2 = x(t_0)$, kjer je $t_0$ prvo samopresečišče uporabljeno v izračunu površine hipotrohoide.

Na tak način lahko pokažemo, da more biti pravilni rezultat površine hipotrohoide ravno med površinama krožnic manjšega in večjega radija.

[55]:
```
r1 = abs(a + 2b)
r2 = hypotrochoid(t0)[1]

theta = range(0, 2*pi, length=1000)
big_circle = [(r1*cos(t), r1*sin(t)) for t in theta]
small_circle = [(r2*cos(t), r2*sin(t)) for t in theta]
plot(xs, ys, aspect_ratio=:equal, legend=:topleft, title="Graf Hipotrohoide",␣
 ↪label="Hipotrohoida", color="green", lw=0.25, dpi=300)
plot!(big_circle, color="blue", label="Velik krog", lw=0.5)
plot!(small_circle, color="red", label="Majhen krog", lw=0.5)
```




[56]:
```
a = 1.0
b = -11.0 / 7.0
t0, t1 = hypotrochoid_intersect()
```

```
big_circle_area = pi * (a+2b)^2
small_circle_area = pi * hypotrochoid(t0, a, b)[1]^2
println("Ploscina velikega kroga: ", big_circle_area)
println("Ploscina malega kroga: ", small_circle_area)
println("Ploscina hipotrohoide: ", hypotrochoid_area(15, 1e-10, true))
```

```
Ploscina velikega kroga: 14.425680552198028
Ploscina malega kroga: 13.627539223055308
Ploscina hipotrohoide: 14.158197590966063
```