Скалярное произведение векторов

Обозначение: $a \cdot b$, (a, b)

$a^2 = a \cdot a$

Определение: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\widehat{a, b})$

Свойства:

1) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
2) $a \cdot b = b \cdot a$
3) $\alpha a \cdot b = \alpha (a \cdot b)$

Ортогональность: $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ $\left(\cos(a, b) = \frac{\pi}{2}\right)$

(= перпендикулярность)

Единичный вектор: $|e| = 1$

В координатах: Если $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$ $\left(\begin{array}{l} a = (a_x, a_y, a_z) \\ b = (b_x, b_y, b_z) \end{array} \right)$,

то $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Проекция: $\text{пр}_a b = |b| \cdot \cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{|a|}$

9.1. $|a| = 3, \ |b| = 4, \ (\widehat{a,b}) = 2\pi/3$

Вычислить: а) a^2

б) $(3a-2b)(a+2b)$

Решение:

а) $a^2 = a \cdot a = |a| \cdot |a| \cdot \cos \widehat{a,a} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 0 = 9$

б) $(3a-2b)\cdot(a+2b) = 3a \cdot a + 3 \cdot 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot a -$

$- 2 \cdot 2 \cdot b \cdot b = 3|a||a| + 4|a| \cdot |b| \underbrace{\cos \widehat{a,b}}_{= -1/2} - 4|b||b| =$

$= 27 - 24 - 64 = -6$

9.2. **Найти угол** между e_1 и e_2, если

а) $|e_1| = |e_2| = 1$

б) $a = e_1 + 2e_2$ и $b = 3e_1 - 4e_2$ ортогональны

Решение: ① $e_1 \cdot e_2 = |e_1| \cdot |e_2| \cdot \cos \widehat{e_1, e_2} = \cos \widehat{e_1, e_2}$

$|e_1||e_1| = |e_2||e_2| = 1$ ② $a \cdot b = 0 \Rightarrow 0 = (e_1 + 2e_2)(5e_1 - 4e_2) =$

$= 5 \cdot e_1 \cdot e_1 - 4e_1 e_2 + 10 e_1 e_2 - 8 e_2 e_2 = -3 + 6 e_1 \cdot e_2 =$

$= -3 + 6 \cos \widehat{e_1, e_2}$

③ $-3 + 6 \cos \widehat{e_1, e_2} = 0 \Rightarrow \cos \widehat{e_1, e_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\widehat{e_1, e_2} = \pi/3$

9.3 Дано: ⓐ $|m| = |n| = 1$, $m \perp n$

ⓑ $a = 2m - n$, $b = 2m + 3n$

$m^2 = |m| \cdot |m| = 1$
$n^2 = |n| \cdot |n| = 1$
$m \cdot n = 0$

Найти: $a \cdot b$

Решение:

$a \cdot b = (2m - n)(2m + 3n) = 4m^2 + 6mn - 2nm - 3n^2$

$a\cdot b = (2m-n)(2m+3n) = 4m^2 + 6mn - 2mn - 3n^2 =$

$= 4 - 3 = 1$

9.4 **Дано:** а) $|a| = 3$, $|b| = |c| = 2$

б) $a \perp b$, $\widehat{a,c} = \widehat{b,c} = \pi/3$

Вычислить: $(3a+b)\cdot(2a-c)$

Решение: $(3a+b)(2a-c) = 6a^2 - 3ac + \underbrace{2ab}_{=0} - bc =$

$= 6\cdot|a|\cdot|a| - 3|a||c|\cos\widehat{a,c} - |b||c|\cos\widehat{b,c} =$

$= 54 - 18\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = 43$

В ответах ошибка

3.5 Дано: $a = 2i - 3j + k$

$b = -i + j$

Вычислить: $a \cdot b$

$|i| = |j| = |k|$

$i \perp j,\ j \perp k,\ i \perp k$

Решение:

I способ: $a \cdot b = (2i - 3j + k) \cdot (-i + j) =$

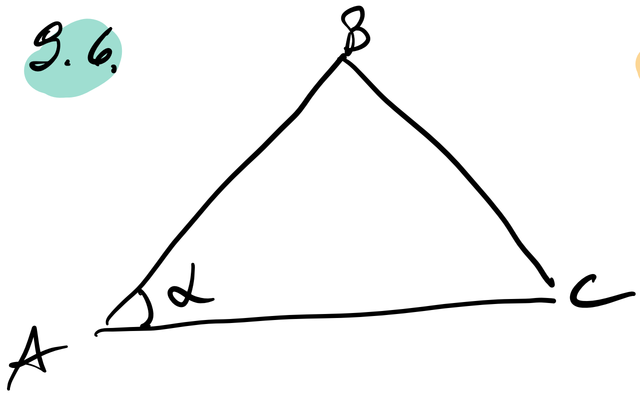
$= -2i^2 + \cancel{2ij} + \cancel{3ij} - 3j^2 - \cancel{ik} + \cancel{kj} = -5$

II способ: $a = (2, -3, 1)$

$b = (-1, 1, 0)$

$a \cdot b = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -5$

3.6.



