Теория вероятностей. Лекции и Семинары

Булинский Андрей Вадимович

25 марта 2018 г.

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Предмет изучения

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие случайным явлениям. Неслучайные явления будем называть детерминированными. В курсе будем изучать модели случайных экспериментов.

Модель случайных экспериментов подразумевает:

1. Воспроизводимость (контроль основных факторов).

2. Непредсказуемость исходов.

1.2 Частотная интерпретация вероятностей

Основные понятия:
Имеется серия из N повторений эксперимента.
A – явление (событие), которое может произойти.
$N(A)$ – число экспериментов, когда произошло.
$\nu_N(A) = \frac{N(A)}{N}$ – частота события в серии из повторений.

Свойство стабилизации: Пусть $N_1 \gg 1$ и $N_2 \gg 1$, то $\nu_{N_1}(A) \approx \nu_{N_2}(A)$.
$P(A)$ – вероятность.

1.3 Вероятностное пространство

Математической моделью случайного эксперимента является вероятностное пространство. Для упрощения задачи используем математический аппарат теории множеств (и теории мер).

Вероятностное пространство состоит из трех множеств (Ω, F, P).

1. Непустое множество Ω (ом́ега большое) – всевозможные элементарные исходы эксперимента. Пояснение: Элементарные исходы – простейшие, взаимоисключающие исходы.

   Пример 1.1. однократное подбрасывание монеты. Комментарий: пример с монеткой крайне популярен как в русскоязычных, так и в англоязычных пособиях, поэтому будем использовать числовые значения для обозначения исходов эксперимента: $\Omega = \{\Gamma, \mathrm{P}\}$,

$\Omega = \{H, T\}$, $\Omega = \{0, 1\}$.
Здесь введем понятия мощности множества – числа элементов конечного множества. Обозначение: $|\Omega| = \#\Omega = 2$

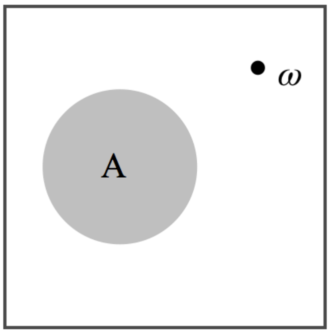
Пример 1.2. Эксперимент: n - кратное подбрасывание монеты, $(n \in \mathbb{N})$. Введем понятие элементарных исходов (оме́га малое).
$\omega \in \Omega$, $\omega = (k_1, \cdots, k_n)$, где $k_j \in \{0, 1\}\,; j = \overline{1, N}$. ω – двоичное N-разрядное слово. Добавим, что мощность Ω в данном случае $|\Omega| = 2^N$. В теории вероятностей Ω – пространство элементарных исходов.

Пример 1.3. n-кратное подбрасывание игральной кости: $\omega = (k_1, \cdots, k_n)$, где $k_j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тогда $|\Omega| = 6^N$.
Часто на практике нас интересует не конечный результат эксперимента, а ответ на вопрос, удовлетворяет ли этот результат определенным критериям (Простейший пример – попадание стрелка в мишень. Нас интересует не в какую точку попадает снаряд, а в какую область мишени он попадет). Применяем теоретико-множественный аппарат.

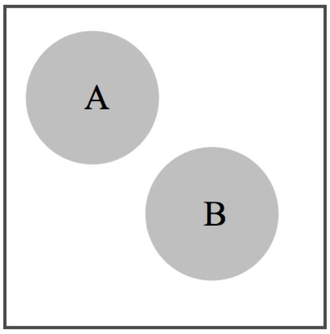
1.4 Операции над множествами

(a) Теоретико-множественное вычитание: $\Omega \backslash A$.

(b) Дополнение к A в Ω: $\overline{A} := \Omega \backslash A \equiv A^c$. Будем пользоваться теоретико-множественным аппаратом, но поменяем названия: Множество на Событие, Дополнение на Противоположное событие.



(a) $\omega \in A$ — произошло событие A.



(b) $\varnothing \subset A$, $\varnothing \subset B$, $A \cap B = \varnothing$.

$\subset$ – знак нестрогого вложения. $A \subset B$ если $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$,
$A = B$ если $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$

(c) Пересечение: $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B\}$.

(d) Объединение: $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \{\omega$ содержится хотя бы в одном из множеств A или $B\}$.

2. Выделяется класс F подмножеств Ω, именуемый событиями если:

   (a) $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$

   (b) $A, B \in F \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in F \\ A \cap B \in F \end{cases}$

   $\Omega \in F$ — достоверные события
   $\overline{\Omega} = \varnothing$ — недостоверные события

1.5 Требования к классу событий:

(a) $\Omega \in F$

(b) $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$

(c) $A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in F$

(d) $A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in F$

Замечание: из первых трех свойств следует четвертое, а из первых двух и четвертого следует третье. Такие свойства подмножеств Ω называются алгеброй.

3. На событиях $A \in F$ задается функция P со свойствами, имитирующими свойства частот.
   $F \ni A \longrightarrow P(A) \in \mathbb{R}$
   $\nu_N(A) = \frac{N(A)}{N}$, $\nu_N(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N} = \frac{N}{N} = 1$
   $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

Соглашение: иногда пишем вместо $A_1 \cup A_2 \equiv A_1 + A_2$ только при условии, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
$N(A_1 + A_2) = N(A_1) + N(A_2)$
$\nu_N(A_1 + A_2) = \nu_N(A_1) + \nu_N(A_2)$

1.6 Свойства функции P

(a) $P(A) \geq 0$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

1.7 Счетная аддитивность

Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ и $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{1}$$

2 Семинар 1

Задача о выборках (вспомогательная)

Есть совокупность N различных объектов ($N \in \mathbb{N}$), причем занумерованных.

$$\begin{array}{cccccc} \{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & , & a_n\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \updownarrow \\ \{1, & 2, & 3, & \cdots & , & N\} \end{array}$$

Сколько выборок n из этой совокупности можно привести?