Булинский Андрей Вадимович

Теория вероятностей.
Лекции и семинары.

Второй курс. Весенний семестр.

А. Нехаев, 654 группа.

Версия от 24 февр. 2018 г.

2018 Москва

Оглавление

Оглавление 2

Лекция 1. 3

- Предмет изучения 3
- Частотная интерпретация вероятностей 3
- Вероятностное пространство 3
- Операции над множествами 4

Семинар 1 6

- Выборки 6
- Классическое ВП 8

Лекция 2 9

- Требования к ВП: 9
- Свойства $\boldsymbol{\sigma}$-алгебры 9

Семинар 2 11

- Свойства вероятности 12
- Формула сложения 13
- Мера 14

Лекция 3 15

- Модель геометрической вероятности 17
- Схема независимых испытаний Бернулли 17
- Условная вероятность 17

Семинар 3 18

- Условная вероятность 20
- Зависимые и независимые события 20
- Схема Бернулли 22

Лекция 1.

Предмет изучения

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие случайным явлениям. Неслучайные явления будем называть детерминированными. В курсе будем изучать модели случайных экспериментов.

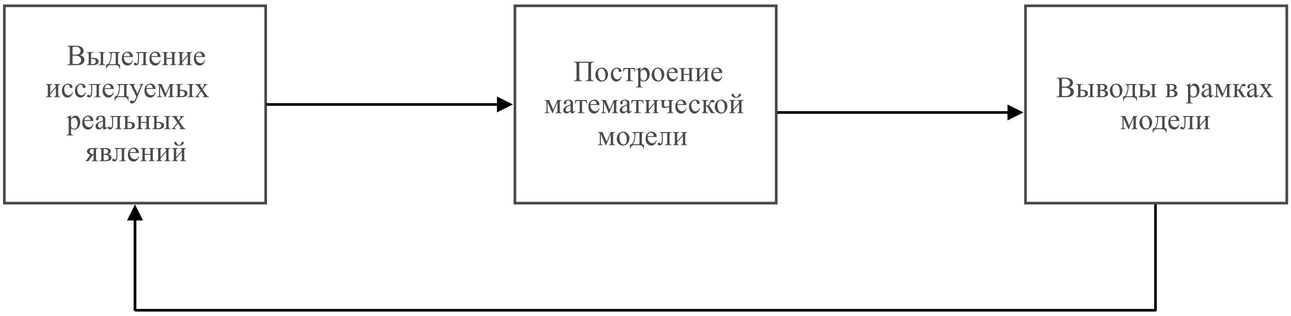


Рис. 1. Научный подход к исследованию явления

Модель случайных экспериментов подразумевает:

1. Воспроизводимость (контроль основных факторов).
2. Непредсказуемость исходов.

Частотная интерпретация вероятностей

Основные понятия:

Имеется серия из N повторений эксперимента.

A – явление (событие), которое может произойти.

$N(A)$ – число экспериментов, когда A произошло.

$\nu_N(A) = \dfrac{N(A)}{N}$ – частота события A в серии из N повторений.

Свойство стабилизации:

Пусть $N_1 \gg 1$ и $N_2 \gg 1$, то $\nu_{N_1}(A) \approx \nu_{N_2}(A)$.

$P(A)$ – вероятность.

Вероятностное пространство

Математической моделью случайного эксперимента является вероятностное пространство. Для упрощения задачи используем математический аппарат теории множеств (и теории мер)

Вероятностное пространство состоит из трех множеств (Ω, F, P).

1. Непустое множество Ω (оме́га большое) – всевозможные элементарные исходы эксперимента. Пояснение: Элементарные исходы – простейшие, взаимоисключающие исходы.

Пример 1: однократное подбрасывание монеты. Комментарий: пример с монеткой крайне популярен как в русскоязычных, так и в англоязычных пособиях, поэтому будем использовать числовые значения для обозначения исходов эксперимента: $\Omega = \left\{\Gamma, \mathrm{P}\right\}$, $\Omega = \{H, T\}$, $\Omega = \{0{,}1\}$.

Здесь введем понятия мощности множества – числа элементов конечного множества. Обозначение: $\left|\Omega\right| = \#\Omega = 2$

Пример 2: Эксперимент: n-кратное подбрасывание монеты, ($n \in \mathbb{N}$).

Введем понятие элементарных исходов ω (омéга малое).

$\omega \in \Omega$, $\omega = \left(k_1, \cdots, k_n\right)$, где $k_j \in \{0{,}1\}$; $j = \overline{1,N}$. ω – двоичное N-разрядное слово.

Добавим, что мощность Ω в данном случае $\left|\Omega\right| = 2^N$. В теории вероятностей Ω – пространство элементарных исходов.

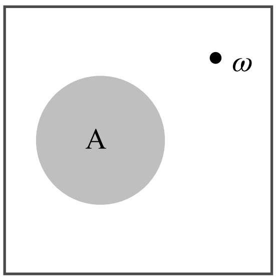
Пример 3: n-кратное подбрасывание игральной кости:

$\omega = \left(k_1, \cdots, k_n\right)$, где $k_j = \left\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\right\}$, тогда $\left|\Omega\right| = 6^N$.

Часто на практике нас интересует не конечный результат эксперимента, а ответ на вопрос, удовлетворяет ли этот результат определенным критериям (Простейший пример – попадание стрелка в мишень. Нас интересует не в какую точку попадает снаряд, а в какую область мишени он попадет). Применяем теоретико-множественный аппарат.

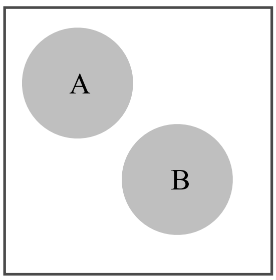
Операции над множествами

1. Теоретико-множественное вычитание: $\Omega \backslash A$.
2. Дополнение к A в Ω: $\overline{A} := \Omega \backslash A \equiv A^c$. Будем пользоваться теоретико-множественным аппаратом, но поменяем названия: Множество на Событие, Дополнение на Противоположное событие.



