

# **Введение в численные методы**

**Практическая работа**

**Вариант №5.2**

*Григорьев Денис Андреевич, 213 группа*

2022

## Математическая постановка задачи

Дана система вида:

$$-\gamma * y_{i-1} + 2 * y_i + \gamma * y_{i+1} = f_i ; i = \overline{1, N-1};$$

$$y_0 = f_0, y_N = f_N \quad \frac{1}{5} \leq \gamma \leq 1$$

Правая часть  $f_i$ , где  $i = \overline{0, N}$ , задана.

Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений и найти влияние величины  $\gamma$  на решения при фиксированном  $N$ , а также обосновать выбор метода и почему он применим.

Условие задачи:

$$\gamma = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1; N = 100, 1000;$$

$$f = \begin{cases} 0, & i = \overline{1, 29}; \\ 0.1, & i = \overline{30, 45}; \\ 0, & i = \overline{46, N}; \end{cases}$$

## Выбор метода решения и обоснование его применимости

Для решения данной задачи я выбрал метод прогонки.

Далее будет приведено его теоретическое изложение:

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений вида

$$(1) \quad A_i * y_{i-1} + C_i * y_i + B_i * y_{i+1} = F_i, i = \overline{1, N-1}.$$

с краевыми условиями  $y_0 = q_0$ ,  $y_N = q_N$ , где  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  - коэффициенты, а правые части  $F_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) вместе с  $q_0$ ,  $q_N$  даны.

Используем теперь то, что  $y_0 = q_0$ ,  $y_N = q_N$  и подставим их в уравнения. Теперь систему можно будет переписать в виде:

$$C_1 * y_1 + B_1 * y_2 = F_1 - A_1 * q_0$$

$$A_2 * y_1 + C_2 * y_2 + B_2 * y_3 = F_2$$

.....

$$A_{N-1} * y_{N-2} + C_{N-1} * y_{N-1} = F_{N-1} - B_{N-1} * q_N$$

Составим матрицу коэффициентов данной системы:

$$C_1 \quad B_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0$$

$$A_2 \quad C_2 \quad B_2 \quad \dots \quad 0 \quad 0$$

.....

$$0 \quad \dots \quad \dots \quad A_{N-2} \quad C_{N-2} \quad B_{N-2}$$

$$0 \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad A_{N-1} \quad C_{N-1}$$

Данная матрица называется трехдиагональной. Системы с трехдиагональными матрицами можно достаточно просто решить с помощью метода прогонки. Данный метод

основывается на предположении, что решения системы связаны рекуррентным соотношением:

$$y_i = \alpha_{i+1} * y_{i+1} + \beta_{i+1}, \text{ где } i = \overline{0, N-1}. \quad (2)$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  называются прогоночными коэффициентами. Теперь найдем их.

Для этого выразим из предыдущего соотношения **(2)**  $y_{i-1}$  и  $y_i$  через  $y_{i+1}$  и подставим их в исходные уравнения **(1)**:

$$y_{i-1} = \alpha_i * y_i + \beta_i = \alpha_i * (\alpha_{i+1} * y_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i,$$

$$A_i * (\alpha_i * (\alpha_{i+1} * y_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i) + C_i * (\alpha_{i+1} * y_{i+1} + \beta_{i+1}) + B_i * y_{i+1} - F_i = 0$$

Сгруппируем коэффициенты при  $y_{i+1}$ :

$$(A_i * \alpha_i * \alpha_{i+1} + C_i * \alpha_{i+1} + B_i) * y_{i+1} + A_i * \alpha_i * \beta_{i+1} + A_i * \beta_i + C_i * \beta_{i+1} - F_i = 0, \text{ где } i = \overline{1, N-1}$$

Данное равенство будет выполняться независимо от решения, если потребовать следующее:

$$A_i * \alpha_i * \alpha_{i+1} + C_i * \alpha_{i+1} + B_i = 0$$

$$A_i * \alpha_i * \beta_{i+1} + A_i * \beta_i + C_i * \beta_{i+1} - F_i = 0$$

Из этих соотношений составляем рекуррентное соотношение для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i * \alpha_i + C_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i * \beta_i}{A_i * \alpha_i + C_i} \quad (3)$$

Для выполнения краевых условий ( $y_0 = q_0$ ) достаточно положить:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = q_0$$

Далее последовательно находим остальные прогоночные коэффициенты из **(3)**. Теперь пользуемся тем, что  $y_N = q_N$  и отсюда, уже в обратном порядке, находим остальные неизвестные по формуле **(2)**.

Теперь приведем обоснование, почему данный метод применим для решения задачи. Для этого сформулируем теорему достаточного условия корректности метода прогонки.

**Теорема.** Пусть коэффициенты исходной системы **(1)** удовлетворяют неравенствам:

- 1)  $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$ , где  $i = \overline{2, N-2}$ ,
- 2)  $|C_{N-1}| > 0$ ,  $|C_1| > 0$ ,  $|A_i| > 0$ ,  $|B_i| > 0$ ,  $i = \overline{2, N-2}$
- 3)  $|C_1| \geq |B_1|$ ,  $|C_{N-1}| \geq |A_{N-1}|$ , причем хотя бы одно из неравенств 1), 3) строгое. (Т. е. матрица имеет диагональное преобладание).

Тогда метод прогонки будет применим, причем прогоночные коэффициенты будут удовлетворять неравенствам:

$$|\alpha_i| \leq 1$$

В моей задаче дано, что  $\frac{1}{5} \leq \gamma \leq 1$ . При данных значениях  $\gamma$  выполняется условие предыдущей теоремы ( $C = 2$ ,  $A = -\gamma$ ,  $B = \gamma$ ), следовательно метод прогонки применим. Также заметим, что неравенство  $|\alpha_i| \leq 1$  делает прогонку устойчивой, т. е. при вычислениях ошибка из-за округления значений не будет нарастать.

