

Булинский Андрей Вадимович

Теория вероятностей.
Лекции и семинары.
Второй курс. Весенний семестр.

А. Нехаев, 654 группа.

Версия от 4 марта 2018 г.

2018 Москва

Оглавление

Лекция 1.	3
Предмет изучения	3
Частотная интерпретация вероятностей	3
Вероятностное пространство	3
Операции над множествами	4
Семинар 1	6
Выборки	6
Классическое ВП	8
Лекция 2	9
Требования к ВП:	9
Свойства σ -алгебры	9
Семинар 2	11
Свойства вероятности	12
Формула сложения	13
Мера	14
Лекция 3	15
Модель геометрической вероятности	17
Схема независимых испытаний Бернулли	17
Условная вероятность	17
Семинар 3	18
Условная вероятность	20
Зависимые и независимые события	20
Схема Бернулли	22
Лекция 4	23
Формула полной вероятности	23
Формулы Байеса	24
Апостериорные вероятности	25
Некоторые примеры понятия независимости	25
Замечания, вытекающие из определения независимых событий.	26
Семинар 4	27

Лекция 1.

Предмет изучения

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие случайным явлениям. Неслучайные явления будем называть детерминированными. В курсе будем изучать модели случайных экспериментов.

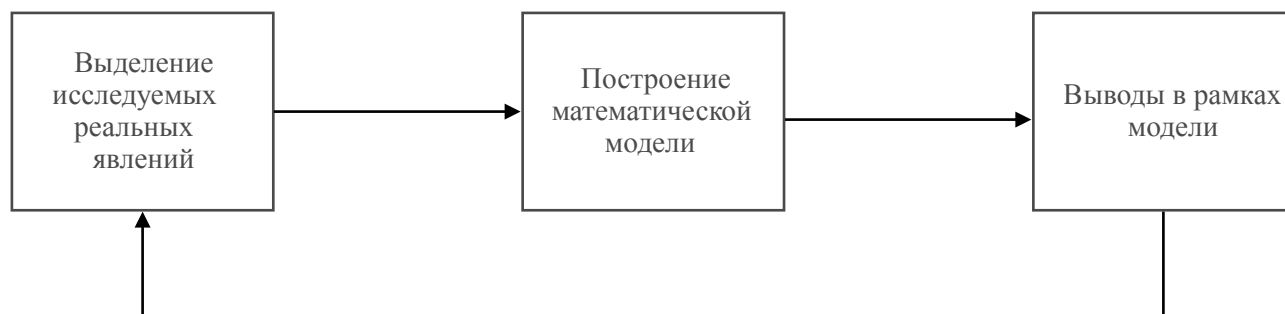


Рис. 1. Научный подход к исследованию явления

Модель случайных экспериментов подразумевает:

1. Воспроизводимость (контроль основных факторов).
2. Непредсказуемость исходов.

Частотная интерпретация вероятностей

Основные понятия:

Имеется серия из N повторений эксперимента.

A – явление (событие), которое может произойти.

$N(A)$ – число экспериментов, когда A произошло.

$\nu_N(A) = \frac{N(A)}{N}$ – частота события A в серии из N повторений.

Свойство стабилизации:

Пусть $N_1 \gg 1$ и $N_2 \gg 1$, то $\nu_{N_1}(A) \approx \nu_{N_2}(A)$.

$P(A)$ – вероятность.

Вероятностное пространство

Математической моделью случайного эксперимента является вероятностное пространство. Для упрощения задачи используем математический аппарат теории множеств (и теории мер)

Вероятностное пространство состоит из трех множеств (Ω, F, P) .

1. Непустое множество Ω (омега большое) – всевозможные элементарные исходы эксперимента. Пояснение: Элементарные исходы – простейшие, взаимоисключающие исходы.

Пример 1: однократное подбрасывание монеты. Комментарий: пример с монеткой крайне популярен как в русскоязычных, так и в англоязычных пособиях, поэтому будем использовать числовые значения для обозначения исходов эксперимента: $\Omega = \{\Gamma, P\}$, $\Omega = \{H, T\}$, $\Omega = \{0, 1\}$.

Здесь введем понятия мощности множества – числа элементов конечного множества. Обозначение: $|\Omega| = \#\Omega = 2$

Пример 2: Эксперимент: n -кратное подбрасывание монеты, ($n \in \mathbb{N}$).

Введем понятие элементарных исходов ω (омэга малое).

$\omega \in \Omega$, $\omega = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_j \in \{0, 1\}; j = \overline{1, N}$. ω – двоичное N -разрядное слово.

Добавим, что мощность Ω в данном случае $|\Omega| = 2^N$. В теории вероятностей Ω – пространство элементарных исходов.

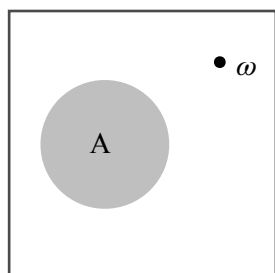
Пример 3: n -кратное подбрасывание игральной кости:

$\omega = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тогда $|\Omega| = 6^N$.

Часто на практике нас интересует не конечный результат эксперимента, а ответ на вопрос, удовлетворяет ли этот результат определенным критериям (Простейший пример – попадание стрелка в мишень. Нас интересует не в какую точку попадает снаряд, а в какую область мишени он попадет). Применяем теоретико-множественный аппарат.

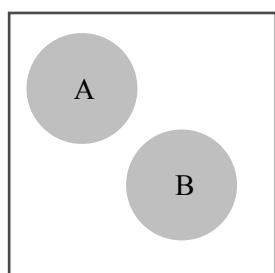
Операции над множествами

1. Теоретико-множественное вычитание: $\Omega \setminus A$.
2. Дополнение к A в Ω : $\bar{A} := \Omega \setminus A \equiv A^c$. Будем пользоваться теоретико-множественным аппаратом, но поменяем названия: Множество на Событие, Дополнение на Противоположное событие.



$\omega \in A$ – произошло событие A

$\omega \notin A$ – произошло противоположное событие



$\emptyset \subset A$

$\emptyset \subset B$

$A \cap B = \emptyset$, \subset – знак нестрогого вложения. $A \subset B$ если

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B,$$

$$A = B \text{ если } \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

3. Пересечение: $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B\}$

4. Объединение: $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \{\omega \text{ содержится хотя бы в одном из множеств } A \text{ или } B\}$

2. Выделяется класс F подмножеств Ω , именуемый событиями если:

$$1) A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F,$$

$$2) A, B \in F \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in F \\ A \cap B \in F \end{cases}$$

$\Omega \in F$ – достоверные события

$\bar{\Omega} = \emptyset$ – недостоверные события

Требование к классу событий:

$$1. \Omega \in F$$

$$2. A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$$

$$3. A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in F$$

$$4. A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in F$$

Замечание: из первых трех свойств следует четвертое, а из первых двух и четвертого следует третье. Такие свойства подмножеств Ω называются алгеброй.

3. На событиях $A \in F$ задается функция P со свойствами, имитирующими свойства частот.

$$F \ni A \longrightarrow P(A) \in \mathbb{R}$$

$$\nu_N(A) = \frac{N(A)}{N}, \nu_N(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Соглашение: иногда пишем вместо $A_1 \cup A_2 \equiv A_1 + A_2$ только при условии, что

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$N(A_1 + A_2) = N(A_1) + N(A_2)$$

$$\nu_N(A_1 + A_2) = \nu_N(A_1) + \nu_N(A_2)$$

Свойства функции P :

$$1. P(A) \geq 0$$

$$2. P(\Omega) = 1$$

$$3. P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), \text{ если } A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Счетная аддитивность:

Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ и $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Семинар 1

Задача о выборках (вспомогательная)

Есть совокупность N различных объектов ($N \in \mathbb{N}$), причем занумерованных.

$$\begin{array}{ccccccc} \{a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \{1, & 2, & 3, & \dots, & N\} \end{array}$$

Сколько выборок n из этой совокупности можно привести?