$\omega \in A$ – произошло событие A

$\omega \notin A$ – произошло противоположное событие



$\varnothing \subset A$

$\varnothing \subset B$

$A \cap B = \varnothing$, $\subset$ – знак нестрогого вложения. $A \subset B$ если

$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$,

$A = B$ если $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$

3. Пересечение: $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B\}$

4. Объединение: $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \{\omega$ содержится хотя бы в одном из множеств A или $B\}$

2. Выделяется класс F подмножеств Ω, именуемый событиями если:

1) $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$,

2) $A, B \in F \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in F \\ A \cap B \in F \end{cases}$

$\Omega \in F$– достоверные события

$\overline{\Omega} = \varnothing$ – недостоверные события

Требование к классу событий:

1. $\Omega \in F$
2. $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$
3. $A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in F$
4. $A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in F$

Замечание: из первых трех свойств следует четвертое, а из первых двух и четвертого следует третье. Такие свойства подмножеств Ω называются алгеброй.

3. На событиях $A \in F$ задается функция P со свойствами, имитирующими свойства частот.

$F \ni A \longrightarrow P(A) \in \mathbb{R}$

$\nu_N(A) = \dfrac{N(A)}{N}$, $\nu_N(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N} = \dfrac{N}{N} = 1$

$A_1 \cap A_2 = \varnothing$

Соглашение: иногда пишем вместо $A_1 \cup A_2 \equiv A_1 + A_2$ только при условии, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

$N(A_1 + A_2) = N(A_1) + N(A_2)$

$\nu_N(A_1 + A_2) = \nu_N(A_1) + \nu_N(A_2)$

Свойства функции P:

1. $P(A) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $P\left(A_1 \cup A_2\right) = P(A_1) + P(A_2)$, если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

Счетная аддитивность:

Если $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ и $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$$

Семинар 1

Задача о выборках (вспомогательная)

Есть совокупность N различных объектов ($N \in \mathbb{N}$), причем занумерованных.

$$\begin{array}{ccccc} \{a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_n\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ \{1, & 2, & 3, & \cdots, & N\} \end{array}$$

Сколько выборок n из этой совокупности можно привести?

Решение:

Однозначного ответа нет в силу некорректности постановки задачи: не определено понятие выборки

Выборки

Упорядоченная выборка без возвращений — элемент можно выбрать в множество один единственный раз, при этом порядок элементов в множестве важен.

$$1 \leq i_k \leq N, \quad k = \overline{1,n}, \ \omega = \left(i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n\right), \quad i_j \neq i_k, \quad j \neq k$$

$$\left|\Omega\right| = N(N-1)\cdots(N-n+1) =: A_N^n \text{ – число размещений из } N \text{ по } n. \ A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}.$$

Случай, когда $n = N$:

$$A_N^N = \prod_{k=1}^{N} k =: N!, \quad N \in \mathbb{N}, \text{ удобно считать } 0_1^1 = 1$$

Неупорядоченная выборка без возвращений — элемент можно выбрать в множество один единственный раз, при этом порядок элементов в множестве не имеет значения.

$$\left|\Omega\right| = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = C_N^n \text{ – число сочетаний из } N \text{ по } n.$$

Разрешим $n = 0,1,\cdots,N \Rightarrow C_N^n = C_N^{N-n}$, $\omega = \left(i_1, \cdots, i_n\right)$ $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq N$.

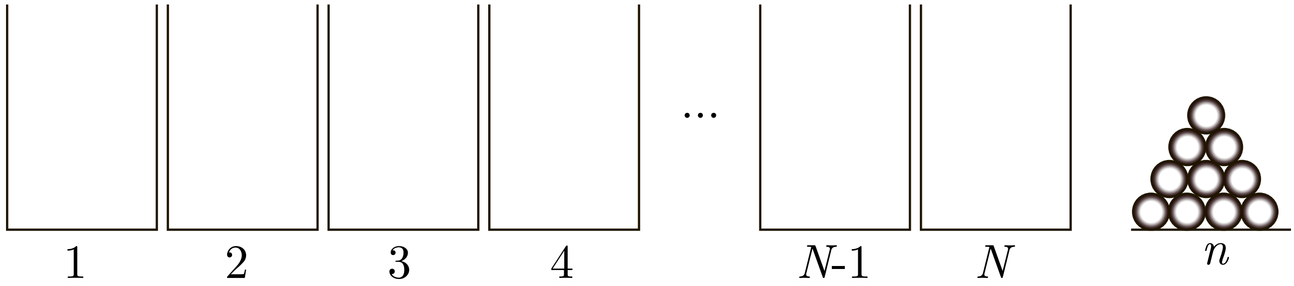
Упорядоченная выборка с возвращениями — элемент можно выбрать в множество несколько раз, при этом порядок элементов в множестве важен.

$$\omega = \left(i_1, i_2, \cdots, i_N\right), \text{ где } 1 \leq i_k \leq N, \quad k = \overline{1,n}. \ \left|\Omega\right| = N^n$$

Неупорядоченная выборка с возвращениями — элемент можно выбрать в множество несколько раз, при этом порядок элементов в множестве не важен.

$$\omega = \left(n_1, n_2, \cdots, n_N\right), \text{ где } n_k \in \mathbb{Z}+ = \{0,1,2,\cdots\} \text{ при этом } \sum_{k=1}^{N} n_k = n.$$

Решим задачу, эквивалентную предыдущей о размещении n неразличимых шаров по N различным ящикам (ячейкам)



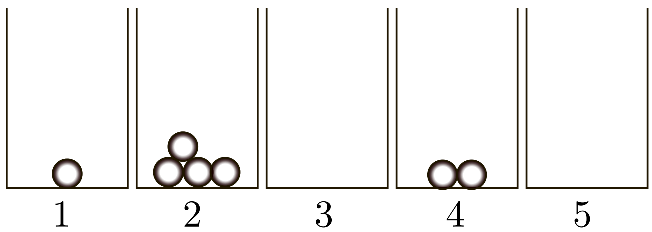
Эксперимент по «случайному» размещению шаров. $\omega = (n_1, n_2, \cdots, n_N)$ –набор чисел заполнения удовлетворяет требованиям: $n_k \in \mathbb{Z}+, \quad k = \overline{1,N}, \quad \sum\limits_{k=1}^{N} n_k = n.$

Замечание:

Бозоны (частицы с целым спином) размещаются таким образом. Для бозонов $n, N \in \mathbb{N}$.