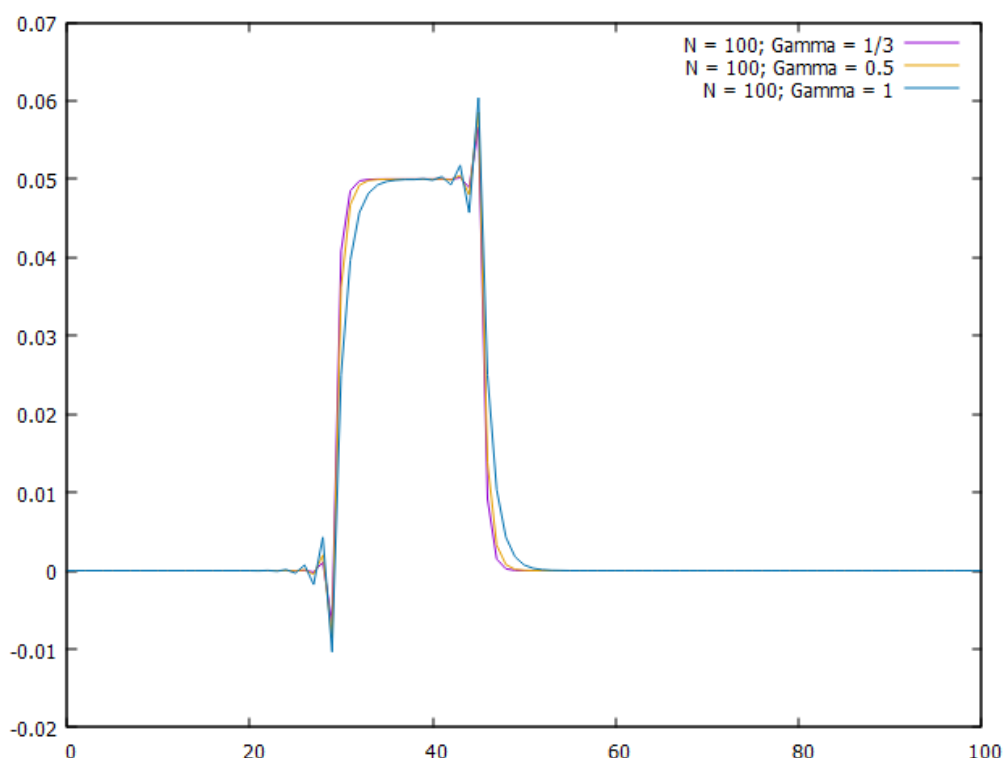
Следует отметить, что метод прогонки достаточно эффективен в области своего применения.

Например, сложность вычислений методом Гаусса будет пропорционально  $N^3$ , в то время как метод прогонки потребует лишь несколько циклов для вычислений прогоночных коэффициентов, а затем решений, следовательно, сложность вычислений будет пропорциональна  $N$ .

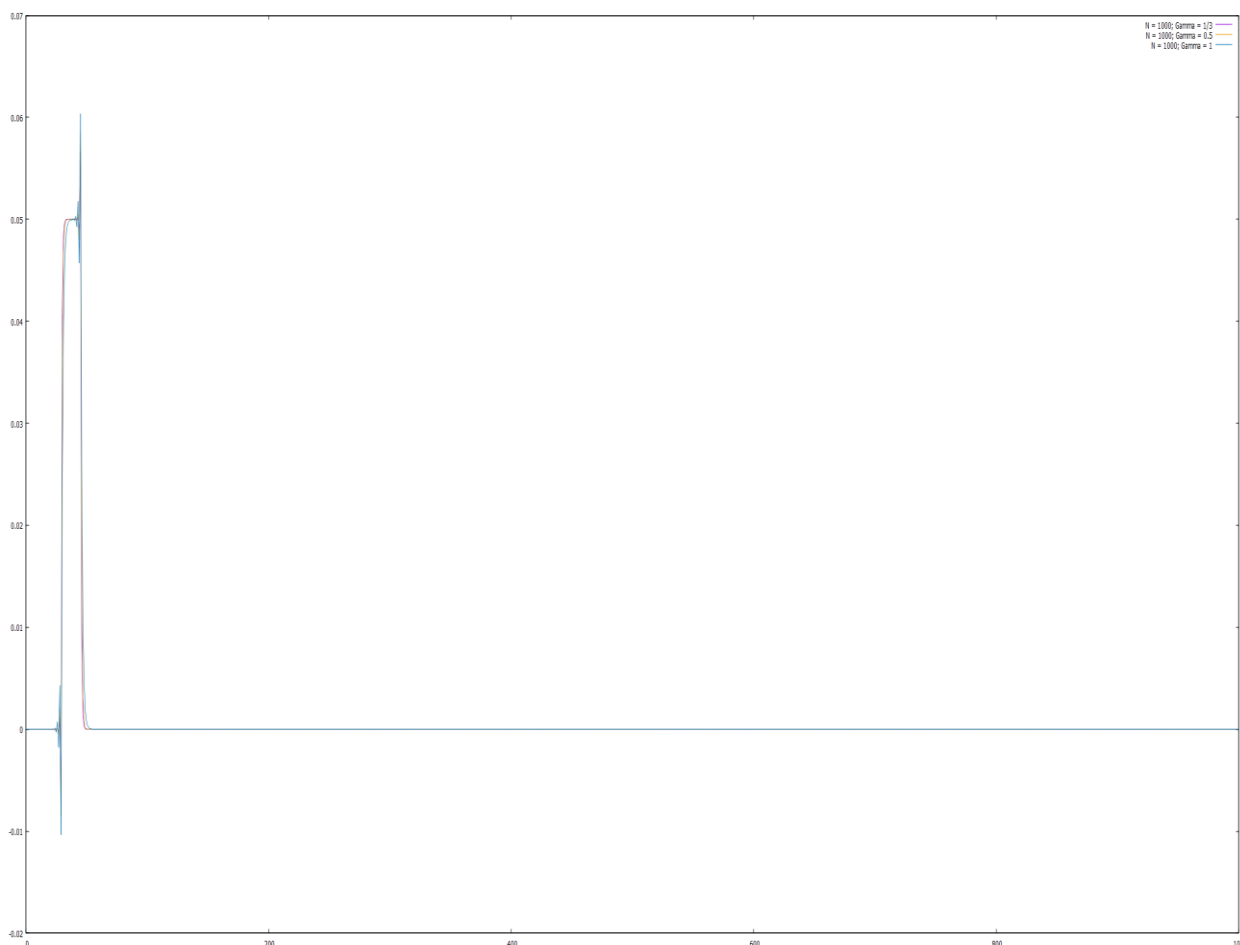
## Анализ графиков и влияния $\gamma$ на решение

На следующих изображениях будут представлены графики решений СЛАУ при фиксированном  $N$ , но при разных  $\gamma$  (линия графика для соответствующего  $\gamma$  будет выделена своим цветом и подписана). Для построения графиков использовалась программа gnuplot.

