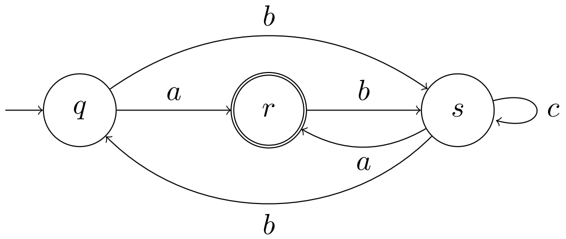
Teoreticka informatika (TIN) – 2022/2023
Úkol 1

Domink Nejedlý (xnejed09)

1. Uvažte NKA M_3 nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ z obrázku 1:



Obrázek 1: NKA M_3

(a) Řešením rovnic nad regulárními výrazy sestavte k tomuto automatu ekvivalentní regulární výraz.

Řešení: Z NKA M_3 vyjádříme následující soustavu nad regulárními výrazy:

$$X_q = aX_r + bX_s \tag{1}$$
$$X_r = \varepsilon + bX_s \tag{2}$$
$$X_s = bX_q + aX_r + cX_s \tag{3}$$

Výraz pro X_q z (1) dosadíme do (3):

$$X_r = \varepsilon + bX_s \tag{4}$$
$$\begin{aligned} X_s &= b(aX_r + bX_s) + aX_r + cX_s = \\ &= baX_r + bbX_s + aX_r + cX_s = \\ &= (ba + a)X_r + (bb + c)X_s \end{aligned} \tag{5}$$

Výraz pro X_r z (4) dosadíme do (5):

$$\begin{aligned} X_s &= (ba + a)(\varepsilon + bX_s) + (bb + c)X_s = \\ &= ba + babX_s + a + abX_s + bbX_s + cX_s = \\ &= (bab + ab + bb + c)X_s + ba + a \end{aligned} \tag{6}$$

Z (6) vyjádříme X_s pomocí řešení rovnice $X = pX + q$:

$$X_s = (bab + ab + bb + c)^*(ba + a) \tag{7}$$

Výraz pro X_s ze (7) dosadíme do (2):

$$X_r = \varepsilon + b(bab + ab + bb + c)^*(ba + a) \tag{8}$$

Dosazením výrazů X_s ze (7) a X_r z (8) do (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} X_q &= a(\varepsilon + b(bab + ab + bb + c)^*(ba + a)) + b(bab + ab + bb + c)^*(ba + a) = \\ &= a + ab(bab + ab + bb + c)^*(ba + a) + b(bab + ab + bb + c)^*(ba + a) = \\ &= a + (ab + b)(bab + ab + bb + c)^*(ba + a) \end{aligned} \tag{9}$$

Jazyk $L(M_3)$ popisuje regulární výraz, který je řešením výše uvedené soustavy rovnic pro proměnnou X_q.

(b) Sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$ s konečným indexem takovou, že $L(M_3)$ je sjednocením některých tříd rozkladu $\{a,b,c\}^*/_\sim$.

Řešení: Jelikož je NKA M_3 rovněž DKA, lze třídy rozkladu získat sestavením jazyků přístupových řetězců v jednotlivých stavech M_3.

$$\begin{aligned}L^{-1}(q) &= \{\varepsilon\} \cup \{ab,b\}\{ab,bb,bab,c\}^*\{b\}\\ L^{-1}(r) &= \{a\} \cup \{ab,b\}\{ab,bb,bab,c\}^*\{a,ba\}\\ L^{-1}(s) &= \{ab,b\}\{ab,bb,bab,c\}^*\end{aligned}$$

Protože však DKA M_3 není úplně definovaný, je nutné doplnit třídu pro stav, jež by přijímal všechny řetězce, které by způsobily zaseknutí DKA M_3.

$$\begin{aligned}L^{-1}_{SINK} &= \{a,b,c\}^* \setminus (L^{-1}(q) \cup L^{-1}(r) \cup L^{-1}(s)) =\\ &= (\{aa,ac,c\} \cup \{ab,b\}\{ab,bb,bab,c\}^*\{aa,ac,baa,bac,bc\})\{a,b,c\}^*\end{aligned}$$

Relaci pravé kongruencie $\sim$ lze poté definovat následovně:

$$\begin{aligned}u \sim v \iff & (u \in L^{-1}(q) \wedge v \in L^{-1}(q)) \vee\\ & (u \in L^{-1}(r) \wedge v \in L^{-1}(r)) \vee\\ & (u \in L^{-1}(s) \wedge v \in L^{-1}(s)) \vee\\ & (u \in L^{-1}_{SINK} \wedge v \in L^{-1}_{SINK})\end{aligned}$$

