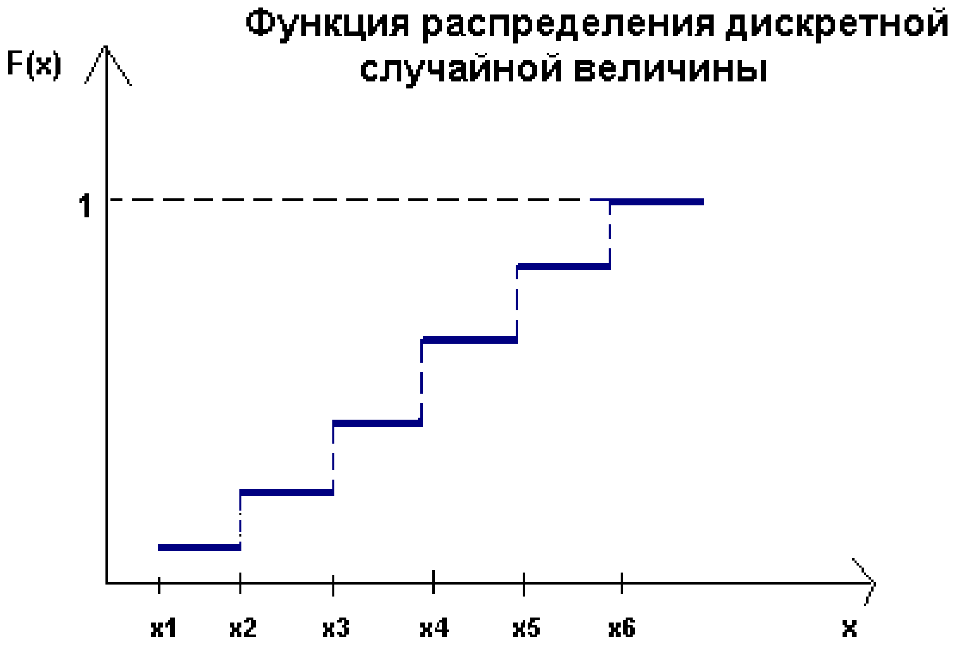
Непрерывные случайные величины

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если ее функция распределения F(x) непрерывна и дифференцируема для всех $x \in R$, за исключением, быть может, отдельных точек.

- дальность полёта брошенного камня
- рост случайно выбранного человека
- температура на улице

Непрерывные случайные величины

Для функции распределения непрерывной случайной величины сохраняются те же свойства, что и для функции распределения дискретной сл. в.

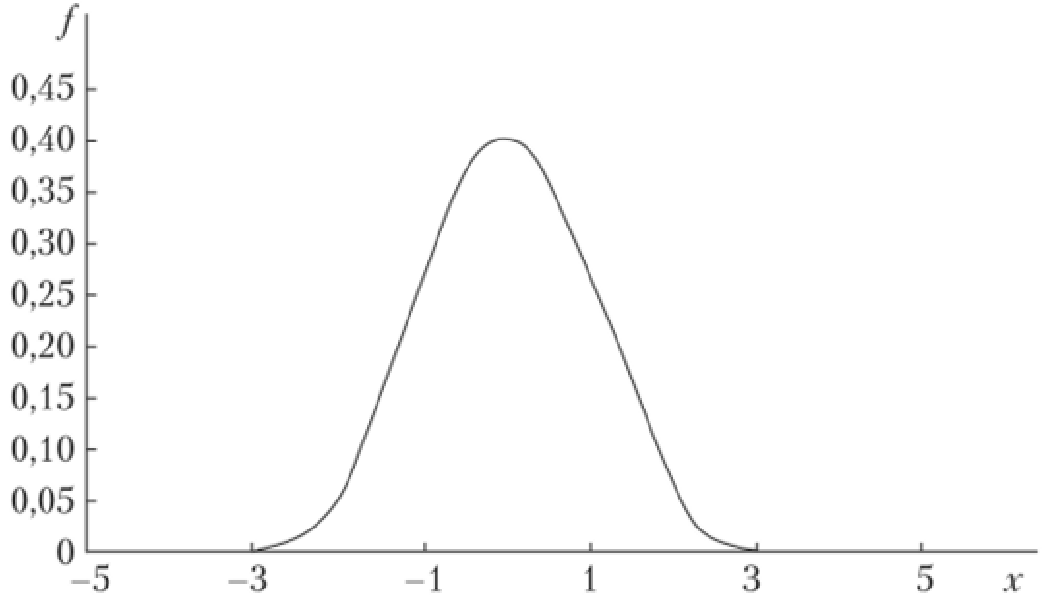


Непрерывные случайные величины

Для непрерывных случайных величин закон распределения случайной величины определяет **плотность распределения (вероятностей) f(x):**

$$f_\xi(x) = f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Аналогом ее для дискретной случайной величины служит *ряд распределения*.