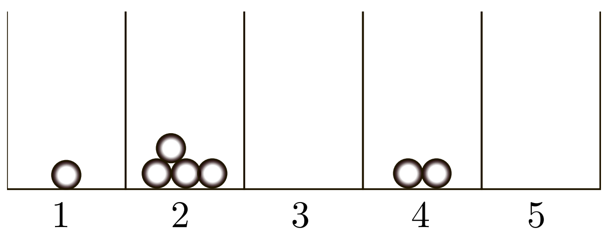
Пример:

$N = 5, \quad \omega = (1,4,0,2,0), \quad n = 7$

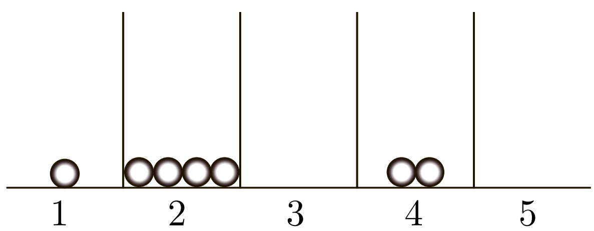


Решение:

1. Сдвигаем и склеиваем стенки



2. Удаляем несдвоенные стенки



3. Переведем стенки в единицы, а шары в нули.

$$01000011001$$

$$N+1+n\text{-разрядное слово, где ровно } N-1 \text{ заняты единицами.}$$

$$\Omega_B = C_{N+n-1}^{N-1} = C_{N+n-1}^{n}.$$

Замечание:

Фермионы: $n_k \in \{0,1\}$, $\left|\Omega_F\right| = \begin{cases} 0, & n > N \\ C_N^n, & 1 \le n \le N \end{cases}$

Простейшая модель задания вероятности – классическая.

Классическое ВП

1. $\mathbf{\Omega}$ – непустое конечное множество. Его элементы перенумерованы. $\left|\Omega\right| = N \in \mathbb{N}$. $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\right\}$

2. Выделим множество $F = 2^{\Omega}$ – совокупность <u>всех</u> подмножеств $\mathbf{\Omega}$. Возникает несколько вопросов:

   1. $\left|F\right| = ?\quad A \subset \Omega \Rightarrow A \in F$

   2. Почему F является σ-алгеброй подмножеств Ω?

   3. Почему при классической модели $P(A)$ – счетно-аддитивная функция.

3. Задание вероятности классическое

   1. $\omega_k \longrightarrow P_k = \text{const} = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{\left|\Omega\right|},\quad k = \overline{1,N}$ (все элементарные исходы равновероятны)

   2. $A \in F\,(A \subset \Omega) \longrightarrow P(A) := \sum\limits_{k:\omega_k \in A} P_k = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}$ $(\left|\varnothing\right| = 0)$ и $P\left(\varnothing\right) = 0$.

Пример

Допустим, мы два раза кидаем кость. Какова вероятность того, что два раза выпали четные числа?

Решение

Используем классическую модель задания вероятности.

$$\omega = \left(i, j\right)\ 1 \le i, j \le 6$$

$$P(A) = \frac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}:$$

$$\left|\Omega\right| = 6^2 = 36,\ P_\omega = \frac{1}{36},\ A = \left\{\omega : i + j\text{- четное}\right\}.$$

$$P(A) = \frac{1}{2}.\ \text{– Ответ.}$$

Лекция 2

Подробнее о вероятностном пространстве и σ-алгебре.

Модель случайного эксперимента – вероятностное пространство (Ω, F, P).

Требования к ВП:

1. F является σ- алгеброй подмножеств Ω.
2. P является вероятностной мерой, заданной на событиях.

Элементы $A \in F$ называются **событиями**.

σ-алгеброй подмножеств Ω называется класс подмножеств $A \subset \Omega$ со свойствами:

1. $\Omega \in F$
2. $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$
3. $A_n \in F, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F \left(\left\{A_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset F \right)$

Напоминание: «$\subset$» – нестрогое вложение, то есть $A \subset B$ означает: $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$. $A = B$ понимаем как $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.

Свойства σ-алгебры

Рассмотрим подробнее свойства σ-алгебры.

1. Первое свойство $\Omega \in F$ вполне ясно и дополнительных разъяснений не требует
2. $\overline{A} = \Omega \backslash A$ – принцип исключения 3-го.

$\omega \in A$. Альтернатива: $\omega \notin A \Leftrightarrow \omega \in \overline{A}$
Упражнение: Доказать, что $\overline{\overline{A}} = A$
Доказательство: $\omega \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \omega \notin \overline{A} \Leftrightarrow \omega \in A$

3. Операции объединения: «$\cup$», пересечения «$\cap$». Каждая операция коммутативная, ассоциативная и взаимно-дистрибутивная.
4. Соотношение двойственности (де Моргана)

    1. Пусть семейство множеств индексировано индексом $i \in I \left(I \notin \varnothing\right)$ (I – любой мощности). $\left(A_i \subset \Omega, \forall i \in I\right)$. (Пояснение: $\forall i \in I \Leftrightarrow \forall i$)
    Тогда: $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} = \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i}$

2. $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$

Доказательство

1. $\omega \in \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} \Rightarrow \omega \not\in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \omega \in A_i, \forall i \in I \Leftrightarrow \omega \in \overline{A_i}, \forall i \in I \Leftrightarrow \omega \in \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$

2. Доказывается либо по аналогии, либо вытекает из 1-го пункта в силу $\overline{\overline{A}} = A$

Из трех свойств σ-алгебры через закон де Моргана вытекает 4-е свойство:

$$\left\{A_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset F \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F_i$$

Доказательство:

$\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in F \Rightarrow \overline{A_n} \in F, \forall n \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F \Rightarrow F \ni \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$

Из (1),(2),(3) $\Rightarrow$ (4)

Упражнение 1: Доказать, что из 1,2,4 следует 3.