Решение:

Однозначного ответа нет в силу некорректности постановки задачи: не определено понятие выборки

Выборки

Упорядоченная выборка без возвратов — элемент можно выбрать в множество один единственный раз, при этом порядок элементов в множестве важен.

$$1 \leq i_k \leq N, \quad k = \overline{1, n}, \quad \omega = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_n), \quad i_j \neq i_k, \quad j \neq k$$

$$|\Omega| = N(N-1) \dots (N-n+1) =: A_N^n - \text{число размещений из } N \text{ по } n. \quad A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}.$$

Случай, когда $n = N$:

$$A_N^N = \prod_{k=1}^N k =: N!, \quad N \in \mathbb{N}, \text{ удобно считать } 0! = 1$$

Неупорядоченная выборка без возвратов — элемент можно выбрать в множество один единственный раз, при этом порядок элементов в множестве не имеет значения.

$$|\Omega| = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = C_N^n - \text{число сочетаний из } N \text{ по } n.$$

Разрешим $n = 0, 1, \dots, N \Rightarrow C_N^n = C_N^{N-n}, \quad \omega = (i_1, \dots, i_n) \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N.$

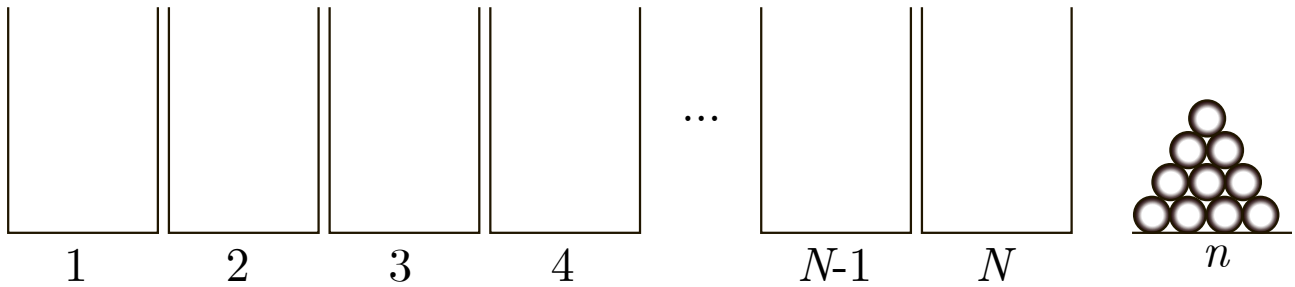
Упорядоченная выборка с возвратами — элемент можно выбрать в множество несколько раз, при этом порядок элементов в множестве важен.

$$\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n), \text{ где } 1 \leq i_k \leq N, \quad k = \overline{1, n}. \quad |\Omega| = N^n$$

Неупорядоченная выборка с возвратами — элемент можно выбрать в множество несколько раз, при этом порядок элементов в множестве не важен.

$$\omega = (n_1, n_2, \dots, n_N), \text{ где } n_k \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ при этом } \sum_{k=1}^N n_k = n.$$

Решим задачу, эквивалентную предыдущей о размещении n неразличимых шаров по N различным ящикам (ячейкам)



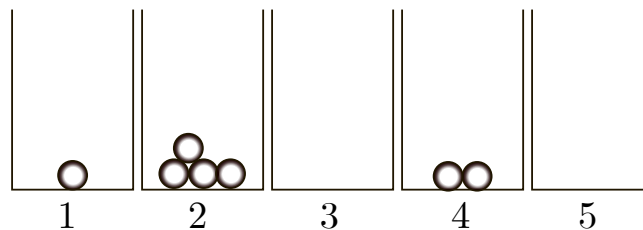
Эксперимент по «случайному» размещению шаров. $\omega = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ – набор чисел заполнения удовлетворяет требованиям: $n_k \in \mathbb{Z}^+$, $k = \overline{1, N}$, $\sum_{k=1}^N n_k = n$.

Замечание:

Бозоны (частицы с целым спином) размещаются таким образом. Для бозонов $n, N \in \mathbb{N}$.

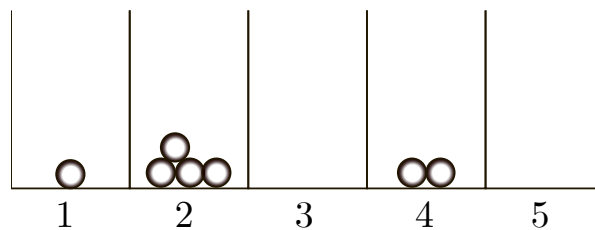
Пример:

$$N = 5, \quad \omega = (1, 4, 0, 2, 0), \quad n = 7$$

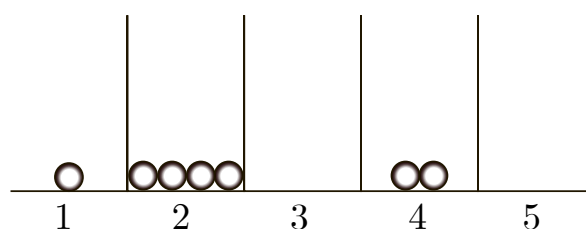


Решение:

1. Сдвигаем и склеиваем стенки



2. Удаляем несдвоенные стенки



3. Переведем стенки в единицы, а шары в нули.

01000011001

$N + 1 + n$ -разрядное слово, где ровно $N - 1$ заняты единицами.

$$\Omega_B = C_{N+n-1}^{N-1} = C_{N+n-1}^n.$$

Замечание:

$$\text{Фермионы: } n_k \in \{0,1\}, \quad |\Omega_F| = \begin{cases} 0, & n > N \\ C_N^n, & 1 \leq n \leq N \end{cases}$$

Простейшая модель задания вероятности – классическая.

Классическое ВП

1. Ω – непустое конечное множество. Его элементы перенумерованы. $|\Omega| = N \in \mathbb{N}$.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

2. Выделим множество $F = 2^\Omega$ – совокупность всех подмножеств Ω . Возникает несколько вопросов:

$$1. \quad |F| = ? \quad A \subset \Omega \Rightarrow A \in F$$

2. Почему F является σ -алгеброй подмножеств Ω ?

3. Почему при классической модели $P(A)$ – счетно-аддитивная функция.

3. Задание вероятности классическое

$$1. \quad \omega_k \longrightarrow P_k = \text{const} = \frac{1}{N} = \frac{1}{|\Omega|}, \quad k = \overline{1, N} \quad (\text{все элементарные исходы равновероятны})$$

$$2. \quad A \in F (A \subset \Omega) \longrightarrow P(A) := \sum_{k: \omega_k \in A} P_k = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (|\emptyset| = 0) \text{ и } P(\emptyset) = 0.$$

Пример

Допустим, мы два раза кидаем кость. Какова вероятность того, что два раза выпали четные числа?

Решение

Используем классическую модель задания вероятности.

$$\omega = (i, j) \quad 1 \leq i, j \leq 6$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}:$$

$$|\Omega| = 6^2 = 36, \quad P_\omega = \frac{1}{36}, \quad A = \{\omega : i + j - \text{четное}\}.$$

$$P(A) = \frac{1}{2}. \quad - \text{ Ответ.}$$

Лекция 2

Подробнее о вероятностном пространстве и σ -алгебре.

Модель случайного эксперимента – вероятностное пространство (Ω, F, P) .