Непрерывные случайные величины

Функция распределения F(x) может быть найдена по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Доказательство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt = \int_{-\infty}^{x} dF(t) =$$

$$= F(t)\Big|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x)$$

Характеристика	**Дискретные случ. величины**	**Непрерывные случ. величины**
Закон распределения	**Ряд** распределения (таблица) $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$	**Плотность** распределения (функция) $f(x) = F'(x)$
Функция распределения	Ступенчатая, разрывная функция со скачками в точках x_k $F(x) = \sum_{k:\ xk<x} p_k$	Непрерывная, почти всюду дифференцируемая $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
Основные распределения	1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ 2.Биномиальное **B (n, p)** 3.Геометрическое **G (p)** 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** 5.Распределение Пуассона **Po (λ)**	
Математическое ожидание	$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$	
Дисперсия	$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2$	

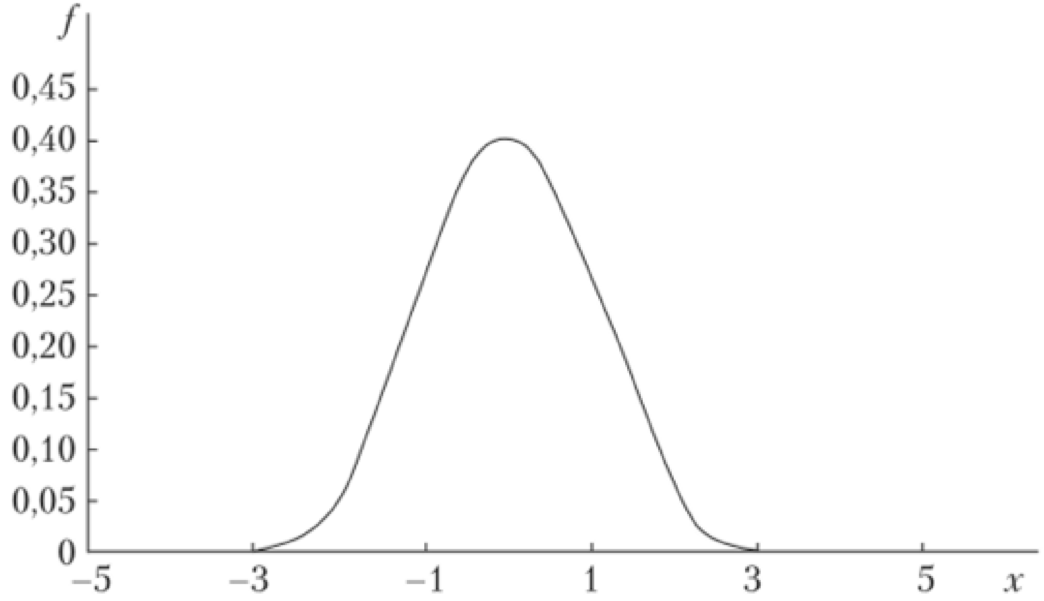
Плотность распределения f(x)

Свойства плотности распределения f(x)

1. Плотность распределения является неотрицательной функцией:

$$f(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in R$$

Док-во: производная неотрицательной функции F(x) неотрицательна



Плотность распределения f(x)