Итак, получили, что для σ-алгебры выполняются все 4 свойства.

Пример 1

Тривиальная σ-алгебра (подмножества непустого Ω) $F_0 = \left\{\varnothing, \Omega\right\}$

5. Учтем свойство операций:

$A \cup A = A$, $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

$A \cap A = A$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cup \Omega = \Omega$, где $A \subset \Omega$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Пример 2 «Меньше не бывает»

$\mathfrak{I}$ – любая σ-алгебра подмножеств Ω. Оно содержит $\varnothing$, Ω $\Rightarrow F_0 \subset \mathfrak{I}$

Пример 3 Нетривиальная σ-алгебра (если $\left|\Omega\right| > 1$)

$F_{\max} = 2^{\Omega} :=$ {все подмножества Ω} $\exists \varnothing \subsetneq A \Omega$. Всегда $\varnothing \subset A, A \subset \Omega$

Напоминание: $\subset$ – нестрогое вложение, $\subsetneq$ – строгое вложение.

При выполнении теоретико-множественных операций над Ω дают в результате Ω подмножество. $\Rightarrow$ Ω подмножества замкнуты относительно теоретико-множественных операций.

$F_{\min} \subset F_{\max}$

$\begin{cases} A \cap \overline{A} = \varnothing \\ A \cup \overline{A} = \Omega \end{cases}$ будем говорить, что A и $\overline{A}$ образуют разбиение Ω.
$C = \{A_1, A_2\}, A_1 = A, A_2 = \overline{A}, \varnothing \subsetneq A \subsetneq \Omega$ – не является σ-алгеброй.

Рассмотрим $A_2 = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$, где $A, \overline{A}$ является C. A_2 является σ-алгеброй. $C \subset A_2 \subset 2^{\Omega}$.

Мысленно рассмотрим пресечение всех σ-алгебр, содержащих подмножество M. Получим пересечение $\sigma\{M\}$ множеств Ω.

Упражнение:

1. $\sigma\{M\}$ является σ-алгеброй подмножеств Ω
2. Если σ-алгебра $A \supset M \Rightarrow A \supset \sigma\{M\}$

Решение:

1. Ω входит в каждую σ-алгебру $\Rightarrow$ входит в пересечение $A \subset \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Rightarrow A \subset A_i, \forall i \in I$

С подбрасыванием монеты: можем рассмотреть модель, где она встанет на ребро или укатится. Будем подбрасывать монетку пока не выпадет герб.

Элементарные исходы считаем точками.

Определение: Система A подмножества Ω называется алгеброй, если:

1. $\Omega \in A$
2. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathfrak{A}$
3. $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$

Упражнение. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}, \geq 2$ из $A_1, \cdots, A_n \in A \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in A$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathfrak{A}$ (отличие от σ-алгебры – не счетное).

Задача

1. Всякая σ-алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй
2. Конечная алгебра $\mathfrak{A}$ (т.е. $|A| = N, A = \{A_1, \cdots, A_N\}$, где $A_1, \cdots, A_N \subset \Omega$ является σ-алгеброй.
3. Есть бесконечные алгебры, не являющиеся σ-алгебрами. $\Omega = (0,1] \subset \mathbb{R}$, $A = (a, b] \subset \Omega$, то есть $0 \leq a \leq b \leq 1$, тут $(a, a] = \varnothing$. $\mathfrak{A}$ состоит из конечных объединений непересекающихся подмножеств вида A.

Семинар 2

Используем вероятностное пространство (Ω, F, P). Вероятность P задана на событиях $A \in F$. Требования к P:

1. $P(A) \geq 0, \forall A$

2. $P(\Omega) = 1$

3. Счетная аддитивность

Определение: Счетная аддитивность:

Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ и $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, то:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

причем этот ряд будет сходящимся.

Свойства вероятности P

1. $P(\varnothing) = 0$

Доказательство:

Рассмотрим $A_n = \varnothing, n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing \Rightarrow P(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing)$ и ряд сходящийся в силу счетной аддитивности $\Rightarrow P(\varnothing) = 0$

2. P аддитивно (из счетной аддитивности получим аддитивность)

Доказательство:

Рассмотрим конечный набор $A_n : A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, вводим $B_k = \begin{cases} A_k, k \leq n \\ \varnothing, k > n \end{cases} \Rightarrow B_i B_j = \varnothing, i \neq j$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \varnothing = \sum_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k)$$

Но $\sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) = P(\varnothing) = 0 \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + \cancel{\sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k)} = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

3. Из аддитивности следует, что $\forall A \in F, P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Доказательство:

$A\overline{A} = \varnothing, A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.

4. Из аддитивности следует **монотонность** P

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Доказательство:

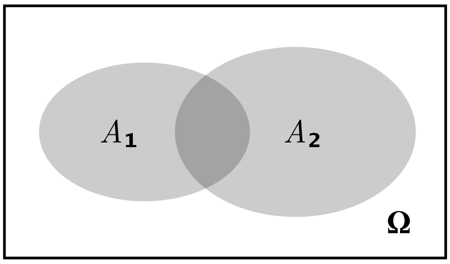
$B = \Omega B = (A + \overline{A}) B = AB + \overline{A}B = A + \overline{A}B$ так как из $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
$P(B) = P(A + \overline{A}B) = P(A) + P(AB) \geq P(A)$.