Требования к ВП:

1. F является σ - алгеброй подмножеств Ω .
2. P является вероятностной мерой, заданной на событиях.

Элементы $A \in F$ называются **событиями**.

σ -алгеброй подмножеств Ω называется класс подмножеств $A \subset \Omega$ со свойствами:

1. $\Omega \in F$
2. $A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$
3. $A_n \in F, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F \left(\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \right)$

Напоминание: « \subset » – нестрогое вложение, то есть $A \subset B$ означает: $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$.

$A = B$ понимаем как $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.

Свойства σ -алгебры

Рассмотрим подробнее свойства σ -алгебры.

1. Первое свойство $\Omega \in F$ вполне ясно и дополнительных разъяснений не требует
2. $\bar{\bar{A}} = A$ – принцип исключения 3-го.



$\omega \in A$. Альтернатива: $\omega \notin A \Leftrightarrow \omega \in \bar{A}$

Упражнение: Доказать, что $\bar{\bar{A}} = A$

Доказательство: $\omega \in \bar{\bar{A}} \Leftrightarrow \omega \notin \bar{A} \Leftrightarrow \omega \in A$

3. Операции объединения: « \cup », пересечения « \cap ». Каждая операция коммутативная, ассоциативная и взаимно-дистрибутивная.
4. Соотношение двойственности (де Моргана)

1. Пусть семейство множеств индексировано индексом $i \in I$ ($I \neq \emptyset$) (I – любой мощности). ($A_i \subset \Omega, \forall i \in I$). (Пояснение: $\forall i \in I \Leftrightarrow \forall i$)

Тогда: $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$

$$2. \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

Доказательство

$$1. \quad \omega \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \omega \notin A_i, \forall i \in I \Leftrightarrow \omega \in \overline{A_i}, \forall i \in I \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

2. Доказывается либо по аналогии, либо вытекает из 1-го пункта в силу $\overline{\overline{A}} = A$

Из трех свойств σ -алгебры через закон де Моргана вытекает 4-е свойство:

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F_i$$

Доказательство:

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in F \Rightarrow \overline{A_n} \in F, \forall n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F \Rightarrow F \ni \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

Из (1),(2),(3) \Rightarrow (4)

Упражнение 1: Доказать, что из 1,2,4 следует 3.

Итак, получили, что для σ -алгебры выполняются все 4 свойства.

Пример 1

Тривиальная σ -алгебра (подмножества непустого Ω) $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

5. Учтем свойство операций:

$$A \cup A = A, A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega, \text{ где } A \subset \Omega$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Пример 2 «Меньше не бывает»

\mathfrak{F} – любая σ -алгебра подмножеств Ω . Оно содержит $\emptyset, \Omega \Rightarrow F_0 \subset \mathfrak{F}$

Пример 3 Нетривиальная σ -алгебра (если $|\Omega| > 1$)

$$F_{\max} = 2^{\Omega} := \{\text{все подмножества } \Omega\} \ni \emptyset \subsetneq A \subset \Omega. \text{ Всегда } \emptyset \subset A, A \subset \Omega$$

Напоминание: \subset – нестрогое вложение, \subsetneq – строгое вложение.

При выполнении теоретико-множественных операций над Ω дают в результате Ω подмножество. $\Rightarrow \Omega$ подмножества замкнуты относительно теоретико-множественных операций.

$$F_{\min} \subset F_{\max}$$



Ω

$\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$ будем говорить, что A и \bar{A} образуют разбиение Ω .

$C = \{A_1, A_2\}, A_1 = A, A_2 = \bar{A}, \emptyset \subsetneq A \subsetneq \Omega$ – не является σ -алгеброй.

Рассмотрим $A_2 = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$, где A, \bar{A} является C . A_2 является σ -алгеброй.
 $C \subset A_2 \subset 2^\Omega$.

Мысленно рассмотрим пересечение всех σ -алгебр, содержащих подмножество M .
 Получим пересечение $\sigma\{M\}$ множеств Ω .

Упражнение:

1. $\sigma\{M\}$ является σ -алгеброй подмножеств Ω
2. Если σ -алгебра $A \supset M \Rightarrow A \supset \sigma\{M\}$

Решение:

1. Ω входит в каждую σ -алгебру \Rightarrow входит в пересечение $A \subset \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow A \subset A_i, \forall i \in I$

С подбрасыванием монеты: можем рассмотреть модель, где она встанет на ребро или укатится. Будем подбрасывать монетку пока не выпадет герб.

Элементарные исходы считаем точками.

Определение: Система A подмножества Ω называется алгеброй, если:

1. $\Omega \in A$
2. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{A}$
3. $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$

Упражнение. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}, \geq 2$ из $A_1, \dots, A_n \in A \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in A$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathfrak{A}$ (отличие от σ -алгебры – не счетное).

Задача

1. Всякая σ -алгебра \mathfrak{A} является алгеброй
2. Конечная алгебра \mathfrak{A} (т.е. $|A| = N, A = \{A_1, \dots, A_N\}$, где $A_1, \dots, A_N \subset \Omega$ является σ -алгеброй.
3. Есть бесконечные алгебры, не являющиеся σ -алгебрами. $\Omega = (0, 1] \subset \mathbb{R}$,
 $A = (a, b] \subset \Omega$, то есть $0 \leq a \leq b \leq 1$, тут $(a, a] = \emptyset$. \mathfrak{A} состоит из конечных объединений непересекающихся подмножеств вида A .

Семинар 2

Используем вероятностное пространство (Ω, F, P) . Вероятность P задана на событиях $A \in F$. Требования к P :

1. $P(A) \geq 0, \forall A$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Счетная аддитивность

Определение: Счетная аддитивность:

Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ и $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, то:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

причем этот ряд будет сходящимся.

Свойства вероятности P

1. $P(\emptyset) = 0$

Доказательство:

Рассмотрим $A_n = \emptyset, n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$ и ряд

сходящийся в силу счетной аддитивности $\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2. P аддитивно (из счетной аддитивности получим аддитивность)

Доказательство:

Рассмотрим конечный набор $A_n: A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, вводим

$$B_k = \begin{cases} A_k, k \leq n \\ \emptyset, k > n \end{cases} \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k &= \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^n A_k \cup \emptyset = \sum_{k=1}^n A_k \Rightarrow P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \sum_{k=1}^n P(B_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) \end{aligned}$$

$$\text{Но } \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) = P(\emptyset) = 0 \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^n P(B_k) + \cancel{\sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k)} = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

3. Из аддитивности следует, что $\forall A \in F, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Доказательство:

$$A \bar{A} = \emptyset, A + \bar{A} = \Omega \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

4. Из аддитивности следует **монотонность** P

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Доказательство:

$$B = \Omega B = (A + \bar{A})B = AB + \bar{A}B = A + \bar{A}B \text{ так как из } A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

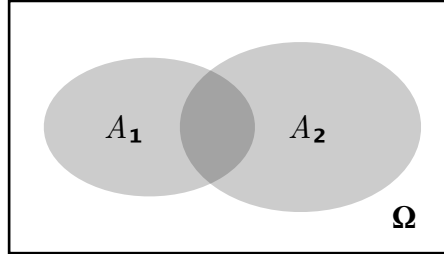
$$P(B) = P(A + \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) \geq P(A).$$

Формула сложения

$$\forall A_1, A_2 \in F :$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Доказательство



$$A_1 = A_1 \Omega = A_1 (A_2 + \overline{A_2}) = A_1 A_2 + A_1 \overline{A_2}$$

$$A_2 = \Omega A_2 = (A_1 + \overline{A_1}) A_2 = A_1 A_2 + \overline{A_1} A_2$$

Отсюда: $A_1 \cup A_2 = A_1 A_2 + A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2 \Rightarrow$ из аддитивности:

$$P \Rightarrow \begin{cases} P(A_1) = P(A_1 A_2) + P(A_1 \overline{A_2}) \\ P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\overline{A_1} A_2) \\ P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 A_2) + P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) \end{cases}$$

Упражнение

Найдем $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Решение

$$\begin{aligned} P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = \\ &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_2 A_3) - P(A_1 A_3) + P(A_1 A_2 A_3). \end{aligned}$$

Упражнение

Доказать: $A_1, \dots, A_n, A \in F (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

Упражнение

Доказать $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}$ используя счетную аддитивность.