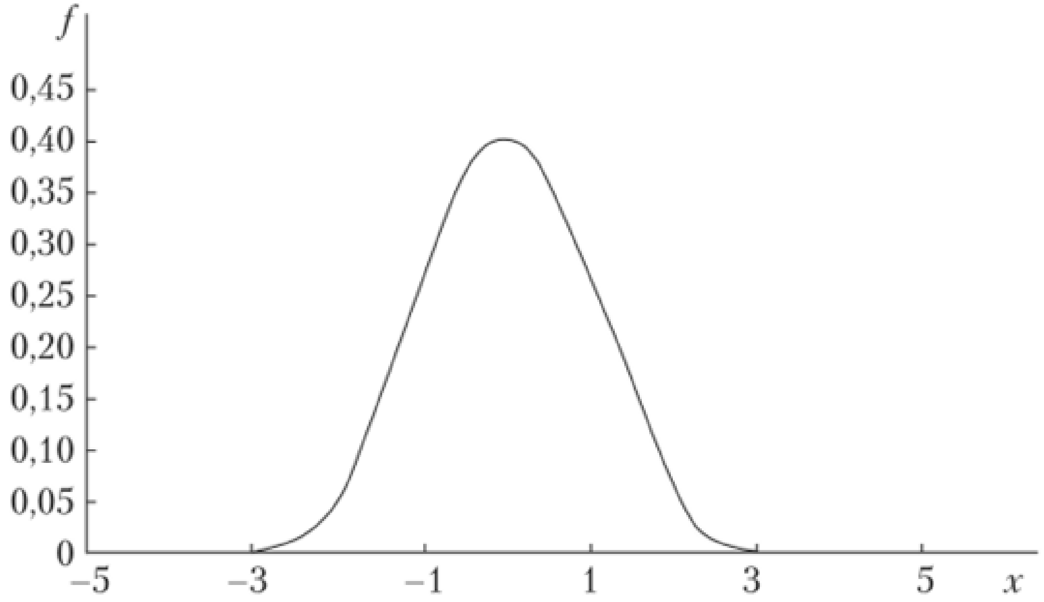
Свойства плотности распределения f(x)

2. Площадь фигуры, ограниченной графиком плотности распределения и осью абсцисс, равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Доказательство: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$



Плотность распределения f(x)

Свойства плотности распределения f(x)

3.

$$P\{\xi \in [x_1, x_2)\} = P\{x_1 \le \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Док-во:

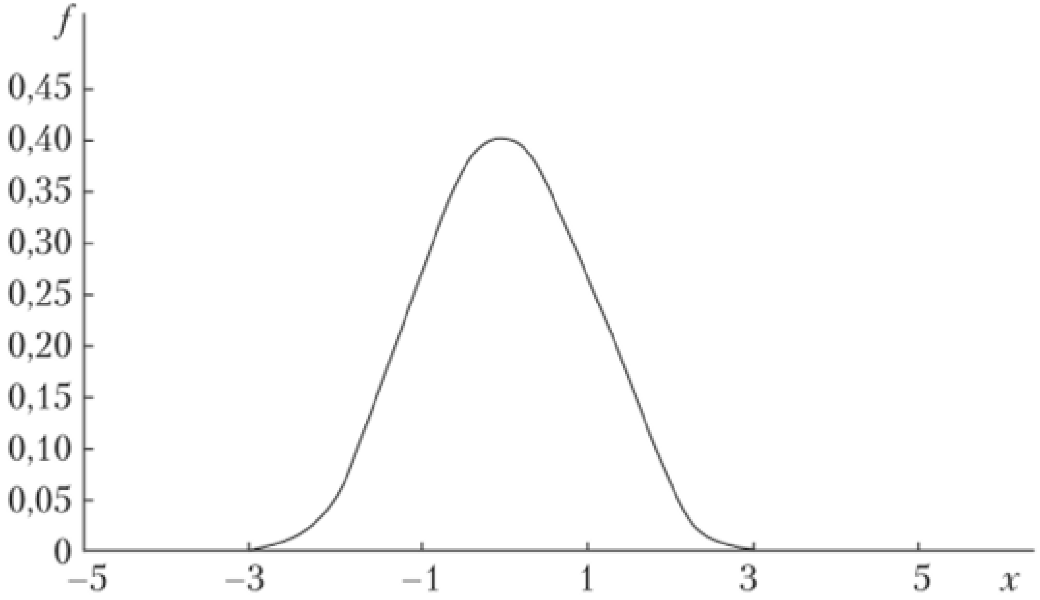
$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Плотность распределения f(x)

Поскольку функция распределения F(x) непрерывной сл. в. ξ по определению является непрерывной,
то в любой точке $x_0 \in R$ она имеет *нулевой скачок*.