Rozklad $\{a,b,c\}^*/_\sim$ je tedy následující:

$$\{a,b,c\}^*/_\sim = \{L^{-1}(q), L^{-1}(r), L^{-1}(s), L^{-1}_{SINK}\}$$

$L(M_3)$ je roven ekvivalenční třídě $L^{-1}(r)$, jelikož r je jediným koncovým stavem M_3.

$$L(M_3) = L^{-1}(r) = \{a\} \cup \{ab,b\}\{ab,bb,bab,c\}^*\{a,ba\}$$

2. Mějme jazyk L_1 nad abecedou $\{a,b,c\}$ definovaný následovně:

$$L_1 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \wedge \#_a(w) > \#_b(w)\}$$

Sestrojte jazyk L_2 takový, že $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$ a zároveň $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$. Dále rozhodněte a dokažte, zda L_2 je, či není, regulární. Pro důkaz regularity sestrojte příslušný konečný automat, nebo gramatiku. Pro důkaz neregularity použijte pumping lemma.

Dokažte, že jazyk L_1 není regulární.

Řešení:

$$L_2 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \wedge \#_a(w) \leq \#_b(w)\}$$

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \in \mathcal{L}_3 \qquad\qquad L_1 \cup L_2 = \{a,b,c\}^* \in \mathcal{L}_3$$

- $L_2 \notin \mathcal{L}_3$

Důkaz. Předpokládejme, že $L_2 \in \mathcal{L}_3$. Potom z pumping lemmatu plyne, že $\exists k > 0 : \forall w \in L_2 : |w| \geq k \Rightarrow \exists x,y,z \in \{a,b,c\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_2$. Uvažme libovolné k splňující výše uvedenou podmínku. Zvolme slovo $w = a^kb^k \in L_2$. Zřejmě $|w| = 2k \geq k$. Uvažme libovolné $x,y,z \in \{a,b,c\}^*$ takové, že $w = a^kb^k = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_2$. Je zřejmé, že $y = a^l$, kde $1 \leq l \leq k$. Pak ale pro všechna $i > 1$ platí, že $xy^iz \notin L_2$, jelikož $\#_a(xy^iz) > \#_b(xy^iz)$. To je ve sporu s pumping lemmatem pro regulární jazyky a počáteční předpoklad je tedy vyvrácen. Z toho důvodu $L_2 \notin \mathcal{L}_3$. $\square$

- $L_1 \notin \mathcal{L}_3$

  Důkaz. Předpokládejme, že $L_1 \in \mathcal{L}_3$. Potom z pumping lemmatu plyne, že $\exists k > 0 : \forall w \in L_1 : |w| \geq k \Rightarrow \exists x, y, z \in \{a, b, c\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_1$. Uvažme libovolné k splňující výše uvedenou podmínku. Zvolme slovo $w = a^{k+1}b^k \in L_1$. Zřejmě $|w| = 2k + 1 \geq k$. Uvažme libovolné $x, y, z \in \{a, b, c\}^*$ takové, že $w = a^{k+1}b^k = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_1$. Je zřejmé, že $y = a^l$, kde $1 \leq l \leq k$. Pak ale pro $i = 0$ platí, že $xy^0z \notin L_1$, jelikož $\#_a(xy^0z) \leq \#_b(xy^0z)$. To je ve sporu s pumping lemmatem pro regulární jazyky a počáteční předpoklad je tedy vyvrácen. Z toho důvodu $L_1 \notin \mathcal{L}_3$.

  Alternativně lze vyjít z uzávěrových vlastností třídy regulárních jazyků. Víme, že $\mathcal{L}_3$ je uzavřena na doplněk. Zřejmě $L_2 = co\text{–}L_1$. Jelikož však $co\text{–}L_1 \notin \mathcal{L}_3$, pak také $L_1 \notin \mathcal{L}_3$. $\square$

3. Uvažujme jazyk L_s, jehož slova jsou n-tice binárních čísel[1] oddělené znakem #. Konkrétněji, jazyk L_s obsahuje slova tvaru $w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\#$, kde $w_1 \ldots w_n \in \{1, 0\}^+$ jsou binární čísla. Tato slova odpovídají regulárnímu výrazu $R = ((0 + 1)(0 + 1)^*\#)^*$. Uvažujme dále omezení, že alespoň jedno číslo ve slově $w_1\#w_2\#\ldots\#w_n\#$ je sudé—tedy jeho poslední znak je 0. Formálně zapsáno:

$$L_s = \{w \in \{0, 1, \#\}^* \mid w \in \mathcal{L}(R) \wedge w \in \mathcal{L}((0 + 1 + \#)^*0\#(0 + 1 + \#)^*)\}$$

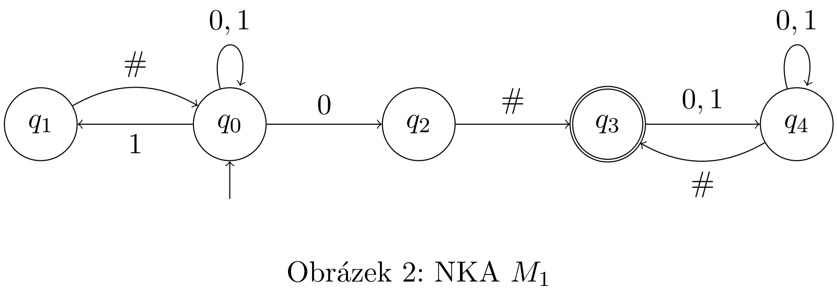
   (a) Sestrojte nedeterministický konečný automat M_1 přijímající jazyk L_s (není nutné použít algoritmický postup).

