

Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 1

Лектор: Галкина Марина Юрьевна

Практические занятия ведут преподаватели:

группы ИПЗ11-314 Галкина Марина Юрьевна

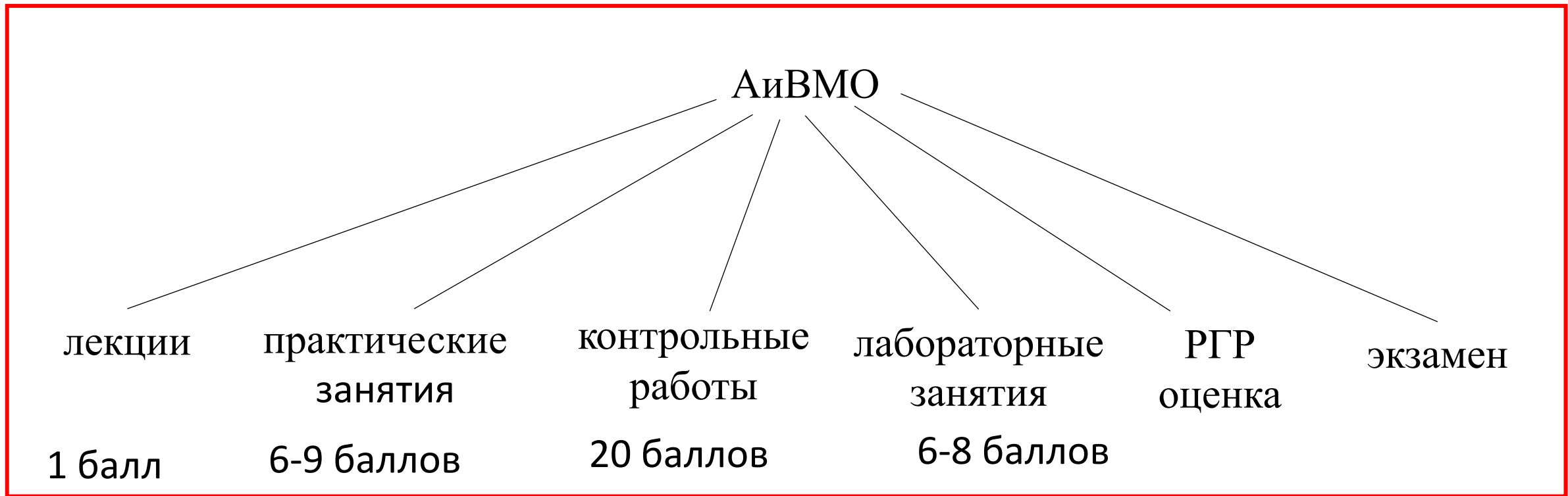
группы ИПЗ15-317 Новожилов Дмитрий Иванович

Ссылка на курс в ЭИОС: <https://eios.sibsutis.ru/course/view.php?id=1243>



Кодовое слово: ИП<номер группы>_очное.

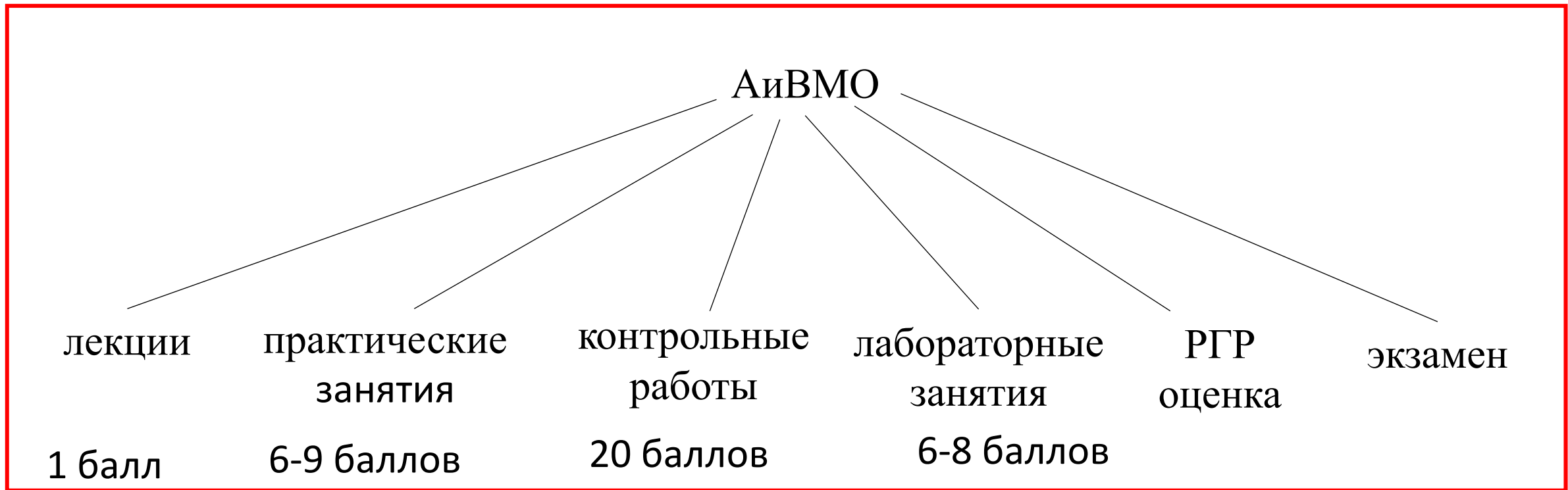
Например, для ИПЗ11 кодовым словом является ИПЗ11_очное.