При  $N = 100$ :



При  $N = 1000$ :



При анализе графиков становится понятно, что с ростом  $\gamma$  незначительно увеличивается различие между соседними решениями (более сильные скачки значений на графике, выделенным синим цветом), но сильного влияния на решения не оказывается. Если сравнить графики для  $N = 100$  и  $N = 1000$ , то они окажутся одинаковыми при  $N$  от 0 до 100. Это происходит потому, что после 45 номера все уравнения являются однородными независимо от  $N$ .

## Программная реализация

Ниже будет представлен код программы, написанной на языке C, решающей СЛАУ (1) для различных начальных данных ( $\gamma$  и  $N$  выбираются посредством ввода с

клавиатуры), а также результаты вывода программы на экран в каждом случае:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

//глобальные массивы коэффициентов в методе прогонки, а также массив решений
double arrayOfAlpha[1001];
double arrayOfBeta[1001];
double arrayOfSolutions[1001];

double functions(int index) { //правая часть СЛАУ
    if (index >= 30 && index <= 45) {
        return 0.1;
    } else {
        return 0;
    }
}

void y(int i, int n) { //получение решений
    if (i == 0 || i == n) {
        arrayOfSolutions[i] = functions(i);
    } else {
        arrayOfSolutions[i] = (arrayOfAlpha[i + 1] * arrayOfSolutions[i + 1]
+ arrayOfBeta[i + 1]);
    }
}

void getAlpha(double gamma, int n) { //получение коэффициентов альфа
    for (int i = 0 ; i <= n - 1 ; i++) {
        if (i == 0) {
            arrayOfAlpha[i + 1] = 0;
        } else {
            arrayOfAlpha[i + 1] = (-gamma / ((-gamma) * arrayOfAlpha[ i ] +
2));
        }
    }
}

void getBetta(double gamma, int n) { //получение коэффициентов бетта
    for (int i = 0 ; i <= n - 1 ; i++) {
        if (i == 0) {
            arrayOfBeta[i + 1] = functions(0);
        } else {
            arrayOfBeta[i + 1] = ((functions(i) + gamma * arrayOfBeta[i]) /
((-gamma) * arrayOfAlpha[i] + 2));
        }
    }
}

int main() { //программа решает СЛАУ для заданных значений гамма и N
    int inp = 0;
    double gamma;
    int N;
    printf("Choose gamma: 1) 1/3, 2) 1/2, 3) 1\n"); // Выбор гамма
    scanf("%d", &inp);
    if (inp == 1){
        gamma = exp(-log(3)); // 1/3
```



```

    } else if (inp == 2) {
        gamma = 0.5; // 1/2
    } else if (inp == 3){
        gamma = 1.; // 1
    } else {
        exit(0); // неверный ввод
    }
    printf("Choose N: 1) 100, 2) 1000\n"); // Выбор N
    scanf("%d", &inp);
    if (inp == 1){
        N = 100;
    } else if (inp == 2) {
        N = 1000;
    } else {
        exit(0); // неверный ввод
    }
    printf("N = %d. Gamma = %lf \n\n", N, gamma);
    getAlpha(gamma, N); //коэффициенты, которые нужны для
    getBetta(gamma, N); //метода прогонки
    for (int k = N; k >= 0; k--){ //подсчет решений в обратном порядке
        y(k, N);
    }
    for(int k = 0 ; k <= N ; k++) { //вывод на экран
        printf("y( %d ) %.20lf\n", k, arrayOfSolutions[k]); //точность 20
знаков после запятой
    }
    return 0;
}

```

$N = 100, \gamma = 1/3$ :

```

y( 0 ) 0.00000000000000000000
y( 1 ) -0.00000000000000000000
y( 2 ) 0.00000000000000000000
y( 3 ) -0.00000000000000000000
y( 4 ) 0.00000000000000000000
y( 5 ) -0.00000000000000000000
y( 6 ) 0.00000000000000000000
y( 7 ) -0.00000000000000000003
y( 8 ) 0.000000000000000000017
y( 9 ) -0.0000000000000000000106
y( 10 ) 0.0000000000000000000655
y( 11 ) -0.00000000000000000004034
y( 12 ) 0.00000000000000000024856
y( 13 ) -0.00000000000000000153172
y( 14 ) 0.00000000000000000943890
y( 15 ) -0.00000000000000005816509
y( 16 ) 0.00000000000000035842945
y( 17 ) -0.00000000000000220874181
y( 18 ) 0.000000000001361088028
y( 19 ) -0.000000000008387402350
y( 20 ) 0.000000000051685502127
y( 21 ) -0.000000000318500415112
y( 22 ) 0.00000001962687992800
y( 23 ) -0.00000012094628371911
y( 24 ) 0.00000074530458224266
y( 25 ) -0.00000459277377717504
y( 26 ) 0.00002830194724529292
y( 27 ) -0.00017440445724893256
y( 28 ) 0.00107472869073888823
y( 29 ) -0.00662277660168226166

```

y( 30 ) 0.04081138830083246016  
y( 31 ) 0.04850889359332298534  
y( 32 ) 0.04975802674089450928  
y( 33 ) 0.04996073314795595327  
y( 34 ) 0.04999362785315879937  
y( 35 ) 0.04999896602900312514  
y( 36 ) 0.04999983167914004434  
y( 37 ) 0.04999997595416286189  
y( 38 ) 0.04999997595416286189  
y( 39 ) 0.05000012022918567944  
y( 40 ) 0.04999925457904877413  
y( 41 ) 0.05000459275489309297  
y( 42 ) 0.04997169804969023299  
y( 43 ) 0.05017440445675168392  
y( 44 ) 0.04892527130918015998  
y( 45 ) 0.05662277660167069904  
y( 46 ) 0.00918861169915597721  
y( 47 ) 0.00149110640673482818  
y( 48 ) 0.00024197325874700766  
y( 49 ) 0.00003926685425278223  
y( 50 ) 0.00000637213323031427  
y( 51 ) 0.00000103405487089658  
y( 52 ) 0.00000016780400493481  
y( 53 ) 0.00000002723084128770  
y( 54 ) 0.00000000441895720859  
y( 55 ) 0.00000000071709803619  
y( 56 ) 0.00000000011636899142  
y( 57 ) 0.00000000001888408764  
y( 58 ) 0.00000000000306446556  
y( 59 ) 0.00000000000049729430  
y( 60 ) 0.00000000000008069976  
y( 61 ) 0.000000000000001309577  
y( 62 ) 0.000000000000000212515  
y( 63 ) 0.000000000000000034486  
y( 64 ) 0.000000000000000005596  
y( 65 ) 0.00000000000000000908  
y( 66 ) 0.00000000000000000147  
y( 67 ) 0.00000000000000000024  
y( 68 ) 0.00000000000000000004  
y( 69 ) 0.00000000000000000001  
y( 70 ) 0.00000000000000000000  
y( 71 ) 0.00000000000000000000  
y( 72 ) 0.00000000000000000000  
y( 73 ) 0.00000000000000000000  
y( 74 ) 0.00000000000000000000  
y( 75 ) 0.00000000000000000000  
y( 76 ) 0.00000000000000000000  
y( 77 ) 0.00000000000000000000  
y( 78 ) 0.00000000000000000000  
y( 79 ) 0.00000000000000000000  
y( 80 ) 0.00000000000000000000  
y( 81 ) 0.00000000000000000000  
y( 82 ) 0.00000000000000000000  
y( 83 ) 0.00000000000000000000  
y( 84 ) 0.00000000000000000000  
y( 85 ) 0.00000000000000000000  
y( 86 ) 0.00000000000000000000  
y( 87 ) 0.00000000000000000000  
y( 88 ) 0.00000000000000000000  
y( 89 ) 0.00000000000000000000  
y( 90 ) 0.00000000000000000000  
y( 91 ) 0.00000000000000000000  
y( 92 ) 0.00000000000000000000  
y( 93 ) 0.00000000000000000000

