Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 2

1.4 Базисные и опорные решения

Пусть найдено общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = b_1' - a_{1,r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{1n}' x_n \\ x_2 = b_2' - a_{2,r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{2n}' x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r' - a_{r,r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{rn}' x_n \end{cases}.$$

Положим, что свободные переменные равны 0:

$x_{r+1} = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow x_1 = b_1', \ldots x_r = b_r' \Rightarrow (b_1', \ldots b_r', 0, \ldots 0)$ – базисное

Базисное решение называется *невырожденным*, если оно содержит ровно r ненулевых компонент, в противном случае оно называется *вырожденным*.

Можно, найти базисное решение, не выписывая общее решение, подписав над столбцами расширенной матрицы системы переменные, которые им соответствуют.

$$\overline{A} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right.}_{r}\left.\begin{array}{cccc|c} a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \cdots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \cdots & a'_{r,n} & b'_n \end{array}\right) \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} r$$

Значения базисных переменных находятся в правой части (после черты) в строке, соответствующей 1 в столбце под базисной переменной. Остальные переменные – свободные, они равны 0.

Столбцы единичной матрицы можно получать не обязательно в указанном порядке и на первых местах. Сколько различных базисных решений может быть у системы? $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Пример 1

Найти все базисные решения системы уравнений из ***Примера 4*** прошлой лекции.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение:

На прошлой лекции были выполнены элементарные преобразования расширенной матрицы системы для нахождения общего решения системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

баз. решение $(3; 0; -3; 0)$

Базисных решений может быть не более, чем $C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Запишем все возможные включения переменных в базис:

1) $x_1 x_2$ $\varnothing$

2) $x_1 x_3$ $(3; 0; -3; 0)$

3) $x_1 x_4$ $(6; 0; 0; 3/2)$

4) $x_2 x_3$ $(0; 3; -3; 0)$

5) $x_2 x_4$ $(0; 6; 0; 3/2)$

6) $x_3 x_4$ $(0; 0; -6; -3/2)$

Для каждой пары переменных преобразуем матрицу *A* с помощью элементарных преобразований таким образом, чтобы столбцы единичной матрицы получились на месте столбцов, соответствующих базисным переменным. Для преобразований можно использовать любую наиболее удобную матрицу из предыдущих преобразований.

1) $x_1 \, x_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad \varnothing$$

3) $x_1 \, x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \quad \text{б.р} \left(6; 0; 0; 3/2\right)$$

$$3 \to 3 - \frac{-\cancel{2} \cdot (-3)}{-\cancel{2}}$$

4) $x_2 \, x_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad \text{б.р} \left(0; 3; -3; 0\right)$$

5) $x_2 \, x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \quad \text{б.р} \left(0; 6; 0; 3/2\right)$$

6) $x_3 \, x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right) \quad \text{б.р} \left(0; 0; -6; -3/2\right)$$

Базисные решения, в которых все переменные неотрицательны, называются *опорными решениями*.

Опорные решения можно находить путем перебора базисных решений, но можно внести изменения в уже рассмотренный алгоритм поиска базисных решений для более быстрого нахождения опорных решений.

При нахождении опорных решений будем считать, что <u>правая часть исходной системы не содержит отрицательных коэффициентов</u>. Этого можно всегда достичь, умножив нужные уравнения на –1. Далее при преобразованиях матрицы, необходимо следить за тем, чтобы правая часть сохраняла неотрицательность.

Рассмотрим дополнительные условия, которые будут накладываться на выбор разрешающего элемента при выполнении жордановых исключений.

Рассмотрим один шаг жордановых исключений разрешающим элементом a_{ij}

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots & b_i \\ & & & \\ & a_{kj} & & b_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & b_i' \\ & & & \\ & 0 & & b_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$b_i, b_k \geq 0$

Хотим сохранить неотрицательность правой части.

1) $b_i' = \frac{b_i}{a_{ij}} \geq 0, \; b_i \geq 0 \Rightarrow a_{ij} > 0$

2) $b_k' = b_k - \frac{b_i \cdot a_{kj}}{a_{ij}} \geq 0, \; a_{ij} > 0, \; b_i \geq 0, \; b_k \geq 0 \Rightarrow b_k \geq \frac{b_i a_{kj}}{a_{ij}} \Rightarrow \frac{b_k}{a_{kj}} \geq \frac{b_i}{a_{ij}}$

На a_{ij} должен достигаться $\min \frac{b_i}{a_{ij}}$ по столбцу

Следовательно, при поиске опорных решений на каждом шаге метода Жордана-Гаусса для включения в базис переменной x_j, необходимо выбрать в j-ом столбце положительный разрешающий элемент a_{ij}, для которого достигается минимум отношения свободных членов к положительным элементам j-го столбца.