На каждой лекции студенты должны самостоятельно отметить посещаемость через ЭИОС в течение 20 минут после начала лекции.

Если студент забыл или не смог отметить самостоятельно, то в перерыве необходимо подойти к лектору и попросить отметить.

Если обнаруживается, что студент отметил в ЭИОС, но при этом отсутствовал на лекции, все начисленные за посещение лекций баллы обнуляются.



Экзамен можно получить автоматом (только при всех сданных лабораторных и РГР):

Проценты считаются от максимально возможного кол-ва баллов

50-64% – удовлетворительно

65-84% - хорошо

85-100% - отлично

Все заработанные баллы можно посмотреть в ЭИОС по ссылке Рейтинги.

1. Линейное программирование

1.1 Пример задачи линейного программирования (задача использования сырья)

На мебельной фабрике могут выпускать стулья и кресла. Сведения о ресурсах, расходе материалов и прибыли от реализации каждого изделия приведены в таблице.

Ресурсы	Запасы	Расход на единицу продукции	
		стул	кресло
Пиломатериалы (м ³)	10	0.01	0.03
Ткань (м ²)	2000	0.5	2
Рабочее время (ч)	1000	2	5
Прибыль от ед. продукции (у.е.)		10	35

Найти план производства продукции максимизирующий прибыль предприятия.

Для решения задачи построим математическую модель.

x_1 — кол-во выпущенных стульев

x_2 — кол-во выпущенных кресел

Математическая модель:

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,03x_2 \leq 10 \\ 0,5x_1 + 2x_2 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Система ограничений

$$Z = 10x_1 + 35x_2 \rightarrow \max$$

целевая функция

Если система ограничений и целевая функция линейны, то модель — задача линейного программирования.

1.2 Векторы и матрицы (сведения из линейной алгебры)

Упорядоченный набор n вещественных чисел x_1, x_2, \dots, x_n будем называть *n -мерным вектором* и обозначать \bar{x} . Числа x_1, x_2, \dots, x_n называются координатами вектора.

Вектор, все компоненты которого равны 0, называется *нулевым вектором*: $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Два n -мерных вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ равны, если их соответствующие координаты равны, т.е. если $x_i = y_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Определим над векторами две операции:

1. Умножение вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на действительное число α

$$\alpha \cdot \bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

2. Сложение векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Множество всех n -мерных векторов с определенными над ними операциями сложения и умножения на скаляр, называется n -мерным векторным пространством и обозначается R^n .

Пример 1

$R^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R, x_2 \in R\}$ – двумерное векторное пространство (множество точек на плоскости)

Линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$ называется вектор

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_s \bar{a}_s, \quad \alpha_i - \text{числа}$$

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, одновременно не равные 0, такие, что

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_s \bar{a}_s = \bar{0}$$

В противном случае, система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$ называется *линейно независимой*.

Для линейно независимой системы равенство $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_s \bar{a}_s = \bar{0}$ выполняется лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$.

Векторы, составляющие линейно независимую систему, называются *линейно независимыми*.

Пример 2:

Проверить линейную независимость векторов

$$\bar{a}_1=(5; 3; 2), \quad \bar{a}_2=(1; 7; 3), \quad \bar{a}_3=(2; 3; 2), \quad \bar{a}_4=(10; -6; 1)$$

Решение:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 + 4\bar{a}_3 - \bar{a}_4 &= (5 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 10, 3 - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 6, 2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 1) = \\ &= (0, 0, 0) \quad \exists \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = -1 \Rightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 - \text{линейно} \\ &\quad \text{зав} \end{aligned}$$

Базисом системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$ называется любая подсистема $\bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, \dots, \bar{a}_{i_r}$ линейно независимых векторов этой системы, если любой вектор \bar{a}_i ($i = 1, 2, \dots, s$) из исходной системы представим в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, \dots, \bar{a}_{i_r}$.

Теорема 1 В пространстве R^n векторы $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ образуют базис.

