UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
FINANČNA MATEMATIKA

Finančni praktikum

The power of two or more choices

Avtorja:
Nejc Kumer in Neža Lesnjak

Kazalo

1 Navodila

Imamo n žog in n košev. Žoge polagamo v koše na spodnje načine:

- za vsako žogo izberemo naključen koš in žogo vržemo vanj.
- za vsako žogo naključno izberemo dva izmed košev in žogo vržemo v tistega, ki smo ga do tega trenutka manjkrat zadeli.
- za vsako žogo naključno izberemo tri izmed košev in žogo vržemo v tistega, ki smo ga do tega trenutka manjkrat zadeli.
- ...

Zanima nas maksimalna zasedenost, torej število zadetkov v tisti koš, ki smo ga največkrat zadeli. Eksperimentalno analizirajte te naključne postopke.
Kaj se zgodi, če imamo n košev in $2n$, $3n$, $4n$ ... žog? V tem primeru nas zanima tudi minimalna zasedenost. Za n izbiramo velike vrednosti.

2 Opis problema

Problem n žog in n košev je v teoriji verjetnosti znan problem, ki ima veliko aplikacij tudi v drugih vedah, predvsem v računalništvu.
Delitev žog v koše je lahko popolnoma naključna ali delno naključna. V zgoraj naštetih primerih delitve gre le v prvi točki za popolnoma naključno delitev. V vseh naslednjih točkah imamo delno naključno delitev - naključno izberemo le določeno število košev in nato žogo položimo v tistega izmed izbranih, ki smo ga do tega trenutka najmanjkrat zadeli. To v angleškem jeziku poimenujemo *the power of two or more choices* - odvisno od tega, koliko košev naključno izberemo.

3 Pričakovani rezultati

Če imamo torej n košev in n žog v prvem delu naloge, ko za vsako žogo naključno izberemo koš in vržemo žogo vanj, za koš z največ žogami pričakujemo rezultat iz spodnjega izreka.

Izrek 1. *Koš z največ žogami ima* $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$ *žog z verjetnostjo* $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

V drugem delu naloge, torej v primeru, ko naključno izberemo d košev (in $d \geq 2$), ter žogo položimo v bolj praznega od njih, pa bomo pričakovali spodnji rezultat.

Izrek 2. *Koš z največ žogami ima* $\frac{\log \log n}{\log d} + O(1)$ *žog z verjetnostjo blizu 1.*

Rezulata iz slednjega izreka je skoraj eksponentno manjši kot rezultat iz prvega izreka za popolnoma naključno delitev žog v koše.

V nalogi bova preverila, kako se rezultati maksimalne zasedenosti spreminjajo, če žoge razporejamo na različne, zgoraj omenjene načine in kako, če imamo n košev in n, $2n$, $3n$, ... žog.

4 Programiranje rešitev

Najprej sva pripravila funkcijo, ki kot argumente sprejme število žog n, število košev N, ter število d, ki pove, med koliko koši izbiramo. Kot argument prejme tudi *stevilo ponovitev*, iz katerega se nato izračuna povprečen rezultat.

Funkcija beleži skupen čas trajanja.

S pomočjo ukaza *random* za vsako izmed žog izbere naključnih d košev. Nato s pomočjo funkcije *argmin* - ki sva jo definirala tako, da iz seznama košev določi tisto mesto na seznamu, na katerem je koš, v katerem je najmanj žog - določimo, v katerega izmed d košev bomo vrgli žogo.

Rezultati maksimalne zasedenosti iz vsake ponovitve se beležijo in na koncu se izračuna povprečno največje število žog v najbolj zasedenem košu. Poleg tega funkcija vedno izračuna še analitičen rezultat, ki določa spodnjo mejo zasedenosti.

Funkcija poleg zgoraj omenjenega povprečnega in analitičnega rezultata vrne kot rezultat tudi čas trajanja izvedbe posamezne ponovitve.

```
def najvecje_stevilo_zog_v_kosu(N,n,d,stevilo_ponovitev):
    max_zasedenosti = []
    kosi = range(N)
    start = time.time()
    for ponovitev in range(stevilo_ponovitev):
        zoge = [0] * N
        for i in range(n):
            kateri = random.sample(kosi, d)
            koliko = [zoge[j] + (random.randint(0, 25) / 100)
                      for j in kateri]
            k = argmin(koliko)
            zoge[kateri[k]] += 1
       max_zasedenosti.append(max(zoge))
    end = time.time()
    avg = sum(max_zasedenosti)/len(max_zasedenosti)
    if d == 1:
        analiticno = log(n)/log(log(n))
    else:
        analiticno = log(log(n))/log(d)
    return avg, analiticno, end-start
```