Формула сложения

$\forall A_1, A_2 \in F$:

$$P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) - P\left(A_1 \cap A_2\right)$$

Доказательство



$A_1 = A_1\Omega = A_1\left(A_2 + \overline{A_2}\right) = A_1A_2 + A_1\overline{A_2}$

$A_2 = \Omega A_2 = \left(A_1 + \overline{A_1}\right)A_2 = A_1A_2 + \overline{A_1}A_2$

Отсюда: $A_1 \cup A_2 = A_1A_2 + A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2 \Rightarrow$ из аддитивности:

$$P \Rightarrow \begin{cases} P\left(A_1\right) = P\left(A_1A_2\right) + P\left(A_1\overline{A_2}\right) \\ P\left(A_2\right) = P\left(A_1A_2\right) + P\left(\overline{A_1}A_2\right) \\ P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(A_1A_2\right) + P\left(A_1\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}A_2\right) \end{cases}$$

Упражнение

Найдем $P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)$

Решение

$$P\left(\left(A_1 \cup A_2\right) \cup A_3\right) = P\left(A_1 \cup A_2\right) + P\left(A_3\right) - P\left(\left(A_1 \cup A_2\right) \cap A_3\right) =$$

$$= P\left(A_1 \cup A_2\right) + P\left(A_3\right) P\left(\left(A_1 \cap A_3\right) \cup \left(A_2 \cap A_3\right)\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) - P\left(A_1A_2\right) + P\left(A_3\right) - P\left(A_1A_3\right) - P\left(A_2A_3\right) + P\left(\left(A_1 \cap A_3\right) \cap \left(A_2 \cap A_3\right)\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) - P\left(A_1 \cap A_2\right) + P\left(A_3\right) - P\left(A_1 \cap A_3\right) - P\left(A_2 \cap A_3\right) - P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + P\left(A_3\right) - P\left(A_1A_2\right) - P\left(A_2A_3\right) - P\left(A_1A_3\right) + P\left(A_1A_2A_3\right).$$

Упражнение

Доказать: $A_1, \cdots, A_n, A \in F$ $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P\left(A_1\right) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P\left(A_{i_1}A_{i_2}\right) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P\left(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\right) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Упражнение

Доказать $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{n=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$ используя счетную аддитивность.

5. Субаддитивность

1. Конечное $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$

2. Счетное $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$

Указание

Введем вспомогательное $B_1 = A_1$. $B_2 = A_2 \backslash A_1 \equiv \overline{A_1} A_2 \Rightarrow B_1 B_2 = \varnothing$, $B_1 + B_2 = A_1 \cup A_2$. При этом $B_k \subset A_k, \forall k \Rightarrow P\left(B_k\right) \le P\left(A_k\right)$ $, P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(B_1 + B_2\right) =$ $= P\left(B_1\right) + P\left(B_2\right) \le P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right)$.

Объединение множеств состоит из тех и только тех элементов, которые есть хотя бы в одном из них.

Пересечение множеств состоит из тех элементов, которые есть в обоих множествах.

Мера

Есть модели, базирующиеся на дискретном Ω: F состоит из всех Ω. В недискретном не все Ω в F. Есть модели с недискретным Ω, тогда этот случай обобщают.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ (n = 1,2,3)$$

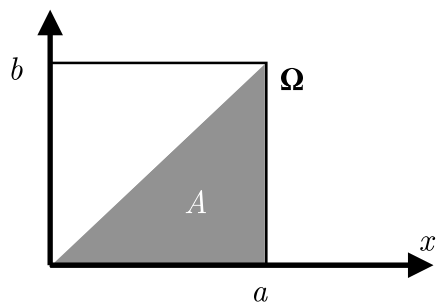
Апеллируем к тому, что какие-то Ω можно приписывать меру. Мера – неотрицательная функция множества.

Определение: mes_n для некоторых подмножеств $A \subset \mathbb{R}^n$ – «хорошие» множеств.

Пусть $0 < \mathrm{mes}(\Omega) < +\infty$. Считаем, что в Ω σ-алгебра F, содержащая «хорошие подмножества. То есть можно приписать меру $\mathrm{mes}_n(A)$. **Внимание:** $\exists F$ такая что $F \subsetneq 2^{\Omega}$. Можно ввести P на F и при этом так, что для «хороших» $A \in F$:

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}_n(A)}{\mathrm{mes}_n(\Omega)}$$

Эта величина называется заданием **геометрическим заданием вероятности.**



Геометрическое задание называется равномерным распределением вероятностью. Событиями нулевой и малой вероятности пренебрегаем.

Лекция 3

Даже в классической модели, когда конечное число исходов и вероятность у каждого исхода одинаковая: $\left|\Omega\right| = N \in \mathbb{N}$, $\left(F = 2^{\Omega}\right)$. $P_N = P\{\omega\} = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{\left|\Omega\right|} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}$.

Трудность состоит в подсчете мощности. Иногда требуется изобретательность.

Пример:

Задача о баллотировке. Имеется ограниченный набор выборщиков и 2 кандидата. Кандидат A имеет a голосов, кандидат B — b. $a + b = n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Каждый выборщик получает один бюллетень. Пусть голос за A обозначается как $+1$, а голос за B как -1. То есть $\omega = \left(i, \cdots, i_n\right)$, где $i_j = \pm 1$, $\quad j = \overline{1,n}$. Пусть $a > b$, какова вероятность того, что бюллетени разложены так, что на каждом этапе подсчета кандидат A лидировал? $A = \left\{\omega : i_1 > 0, i_1 + i_2 > 0, \cdots, i_1 + \cdots + i_n = a - b > 0\right\}$.

Решение:

Обозначим $S_k = i_1 + \cdots + i_k, \quad k = 1, \cdots, n = a + b$. Чему равна $P(A)$? В классической модели все расположения бюллетеней равновероятны:

$$\left|\Omega\right| = \frac{\left(a+b\right)!}{a!b!} = C_{a+b}^{a}$$

$$P(A) = \frac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}$$

Подробный разбор будет на семинаре.

Результат: $\left|A\right| = C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^{a} \Rightarrow P(A) = \dfrac{a \cdot b}{a + b}$.

Иногда реализовать алгоритм непросто. В следующем примере можно пойти путем с использованием известных приемов.