```
y( 94 ) 0.00000000000000000000
y( 95 ) 0.00000000000000000000
y( 96 ) 0.00000000000000000000
y( 97 ) 0.00000000000000000000
y( 98 ) 0.00000000000000000000
y( 99 ) 0.00000000000000000000
y( 100 ) 0.00000000000000000000
```

$N = 100, \gamma = 1/2$

```
y( 0 ) 0.00000000000000000000
y( 1 ) -0.00000000000000000003
y( 2 ) 0.00000000000000000010
y( 3 ) -0.00000000000000000043
y( 4 ) 0.00000000000000000181
y( 5 ) -0.00000000000000000766
y( 6 ) 0.000000000000000003246
y( 7 ) -0.000000000000000013751
y( 8 ) 0.0000000000000000058249
y( 9 ) -0.0000000000000000246747
y( 10 ) 0.0000000000000001045236
y( 11 ) -0.0000000000000004427689
y( 12 ) 0.0000000000000018755993
y( 13 ) -0.0000000000000079451663
y( 14 ) 0.0000000000000336562644
y( 15 ) -0.000000000001425702237
y( 16 ) 0.000000000006039371593
y( 17 ) -0.000000000025583188609
y( 18 ) 0.000000000108372126029
y( 19 ) -0.000000000459071692724
y( 20 ) 0.000000001944658896927
y( 21 ) -0.000000008237707280431
y( 22 ) 0.000000034895488018652
y( 23 ) -0.00000147819659355040
y( 24 ) 0.00000626174125438812
y( 25 ) -0.00002652516161110290
y( 26 ) 0.00011236238769879972
y( 27 ) -0.00047597471240630180
y( 28 ) 0.00201626123732400690
y( 29 ) -0.00854101966170232874
y( 30 ) 0.03618033988413332097
y( 31 ) 0.04673762080176438460
y( 32 ) 0.04922985667707578672
y( 33 ) 0.04981819409346122107
y( 34 ) 0.04995708030323089965
y( 35 ) 0.04998987288053762662
y( 36 ) 0.04999758878108039040
y( 37 ) 0.04999951775621607614
y( 38 ) 0.04999951775621608308
y( 39 ) 0.05000144673135176188
y( 40 ) 0.04999373083080900504
y( 41 ) 0.05002652340811573894
y( 42 ) 0.04988763719834606730
y( 43 ) 0.05047597461473149472
y( 44 ) 0.04798373873942009260
y( 45 ) 0.05854101965705114929
y( 46 ) 0.01381966011121549612
y( 47 ) 0.00326237921218916049
y( 48 ) 0.00077014326245885244
y( 49 ) 0.00018180616235375098
y( 50 ) 0.00004291861304384840
y( 51 ) 0.00001013171017835738
y( 52 ) 0.00000239177233041886
y( 53 ) 0.00000056462085668194
```

```
y( 54 ) 0.00000013328890369110
y( 55 ) 0.00000003146524191752
y( 56 ) 0.00000000742793602101
y( 57 ) 0.00000000175349783348
y( 58 ) 0.00000000041394468710
y( 59 ) 0.00000000009771908508
y( 60 ) 0.00000000002306834678
y( 61 ) 0.00000000000544569797
y( 62 ) 0.00000000000128555491
y( 63 ) 0.00000000000030347835
y( 64 ) 0.00000000000007164152
y( 65 ) 0.00000000000001691227
y( 66 ) 0.00000000000000399245
y( 67 ) 0.00000000000000094249
y( 68 ) 0.00000000000000022249
y( 69 ) 0.00000000000000005252
y( 70 ) 0.00000000000000001240
y( 71 ) 0.00000000000000000293
y( 72 ) 0.00000000000000000069
y( 73 ) 0.00000000000000000016
y( 74 ) 0.00000000000000000004
y( 75 ) 0.00000000000000000001
y( 76 ) 0.00000000000000000000
y( 77 ) 0.00000000000000000000
y( 78 ) 0.00000000000000000000
y( 79 ) 0.00000000000000000000
y( 80 ) 0.00000000000000000000
y( 81 ) 0.00000000000000000000
y( 82 ) 0.00000000000000000000
y( 83 ) 0.00000000000000000000
y( 84 ) 0.00000000000000000000
y( 85 ) 0.00000000000000000000
y( 86 ) 0.00000000000000000000
y( 87 ) 0.00000000000000000000
y( 88 ) 0.00000000000000000000
y( 89 ) 0.00000000000000000000
y( 90 ) 0.00000000000000000000
y( 91 ) 0.00000000000000000000
y( 92 ) 0.00000000000000000000
y( 93 ) 0.00000000000000000000
y( 94 ) 0.00000000000000000000
y( 95 ) 0.00000000000000000000
y( 96 ) 0.00000000000000000000
y( 97 ) 0.00000000000000000000
y( 98 ) 0.00000000000000000000
y( 99 ) 0.00000000000000000000
y( 100 ) 0.00000000000000000000
```

$N = 100, \gamma = 1$