Доказательство:

Необходимо доказать выполнение двух требований к этой системе векторов

1. Эти вектора линейно независимы

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bar{0}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n - \text{линейно независимы}$$

2. Любой вектор представляется в виде линейной комбинации указанных векторов.

$$\bar{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

Теорема 2 Количество векторов в любом базисе одинаково.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом базисе этой системы.

Прямоугольная таблица чисел, имеющая m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{единичные матрицы размера } n \times n.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы будем называть ранг системы векторов, составленных из столбцов этой матрицы, т. е. системы

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \overline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями над строками матрицы будем называть следующие действия:

1. Перестановку строк.
2. Умножение всех элементов выбранной строки на число, отличное от 0.
3. Сложение соответствующих элементов двух строк.
4. Вычеркивание строк, состоящих из нулей.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу A размера $m \times n$ ($m \leq n$) можно привести к виду:

$$A \sim \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_r \begin{pmatrix} a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} \\ a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} \end{pmatrix} \right) \Bigg\} r$$

где $r \leq m$ и первые r столбцов могут занимать произвольные места в произвольном порядке. Очевидно, для такой матрицы ранг равен r .

Теорема 3 Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \dots \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} \end{pmatrix}}_r \Bigg\} r,$$

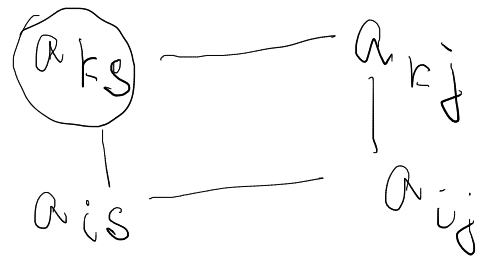
На основании вышесказанного для определения r ранга матрицы A размера $m \times n$ ($m \leq n$) с помощью элементарных преобразований будем получать столбцы единичной матрицы, применяя следующий алгоритм (т.к. $m \leq n$, то ранг матрицы не может быть больше m).

1. Самый большой размер единичной матрицы, который может получиться $m \times m$. Поэтому считаем, что $r = m$.
2. $s = 1$ (номер столбца текущей матрицы $m \times n$), $k = 1$ (номер столбца единичной матрицы $r \times r$, который будем получать).

3. В s -ом столбце выберем элемент отличный от 0 среди элементов $a_{ks}, a_{k+1,s}, \dots, a_{m,s}$. Если такого элемента нет, то увеличиваем s на 1 и переходим к п.3. Не теряя общности, можно считать, что $a_{ks} \neq 0$ (этого можно добиться перестановкой строк). Элемент a_{ks} называется разрешающим.

Получаем новую матрицу, выполнив следующие преобразования:

- разделим k -ю строку на разрешающий элемент a_{ks} ;
- все элементы s -го столбца новой матрицы, кроме a_{ks} , равны 0;
- для расчета a'_{ij} – остальных элементов новой матрицы построим прямоугольники с вершинами в элементах a_{ij} и элементе a_{ks} :



The diagram illustrates the construction of a rectangle for calculating the new element a'_{ij} . On the left, a circle contains the pivot element a_{ks} . Two lines extend from this circle: one horizontal line to the right and one vertical line downwards. The horizontal line connects to the element a_{kj} , and the vertical line connects to the element a_{is} . These two lines meet at a point, forming a right-angled corner. From this corner, two more lines extend: one horizontal line to the right and one vertical line downwards, meeting at the element a_{ij} . This forms a rectangle with vertices at a_{ks} , a_{kj} , a_{is} , and a_{ij} .

$$a'_{ij} \rightarrow \frac{a_{kj} \cdot a_{is}}{a_{ks}}$$

4. Вычеркнем строки, состоящие из нулей, если такие образовались. При вычеркивании каждой строки, r уменьшается на 1.
5. Если k меньше r , то увеличиваем k и s на 1 и переходим к п.3, иначе переходим к п.6.
6. Ранг исходной матрицы будет равен r — размеру выделенной единичной матрицы.

Пример 3

Найти с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & \textcircled{-7} & -8 & 11 \\ 0 & \textcircled{-7} & -8 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/7 & -6/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & -11/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/7 & -6/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & -11/7 \end{pmatrix}$$

rang A = 2

$$-3 \rightarrow -3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -7$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{2 \cdot 4}{1} = -7$$

$$-2 \rightarrow -2 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -8$$

$$4 \rightarrow 4 - \frac{3 \cdot 4}{1} = -8$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{-4 \cdot 2}{1} = 11$$

$$-5 \rightarrow -5 - \frac{-4 \cdot 4}{1} = 11$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{2 \cdot (-8)}{-7} = 3 - \frac{16}{7} = \frac{5}{7}$$

$$-8 \rightarrow -8 - \frac{-8(-7)}{-7} = 0$$

$$-4 \rightarrow -4 - \frac{2 \cdot 11}{-7} = \frac{-28 + 22}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$11 \rightarrow 11 - \frac{-4 \cdot 11}{-7} = 0$$

