

# **Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации**

**Лекция 1**

Лектор: Галкина Марина Юрьевна

Практические занятия ведут преподаватели:

группы ИПЗ11-314 Галкина Марина Юрьевна

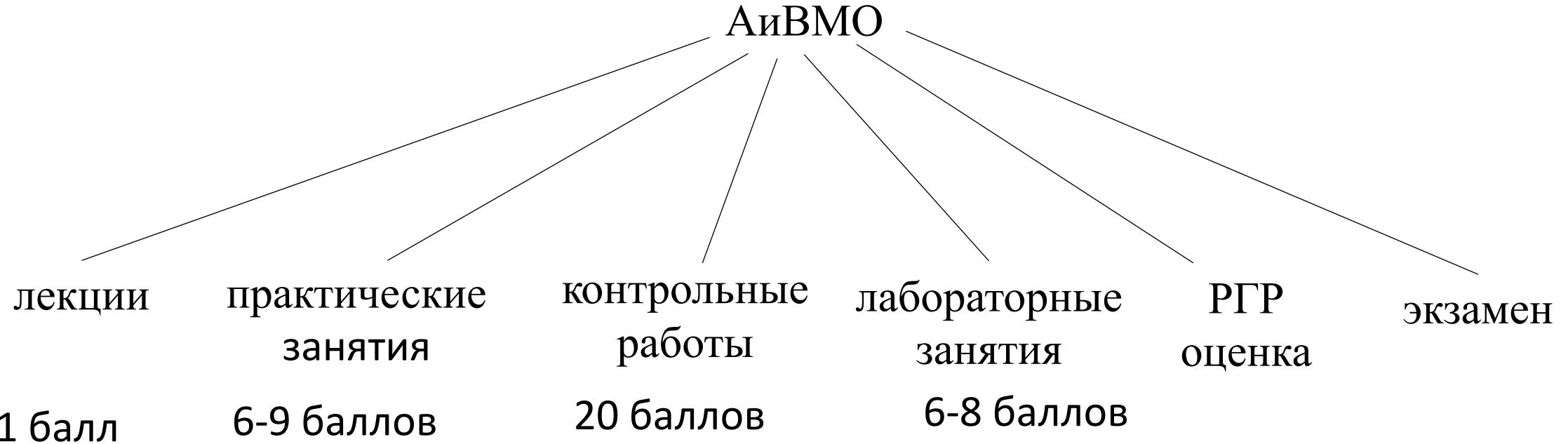
группы ИПЗ15-317 Новожилов Дмитрий Иванович

Ссылка на курс в ЭИОС: <https://eios.sibsutis.ru/course/view.php?id=1243>



Кодовое слово: ИП<номер группы>\_очное.

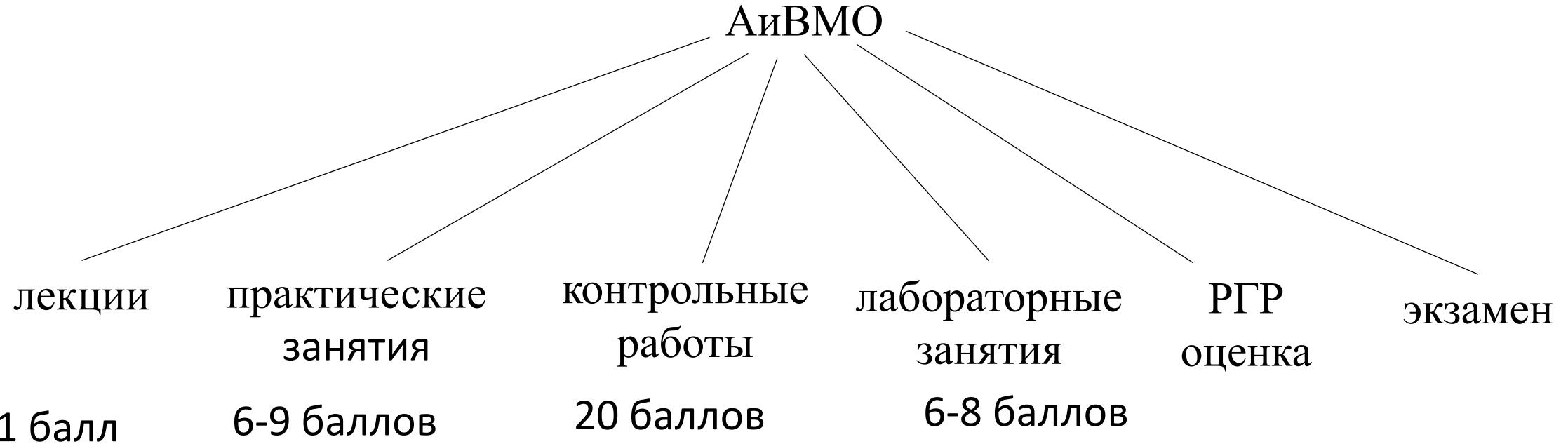
Например, для ИПЗ11 кодовым словом является ИПЗ11\_очное.