Nato pa sva definirala še funkcijo:

```
def izvedi_funkcijo(Poskusi, N, n, d, stevilo_ponovitev):
    print("izvedi_funkcijo(%d, %d, %d, %d, %d)" %
                    (Poskusi, N, n, d, stevilo_ponovitev))
    ime_datoteke = "najvecja_zasedenost_%d_%d_%d.csv" % (N, n, d)
    with open(ime_datoteke, "w") as f:
        wr = csv.writer(f)
        wr.writerow(["avg", "analiticno", "cas"])
        # Ce je Poskusi == 0 izvajamo do prekinitve, sicer omejeno
        i = 0
        if Poskusi == 0:
            Poskusi = -1
        while i != Poskusi:
            avg, analiticno, cas =
                najvecje_stevilo_zog_v_kosu(N, n, d, stevilo_ponovitev)
            avg = round(avg, 4)
            analiticno = round(analiticno, 4)
            wr.writerow([avg, analiticno, cas])
            f.flush()
            i += 1
```

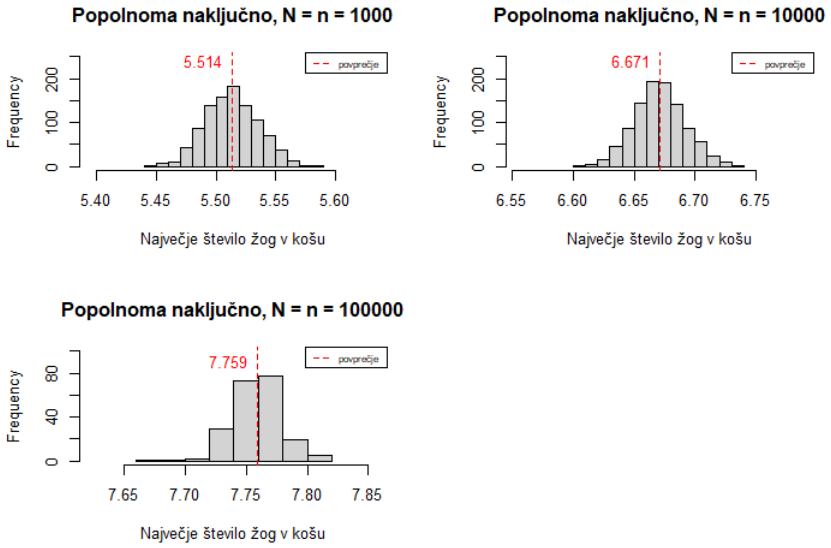
Ta funkcija kot argument sprejme *Poskusi* - število poskusov, poleg tega pa še enake argumente kot prva funkcija. Ta funkcija ustvari *csv* datoteko, v katero nato po vrsticah zapisuje rezultate prve funkcije, ki jo pokliče tolikokrat, kot določimo v argumentu *Poskusi*.

5 Analiza rezultatov

5.1 Popolnoma naključna delitev žog in $N = n$

Rezultati popolno naključnega razporejanja žog, pri enakem številu košev in žog. Predstavljeni so rezultati za $n = N = 1000$, $n = N = 10000$ in $n = N = 100000$.

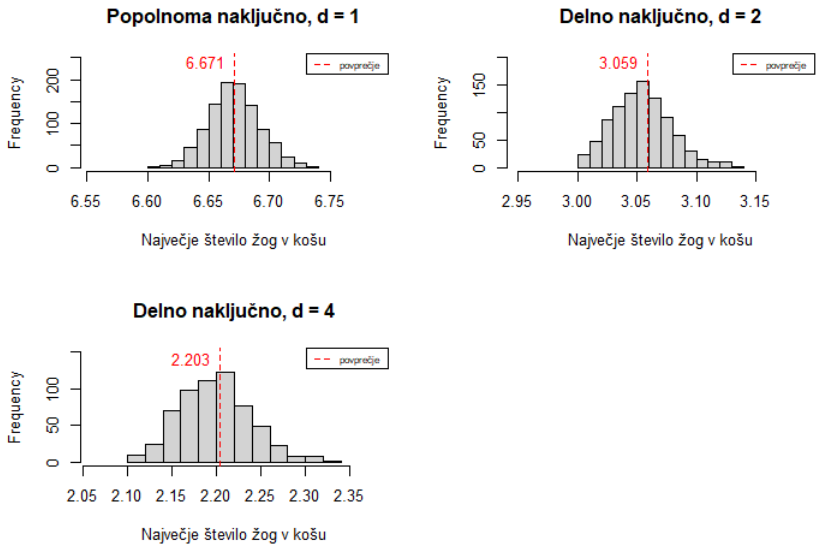
Z rdečo črto so označene povprečne vrednosti, in iz njih sklepava, da za različne n (ki so oblike 10^x) velja, da je največje število žog v košu približno enako $1,1(2 + log(n))$.