5. Субаддитивность

$$1. \text{ Конечное } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$2. \text{ Счетное } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Указание

Введем вспомогательное $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1 \equiv \overline{A_1} A_2 \Rightarrow B_1 B_2 = \emptyset$, $B_1 + B_2 = A_1 \cup A_2$.
 При этом $B_k \subset A_k, \forall k \Rightarrow P(B_k) \leq P(A_k)$, $P(A_1 \cup A_2) = P(B_1 + B_2) =$
 $= P(B_1) + P(B_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

Объединение множеств состоит из тех и только тех элементов, которые есть хотя бы в одном из них.

Пересечение множеств состоит из тех элементов, которые есть в обоих множествах.

Мера

Есть модели, базирующиеся на дискретном Ω : F состоит из всех Ω . В недискретном не все Ω в F . Есть модели с недискретным Ω , тогда этот случай обобщают.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$$

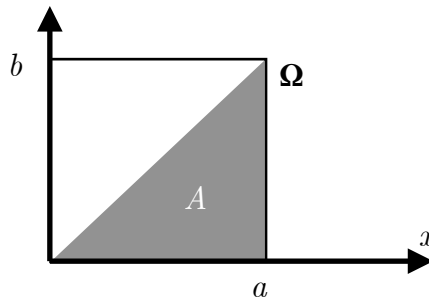
Апеллируем к тому, что какие-то Ω можно приписывать меру. Мера – неотрицательная функция множества.

Определение: mes_n для некоторых подмножеств $A \subset \mathbb{R}^n$ – «хорошие» множеств.

Пусть $0 < \text{mes}(\Omega) < +\infty$. Считаем, что в Ω σ -алгебра F , содержащая «хорошие» подмножества. То есть можно приписать меру $\text{mes}_n(A)$. **Внимание:** $\exists F$ такая что $F \subsetneq 2^\Omega$. Можно ввести P на F и при этом так, что для «хороших» $A \in F$:

$$P(A) = \frac{\text{mes}_n(A)}{\text{mes}_n(\Omega)}$$

Эта величина называется заданием **геометрическим заданием вероятности**.



Геометрическое задание называется равномерным распределением вероятностью. Событиями нулевой и малой вероятности пренебрегаем.

Лекция 3

Даже в классической модели, когда конечное число исходов и вероятность у каждого исхода одинаковая: $|\Omega| = N \in \mathbb{N}$, $(F = 2^\Omega)$. $P_N = P\{\omega\} = \frac{1}{N} = \frac{1}{|\Omega|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Трудность состоит в подсчете мощности. Иногда требуется изобретательность.

Пример:

Задача о баллотировке. Имеется ограниченный набор выборщиков и 2 кандидата. Кандидат A имеет a голосов, кандидат B — b . $a + b = n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Каждый выборщик получает один бюллетень. Пусть голос за A обозначается как $+1$, а голос за B как -1 . То есть $\omega = (i_1, \dots, i_n)$, где $i_j = \pm 1$, $j = \overline{1, n}$. Пусть $a > b$, какова вероятность того, что бюллетени разложены так, что на каждом этапе подсчета кандидат A лидировал? $A = \{\omega : i_1 > 0, i_1 + i_2 > 0, \dots, i_1 + \dots + i_n = a - b > 0\}$.

Решение:

Обозначим $S_k = i_1 + \dots + i_k$, $k = 1, \dots, n = a + b$. Чему равна $P(A)$? В классической модели все расположения бюллетеней равновероятны:

$$|\Omega| = \frac{(a+b)!}{a!b!} = C_{a+b}^a$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Подробный разбор будет на семинаре.

$$\text{Результат: } |A| = C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^a \Rightarrow P(A) = \frac{a \cdot b}{a+b}.$$

Иногда реализовать алгоритм непросто. В следующем примере можно пойти путем с использованием известных приемов.

Пример:

В комнате живут два студента. Один покупает открытки на 8-е марта для однокурсниц. Открытки одинаковые, но в каждую он пишет именованное поздравление. Также он купил конверты, которые подписал. Опоздывая на пару, он просит соседа разложить открытки по конвертам. Сосед не смотрит на поздравления внутри и раскладывает открытки случайным образом. Какова вероятность совпадения хотя бы одной открытки с её конвертом.

Упрощая задачу:

Имеется n пронумерованных шаров и n пронумерованных ящиков. В каждый ящик помещается один шар. Какова вероятность совпадения номеров хотя бы одного шара с ящиком.

Решение:

Шары можно разложить $n!$ способами: $|\Omega| = n! \quad \omega = (i_1, \dots, i_n)$, где $1 \leq i_j \leq n$.

$A = \{\omega : \exists k < n; k, n \in \mathbb{N} : q_k = k\}$ — хотя бы в один шар совпадает со своим ящиком.

$$P(A) = \frac{|A|}{n!}$$

Решение не сводится к подсчету $|A|$.

Вводим вспомогательное событие $A_j = \{\omega : i_j = j\} = \overline{1, n}$ — совпадение в j -м месте.

$$\text{Ясно, что } A = \bigcup_{j=1}^n A_j$$

Применим формулу сложения:

$$P(A) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n)$$

Дело в том, что $P(A_j) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $\forall j$. Знаем что $(A_j) = (n-1)$. Аналогично:

$$P(A_1, A_2) = \frac{(n-2)!}{n!}, \dots, P(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{n!}. \text{ Получаем, что:}$$

$$P(A) = n \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \Rightarrow \text{п р и}$$

фиксированном $n \in \mathbb{N}$ искомая вероятность: $P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

Заметим, что для экспоненты при разложении в ряд Тейлора имеем:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + 2n \Rightarrow |2n| < \frac{1}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

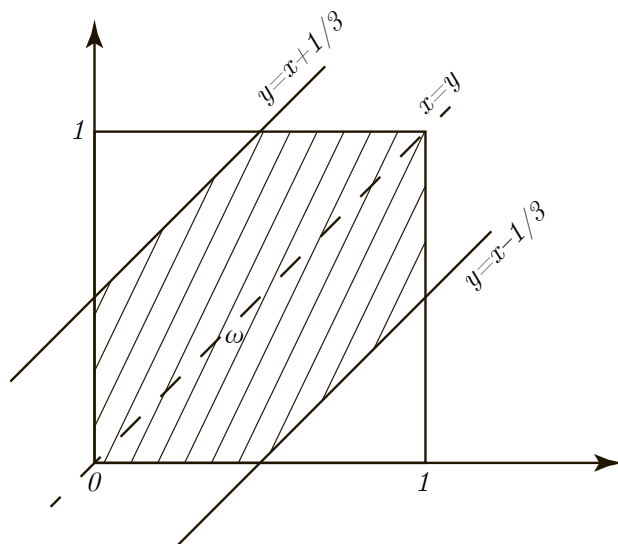
$$\delta_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - P_n$$

$$e^{-1} = 1 - P_n + 2n = P_n = (1 - e^{-1}) + 2n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-1}.$$

Принцип решения: интересующее событие выражается логическим путем из более простых событий. В отличие от классической модели бывают ситуации с недискретным вероятностным пространством. $F \subsetneq 2^\Omega$.