Дано: $A(-1,2)$
$B(1,1)$
$C(3,2)$

Найти α

Решение:

1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha$

2) $\vec{AB} = (1-(-1), 1-2) = (2,-1)$

$\vec{AC} = (4,0)$

3) $|AB| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$

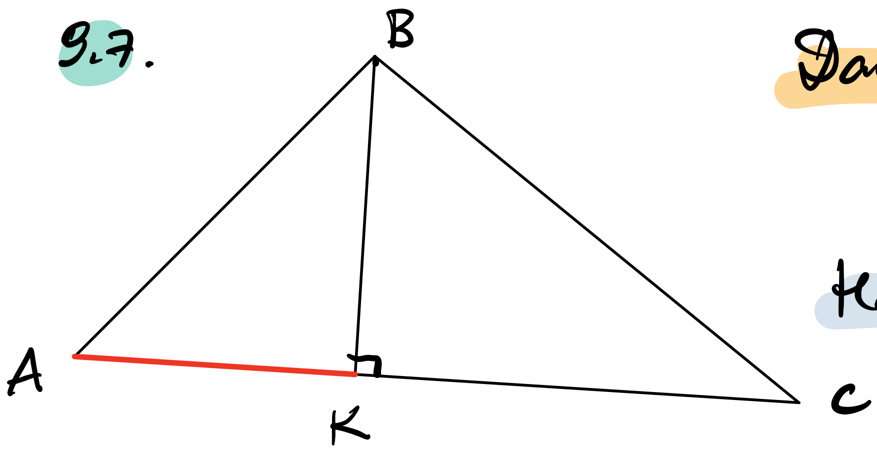
$|AC| = 4$

4) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 = 8$

$\Downarrow$

5) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|AB| \cdot |AC|} = \dfrac{8}{4 \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

9.7.



Дано: $A(4,2,2)$
$B(1,-1,0)$
$C(3,2,4)$

Найти: AK

Решение:

(1) $AK = пр_{\vec{AC}} \vec{AB} = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|}$

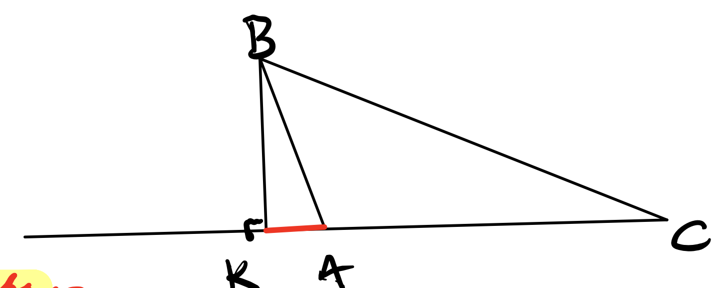
(2) $\vec{AB} = (-3, -3, -2)$

$\vec{AC} = (-1, 0, 2)$

(3) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3)\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 + (-2)\cdot 2 = -1$

(4) $|\vec{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

(5) $AK = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$



отрицательная проекция указывает

на тупой угол между векторами

2.8 Дано: $a = -2i + k$

$b = i + j + 3k$

$c = 4i - j + 5k$

$$пр_a b = \frac{a \cdot b}{|a|}$$

Найти: а) $пр_a (b - 2c)$

б) $пр_{b+c}\, a$

Решение:

а) $$пр_a (b - 2c) = \frac{(b-2c)\cdot a}{|a|}$$

1) $a = (-2, 0, 1)$
$b = (1, 1, 3)$
$c = (4, -1, 5)$

$\Rightarrow$

2) $b - 2c = (1,1,3) - 2(4,-1,5) = (-7, 3, -7)$

3) $(b-2c)\cdot a = -7\cdot(-2) + 3\cdot 0 + (-7)\cdot 1 = 7$

4) $|a| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

5) $\text{пр}_a (b-2c) = \frac{7}{\sqrt{5}}$

б) $\text{пр}_{b+c} a = \frac{a \cdot (b+c)}{|b+c|}$

1) $a = (-2, 0, 1)$

$b = (1, 1, 3)$

$c = (4, -1, 5)$

2) $b + c = (5, 0, 8)$

3) $a \cdot (b+c) = -10 + 0 + 8 = -2$

4) $|b+c| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 8^2} = \sqrt{89}$

5) $\text{пр}_{b+c} a = -\frac{2}{\sqrt{89}}$