Пример 2

Найти все опорные решения системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 5/2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\min\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right) = 1 \qquad \min\left(\frac{1}{1}, \frac{4}{1}\right) = 1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/2 & 0 & 9/2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1/6 & 1 & 0 & 4/3 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\min\left(\frac{1}{1/2}; \frac{3}{9/2}\right) = \min\left(2; \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

опорное решение:
$\left(2/3; 0; 4/3; 2/3\right)$

$$0 \to 0 - \left(-\frac{\cancel{3}}{2}\right)\left(-\cancel{2}\right)\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} = -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} - \left(-\frac{\cancel{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$1 \to 1 - (-\cancel{2})\cdot\cancel{3}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$1 \to 1 - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

1) $x_1\ x_2\ x_3$ $\varnothing$

2) $x_1\ x_2\ x_4$ $\varnothing$

3) $x_1\ x_3\ x_4$ $(2/3;\ 0;\ 4/2;\ 2/3)$

4) $x_2\ x_3\ x_4$ $\varnothing$

1) $x_1\ x_2\ x_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1/6 & 1 & 0 & 4/3 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$$

все элементы < 0
нет опорного решения

2) $x_1\ x_2\ x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1/6 & 1 & 0 & 4/3 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right) \quad \varnothing$$

4) $x_2\ x_3\ x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1/6 & 1 & 0 & 4/3 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right) \quad \varnothing$$

Пример 3

Найти все опорные решения системы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

опорное решение $(4; 12; 0; 0)$

$$\min\left(\frac{16}{1}; \frac{24}{2}\right) = 12$$

$$C_4^2 = 6$$

1) $x_1 x_2$ $(4; 12; 0; 0)$

2) $x_1 x_3$

3) $x_1 x_4$

4) $x_2 x_3$

5) $x_2 x_4$

6) $x_3 x_4$

2) $x_1\ x_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 5/2 & 10 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 6 \end{array}\right)$$

о.р $(10;0;6;0)$

3) $x_1\ x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

о.р. нет

$$\min\left(\frac{4}{2};\ \frac{12}{1}\right)=2$$

4) $x_2\ x_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

о.р нет

5) $x_2\ x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 2 \\ -1/2 & 1 & 5/2 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$\min\left(\frac{4}{2};\ \frac{12}{1}\right)=2$$

о.р.$(0;10;0;2)$

6) $x_3\ x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 5/2 & 10 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2/5 & 1/5 & 0 & 1 & 4 \\ & & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\min\left(\frac{10}{5/2};\ \frac{6}{1/2}\right)=\min(4;12)=4$$

$$6 \to 6-10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=4$$

о.р$(0;0;4;4)$

1.5. Генерирование сочетаний без повторений из *n* по *k*

Без ограничения общности можно считать, что $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

Каждому k-элементному подмножеству взаимно однозначно соответствует возрастающая последовательность длины k с элементами из A.

Сформулируем алгоритм, который генерирует такие последовательности в лексикографическом порядке.

Пусть p – номер элемента, с которого будут начинаться изменения в следующем сочетании.

1. Первая последовательность $(1, 2, \ldots , k)$, $p=k$.

2. Если последний элемент сгенерированной последовательности не равен n, то $p = k$, в новой последовательности меняется только последний элемент.

Если последний элемент сгенерированной последовательности равен n, то уменьшаем p на 1 и новая сгенерированная последовательность $(b_1, \ldots, b_p, ..., b_k)$ будет отличаться от предыдущей $(a_1, \ldots, a_p, ..., a_k)$, начиная с p-го элемента по следующему правилу: p-ый элемент увеличиваем на 1, а все последующие элементы на 1 больше предыдущего ($b_i = a_p + (i - p + 1)$, $i = p, \ldots, k$).

Пункт 2 повторяем до тех пор, пока p не станет равным 0.

Пример 4: Работа алгоритма при генерировании сочетаний из 5 по 3.

Решение: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$(1, 2, 3)$ $p = 3$

$(1, 2, 4)$ $p = 3$

$(1, 2, 5)$ $p = 2$

$(1, 3, 4)$ $p = 3$

$(1, 3, 5)$ $p = 2$

$(1, 4, 5)$ $p = 1$

$(2, 3, 4)$ $p = 3$

$(2, 3, 5)$ $p = 2$

$(2, 4, 5)$ $p = 1$

$(3, 4, 5)$ $p = 0$

1.6. Различные формы записи задачи линейного программирования. Переход от одной формы записи к другой

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЗЛП) *в общем виде*:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\
a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le b_{k+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \le b_m \\
a_{m+1,1}x_1 + \ldots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{l,1}x_1 + \ldots + a_{l,n}x_n = b_l \\
x_1, \ldots, x_n \ge 0
\end{cases}
\qquad (1)
$$

$$
z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \begin{cases} \min \\ \max \end{cases}
$$

Задача линейного программирования задана *в канонической форме*, если требуется максимизировать целевую функцию, все ограничения системы – уравнения ($\cancel{m_1} = \cancel{m_2} = 0$), и на все переменные наложено условие неотрицательности ($k = n$).