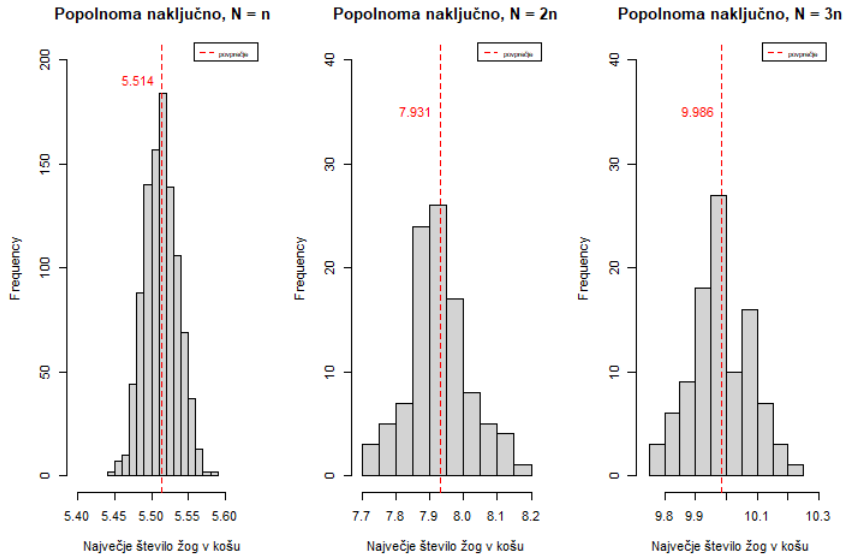
5.2 Delno naključna delitev žog in $N = n$

Spodaj so prikazani rezultati delno naključne delitve za $d = 2$ in $d = 4$, pri čemer imamo $N = n = 10000$.

Za primerjavo je dodana tudi popolnoma naključna delitev žog, torej za $d = 1$.



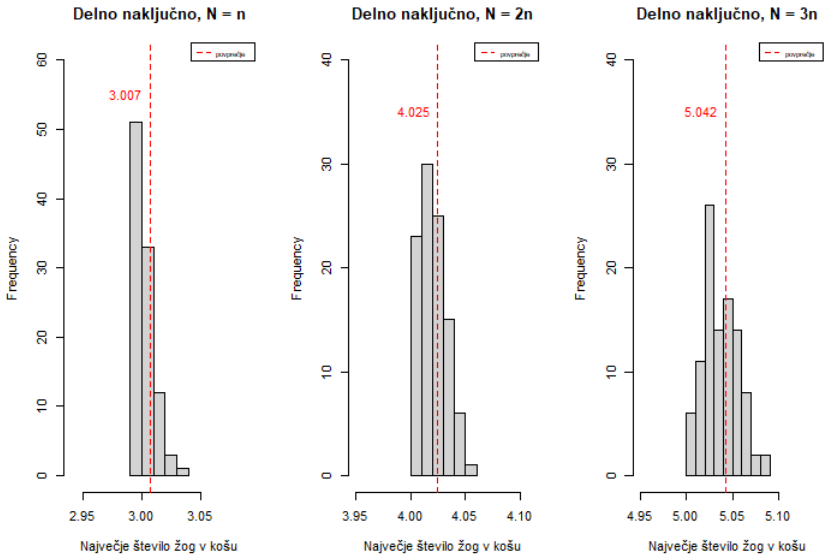
5.3 n košev in n, $2n$, $3n$ žog



Najprej imamo zgoraj rezultate, ko žoge razporejamo popolnoma naključno. Predstavljeni so primeri, ko imamo 1000 košev in 1000, 2000 ter 3000 žog.

Spodaj pa imamo primere za 1000 košev in 1000, 2000 ter 3000 žog, pri čemer žoge razporejamo delno naključno z $d = 2$.

Sklepava, da v primerih, ko velja $d = 2$ in $n = 1000$, za največje število žog v košu približno velja vrednost $log(n) + \frac{N}{n} - 1$.



5.4 Časovna odvisnost

V spodnjih tabelah je prikazan povprečni čas, ki je potreben za izvedbo ene ponovitve poskusa za določene podatke.

Pri prvi tabeli smo primerjali časovno zahtevnost algoritma za različno število naključno izbranih košev - različne d. Ugotovili smo, da z večanjem naključnega števila izbranih košev linearno narašča tudi čas, ki je potreben za izvedbo našega algoritma, in sicer za vsak povečan d, se čas izvajanja algoritma podaljša za približno sekundo.

d	čas
2	6.649257
3	8.275287
4	9.931728
5	11.616240

Rezultati spodnje tabele, kjer imamo povprečno časovno zahtevnost algoritma glede na število vseh košev in žog v poskusu, so precej podobni rezultatom iz prve tabele - spet se pojavi linearno naraščanje.

Opazimo lahko, da se za vsakih 1000 novih obravnavanih košev, izvajanje našega algoritma podaljša za približno 5 sekund.

št. košev/žog	čas
1000	5.00000
10000	50.07592
100000	498.73500

6 Literatura

https://en.wikipedia.org/wiki/Balls_into_bins_problem