Так как величина скачка в точке x_0 – вероятность P $\{\xi = x_0\}$,
то случайная величина ξ *принимает любое значение с нулевой вероятностью:*

$P\{\xi = x_0\} = 0$ для всех $x_0 \in R$



Плотность распределения f(x)

Свойства плотности распределения f(x)

$$P\{\xi \in [x_1, x_2)\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$P\{\xi \in [x_1, x_2]\} = P\{\xi \in [x_1, x_2)\} + P\{\xi = x_2\}$$

$$P\{\xi \in (x_1, x_2)\} = P\{\xi \in [x_1, x_2)\} - P\{\xi = x_1\}$$

$$P\{\xi \in (x_1, x_2]\} = P\{\xi \in [x_1, x_2)\} + P\{\xi = x_2\} - P\{\xi = x_1\}$$

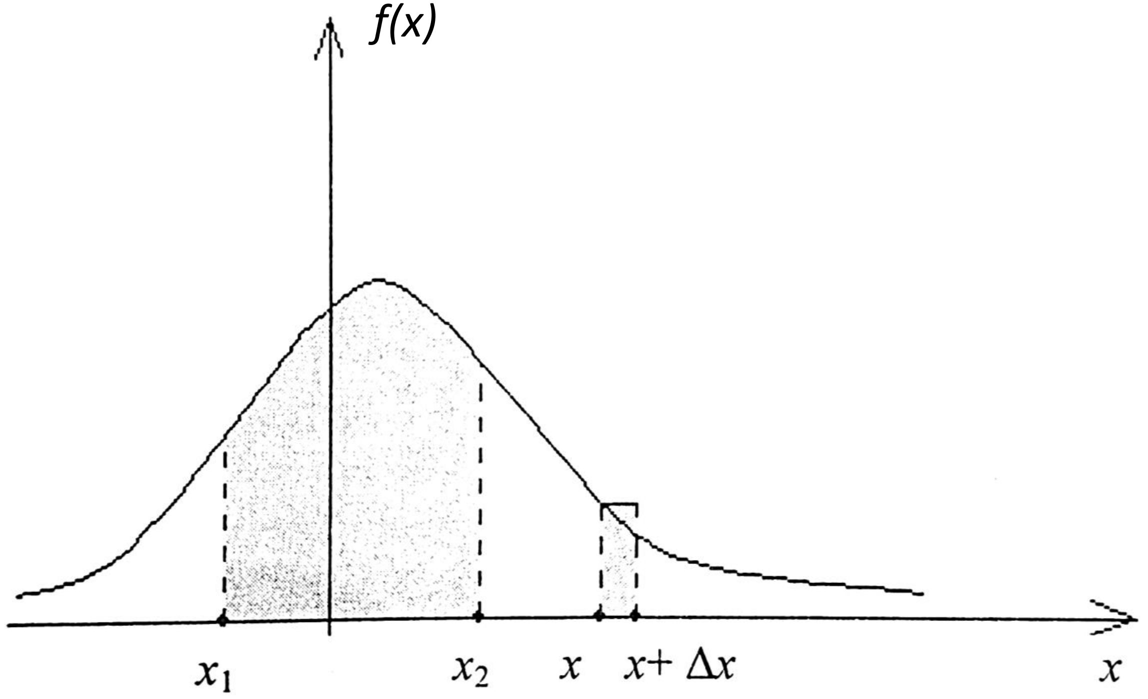
Для всех диапазонов $< x_1, x_2 >$ из множества

$[x_1, x_2)$, $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2]$, (x_1, x_2) вероятность $P\{\xi \in < x_1, x_2 >\}$ одинакова

Плотность распределения f(x)

Геометрический смысл

Вероятность $P\{\xi \in \langle x_1, x_2 \rangle\}$ попадания сл. в. ξ в промежуток $\langle x_1, x_2 \rangle$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности распределения, осью абсцисс и прямыми $x = x_1, x = x_2$