На каждой лекции студенты должны самостоятельно отметить посещаемость через ЭИОС в течение 20 минут после начала лекции.

Если студент забыл или не смог отметить самостоятельно, то в перерыве необходимо подойти к лектору и попросить отметить.

Если обнаруживается, что студент отметиля в ЭИОС, но при этом отсутствовал на лекции, все начисленные за посещение лекций баллы обнуляются.



**Экзамен можно получить автоматом (только при всех сданных лабораторных и РГР):**

Проценты считаются от максимально возможного кол-ва баллов

50-64% – удовлетворительно

65-84% - хорошо

85-100% - отлично

Все заработанные баллы можно смотреть в ЭИОС по ссылке Рейтинги.

# 1. Линейное программирование

## 1.1 Пример задачи линейного программирования (задача использования сырья)

На мебельной фабрике могут выпускать стулья и кресла. Сведения о ресурсах, расходе материалов и прибыли от реализации каждого изделия приведены в таблице.

Ресурсы	Запасы	Расход на единицу продукции	
		стул	кресло
Пиломатериалы ( $\text{м}^3$ )	10	0.01	0.03
Ткань ( $\text{м}^2$ )	2000	0.5	2
Рабочее время (ч)	1000	2	5
Прибыль от ед. продукции (у.е.)		10	35

Найти план производства продукции максимизирующий прибыль предприятия.

Для решения задачи построим математическую модель.

$x_1$  – кол-во выпущенных стульев

$x_2$  – кол-во выпущенных кресел

Математическая модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,01x_1 + 0,03x_2 \leq 10 \\ 0,5x_1 + 2x_2 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Система ограничений} \\ \text{Целевая функция} \end{array}$$

Если система ограничений и целевая функция линейны, то модель – задача линейного программирования.

## 1.2 Векторы и матрицы (сведения из линейной алгебры)

Упорядоченный набор  $n$  вещественных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будем называть *n-мерным вектором* и обозначать  $\bar{x}$ . Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются координатами вектора.

Вектор, все компоненты которого равны 0, называется *нулевым вектором*:  
 $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ .

Два *n*-мерных вектора  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  *равны*, если их соответствующие координаты равны, т.е. если  $x_i = y_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Определим над векторами две операции:

1. Умножение вектора  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  на действительное число  $\alpha$

$$\alpha \cdot \bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

2. Сложение векторов  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Множество всех  $n$ -мерных векторов с определенными над ними операциями сложения и умножения на скаляр, называется  *$n$ -мерным векторным пространством* и обозначается  $R^n$ .

### *Пример 1*

$R^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R, x_2 \in R\}$  – двумерное векторное пространство (множество точек на плоскости)

*Линейной комбинацией* векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$  называется вектор

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_s \bar{a}_s, \quad \lambda_i - \text{числа}$$

Система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$  называется *линейно зависимой*, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , одновременно не равные 0, такие, что

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_s \bar{a}_s = \bar{0}$$

В противном случае, система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$  называется *линейно независимой*.

Для линейно независимой системы равенство  $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_s \bar{a}_s = \bar{0}$  выполняется лишь при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$ .

Векторы, составляющие линейно независимую систему, называются *линейно независимыми*.

## **Пример 2:**

Проверить линейную независимость векторов

$$\bar{a}_1 = (5; 3; 2), \quad \bar{a}_2 = (1; 7; 3), \quad \bar{a}_3 = (2; 3; 2), \quad a_4 = (10; -6; 1)$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 + 4\bar{a}_3 - \bar{a}_4 &= (5 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 10, 3 - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 6, 2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 1) = \\ &= (0, 0, 0) \quad \exists \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = -1 \Rightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \text{ - лин.} \\ &\quad \text{зав} \end{aligned}$$

Базисом системы векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$  называется любая подсистема  $\bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, \dots, \bar{a}_{i_r}$  линейно независимых векторов этой системы, если любой вектор  $\bar{a}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) из исходной системы представим в виде линейной комбинации векторов  $\bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, \dots, \bar{a}_{i_r}$ .

**Теорема 1** В пространстве  $R^n$  векторы  $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  образуют базис.

Доказательство:

Необходимо доказать выполнение двух требований к этой системе векторов

1. Эти вектора линейно независимы

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bar{0}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n - \text{лин. незав}$$

2. Любой вектор представляется в виде линейной комбинации указанных векторов.

$$\bar{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

**Теорема 2** Количество векторов в любом базисе одинаково.

*Рангом системы векторов* называется число векторов в любом базисе этой системы.