Модель геометрической вероятности

Трудность теоретико-вероятностных задач. $\omega = (x, y)$. ω – исход эксперимента, x – момент прихода первого студента в долях часа. y – момент прихода второго студента в долях часа. $\omega = (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$



$$A = \left\{ \omega : |x - y| \leq \frac{1}{3} \right\}$$

Будем пользоваться моделью геометрической вероятности \Rightarrow

$$P(A) = \frac{\text{mes}_2(A)}{\text{mes}_2(\Omega)}$$

$$x - \frac{1}{3} \leq y \leq x + \frac{1}{3}, (x, y) \in \Omega$$

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Теперь разберем схему Бернулли.

Схема независимых испытаний Бернулли

Эксперимент «составной» — это серия из n повторений одинакового опыта («испытаний»). Испытание — эксперимент, в котором событие C либо происходит, либо нет.

$$\Omega \ni \omega = (k_1, \dots, k_n) \text{ где } k_j \in \{0, 1\}, j = \overline{1, n} \Rightarrow |\Omega| = 2^n < \infty$$

Ω – конечное множество $\Rightarrow F = 2^\Omega$.

Задание вероятности в конечном пространстве:

$$\text{Каждый } \omega \rightarrow p_\omega = \prod_{j=1}^n p^{k_j} q^{1-k_j}. \quad k_i = 1 \Rightarrow p^1 q^0 = p, \quad k_i = 0 \Rightarrow p^0 q^1 = q.$$

2 способа подсчета (См схема Бернулли в семинаре 3)

Условная вероятность

В классической модели: $(\Omega, F, P), |\Omega| = N$.

$$|A| = k, \quad |B| = m$$

Пусть произошло B :

В результате проведения эксперимента:

$$\omega \in B$$

В классической модели любое событие из B равновероятно.

Пусть произошло A :

P что произошло A при условии, что произошло B :

$$P(A|B) = \frac{n}{m} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{|AB|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad |A| = k, |B| = m$$

$$|A \cap B| = n \leq m \text{ так как } AB \subset B$$

В классической модели для возможного B ($B \neq \emptyset$) $P(B) > 0$.

Определение $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, если $P(B) > 0$.

Пример

Классическая модель для подбрасывания игральной кости.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}, A = \{\text{четное число}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} > P(A).$$

Рассмотрим \bar{A} – нечетное число $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}|B) = \frac{1}{3} < P(\bar{A})$$

Пусть $C = \{1, 4\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$

$$P(C|B) = \frac{1}{3} = P(C)$$

Упражнение

При фиксированном $B \subset \Omega$ $P(B) > 0$ функция на событиях $F \ni A \longrightarrow P(A|B) \equiv P_B(A)$

Семинар 3

Напоминание: мы не вводим понятие условного события, но вводим понятие условной вероятности.

Задача II.10

Примечание: говорить о вероятности можно только в рамках модели. Берем классическую модель, где все исходы равновероятны.

Классическая модель (Ω, F, P)

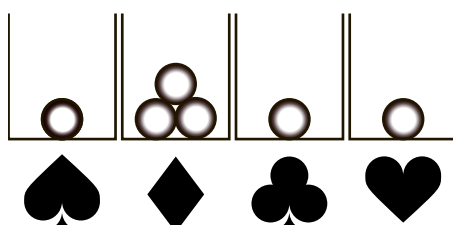
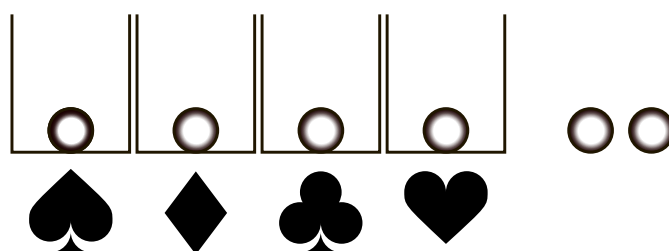
$|\Omega| = C_{52}^6$ – число выборов без возвращений, неупорядоченных, объема 6 из 52. Так как модель классическая:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

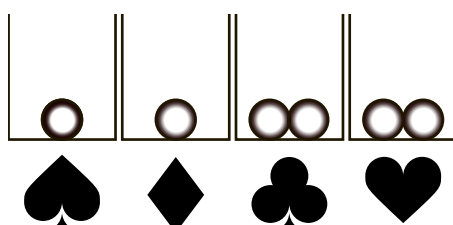
Решение

Рассмотрим два решения задачи

1. $A = \{\text{в выборке есть все масти}\}$



2 шарика в одном ящике



по шарика в двух ящике

$$A_1 + A_2 \Rightarrow$$

$A_1 = \{\text{в выборке 3 карты 1-й масти}\}$

$A_2 = \{\text{по 2 карты 2-х мастей}\}$

$$|A| = |A_1| + |A_2|$$

Считаем: $|A_1| = C_4^1 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3$, $|A_2| = C_4^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^4)^2$.

2. Рассмотрим $\bar{A} = \bigcup_{k=1}^n B_k$, где вспомогательные события B_k возникают в результате

перенумерования мастей. ($\spadesuit \rightarrow 1$, $\diamondsuit \rightarrow 2$, $\clubsuit \rightarrow 3$, $\heartsuit \rightarrow 4$).

$B_k = \{\text{в выборке нет } k\text{-й масти}\}$, $k = \overline{1,4}$. Отрицание \bar{A} : нет хотя бы одного элемента.

1. События совместны, применим формулу сложения:

$$P(\bar{A}) = \sum_{1 \leq i \leq 4} P(B_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} P(B_{i_1}, B_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4} P(B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}) - \cancel{P(B_1, B_2, B_3, B_4)}$$

Применяем формулу сложения, так как легко вычислить правую часть.

$$P(B_i) = \frac{|B_i|}{|\Omega|}, \text{ а } |B_i| = C_{39}^6, \quad \forall i \text{ и т.д.}$$

2. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ — ответ.

Условная вероятность

В некотором ВП (Ω, F, P) фиксировано $B \in F$ с $P(B) > 0$.

Назовем условной вероятностью A при условии B число

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

В обратную сторону не работает.

Пример

Двукратное подбрасывание игральной кости. Какова вероятность, что в первый раз выпала единица, а во второй – четное число.

Решение:

$$\omega = [i, j], \quad 1 \leq i, j \leq 6, \quad |\Omega| = 36.$$

B – выпала единица. A – выпало четное число.

$$A = \{\omega : i = 1\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{\omega : i = 2, 4, 6\} \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$AB = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6)\} \Rightarrow P(AB) = \frac{|AB|}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} = P(A) \text{ — они совпали.}$$

Другой пример

$$C = \{\omega : i + j \text{ четные}\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{2}, \quad |CB| = 9$$

$$P(C|B) = \frac{|CB|}{|B|} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

Еще один пример:

Условие $BC = \{\omega : i \text{ четное}\}$.

$$P(A|BC) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(\emptyset)}{P(BC)} = 0 \neq P(A).$$

Зависимые и независимые события

Условная вероятность может совпасть с условием, а может не совпасть. Раньше говорили, что A не зависит от B если $P(A) = P(A|B)$.

Пусть A не зависит от B , тогда

$$P(A|B) = P(A) \xrightarrow{P(B)>0} P(AB) = P(A)P(B) \xrightarrow{P(A)>0} P(B|A) = P(B) \text{ («} B \text{ не зависит от } A \text{»)}$$

Современное определение независимых событий:

Определение: События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Упражнение

Исследовать связь между несовместностью и независимостью событий.