Задача линейного программирования задана *в симметричной форме*, если требуется максимизировать целевую функцию, все ограничения системы – неравенства «≤» (или минимизировать целевую функцию, все ограничения системы – неравенства «≥») и на все переменные наложено условие неотрицательности.

Набор чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *допустимым решением (планом)*, если он удовлетворяет системе ограничений (1).

Множество всех допустимых решений называется *областью допустимых решений* (ОДР).

Допустимое решение $X^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$ для которого достигается максимальное (минимальное) значение функции, называется *оптимальным планом*. Значение целевой функции при плане X будем обозначать $Z(X)$.

Следовательно, если X^* – оптимальный план задачи, то для любого X выполняется неравенство $Z(X) \leq Z(X^*)$ при нахождении максимума функции или $Z(X) \geq Z(X^*)$ при нахождении минимума функции.

Все три формы записи ЗЛП являются эквивалентными в том смысле, что имеются алгоритмы перехода от одной формы к другой. Таким образом, если имеется способ решения задачи в одной из форм, то всегда можно определить оптимальный план задачи, заданной в любой другой форме.

Рассмотрим алгоритмы перехода от одной формы к другой.

• **Симметричная → каноническая**

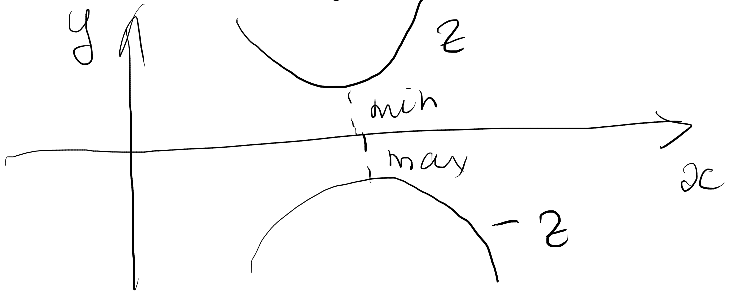
Переход осуществляется путем добавления в левую часть каждого неравенства дополнительной неотрицательной переменной. Если неравенство было «≤», то дополнительная переменная добавляется в левую часть неравенства со знаком «+».

$$3x_1 + 7x_2 \le 9 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 9$$
$$x_3 \ge 0$$

Если неравенство было «≥», то дополнительная переменная добавляется в левую часть неравенства со знаком «–».

$$6x_1 + 9x_2 + x_3 \ge 7 \quad \Rightarrow \quad 6x_1 + 9x_2 + x_3 - x_4 = 7$$
$$x_4 \ge 0$$

Вводимые дополнительные переменные называются *балансовыми*. Задачу минимизации функции Z заменяют на задачу максимизации функции $(–Z)$ и используют, что $\min Z = –\max(–Z)$.



• **Каноническая → симметричная**

Для осуществления такого перехода находится общее решение системы уравнений – ограничений, целевая функция выражается через свободные переменные. Далее, воспользовавшись неотрицательностью базисных переменных, можно исключить их из задачи. Симметричная форма задачи будет содержать неравенства, связывающие только свободные переменные, и целевую функцию, зависящую только от свободных переменных. Значения базисных переменных находятся из общего решения исходной системы уравнений.

• **Общая → каноническая**

Каждая переменная, на которую не было наложено условие неотрицательности, представляется в виде разности двух новых неотрицательных переменных.

$x_i = x_i' - x_i''$, где $x_i', x_i'' \geq 0$

Неравенства преобразуются в уравнения путем введения в левую часть каждого неравенства балансовой переменной таким же образом, как это было описано при переходе от симметричной к канонической форме.

Задачу минимизации функции Z заменяют на задачу максимизации функции $(-Z)$ таким же образом, как это было описано при переходе от симметричной к канонической форме.

Пример 5

Перейти от общей формы записи задачи линейного программирования к канонической форме.

$$Z = 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

$$Z_1 = -Z = -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_3' - x_3'', \quad x_3', x_3'' \ge 0$$

$$Z_1 = -Z = -3x_1 + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3' + 4x_3'' + x_5 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3' - 5x_3'' = 4 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

канонич. форма