UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
FINANČNA MATEMATIKA

Finančni praktikum

The power of two or more choices

Avtorja:
Nejc Kumer in Neža Lesnjak

1 Navodila

Imamo n žog in n košev. Žoge polagamo v koše na spodnje načine:

- za vsako žogo izberemo naključen koš in žogo vržemo vanj.
- za vsako žogo naključno izberemo dva izmed košev in žogo vržemo v tistega, ki smo ga do tega trenutka manjkrat zadeli.
- za vsako žogo naključno izberemo tri izmed košev in žogo vržemo v tistega, ki smo ga do tega trenutka manjkrat zadeli.
- ...

Zanima nas maksimalna zasedenost, torej število zadetkov v tisti koš, ki smo ga največkrat zadeli. Eksperimentalno analizirajte te naključne postopke.
Kaj se zgodi, če imamo n košev in $2n$, $3n$, $4n$ ... žog? V tem primeru nas zanima tudi minimalna zasedenost. Za n izbiramo velike vrednosti.

2 Opis problema

Problem n žog in n košev je v teoriji verjetnosti znan problem, ki ima veliko aplikacij tudi v drugih vedah, predvsem v računalništvu.
Delitev žog v koše je lahko popolnoma naključna ali delno naključna. V zgoraj naštetih primerih delitve gre le v prvi točki za popolnoma naključno delitev. V vseh naslednjih točkah imamo delno naključno delitev - naključno izberemo le določeno število košev in nato žogo položimo v tistega izmed izbranih, ki smo ga do tega trenutka najmanjkrat zadeli. To v angleškem jeziku poimenujemo *the power of two or more choices* - odvisno od tega, koliko košev naključno izberemo.

3 Pričakovani rezultati

Če imamo torej n košev in n žog v prvem delu naloge, ko za vsako žogo naključno izberemo koš in vržemo žogo vanj, za koš z največ žogami pričakujemo rezultat iz spodnjega izreka.

Izrek 1. *Koš z največ žogami ima* $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$ *žog z verjetnostjo* $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

V drugem delu naloge, torej v primeru, ko naključno izberemo d košev (in $d \geq 2$), ter žogo položimo v bolj praznega od njih, pa bomo pričakovali spodnji rezultat.

Izrek 2. *Koš z največ žogami ima* $\frac{\log \log n}{\log d} + O(1)$ *žog z verjetnostjo blizu 1.*

Rezulata iz slednjega izreka je skoraj eksponentno manjši kot rezultat iz prvega izreka za popolnoma naključno delitev žog v koše.

V nalogi bova preverila, kako se rezultati maksimalne zasedenosti spreminjajo, če žoge razporejamo na različne, zgoraj omenjene načine in kako, če imamo n košev in n, $2n$, $3n$, ... žog.

4 Načrt za nadaljnje delo

V nadaljevanju bova za reševanje problema uporabila programski jezik *Python* ali *R*. Pripravila bova program in ga z eksperimentiranjem preizkusila na konkretnih podatkih. Zanimalo naju bo, koliko bodo rezultati eksperimentov odstopali od predvidenih rezultatov glede na zgornja izreka.