```
y( 0 ) 0.00000000000000000000
y( 1 ) -0.00000000000023238822
y( 2 ) 0.00000000000046477645
y( 3 ) -0.00000000000116194112
y( 4 ) 0.000000000000278865868
y( 5 ) -0.000000000000673925848
y( 6 ) 0.000000000001626717564
y( 7 ) -0.000000000003927360977
y( 8 ) 0.000000000009481439517
y( 9 ) -0.00000000022890240011
y( 10 ) 0.00000000055261919540
y( 11 ) -0.00000000133414079092
y( 12 ) 0.00000000322090077723
y( 13 ) -0.00000000777594234538
```

y( 14 ) 0.00000001877278546800  
y( 15 ) -0.00000004532151328139  
y( 16 ) 0.00000010941581203078  
y( 17 ) -0.00000026415313734295  
y( 18 ) 0.00000063772208671669  
y( 19 ) -0.00000153959731077633  
y( 20 ) 0.00000371691670826935  
y( 21 ) -0.00000897343072731503  
y( 22 ) 0.00002166377816289942  
y( 23 ) -0.00005230098705311387  
y( 24 ) 0.00012626575226912714  
y( 25 ) -0.00030483249159136809  
y( 26 ) 0.00073593073545186324  
y( 27 ) -0.00177669396249509424  
y( 28 ) 0.00428931866044205117  
y( 29 ) -0.01035533128337919571  
y( 30 ) 0.02499998122720044000  
y( 31 ) 0.03964470626221994198  
y( 32 ) 0.04571056870276056505  
y( 33 ) 0.04822356885669882437  
y( 34 ) 0.04926343098936292186  
y( 35 ) 0.04969670687797296538  
y( 36 ) 0.04987001723341698278  
y( 37 ) 0.04995667241113899149  
y( 38 ) 0.04995667241113899149  
y( 39 ) 0.05004332758886100019  
y( 40 ) 0.04987001723341698278  
y( 41 ) 0.05030329312202703324  
y( 42 ) 0.04926343098936292186  
y( 43 ) 0.05177643114330118812  
y( 44 ) 0.04571056870276056505  
y( 45 ) 0.06035529373778007051  
y( 46 ) 0.02499998122720044000  
y( 47 ) 0.01035533128337919571  
y( 48 ) 0.00428931866044205030  
y( 49 ) 0.00177669396249509424  
y( 50 ) 0.00073593073545186313  
y( 51 ) 0.00030483249159136803  
y( 52 ) 0.00012626575226912712  
y( 53 ) 0.00005230098705311386  
y( 54 ) 0.00002166377816289942  
y( 55 ) 0.00000897343072731503  
y( 56 ) 0.00000371691670826935  
y( 57 ) 0.00000153959731077633  
y( 58 ) 0.00000063772208671670  
y( 59 ) 0.00000026415313734293  
y( 60 ) 0.00000010941581203084  
y( 61 ) 0.00000004532151328124  
y( 62 ) 0.00000001877278546836  
y( 63 ) 0.00000000777594234452  
y( 64 ) 0.00000000322090077933  
y( 65 ) 0.00000000133414078586  
y( 66 ) 0.00000000055261920762  
y( 67 ) 0.00000000022890237062  
y( 68 ) 0.00000000009481446637  
y( 69 ) 0.00000000003927343788  
y( 70 ) 0.00000000001626759061  
y( 71 ) 0.00000000000673825666  
y( 72 ) 0.00000000000279107729  
y( 73 ) 0.00000000000115610207  
y( 74 ) 0.00000000000047887316  
y( 75 ) 0.00000000000019835576  
y( 76 ) 0.00000000000008216164  
y( 77 ) 0.00000000000003403247

```
y( 78 ) 0.000000000000001409671
y( 79 ) 0.000000000000000583905
y( 80 ) 0.000000000000000241861
y( 81 ) 0.000000000000000100182
y( 82 ) 0.00000000000000041497
y( 83 ) 0.00000000000000017189
y( 84 ) 0.00000000000000007120
y( 85 ) 0.00000000000000002949
y( 86 ) 0.00000000000000001222
y( 87 ) 0.00000000000000000506
y( 88 ) 0.00000000000000000210
y( 89 ) 0.00000000000000000087
y( 90 ) 0.00000000000000000036
y( 91 ) 0.00000000000000000015
y( 92 ) 0.00000000000000000006
y( 93 ) 0.00000000000000000003
y( 94 ) 0.00000000000000000001
y( 95 ) 0.00000000000000000000
y( 96 ) 0.00000000000000000000
y( 97 ) 0.00000000000000000000
y( 98 ) 0.00000000000000000000
y( 99 ) 0.00000000000000000000
y( 100 ) 0.00000000000000000000
```

$N = 1000, \gamma = 1/3$