Прямоугольная таблица чисел, имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется *матрицей* размера  $m \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
 - единичные матрицы размера  $n \times n$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Рангом матрицы* будем называть ранг системы векторов, составленных из столбцов этой матрицы, т. е. системы

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Элементарными преобразованиями* над строками матрицы будем называть следующие действия:

1. Перестановку строк.
2. Умножение всех элементов выбранной строки на число, отличное от 0.
3. Сложение соответствующих элементов двух строк.
4. Вычеркивание строк, состоящих из нулей.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу  $A$  размера  $m \times n$  ( $m \leq n$ ) можно привести к виду:

$$A \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} \end{pmatrix}}_r \Bigg\} r$$

где  $r \leq m$  и первые  $r$  столбцов могут занимать произвольные места в произвольном порядке. Очевидно, для такой матрицы ранг равен  $r$ .

**Теорема 3** Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \dots \sim \left( \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}}_r \quad \begin{matrix} a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} \\ a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} \end{matrix} \right) \Bigg\} r,$$

На основании вышесказанного для определения  $r$  ранга матрицы  $A$  размера  $m \times n$  ( $m \leq n$ ) с помощью элементарных преобразований будем получать столбцы единичной матрицы, применяя следующий алгоритм (т.к.  $m \leq n$ , то ранг матрицы не может быть больше  $m$ ).

1. Самый большой размер единичной матрицы, который может получиться  $m \times m$ . Поэтому считаем, что  $r = m$ .
2.  $s = 1$  (номер столбца текущей матрицы  $m \times n$ ),  $k = 1$  (номер столбца единичной матрицы  $r \times r$ , который будем получать).

3. В  $s$ -ом столбце выберем элемент отличный от 0 среди элементов  $a_{ks}, a_{k+1,s}, \dots, a_{m,s}$ . Если такого элемента нет, то увеличиваем  $s$  на 1 и переходим к п.3. Не теряя общности, можно считать, что  $a_{ks} \neq 0$  (этого можно добиться перестановкой строк). Элемент  $a_{ks}$  называется разрешающим.

Получаем новую матрицу, выполнив следующие преобразования:

- разделим  $k$ -ю строку на разрешающий элемент  $a_{ks}$ ;
- все элементы  $s$ -го столбца новой матрицы, кроме  $a_{ks}$ , равны 0;
- для расчета  $a'_{ij}$  – остальных элементов новой матрицы построим прямоугольники с вершинами в элементах  $a_{ij}$  и элементе  $a_{ks}$ :

$$a'_{ij} \rightarrow \frac{a_{kj} \cdot a_{ij}}{a_{ks}}$$

4. Вычеркнем строки, состоящие из нулей, если такие образовалась. При вычеркивании каждой строки,  $r$  уменьшается на 1.
5. Если  $k$  меньше  $r$ , то увеличиваем  $k$  и  $s$  на 1 и переходим к п.3, иначе переходим к п.6.
6. Ранг исходной матрицы будет равен  $r$  – размеру выделенной единичной матрицы.

### Пример 3

Найти с помощью элементарных преобразований ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -5 \end{array} \right)$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & -8 & 11 \\ 0 & -7 & -8 & 11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5/7 & -6/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & -11/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5/7 & -6/7 \\ 0 & 1 & 8/7 & -11/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rang } A = 2$$

$$-3 \rightarrow -3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -4$$

$$4 \rightarrow 4 - \frac{3 \cdot 4}{1} = -8$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{2 \cdot (-8)}{-7} = 3 - \frac{16}{7} = \frac{5}{7}$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{2 \cdot 4}{1} = -4$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{-4 \cdot 2}{1} = 11$$

$$-8 \rightarrow -8 - \frac{-8(-8)}{-7} = 0$$

$$-2 \rightarrow -2 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -8$$

$$-5 \rightarrow -5 - \frac{-4 \cdot 4}{1} = 11$$

$$-4 \rightarrow -4 - \frac{2 \cdot 11}{-7} = \frac{28 + 22}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$11 \rightarrow 11 - \frac{-4 \cdot 11}{-7} = 0$$

### 1.3 Метод Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Обозначим через  $A$  матрицу системы ограничений, а через  $\bar{A}$  - расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Для решения системы будем использовать метод полного исключения неизвестных или метод Жордана-Гаусса. Суть этого метода состоит в том, чтобы, выполнив элементарные преобразования над строками матрицы  $\bar{A}$ , аналогично алгоритму нахождения ранга матрицы  $A$ , получить матрицу вида:

$$\bar{A} \sim \underbrace{\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} \end{array} \right)}_r \Bigg| \begin{array}{c} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{array}$$