1.3 Метод Жордана-Гаусса

[illegible]

Обозначим через A матрицу системы ограничений, а через \bar{A} - расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Для решения системы будем использовать метод полного исключения неизвестных или метод Жордана-Гаусса. Суть этого метода состоит в том, чтобы, выполнив элементарные преобразования над строками матрицы \bar{A} , аналогично алгоритму нахождения ранга матрицы A , получить матрицу вида:

$$\overline{A} \sim \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_r \begin{array}{cccc} a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} \\ a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} \end{array} \left| \begin{array}{c} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{array} \right. \right\}_r$$

Преобразования матрицы называются *жордановыми исключениями*. В процессе жордановых исключений возможны следующие случаи:

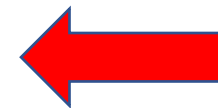
1. Получена строка, состоящая из нулей, кроме последнего коэффициента (правой части уравнения). В этом случае система не имеет решения.
2. Ранг матрицы A равен количеству уравнений m и числу неизвестных n ($r = m = n$). Тогда система имеет единственное решение.
3. Ранг матрицы A не превосходит количества уравнений m ($r \leq m$) и $m < n$. Тогда система имеет бесконечно много решений.

Пусть имеет место третий случай, и расширенная матрица системы приведена к виду:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \dots & x_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} \end{array} \middle| \begin{array}{c} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_r \end{array} \right) \Bigg\} r$$

По преобразованной матрице составим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{1,r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + a'_{1,n} \cdot x_n = b'_1 \\ \dots \\ x_r + a'_{r,r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + a'_{r,n} \cdot x_n = b'_r \end{array} \right.$$



Система называется
приведенной к
единичному базису.

Переменные x_1, x_2, \dots, x_r , соответствующие столбцам единичной матрицы, называются *базисными*, все остальные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ — *свободными*.

$$\begin{cases} \underline{x_1} + a'_{1,r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + a'_{1,n} \cdot x_n = b'_1 \\ \dots \\ \underline{x_r} + a'_{r,r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + a'_{r,n} \cdot x_n = b'_r \end{cases}$$

Если выразить в системе, приведенной к единичному базису, базисные переменные через свободные, то получим *общее решение системы*:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1} x_{r+1} - \dots - a'_{1,n} x_n \\ \dots \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1} x_{r+1} - \dots - a'_{r,n} x_n \end{cases}$$

Общее решение

x_{r+1}, \dots, x_n - могут принимать любые значения

Замечание:

При программном решении систем может возникнуть деление на очень маленькое число (если диагональный элемент близок к нулю), поэтому используют методом Жордана-Гаусса с выбором главного элемента в столбце. Для этого в п. 3 алгоритма преобразований матрицы в качестве разрешающего выбирают максимальный по модулю элемент k -го столбца среди элементов $a_{ks}, a_{k+1,s}, \dots, a_{ms}$ и переставляют строки матрицы таким образом, чтобы он оказался на k -ой строке.

Метод Жордана-Гаусса с выбором главного элемента в столбце необходимо реализовать в первой лабораторной работе.

Пример 4

Решить систему методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 3. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -1$$

$$0 \rightarrow 0 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -2$$

$$-4 \rightarrow -4 - \frac{1 \cdot (-6)}{1} = 2$$

$$-2 \rightarrow -2 - \frac{-6 \cdot 1}{1} = 4$$

$$0 \rightarrow 0 - \frac{-3 \cdot 1}{1} = 3$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{-3 \cdot 1}{1} = 6$$

$$-6 \rightarrow -6 - \frac{2 \cdot 2}{-1} = -2$$

$$4 \rightarrow 4 - \frac{-2 \cdot 2}{-1} = 0$$

$$-3 \rightarrow -3 - \frac{2 \cdot 3}{-1} = 3$$

$$6 \rightarrow 6 - \frac{-2 \cdot 3}{-1} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

x_1, x_3 — базисные, x_2, x_4 — свободные

$$\begin{cases} \underline{x_1} + x_2 - 2x_4 = 3 \\ \underline{x_3} - 2x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -3 + 2x_4 \end{cases} \quad - \text{Общее решение}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2 < 4$
решений бесконечно много

Решение, если использовать метод с выбором главного элемента.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\max(1; 1; 1)$$

$$\max(|-1|, |-2|) = -2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$$-6 \rightarrow -6 - \frac{2 \cdot 4}{-2} = -2$$

$$-3 \rightarrow -3 - \frac{2 \cdot 6}{-2} = 3$$

$$2 \rightarrow 2 - \frac{-1 \cdot 4}{-2} = 0$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{-1 \cdot 6}{-2} = 0$$