```
y( 0 ) 0.00000000000000000000
y( 1 ) -0.00000000000000000000
y( 2 ) 0.00000000000000000000
y( 3 ) -0.00000000000000000000
y( 4 ) 0.00000000000000000000
y( 5 ) -0.00000000000000000000
y( 6 ) 0.00000000000000000000
y( 7 ) -0.00000000000000000003
y( 8 ) 0.000000000000000000017
y( 9 ) -0.000000000000000000106
y( 10 ) 0.000000000000000000655
y( 11 ) -0.0000000000000000004034
y( 12 ) 0.0000000000000000024856
y( 13 ) -0.0000000000000000153172
y( 14 ) 0.0000000000000000943890
y( 15 ) -0.0000000000000005816509
y( 16 ) 0.000000000000035842945
y( 17 ) -0.000000000000220874181
y( 18 ) 0.000000000001361088028
y( 19 ) -0.000000000008387402350
y( 20 ) 0.000000000051685502127
y( 21 ) -0.000000000318500415112
y( 22 ) 0.00000001962687992800
y( 23 ) -0.00000012094628371911
y( 24 ) 0.00000074530458224266
y( 25 ) -0.00000459277377717504
y( 26 ) 0.00002830194724529292
y( 27 ) -0.00017440445724893256
y( 28 ) 0.00107472869073888823
y( 29 ) -0.00662277660168226166
y( 30 ) 0.04081138830083246016
y( 31 ) 0.04850889359332298534
y( 32 ) 0.04975802674089450928
y( 33 ) 0.04996073314795595327
y( 34 ) 0.04999362785315879937
y( 35 ) 0.04999896602900312514
y( 36 ) 0.04999983167914004434
y( 37 ) 0.04999997595416286189
```

y( 38 ) 0.04999997595416286189  
y( 39 ) 0.05000012022918567944  
y( 40 ) 0.04999925457904877413  
y( 41 ) 0.05000459275489309297  
y( 42 ) 0.04997169804969023299  
y( 43 ) 0.05017440445675168392  
y( 44 ) 0.04892527130918015998  
y( 45 ) 0.05662277660167069904  
y( 46 ) 0.00918861169915597721  
y( 47 ) 0.00149110640673482818  
y( 48 ) 0.00024197325874700766  
y( 49 ) 0.00003926685425278223  
y( 50 ) 0.00000637213323031427  
y( 51 ) 0.00000103405487089658  
y( 52 ) 0.00000016780400493481  
y( 53 ) 0.00000002723084128770  
y( 54 ) 0.00000000441895720859  
y( 55 ) 0.00000000071709803619  
y( 56 ) 0.00000000011636899142  
y( 57 ) 0.0000000001888408764  
y( 58 ) 0.0000000000306446556  
y( 59 ) 0.0000000000049729430  
y( 60 ) 0.0000000000008069976  
y( 61 ) 0.0000000000001309577  
y( 62 ) 0.0000000000000212515  
y( 63 ) 0.0000000000000034486  
y( 64 ) 0.0000000000000005596  
y( 65 ) 0.0000000000000000908  
y( 66 ) 0.0000000000000000147  
y( 67 ) 0.0000000000000000024  
y( 68 ) 0.0000000000000000004  
y( 69 ) 0.0000000000000000001  
y( 70 ) 0.0000000000000000000  
y( 71 ) 0.0000000000000000000  
y( 72 ) 0.0000000000000000000  
y( 73 ) 0.0000000000000000000  
y( 74 ) 0.0000000000000000000  
y( 75 ) 0.0000000000000000000  
y( 76 ) 0.0000000000000000000  
y( 77 ) 0.0000000000000000000  
y( 78 ) 0.0000000000000000000  
y( 79 ) 0.0000000000000000000  
y( 80 ) 0.0000000000000000000  
y( 81 ) 0.0000000000000000000  
y( 82 ) 0.0000000000000000000  
y( 83 ) 0.0000000000000000000  
y( 84 ) 0.0000000000000000000  
y( 85 ) 0.0000000000000000000  
y( 86 ) 0.0000000000000000000  
y( 87 ) 0.0000000000000000000  
y( 88 ) 0.0000000000000000000  
y( 89 ) 0.0000000000000000000  
y( 90 ) 0.0000000000000000000  
y( 91 ) 0.0000000000000000000  
y( 92 ) 0.0000000000000000000  
y( 93 ) 0.0000000000000000000  
y( 94 ) 0.0000000000000000000  
y( 95 ) 0.0000000000000000000  
y( 96 ) 0.0000000000000000000  
y( 97 ) 0.0000000000000000000  
y( 98 ) 0.0000000000000000000  
y( 99 ) 0.0000000000000000000  
y( 100 ) 0.0000000000000000000  
y( 101 ) 0.0000000000000000000

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
y( 998 ) 0.00000000000000000000
y( 999 ) 0.00000000000000000000
y( 1000 ) 0.00000000000000000000
```

$N = 1000, \gamma = 1/2$

```
y( 0 ) 0.00000000000000000000
y( 1 ) -0.00000000000000000003
y( 2 ) 0.00000000000000000010
y( 3 ) -0.00000000000000000043
y( 4 ) 0.000000000000000000181
y( 5 ) -0.000000000000000000766
y( 6 ) 0.0000000000000000003246
y( 7 ) -0.0000000000000000013751
y( 8 ) 0.0000000000000000058249
y( 9 ) -0.00000000000000000246747
y( 10 ) 0.00000000000000001045236
y( 11 ) -0.00000000000000004427689
y( 12 ) 0.000000000000000018755993
y( 13 ) -0.000000000000000079451663
y( 14 ) 0.0000000000000000336562644
y( 15 ) -0.00000000000000001425702237
y( 16 ) 0.00000000000000006039371593
y( 17 ) -0.000000000000000025583188609
y( 18 ) 0.0000000000000000108372126029
y( 19 ) -0.0000000000000000459071692724
y( 20 ) 0.00000000000000001944658896927
y( 21 ) -0.00000000000000008237707280431
y( 22 ) 0.000000000000000034895488018652
y( 23 ) -0.0000000000000000147819659355040
y( 24 ) 0.0000000000000000626174125438812
y( 25 ) -0.00000000000000002652516161110290
y( 26 ) 0.000000000000000011236238769879972
y( 27 ) -0.000000000000000047597471240630180
y( 28 ) 0.0000000000000000201626123732400690
y( 29 ) -0.0000000000000000854101966170232874
y( 30 ) 0.00000000000000003618033988413332097
y( 31 ) 0.00000000000000004673762080176438460
y( 32 ) 0.00000000000000004922985667707578672
y( 33 ) 0.00000000000000004981819409346122107
y( 34 ) 0.00000000000000004995708030323089965
y( 35 ) 0.00000000000000004998987288053762662
y( 36 ) 0.00000000000000004999758878108039040
y( 37 ) 0.00000000000000004999951775621607614
y( 38 ) 0.00000000000000004999951775621608308
y( 39 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 40 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 41 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 42 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 43 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 44 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 45 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 46 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 47 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 48 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 49 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 50 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 51 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 52 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 53 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 54 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 55 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 56 ) 0.000000000000000050000144673135176188
y( 57 ) 0.000000000000000050000144673135176188
```