Пример:

В комнате живут два студента. Один покупает открытки на 8-е марта для однокурсниц. Открытки одинаковые, но в каждую он пишет именованное поздравление. Также он купил конверты, которые подписал. Опаздывая на пару, он просит соседа разложить открытки по конвертам. Сосед не смотрит на поздравления внутри и раскладывает открытки случайным образом. Какова вероятность совпадения хотя бы одной открытки с её конвертом.

Упрощая задачу:

Имеется n пронумерованных шаров и n пронумерованных ящиков. В каждый ящик помещается один шар. Какова вероятность совпадения номеров хотя бы одного шара с ящиком.

Решение:

Шары можно разложить $n!$ способами: $\left|\Omega\right| = n!$ $\omega = \left(i_1, \cdots, i_n\right)$, где $1 \le i_j \le n$.

$A = \left\{\omega : \exists k < n; k, n \in \mathbb{N} : q_k = k\right\}$ — хотя бы в один шар совпадает со своим ящиком.

$$P\left(A\right) = \frac{\left|A\right|}{n!}$$

Решение не сводится к подсчету $\left|A\right|$.

Вводим вспомогательное событие $A_j = \left\{\omega : i_j = j\right\} = \overline{1{,}n}$ – совпадение в j-м месте.

Ясно, что $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$

Применим формулу сложения:

$$P\left(A\right) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P\left(A_{i_1}, A_{i_2}\right) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P\left(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}\right) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(A_1, \cdots, A_n\right)$$

Дело в том, что $P\left(A_j\right) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$, $\quad \forall j$. Знаем что $\left(A_j\right) = (n-1)$. Аналогично:

$P\left(A_1, A_2\right) = \dfrac{(n-2)!}{n!}, \cdots, P\left(A_1, \cdots, A_n\right) = \dfrac{1}{n!}$. Получаем, что:

$P\left(A\right) = n\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{2!(n-2)!}\dfrac{(n-2)!}{n!} + \dfrac{n!}{3!(n-3)!}\dfrac{(n-3)!}{n!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!} \quad \Rightarrow$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ искомая вероятность: $P = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

Заметим, что для экспоненты при разложении в ряд Тейлора имеем:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + 2n \Rightarrow \left|2n\right| < \frac{1}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\delta_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - P_n$$

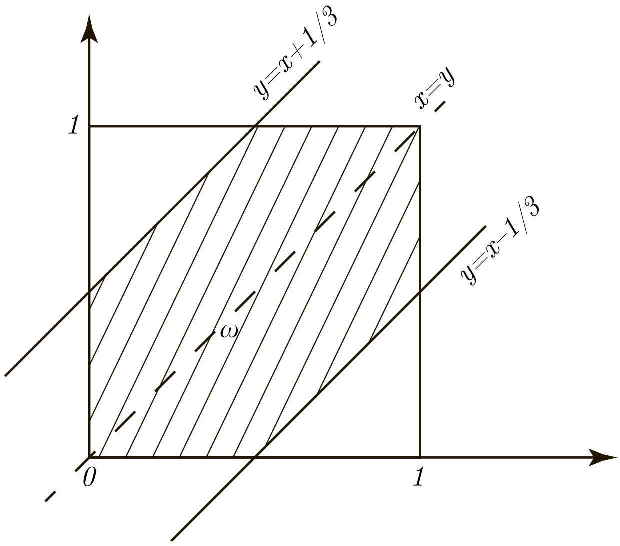
.

$e^{-1} = 1 - P_n + 2n = P_n = \left(1 - e^{-1}\right) + 2n \xrightarrow{n \to \infty} 1 - e^{-1}$.

Принцип решения: интересующее событие выражается логическим путем из более простых событий. В отличие от классической модели бывают ситуации с недискретным вероятностным пространством. $F \subsetneq 2^{\Omega}$.

Модель геометрической вероятности

Трудность теоретико-вероятностных задач. $\omega = (x, y)$. ω – исход эксперимента, x – момент прихода первого студента в долях часа. y – момент прихода второго студента в долях часа. $\omega = (x, y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1]$



$$A = \left\{ \omega : \left| x - y \right| \le \frac{1}{3} \right\}$$

Будем пользоваться моделью геометрической вероятности $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\mathbf{mes}_2(A)}{\mathbf{mes}_2(\Omega)}$$

$$x - \frac{1}{3} \le y \le x + \frac{1}{3},\ (x, y) \in \Omega$$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) =$$

$$= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Теперь разберем схему Бернулли.

Схема независимых испытаний Бернулли

Эксперимент «составной» — это серия из n повторений одинакового опыта («испытаний»). Испытание — эксперимент, в котором событие C либо происходит, либо нет.

$$\Omega \ni \omega = (k_1, \cdots, k_n) \text{ где } k_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n} \Rightarrow \left|\Omega\right| = 2^n < \infty$$

Ω – конечное множество $\Rightarrow F = 2^{\Omega}$.

Задание вероятности в конечном пространстве:

Каждый $\omega \to p_\omega = \prod\limits_{j=1}^{n} p^{k_i} q^{1-k_j}$. $k_i = 1 \Rightarrow p^1 q^0 = p$, $k_i = 0 \Rightarrow p^0 q^1 = q$.

2 способа подсчета (См <u>схема Бернулли в семинаре 3</u>)

Условная вероятность

В классической модели: (Ω, F, P), $\left|\Omega\right| = N$.

$\left|A\right| = k, \quad \left|B\right| = m$

Пусть произошло B:

В результате проведения эксперимента:

$$\omega \in B$$

В классической модели любое событие из B равновероятно.

Пусть произошло A:

P что произошло A при условии, что произошло B:

$$P\left(A|B\right) = \frac{n}{m} = \frac{\left|AB\right|}{\left|B\right|} = \frac{\left|AB\right|/\left|\Omega\right|}{\left|B\right|/\left|\Omega\right|} = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)},\ \left|A\right| = k,\ \left|B\right| = m$$

$$\left|A \cap B\right| = n \leq m \text{ так как } AB \subset B$$

В классической модели для возможного B $\left(B \neq \varnothing\right)$ $P\left(B\right) > 0$.