Соглашение: если в модели свойство $P(AB) = P(A)P(B)$ не выполняется, то события называются зависимыми в вероятностном смысле.

Если модель составлена хорошо, то автор стремится в модели сделать реально несвязанные события независимыми.

Пример

Из колоды в 36 карт вынимают одну карту. A – извлечен туз. B – извлечена бубновая карта.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$P(AB) = \frac{1}{36} \Rightarrow$ в нашей модели A и B независимые события. Теперь добавим одну пустую карту:

$$P(A) = \frac{4}{37}$$

$$P(B) = \frac{9}{37}$$

$$P(AB) = \frac{1}{37} \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \text{события зависимые.}$$

Задача

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + 2px + q = 0$$

где p, q – координаты случайной точки ω . Точка наудачу выбирается из квадрата 2×2 .

$$\omega(p, q) \in \Omega = \{(u, v) : |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$$

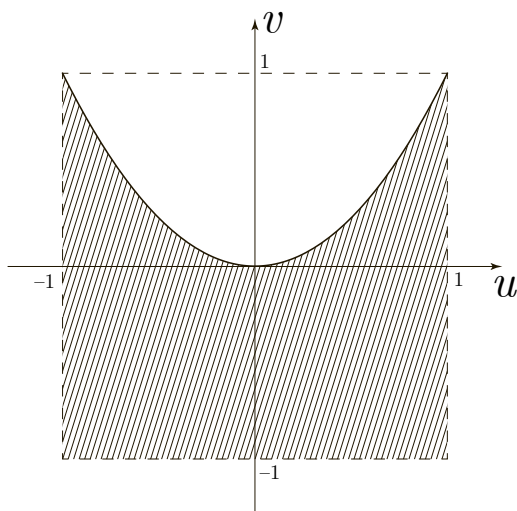
Воспользуемся моделью геометрической вероятности.

Событие A – подмножества $A \subset \Omega$.

$$\text{mes}_2(A) = \text{«площадь»}$$

$$P(A) = \frac{\text{mes}_2(A)}{\text{mes}_2(\Omega)}$$

$$A = \{\text{корни действительные}\}$$



$$(p, q) = \omega \in A \Leftrightarrow p^2 - q \geq 0$$

$$\text{mes}_2(\Omega) = 4$$

$$\begin{aligned} \text{mes}_2(A) &= 2 + 2 \int_0^1 u^2 du = 2 + 2 \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{8}{3} / \frac{12}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$B = \{\omega : p > 0\}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{3} \neq P(A).$$

Схема Бернулли

n — число испытаний. $p \in (0,1)$ — пока просто число.

$$\omega = (k_1, \dots, k_n), \text{ где } k_j \in \{0,1\}, j = \overline{1,n} \Rightarrow |\Omega| = 2^n.$$

Вводим конечное вероятностное пространство. $F = 2^\Omega$. Задание вероятности P .

$$\omega \longrightarrow P_\omega := \prod p^{k_j} q^{1-k_j} = p^k q^{n-k}, \text{ где } k = \sum_{j=1}^n k_j - \text{число успехов.}$$

$$\begin{array}{ccc} n=1 & q & p \\ & \parallel & \parallel \\ & (0) & (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} n=2 & q^2 & pq = (0,0) \quad (1,0) \\ & qp & p^2 = (0,1) \quad (1,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} n=3 & q^3 & q^2 p \quad 000 \quad 100 \\ & q^2 p & qp = 001 \quad 101 \\ & q^2 p & qp^2 = 010 \quad 110 \\ & qp & p^3 \quad 011 \quad 111 \end{array}$$

Как ранее говорилось на лекции, есть два способа подсчета.

Первый способ

$$\text{Вводим событие } B_l = \left\{ \omega : \sum_{j=1}^n k_j, |\omega| = l \right\}, l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$B_l = \{\text{ровно } l \text{ успехов при } n \text{ испытаний}\} \Leftrightarrow P_\omega = p^l q^{n-l}$$

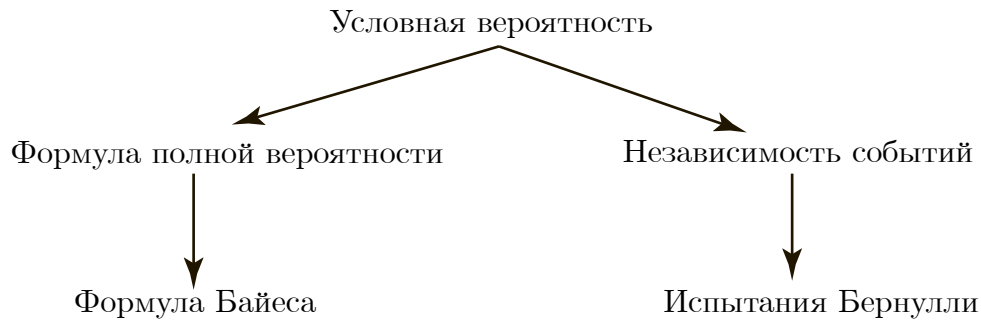
Ассоциативность сложения: $\sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} = \sum_{l=0}^n \left(\sum_{\omega \in B_l} p_{\omega} \right) = \sum_{l=0}^n |B_l| p^l q^{n-1} = (p+q)^n = 1.$

Второй способ

$$\begin{aligned} \sum P_{\omega} &= \sum \prod_{j=1}^n p^k q^{1-k} = \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_{n-1}=0}^1 \sum_{k_n=0}^1 p^{k_1} q^{1-k_1} \dots p^{k_{n-1}} q^{1-k_{n-1}} p^{k_n} q^{1-k_n} = \\ &= \sum_{k_n=0}^1 p^{k_n} q^{1-k_n} \left[\sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_{n-1}} \prod_{j=2}^n p^{k_j} q^{1-k_j} \right] = p[] + q[] = [] = \dots = p + q = 1 \end{aligned}$$

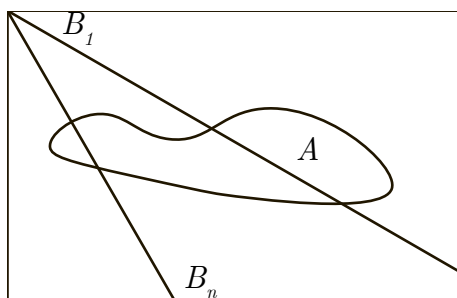
Доказать, что при $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega}$, P – счетно-аддитивно, или $A_m = \{\omega : k_m = 1\} = \{\text{успех при } m\text{-м событии}\}$. P — вероятность успеха в отдельном испытании и она всегда одинакова.