Преобразования матрицы называются *жордановыми исключениями*. В процессе жордановых исключений возможны следующие случаи:

1. Получена строка, состоящая из нулей, кроме последнего коэффициента (правой части уравнения). В этом случае система не имеет решения.
2. Ранг матрицы  $A$  равен количеству уравнений  $m$  и числу неизвестных  $n$  ( $r = m = n$ ). Тогда система имеет единственное решение.
3. Ранг матрицы  $A$  не превосходит количества уравнений  $m$  ( $r \leq m$ ) и  $m < n$ . Тогда система имеет бесконечно много решений.

Пусть имеет место третий случай, и расширенная матрица системы приведена к виду:

$$\overline{A} \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \dots & x_n \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & a'_{1,r+2} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & a'_{r,r+2} & \dots & a'_{r,n} & b'_r \end{array} \right) \Bigg\} r$$

По преобразованной матрице составим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{1,r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + a'_{1,n} \cdot x_n = b'_1 \\ \dots \\ x_r + a'_{r,r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + a'_{r,n} \cdot x_n = b'_r \end{array} \right.$$



Система называется *приведенной к единичному базису*.

Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , соответствующие столбцам единичной матрицы, называются *базисными*, все остальные переменные  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  – *свободными*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x_1} + a_{1,2+1}^1 \cdot \underline{x_{2+1}} + \dots + a_{1,n}^1 \cdot \underline{x_n} = b_1^1 \\ \vdots \\ \underline{x_r} + a_{r,2+1}^1 \cdot \underline{x_{2+1}} + \dots + a_{r,n}^1 \cdot \underline{x_n} = b_r^1 \end{array} \right.$$

Если выразить в системе, приведенной к единичному базису, базисные переменные через свободные, то получим *общее решение системы*:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_1^1 - a_{1,2+1}^1 x_{2+1} - \dots - a_{1,n}^1 x_n \\ \vdots \\ x_r = b_r^1 - a_{r,2+1}^1 x_{2+1} - \dots - a_{r,n}^1 x_n \end{array} \right.$$

Общее решение  
 $x_{r+1}, \dots, x_n$  — могут принимать  
 любые значения

### ***Замечание:***

При программном решении систем может возникнуть деление на очень маленькое число (если диагональный элемент близок к нулю), поэтому используют методом Жордана-Гаусса с выбором главного элемента в столбце. Для этого в п. 3 алгоритма преобразований матрицы в качестве разрешающего выбирают максимальный по модулю элемент  $k$ -го столбца среди элементов  $a_{ks}, a_{k+1,s}, \dots, a_{ms}$  и переставляют строки матрицы таким образом, чтобы он оказался на  $k$ -ой строке.

Метод Жордана-Гаусса с выбором главного элемента в столбце необходимо реализовать в первой лабораторной работе.

## Пример 4

Решить систему методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 3. \end{cases} \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

**Решение:**

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0$$

$$-4 \rightarrow -4 - \frac{1 \cdot (-6)}{1} = 2$$

$$-6 \rightarrow -6 - \frac{2 \cdot 2}{-1} = -2$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0$$

$$-2 \rightarrow -2 - \frac{-6 \cdot 1}{1} = 4$$

$$4 \rightarrow 4 - \frac{-2 \cdot 2}{-1} = 0$$

$$1 \rightarrow 1 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -1$$

$$0 \rightarrow 0 - \frac{-3 \cdot 1}{1} = 3$$

$$-3 \rightarrow -3 - \frac{2 \cdot 3}{-1} = 3$$

$$0 \rightarrow 0 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -2$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{-3 \cdot 1}{1} = 6$$

$$6 \rightarrow 6 - \frac{-2 \cdot 3}{-1} = 0$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & x_2 & x_3 & x_4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1, x_3$  - базисные,  $x_2, x_4$  - свободные

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x_1} + x_2 - 2x_4 = 3 \\ \underline{x_3} - 2x_4 = -3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -3 + 2x_4 \end{array} \right. \quad - \text{Общее решение}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2 < 4$   
решений бесконечно много

Решение, если использовать метод с выбором главного элемента.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\max(1, 1, 1)$$

$$\max(|-1|, |-2|) = -2$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$$-6 \rightarrow -6 - \frac{2 \cdot 4}{-2} = -2$$

$$2 \rightarrow 2 - \frac{-1 \cdot 4}{-2} = 0$$

$$-3 \rightarrow -3 - \frac{2 \cdot 6}{-2} = 3$$

$$3 \rightarrow 3 - \frac{-1 \cdot 6}{-2} = 0$$