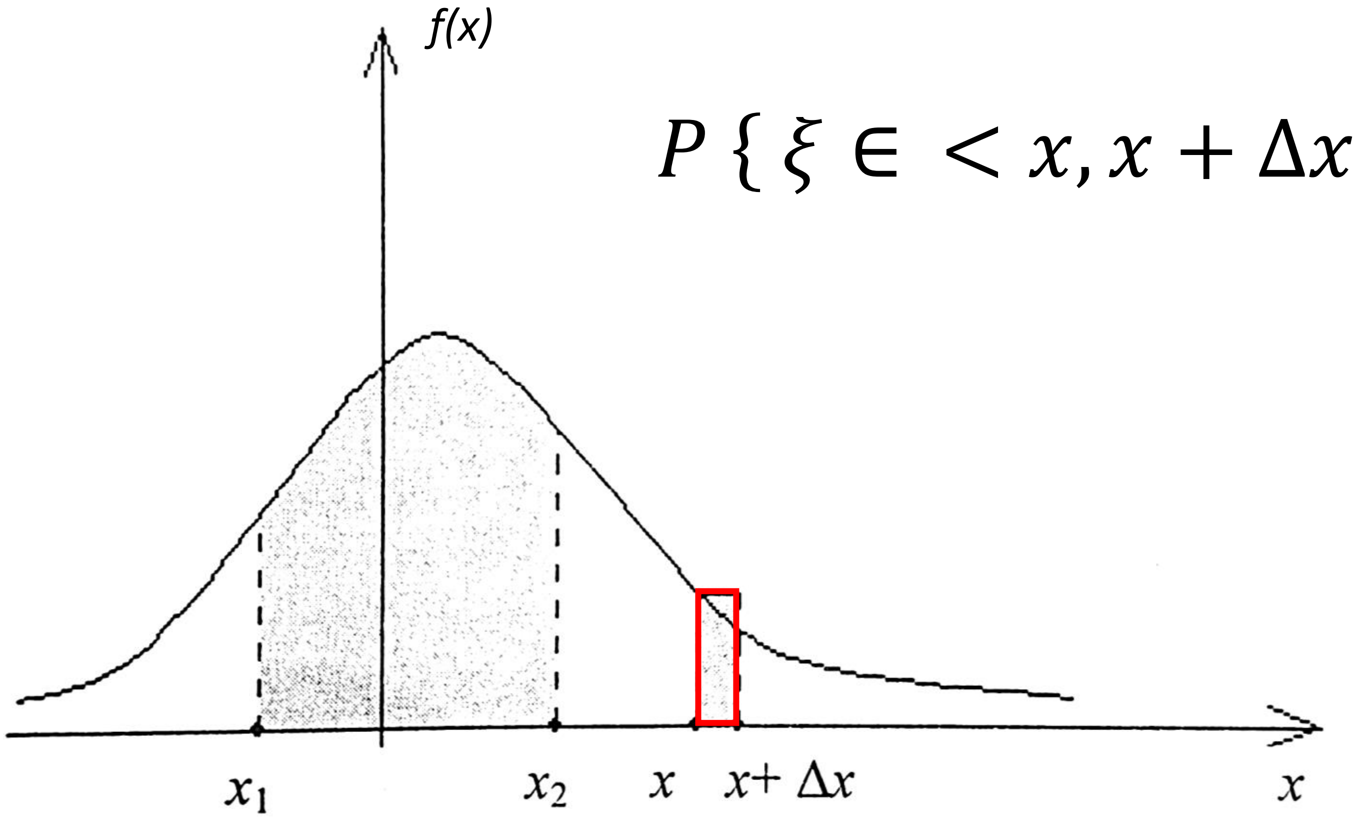


Плотность распределения f(x)

Геометрический смысл

Если длина Δx интервала $< x, x + \Delta x >$ мала, то вероятность попадания сл. в. ξ в этот интервал приближенно совпадает с площадью прямоугольника со сторонами Δx и $f(x)$

$$P\,\{\,\xi \in \, < x, x + \Delta x > \} \approx f(x)\Delta x$$



Непрерывные случайные величины

$$P\{\xi = x_0\} = 0 \text{ для всех } x_0 \in R$$

Вероятность события, не являющегося невозможным, равна нулю!

- До испытания каждому возможному значению непрерывной сл. в. можно приписать только нулевую вероятность
- После испытания случайная величина все же принимает некоторое значение.

Поэтому **ненулевую вероятность попадания значения** непрерывной сл. в. **в некоторое подмножество** числовой прямой можно гарантировать только для подмножеств, содержащих более чем счетное число точек, то есть для *непрерывных множеств*.

Характеристика	Дискретные случ. величины	Непрерывные случ. величины
Закон распределения	**Ряд** распределения (таблица) $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$	**Плотность** распределения (функция) $f(x) = F'(x)$
Функция распределения	Ступенчатая, разрывная функция со скачками в точках x_k $F(x) = \sum\limits_{k:\ xk<x} p_k$	Непрерывная, почти всюду дифференцируемая $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
Основные распределения	1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ 2.Биномиальное **B (n, p)** 3.Геометрическое **G (p)** 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** 5.Распределение Пуассона **Po (λ)**	
Математическое ожидание	$M\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$	
Дисперсия	$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2$	

Непрерывные случайные величины

Пример:

Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} C(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

Найти неизвестный коэффициент C, функцию распределения F(x), построить графики функций f(x) и F(x).