Определение $P\left(A|B\right) = \dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}$, если $P\left(B\right) > 0$.

Пример

Классическая модель для подбрасывания игральной кости.

$$\Omega = \left\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\right\}$$

$$B = \left\{4{,}5{,}6\right\},\ A = \{\text{четное число}\} = \left\{2{,}4{,}6\right\}$$

$$P\left(B\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P\left(A\right)$$

$$P\left(A|B\right) = \frac{2}{3} > P\left(A\right).$$

Рассмотрим $\overline{A}$ – нечетное число $\overline{A} = \left\{1{,}3{,}5\right\}$.

$$P\left(A\right) = \frac{1}{2},\ P\left(\overline{A}|B\right) = \frac{1}{3} < P\left(\overline{A}\right)$$

Пусть $C = \{1{,}4\} \Rightarrow P\left(C\right) = \dfrac{1}{3}$

$$P\left(C|B\right) = \frac{1}{3} = P\left(C\right)$$

Упражнение

При фиксированном $B \subset P\left(B\right) > 0$ функция на событиях $F \ni A \longrightarrow P\left(A|B\right) \equiv P_B\left(A\right)$

Семинар 3

Напоминание: мы не вводим понятие условного события, но вводим понятие условной вероятности.

Задача II.10

Примечание: говорить о вероятности можно только в рамках модели. Берем классическую модель, где все исходы равновероятны.

Классическая модель(Ω, F, P)

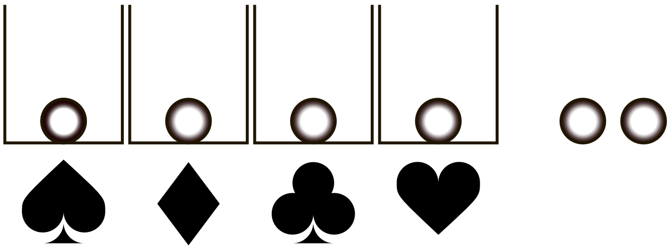
$\left|\Omega\right| = C_{52}^{6}$ – число выборок без возвращений, неупорядоченных, объема 6 из 52. Так как модель классическая:

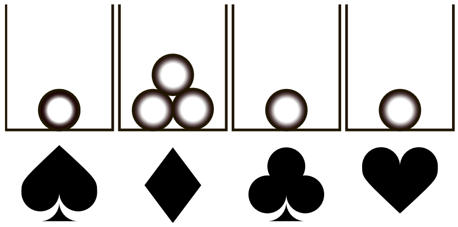
$$P\left(A\right) = \frac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}$$

Решение

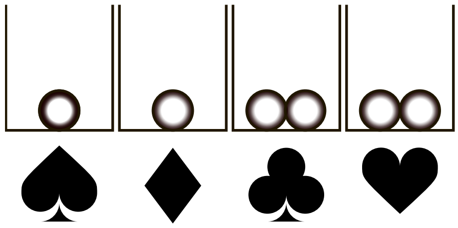
Рассмотрим два решения задачи

1. $A = \{\text{в выборке есть все масти}\}$





2 шарика в одном ящике



по шарику в двух ящике

$A_1 + A_2 \Rightarrow$

$A_1 = \{\text{в выборке 3 карты 1-й масти}\}$

$A_2 = \{\text{по 2 карты 2-х мастей}\}$

$\left|A\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right|$

Считаем: $\left|A_1\right| = C_4^1 C_{13}^3 \left(C_{13}^1\right)^3$, $\left|A_2\right| = C_4^2 \left(C_{13}^2\right)^2 \left(C_{13}^4\right)^2$.

2. Рассмотрим $\overline{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, где вспомогательные события B_k возникают в результате перенумерования мастей. ($\spadesuit \to 1$, $\blacklozenge \to 2$, $\clubsuit \to 3$, $\heartsuit \to 4$).

$B_k = \{\text{в выборке нет } k\text{-й масти}\}$, $k = \overline{1,4}$. Отрицание $\overline{A}$: нет хотя бы одного элемента.

1. События совместны, применим формулу сложения:

$$P\left(\overline{A}\right) = \sum_{1 \le i \le 4} P\left(B_i\right) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 4} P\left(B_{i_1}, B_{i_2}\right) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4} P\left(B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}\right) - \cancel{P\left(B_1, B_2, B_3, B_4\right)}$$

Применяем формулу сложения, так как легко вычислить правую часть.

$$P\left(B_i\right) = \frac{\left|B_i\right|}{\left|\Omega\right|}, \text{ а } \left|B_i\right| = C_{39}^6, \quad \forall i \text{ и тд.}$$

2. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ — ответ.

Условная вероятность

В некотором ВП (Ω, F, P) фиксировано $B \in F \subset P(B) > 0$.

Назовем условной вероятностью A при условии B число

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

В обратную сторону не работает.

Пример

Двукратное подбрасывание игральной кости. Какова вероятность, что в первый раз выпала единица, а во второй – четное число.

Решение:

$\omega = [i, j], \quad 1 \le i, j \le 6, \quad |\Omega| = 36.$

B – выпала единица. A – выпало четное число.

$$A = \{\omega : i = 1\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{\omega : i = 2{,}4{,}6\} \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$AB = \{(1{,}2), (1{,}4), (1{,}6)\} = P(AB) = \frac{|AB|}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} = P(A) \text{ – они совпали.}$$

Другой пример

$$C = \{\omega : i + j \text{ четные}\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{2}, \ |CB| = 9$$

$$P(C|B) = \frac{|CB|}{|B|} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

Еще один пример:

Условие $BC = \{\omega : i \text{ четное}\}$.

$$P(A|BC) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(\varnothing)}{P(BC)} = 0 \ne P(A).$$

Зависимые и независимые события

Условная вероятность может совпасть с условием, а может не совпасть. Раньше говорили, что A не зависит от B если $P(A) = P(A|B)$.