   Řešení:

$$\text{NKA } M_1 = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1, \#\}, \delta, q_0, \{q_3\}\}$$

   δ:

$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_2\}$	$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$	$\delta(q_0, \#) = \varnothing$
$\delta(q_1, 0) = \varnothing$	$\delta(q_1, 1) = \varnothing$	$\delta(q_1, \#) = \{q_0\}$
$\delta(q_2, 0) = \varnothing$	$\delta(q_2, 1) = \varnothing$	$\delta(q_2, \#) = \{q_3\}$
$\delta(q_3, 0) = \{q_4\}$	$\delta(q_3, 1) = \{q_4\}$	$\delta(q_3, \#) = \varnothing$
$\delta(q_4, 0) = \{q_4\}$	$\delta(q_4, 1) = \{q_4\}$	$\delta(q_4, \#) = \{q_3\}$



Obrázek 2: NKA M_1

[1] Jako binární číslo budeme chápat libovoný řetězec nad abecedou $\{0, 1\}$. Číslo tak může obsahovat počáteční nuly.

(b) Automat M_1 převeďte algoritmicky na deterministický konečný automat M_2.

Řešení:

		0	1	#
počáteční stav:	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\varnothing$
	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_3\}$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
koncový stav:	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\varnothing$
	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_3\}$
	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

$$\text{DKA } M_2 = \{\{\{q_0\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_3\}, \{q_4\}\}, \{0, 1, \#\}, \delta', \{q_0\}, \{\{q_3\}\}\}$$

δ':

$\delta'(\{q_0\}, 0) = \{q_0, q_2\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_0\}, \#) = \varnothing$

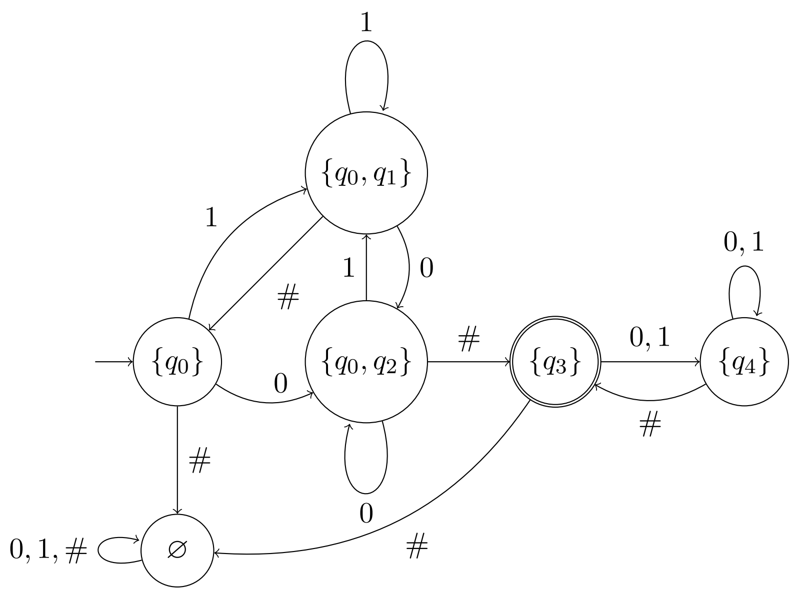
$\delta'(\{q_0, q_2\}, 0) = \{q_0, q_2\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_0, q_2\}, 1) = \{q_0, q_1\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_0, q_2\}, \#) = \{q_3\}$

$\delta'(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_2\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_0, q_1\}, \#) = \{q_0\}$

$\delta'(\{q_3\}, 0) = \{q_4\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_3\}, 1) = \{q_4\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_3\}, \#) = \varnothing$

$\delta'(\{q_4\}, 0) = \{q_4\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_4\}, 1) = \{q_4\}$ $\quad$ $\delta'(\{q_4\}, \#) = \{q_3\}$

$\delta'(\varnothing, 0) = \varnothing$ $\quad$ $\delta'(\varnothing, 1) = \varnothing$ $\quad$ $\delta'(\varnothing, \#) = \varnothing$



Obrázek 3: DKA M_2