Лекция 4



Формула полной вероятности

- Условная вероятность. В заданном ВП (Ω, F, P) при фиксированном событии B , вероятность выполнения A при условии B : $P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$
- Пусть есть разбиение Ω на события B_1, \dots, B_n , $n \in \mathbb{N}$ то есть:
 - События попарно несовместны $B_i, B_j = \emptyset \ (i \neq j)$
 - $\bigcup_{k=1}^n B_k = B_1 + \dots + B_n = \Omega \Rightarrow \forall \omega \in \Omega \ \exists! k \in \{1, \dots, n\}, \omega \in B_k$



3. Далее предположение: $P(B_k) > 0 \quad \forall k$ для $A \in F$.

$$A = A\Omega = A\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \equiv A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) := \bigcup_{k=1}^n (A \cap B_k) \equiv \bigcup_{k=1}^n AB_k$$

4. Аддитивность P : $P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^n AB_k\right) = \sum P(AB_k)$. В силу предположения 3

мы можем применить формулу умножения событий:

$$\left(P(AB) = P(A|B_k)P(B_k)\right) \Rightarrow P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k) \quad \text{— формула полной вероятности.}$$

Пример

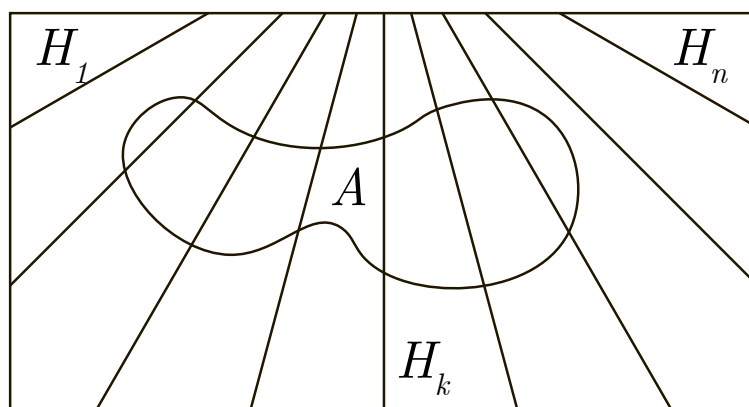
Ускоритель частиц с кольцами. В 1-м кольце e^- , во втором кольце e^+ . Пучки из этих колец сводят в коллайдере. Известно, что при каждом столкновении e^- и e^+ могут образовываться пары мюонов μ^+ и μ^- или кварк-антикварковая пара q и \bar{q} . В единицу времени k ($k \in \mathbb{Z}$) с вероятностью $\Pi_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda = \text{const}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k = 1$ образуется пара. Вопрос: какова вероятность в единицу времени наблюдать n пар $\mu^+ \mu^-$.

Решение см в семинаре 4.

Формулы Байеса

Рассмотрим конечное разбиение Ω на события H_1, \dots, H_n . Их свойства:

1. Попарно несовместны: $H_i, H_j \neq \emptyset$
2. Вероятность положительна $P(H_k) > 0$
3. $\bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$
4. В результате эксперимента происходит событие A , $P(A) > 0$



Ищем $P(H_k|A)$.

Считая известными:

1. «Априорные» вероятности $P(H_k)$, $k = \overline{1, n}$. (Дополнительно известно, что

$$\sum_{k=1}^n P(H_k) = 1 \text{ и } P(H_k) > 0). P(H_1), \dots, P(H_k) - \text{известны.}$$

2. Условные вероятности $P(A|H_k)$, $k = \overline{1, n}$.

О т в е т :
$$P(A|H_k) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{\sum P(A|H_j) P(H_j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k) P(H_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|H_i) P(H_i)}, k = \overline{1, n}.$$

Апостериорные вероятности

Задача

Происходит выпуск изделий на автоматизированной линии. Изделие может оказаться бракованным. Априорные вероятности брака 0.02%. Но с вероятностью 5% негодное изделие может быть принято за годное. Кроме того 1% годных изделий бракуется. Какова вероятность получения годного изделия?

Решение см. на семинаре 4.

Некоторые примеры понятия независимости

Обобщим определения независимых событий на $n = 3$.

А. Попарно независимые:
$$\begin{cases} P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2) \\ P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3) \\ P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3) \end{cases}$$

В. $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$ (1-е условие)

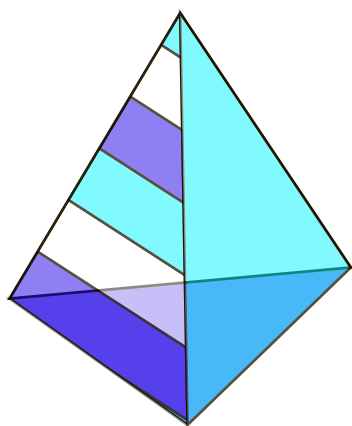
С. Из первых двух условий следует: определение трех независимых событий.

Пример 1 $(A) \not\Rightarrow (B)$ [A не вытекает из B]

Тетраэдр Бернштейна.

4 грани: синяя, голубая, белая, полосатая.

$$\left. \begin{array}{l} K = \{\text{голубая}\} \\ S = \{\text{синяя}\} \\ B = \{\text{белая}\} \end{array} \right\} \text{вероятность нахождения на выбранной грани.}$$

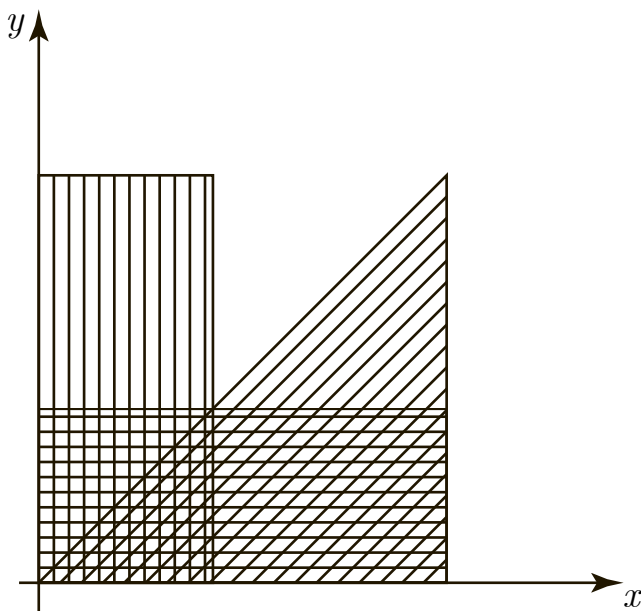


Модель классическая $\Rightarrow K = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = S = B = P$

$$P(KB) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = P(K) \cdot P(B) \text{ — полосатая грань}$$

считается за единицу. Но $P(KBS) = \frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Пример 2 $(B) \not\Rightarrow (A)$ [B не вытекает из A]



Наудачу выбираем точку. Модель геометрической вероятности:

$$A_1 = \left\{ \omega(x; y) : x < \frac{1}{2} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \omega : y < \frac{1}{2} \right\}$$

$$A_3 = \{ \omega : y < x \}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$\text{О д н а к о} \quad P(A_1 A_3) = \frac{1}{8} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1 \quad \text{и} \quad A_2 \quad -$$

независимые, а A_2 и A_3 — зависимые. $\Rightarrow A_1 A_2$ и A_3 нельзя называть события независимыми.

Условие налагается на n событий. $\sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n - C_n^0 - C_n^1$ при $n = 2$ — условие, при

$n = 3 - 4$ условия.

Замечания, вытекающие из определения независимых событий.

• Чаще всего будет работать при $n = 1, 2$ условиях $P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$.

• Однако для всех 3 событий это лишь следствие. При $n = 3$ и более являются независимыми только если в них любой под-набор независимых событий.

• Свойство независимости никак не связано с порядком событий.

• Если A_1, \dots, A_n — независимые $\Rightarrow \overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ — независимые.

• Если свойства независимости выполнены, то называем это независимостью набора, иначе события называются зависимыми.

Пример (Схема Бернулли)

A_1 — успех в первом эксперименте

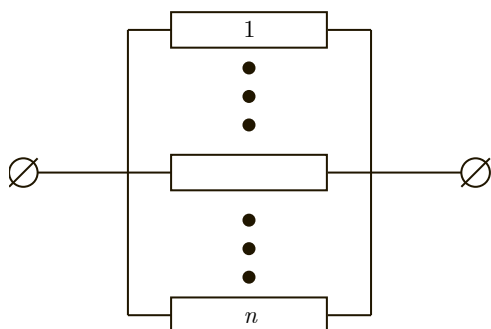
A_2 — успех во втором эксперименте

A_k — успех в k -м эксперименте

Рассмотрим n испытаний. $\omega = (k_1 \dots k_n) \in \Omega_n \equiv \Omega$, $k_j = 0$ или 1 , (k, p) – параметр. 1 – успех, 0 – неуспех.