Пусть A не зависит от B, тогда

$$P(A|B) = P(A) \xrightarrow{P(B)>0} P(AB) = P(A)P(B) \xrightarrow{P(A)>0} P(B|A) = P(B) \text{ («}B\text{ не зависит от }A\text{»)}$$

Современное определение независимых событий:

Определение: События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Упражнение

Исследовать связь между несовместностью и независимостью событий.

Соглашение: если в модели свойство $P(AB) = P(A)P(B)$ не выполняется, то события называются зависимыми в вероятностном смысле.

Если модель составлена хорошо, то автор стремится в модели сделать реально несвязанные события независимыми.

Пример

Из колоды в 36 карт вынимают одну карту. A – извлечен туз. B –извлечена бубновая карта.

$P(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

$P(B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

$P(AB) = \dfrac{1}{36} \Rightarrow$ в нашей модели A и B независимые события. Теперь добавим одну пустую карту:

$P(A) = \dfrac{4}{37}$

$P(B) = \dfrac{9}{37}$

$P(AB) = \dfrac{1}{37} \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ события зависимые.

Задача

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + 2px + q = 0$$

где p, q – координаты случайной точки ω. Точка наудачу выбирается из квадрата 2×2.

$$\omega\left(p, q\right) \in \Omega = \left\{(u, v) : \left|u\right| \leq 1, \left|v\right| \leq 1\right\}$$

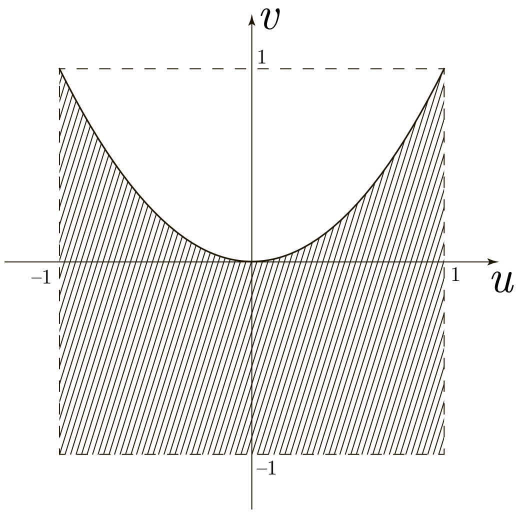
Воспользуемся моделью геометрической вероятности.

Событие A – подмножества $A \subset \Omega$.

$\mathrm{mes}_2(A) =$ «площадь»

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}_2(A)}{\mathrm{mes}_2(\Omega)}$$

$A = \left\{\text{корни действительные}\right\}$



$(p,q) = \omega \in A \Leftrightarrow p^2 - q \geq 0$

$\mathrm{mes}_2(\Omega) = 4$

$$\mathrm{mes}_2(A) = 2 + 2\int_0^1 u^2 du = 2 + 2\frac{u^3}{3}\Bigg|_0^1 = $$

$$= 2 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$P(A) = \frac{8}{3}/\frac{12}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$B = \{\omega : p > 0\}$

$$P(A\,|\,B) = \frac{1}{3} \neq P(A).$$

Схема Бернулли

n — число испытаний. $p \in (0{,}1)$ — пока просто число.

$$\omega = (k_1, \cdots, k_n),\ \text{где } k_j \in \{0{,}1\},\ j = \overline{1,n} \Rightarrow |\Omega| = 2^n.$$

Вводим конечное вероятностное пространство. $F = 2^{\Omega}$. Задание вероятности P.

$$\omega \longrightarrow P_\omega := \prod p^{k_j} q^{1-k_j} = p^k q^{n-k},\ \text{где } k = \sum_{j=1}^n k_j \text{ – число успехов.}$$

$$n = 1 \qquad \begin{matrix} q & p \\ \| & \| \\ (0) & (1) \end{matrix}$$

$$n = 2 \qquad \begin{matrix} q^2 & pq \\ qp & p^2 \end{matrix} = \begin{matrix} (0{,}0) & (1{,}0) \\ (0{,}1) & (1{,}1) \end{matrix}$$

$$n = 3 \qquad \begin{matrix} q^3 & q^2p \\ q^2p & qp \\ q^2p & qp^2 \\ qp & p^3 \end{matrix} = \begin{matrix} 000 & 100 \\ 001 & 101 \\ 010 & 110 \\ 011 & 111 \end{matrix}$$

Как ранее говорилось на лекции, есть два способа подсчета.

Первый способ

Вводим событие $B_l = \left\{\omega : \sum_{j=1}^n k_j,\ |\omega| = l\right\},\ l = 0{,}1{,}2{,}\cdots, n.$

$B_l = \{\text{ровно } l \text{ успехов при } n \text{ испытаний}\} \Leftrightarrow P_\omega = p^l q^{n-l}$

Ассоциативность сложения: $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p_\omega = \sum\limits_{l=0}^{n}\left(\sum\limits_{\omega\in B_l} p_\omega\right) = \sum\limits_{l=0}^{n}\left|B_l\right| p^l q^{n-1} = \left(p+q\right)^n = 1.$

Второй способ

$$\sum P_\omega = \sum \prod_{j=1}^{n} p^k q^{1-k} = \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{1}\sum_{k_n=0}^{1} p^{k_1}q^{1-k_1}\cdots p^{k_{n-1}}q^{1-k_{n-1}}p^{k_n}q^{1-k_n} =$$

$$\sum_{k_n=0}^{1} p^{k_n}q^{1-k_n}\left[\sum_{k_1}\sum_{k_2}\cdots\sum_{k_{n-1}}\prod_{j=2}^{n} p^n q^{1-k_1}\right] = p[] + q[] = [] = \cdots = p + q = 1$$

Доказать, что при $P(A) = \sum\limits_{\omega\in A} p_\omega$, P *– счетно-аддитивно, или* $A_m = \left\{\omega : k_m = 1\right\} =$ $= \left\{\text{\textit{успех при} } m\text{\textit{-м событии}}\right\}$. P *— вероятность успеха в отдельном испытании и она всегда одинакова.*