Y( 58 ) 0.00000000041394468710  
Y( 59 ) 0.00000000009771908508  
Y( 60 ) 0.00000000002306834678  
Y( 61 ) 0.00000000000544569797  
Y( 62 ) 0.00000000000128555491  
Y( 63 ) 0.00000000000030347835  
Y( 64 ) 0.00000000000007164152  
Y( 65 ) 0.00000000000001691227  
Y( 66 ) 0.00000000000000399245  
Y( 67 ) 0.00000000000000094249  
Y( 68 ) 0.00000000000000022249  
Y( 69 ) 0.00000000000000005252  
Y( 70 ) 0.00000000000000001240  
Y( 71 ) 0.00000000000000000293  
Y( 72 ) 0.00000000000000000069  
Y( 73 ) 0.00000000000000000016  
Y( 74 ) 0.00000000000000000004  
Y( 75 ) 0.00000000000000000001  
Y( 76 ) 0.00000000000000000000  
Y( 77 ) 0.00000000000000000000  
Y( 78 ) 0.00000000000000000000  
Y( 79 ) 0.00000000000000000000  
Y( 80 ) 0.00000000000000000000  
Y( 81 ) 0.00000000000000000000  
Y( 82 ) 0.00000000000000000000  
Y( 83 ) 0.00000000000000000000  
Y( 84 ) 0.00000000000000000000  
Y( 85 ) 0.00000000000000000000  
Y( 86 ) 0.00000000000000000000  
Y( 87 ) 0.00000000000000000000  
Y( 88 ) 0.00000000000000000000  
Y( 89 ) 0.00000000000000000000  
Y( 90 ) 0.00000000000000000000  
Y( 91 ) 0.00000000000000000000  
Y( 92 ) 0.00000000000000000000  
Y( 93 ) 0.00000000000000000000  
Y( 94 ) 0.00000000000000000000  
Y( 95 ) 0.00000000000000000000  
Y( 96 ) 0.00000000000000000000  
Y( 97 ) 0.00000000000000000000  
Y( 98 ) 0.00000000000000000000  
Y( 99 ) 0.00000000000000000000  
Y( 100 ) 0.00000000000000000000  
Y( 101 ) 0.00000000000000000000  
Y( 102 ) 0.00000000000000000000  
Y( 103 ) 0.00000000000000000000  
Y( 104 ) 0.00000000000000000000  
Y( 105 ) 0.00000000000000000000  
Y( 106 ) 0.00000000000000000000  
Y( 107 ) 0.00000000000000000000  
Y( 108 ) 0.00000000000000000000  
Y( 109 ) 0.00000000000000000000  
Y( 110 ) 0.00000000000000000000  
Y( 111 ) 0.00000000000000000000  
Y( 112 ) 0.00000000000000000000  
Y( 113 ) 0.00000000000000000000  
Y( 114 ) 0.00000000000000000000  
Y( 115 ) 0.00000000000000000000  
Y( 116 ) 0.00000000000000000000  
Y( 117 ) 0.00000000000000000000  
Y( 118 ) 0.00000000000000000000  
Y( 119 ) 0.00000000000000000000  
Y( 120 ) 0.00000000000000000000  
Y( 121 ) 0.00000000000000000000

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
Y( 954 ) 0.00000000000000000000
Y( 955 ) 0.00000000000000000000
Y( 956 ) 0.00000000000000000000
Y( 957 ) 0.00000000000000000000
Y( 958 ) 0.00000000000000000000
Y( 959 ) 0.00000000000000000000
Y( 960 ) 0.00000000000000000000
Y( 961 ) 0.00000000000000000000
Y( 962 ) 0.00000000000000000000
Y( 963 ) 0.00000000000000000000
Y( 964 ) 0.00000000000000000000
Y( 965 ) 0.00000000000000000000
Y( 966 ) 0.00000000000000000000
Y( 967 ) 0.00000000000000000000
Y( 968 ) 0.00000000000000000000
Y( 969 ) 0.00000000000000000000
Y( 970 ) 0.00000000000000000000
Y( 971 ) 0.00000000000000000000
Y( 972 ) 0.00000000000000000000
Y( 973 ) 0.00000000000000000000
Y( 974 ) 0.00000000000000000000
Y( 975 ) 0.00000000000000000000
Y( 976 ) 0.00000000000000000000
Y( 977 ) 0.00000000000000000000
Y( 978 ) 0.00000000000000000000
Y( 979 ) 0.00000000000000000000
Y( 980 ) 0.00000000000000000000
Y( 981 ) 0.00000000000000000000
Y( 982 ) 0.00000000000000000000
Y( 983 ) 0.00000000000000000000
Y( 984 ) 0.00000000000000000000
Y( 985 ) 0.00000000000000000000
Y( 986 ) 0.00000000000000000000
Y( 987 ) 0.00000000000000000000
Y( 988 ) 0.00000000000000000000
Y( 989 ) 0.00000000000000000000
Y( 990 ) 0.00000000000000000000
Y( 991 ) 0.00000000000000000000
Y( 992 ) 0.00000000000000000000
Y( 993 ) 0.00000000000000000000
Y( 994 ) 0.00000000000000000000
Y( 995 ) 0.00000000000000000000
Y( 996 ) 0.00000000000000000000
Y( 997 ) 0.00000000000000000000
Y( 998 ) 0.00000000000000000000
Y( 999 ) 0.00000000000000000000
Y( 1000 ) 0.00000000000000000000
```

$N = 1000, \gamma = 1$