Событие $A_j = \{\omega : k_j = 1\} \equiv \{\text{успех}\}$ в j -м испытании. $1 - p \equiv q$.

$$\omega \longrightarrow p_\omega = \prod_{j=1}^n p^{k_j} q^{n-k_j} = p^k q^{n-k}, \text{ где мы видим, что } \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 \Rightarrow P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$



Задача

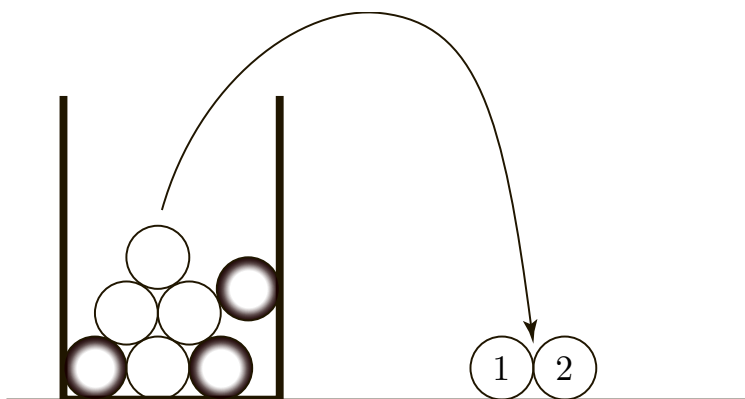
Параллельно соединено n блоков и в единицу времени независимо любой блок может выйти из строя с вероятностью P . Какова α — гарантированная вероятность того, что цепь будет работать, если $P = \frac{1}{2}$.

Решение: см в семинаре 4.

Семинар 4

Задача 9

Ящики содержат 7 шаров: 3 черных, остальные белые. Наудачу вынимаем последовательно два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?



Решение

1-й способ

1 шаг: Считаем, что ВП (Ω, F, P) задано. Каждое извлечение одного шара считается равновероятным. Тогда вводим события:

$$A = \{\text{2-й шар белый}\}$$

$$B = \{\text{1-й шар белый}\}$$

2 шаг: Ищем $P(AB)$.

Применим формулу умножения: $P(AB) = P(B)P(A|B)$, для этого требуется $P(B) > 0$.

При сделанных предположениях по заданию вероятности легко найти величины справа:

$$\left. \begin{aligned} P(B) &= \frac{4}{7} \\ P(A|B) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$

2-й способ

Имеем явное задание ВП. А теперь применим прием: перенумеруем шары:

белые: 1,2,3,4

черные: 5,6,7

1. Тогда $\omega = (i_1, i_2)$, где $i_1 \neq i_2$, $1 \leq i_1, i_2 \leq 7$. $|\Omega| = A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$.

$\omega \in AB \Leftrightarrow 1 \leq i_1, i_2 \leq 4 \Rightarrow |AB| = A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Классическое задание вероятности $P \Rightarrow P(AB) = \frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$. Заметим, что здесь

$$B = \{\omega : 1 \leq i_1 \leq 4\} \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{4}{7}. P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

2. В этой задаче $\omega = (i_1, i_2)$, где $1 \leq i_1 < i_2 \leq 7$. Нас интересует только состав

выборки: $|\Omega| = C_7^2$, $|AB| = C_4^2 \Rightarrow P(AB) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{A_4^2/2}{A_7^2/2} = \frac{2}{7}$.

Обобщение:

Есть M черных и N белых шаров. Выбираем r из них без возвращений.

$A_n = A_{N,M,r,n}$ — несовместные попарно, а $n = 0, 1, \dots, \min(r, N)$, сумма их Ω .

Рассмотрим разбиение на события:

$$P(A_n) = \frac{C_N^n C_r^{r-n}}{C_{M+N}^r} \equiv \frac{C_N^n C_M^m}{C_{M+N}^{m+n}}, \text{ а } \sum_{n=0}^{\min(r, N)} P_n = 1.$$

Соглашение:

$$\text{Для } n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \begin{cases} C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}, n = 0, 1, \dots, N \\ 0 & n < 0, \quad n > N \end{cases}$$

$$\text{Итог: } \frac{C_3^0 C_4^2}{C_7^2}.$$

Задача

Рассмотрим столкновение электронов с позитронами (1-я задача с лекции 4). С вероятностью P образуется μ -мезон.

Решение

Считаем ВП заданным. Вводим события:

$B_k = \{\text{столкновений ровно } k \text{ в единицу времени}\}, k \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Они попарно несовместны: $B_i B_j = \emptyset, i \neq j$ и $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \Omega$.

$P(B_k) = \pi_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \rightarrow e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$ — распределение Пуассона с параметром λ . Нас интересует $A_n = \{\text{ровно } \mu^+, \mu^- \text{ рождается}\}, n \in \mathbb{Z}^+$. $P(A_n | B_n) \Leftrightarrow k$ независимых испытаний Бернулли. $P(A_n | B_k) = \begin{cases} 0, & n > k \\ C_k^n p^n q^{k-n}, & n \leq k \end{cases}$

Применим формулу полной вероятности. P (счетно-аддитивна).

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_n | B_k) P(B_k) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} p^n q^{k-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^n q^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{k-n}}{(k-n)!} =$$

$$= [j = k - n] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!} = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^n}{n!}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

То есть число родившихся μ -мезонов равно распределению Пуассона с параметром λq .

Задача (на формулы Байеса, о изделиях)

Есть ВП. Интерпретация условий в терминах ВП:

H_1 — рассмотренное изделие годно.

$H_2 = \overline{H_1}$ — рассмотренное изделие не годно.

Мы имеем разбиение Ω на события H_1, H_2 . По условию:

1. Бракованных изделий: $0.02 \Rightarrow P(H_1) = P(H_2) = 1 - P(H_2) = 0.98$. Рассмотрим $A = \{\text{Рассмотренное изделие, выдержавшее контроль}\}$. Ищем $P(H_1 | A)$.

2. Знаем, что $P(A | H_2) = 0.05$ и $P(\overline{A} | H_1) = 0.01$. Условная вероятность обладает свойствами вероятности: $P(A | H_1) = 1 - P(\overline{A} | H_1) = 0.99$.

3. Формула Байеса: $P(H_1 | A) = \frac{P(H_1 A)}{P(A)} = \frac{P(A | H_1) P(H_1)}{P(A | H_1) P(H_1) + P(A | H_2) P(H_2)} =$

$$= \frac{0.99 \cdot 0.98}{0.99 \cdot 0.98 + 0.05 \cdot 0.02} = 0.99897.$$

Задача (с цепью)

$A_k = \{k\text{-й блок вышел из строя}, k = \overline{1, n}\}$. Известно, что:

1. A_1, \dots, A_n — независимые.

2. $P(A_k) = P$

$C_n = \{\text{цепь сохранит проводимость в единицу времени}\}$

$$\overline{C_n} = \bigcap_{k=1}^n A_k.$$

$$P(C_n) \geq \alpha$$

Подзадача

Доказать, что если A_1, \dots, A_n независимые, то $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ тоже независимые.

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - \prod_{k=1}^n P(\overline{A_k}) = 1 - P^n \geq \alpha. \quad P = \frac{1}{2}. \quad \alpha = 0.99999\dots, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5}.$$

$$2^n \geq 10^5 = 100000 \Rightarrow n \geq 17.$$