```
Y( 0 ) 0.00000000000000000000
Y( 1 ) -0.000000000000023238822
Y( 2 ) 0.000000000000046477645
Y( 3 ) -0.0000000000000116194112
Y( 4 ) 0.0000000000000278865868
Y( 5 ) -0.0000000000000673925848
Y( 6 ) 0.0000000000001626717564
Y( 7 ) -0.0000000000003927360977
Y( 8 ) 0.0000000000009481439517
Y( 9 ) -0.0000000000022890240011
Y( 10 ) 0.00000000055261919540
Y( 11 ) -0.00000000133414079092
Y( 12 ) 0.00000000322090077723
Y( 13 ) -0.00000000777594234538
```

y( 14 ) 0.00000001877278546800  
y( 15 ) -0.00000004532151328139  
y( 16 ) 0.00000010941581203078  
y( 17 ) -0.00000026415313734295  
y( 18 ) 0.00000063772208671669  
y( 19 ) -0.00000153959731077633  
y( 20 ) 0.00000371691670826935  
y( 21 ) -0.00000897343072731503  
y( 22 ) 0.00002166377816289942  
y( 23 ) -0.00005230098705311387  
y( 24 ) 0.00012626575226912714  
y( 25 ) -0.00030483249159136809  
y( 26 ) 0.00073593073545186324  
y( 27 ) -0.00177669396249509424  
y( 28 ) 0.00428931866044205117  
y( 29 ) -0.01035533128337919571  
y( 30 ) 0.02499998122720044000  
y( 31 ) 0.03964470626221994198  
y( 32 ) 0.04571056870276056505  
y( 33 ) 0.04822356885669882437  
y( 34 ) 0.04926343098936292186  
y( 35 ) 0.04969670687797296538  
y( 36 ) 0.04987001723341698278  
y( 37 ) 0.04995667241113899149  
y( 38 ) 0.04995667241113899149  
y( 39 ) 0.05004332758886100019  
y( 40 ) 0.04987001723341698278  
y( 41 ) 0.05030329312202703324  
y( 42 ) 0.04926343098936292186  
y( 43 ) 0.05177643114330118812  
y( 44 ) 0.04571056870276056505  
y( 45 ) 0.06035529373778007051  
y( 46 ) 0.02499998122720044000  
y( 47 ) 0.01035533128337919571  
y( 48 ) 0.00428931866044205030  
y( 49 ) 0.00177669396249509424  
y( 50 ) 0.00073593073545186313  
y( 51 ) 0.00030483249159136803  
y( 52 ) 0.00012626575226912712  
y( 53 ) 0.00005230098705311386  
y( 54 ) 0.00002166377816289942  
y( 55 ) 0.00000897343072731503  
y( 56 ) 0.00000371691670826935  
y( 57 ) 0.00000153959731077633  
y( 58 ) 0.00000063772208671670  
y( 59 ) 0.00000026415313734293  
y( 60 ) 0.00000010941581203084  
y( 61 ) 0.00000004532151328124  
y( 62 ) 0.00000001877278546836  
y( 63 ) 0.00000000777594234452  
y( 64 ) 0.00000000322090077933  
y( 65 ) 0.00000000133414078586  
y( 66 ) 0.00000000055261920762  
y( 67 ) 0.00000000022890237062  
y( 68 ) 0.00000000009481446637  
y( 69 ) 0.00000000003927343788  
y( 70 ) 0.00000000001626759061  
y( 71 ) 0.00000000000673825666  
y( 72 ) 0.00000000000279107729  
y( 73 ) 0.00000000000115610207  
y( 74 ) 0.00000000000047887316  
y( 75 ) 0.00000000000019835576  
y( 76 ) 0.00000000000008216164  
y( 77 ) 0.00000000000003403247

Y( 78 ) 0.000000000000001409671  
Y( 79 ) 0.000000000000000583905  
Y( 80 ) 0.000000000000000241861  
Y( 81 ) 0.000000000000000100182  
Y( 82 ) 0.00000000000000041497  
Y( 83 ) 0.00000000000000017189  
Y( 84 ) 0.00000000000000007120  
Y( 85 ) 0.00000000000000002949  
Y( 86 ) 0.00000000000000001222  
Y( 87 ) 0.00000000000000000506  
Y( 88 ) 0.00000000000000000210  
Y( 89 ) 0.00000000000000000087  
Y( 90 ) 0.00000000000000000036  
Y( 91 ) 0.00000000000000000015  
Y( 92 ) 0.00000000000000000006  
Y( 93 ) 0.00000000000000000003  
Y( 94 ) 0.00000000000000000001  
Y( 95 ) 0.00000000000000000000  
Y( 96 ) 0.00000000000000000000  
Y( 97 ) 0.00000000000000000000  
Y( 98 ) 0.00000000000000000000  
Y( 99 ) 0.00000000000000000000  
Y( 100 ) 0.00000000000000000000  
Y( 101 ) 0.00000000000000000000  
Y( 102 ) 0.00000000000000000000  
Y( 103 ) 0.00000000000000000000  
Y( 104 ) 0.00000000000000000000  
Y( 105 ) 0.00000000000000000000  
Y( 106 ) 0.00000000000000000000  
Y( 107 ) 0.00000000000000000000  
Y( 108 ) 0.00000000000000000000  
Y( 109 ) 0.00000000000000000000  
Y( 110 ) 0.00000000000000000000  
Y( 111 ) 0.00000000000000000000  
Y( 112 ) 0.00000000000000000000  
Y( 113 ) 0.00000000000000000000  
Y( 114 ) 0.00000000000000000000  
Y( 115 ) 0.00000000000000000000  
Y( 116 ) 0.00000000000000000000  
Y( 117 ) 0.00000000000000000000  
Y( 118 ) 0.00000000000000000000  
Y( 119 ) 0.00000000000000000000  
Y( 120 ) 0.00000000000000000000  
Y( 121 ) 0.00000000000000000000  
Y( 122 ) 0.00000000000000000000  
Y( 123 ) 0.00000000000000000000  
Y( 124 ) 0.00000000000000000000  
Y( 125 ) 0.00000000000000000000  
Y( 126 ) 0.00000000000000000000  
Y( 127 ) 0.00000000000000000000  
Y( 128 ) 0.00000000000000000000  
Y( 129 ) 0.00000000000000000000  
Y( 130 ) 0.00000000000000000000  
Y( 131 ) 0.00000000000000000000  
Y( 132 ) 0.00000000000000000000  
Y( 133 ) 0.00000000000000000000  
Y( 134 ) 0.00000000000000000000  
Y( 135 ) 0.00000000000000000000  
Y( 136 ) 0.00000000000000000000  
Y( 137 ) 0.00000000000000000000  
Y( 138 ) 0.00000000000000000000  
Y( 139 ) 0.00000000000000000000  
Y( 140 ) 0.00000000000000000000  
Y( 141 ) 0.00000000000000000000

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

```
Y( 974 ) 0.00000000000000000000
Y( 975 ) 0.00000000000000000000
Y( 976 ) 0.00000000000000000000
Y( 977 ) 0.00000000000000000000
Y( 978 ) 0.00000000000000000000
Y( 979 ) 0.00000000000000000000
Y( 980 ) 0.00000000000000000000
Y( 981 ) 0.00000000000000000000
Y( 982 ) 0.00000000000000000000
Y( 983 ) 0.00000000000000000000
Y( 984 ) 0.00000000000000000000
Y( 985 ) 0.00000000000000000000
Y( 986 ) 0.00000000000000000000
Y( 987 ) 0.00000000000000000000
Y( 988 ) 0.00000000000000000000
Y( 989 ) 0.00000000000000000000
Y( 990 ) 0.00000000000000000000
Y( 991 ) 0.00000000000000000000
Y( 992 ) 0.00000000000000000000
Y( 993 ) 0.00000000000000000000
Y( 994 ) 0.00000000000000000000
Y( 995 ) 0.00000000000000000000
Y( 996 ) 0.00000000000000000000
Y( 997 ) 0.00000000000000000000
Y( 998 ) 0.00000000000000000000
Y( 999 ) 0.00000000000000000000
Y( 1000 ) 0.00000000000000000000
```