Вычислить вероятность попадания значения сл. в. ξ в промежуток [-1, 1].

Непрерывные случайные величины

Решение: Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} C(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

Найдем C из свойства плотности:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} 0dx = \int_{-2}^{2} \mathrm{C}(4 - x^2)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = \mathrm{C}\frac{32}{3}, \qquad \mathrm{C} = \frac{3}{32}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

Непрерывные случайные величины

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

- Если $x < -2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

- Если $-2 \leq x \leq 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{x} \frac{3}{32}(4 - t^2)dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x - \frac{x^3}{32}$$

Непрерывные случайные величины

- Если $x > 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{2} \frac{3}{32}(4 - t^2)dt + \int_{2}^{x} 0dt = 1$$

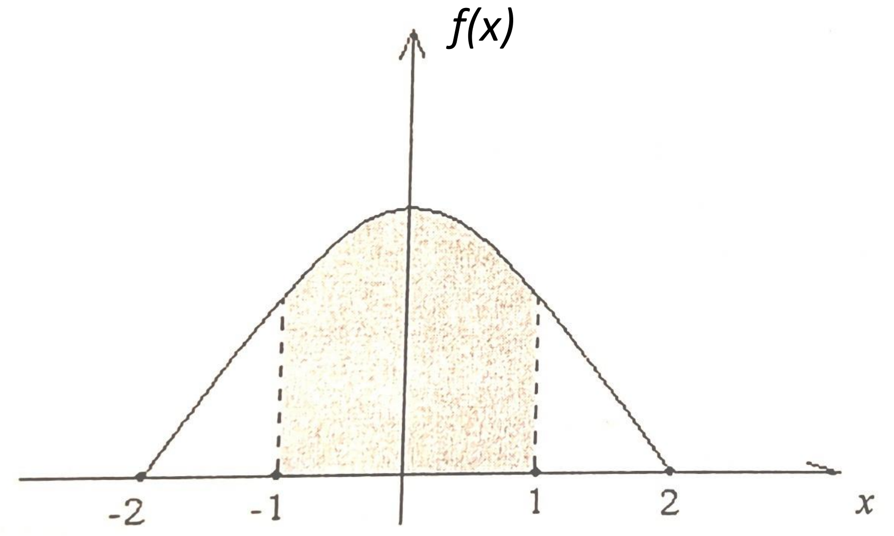
Функция распределения F(x) имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x - \frac{x^3}{32}, & \text{при } -2 \le x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Непрерывные случайные величины

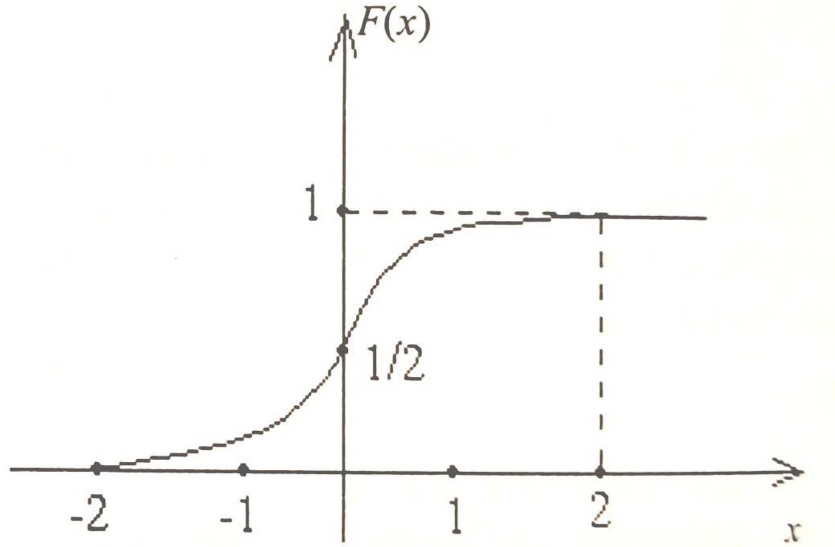
Плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{32}(4-x^2), & \text{при } x\in[-2,2]\\ 0, & \text{при } x\notin[-2,2]\end{cases}$$



Функция распределения:

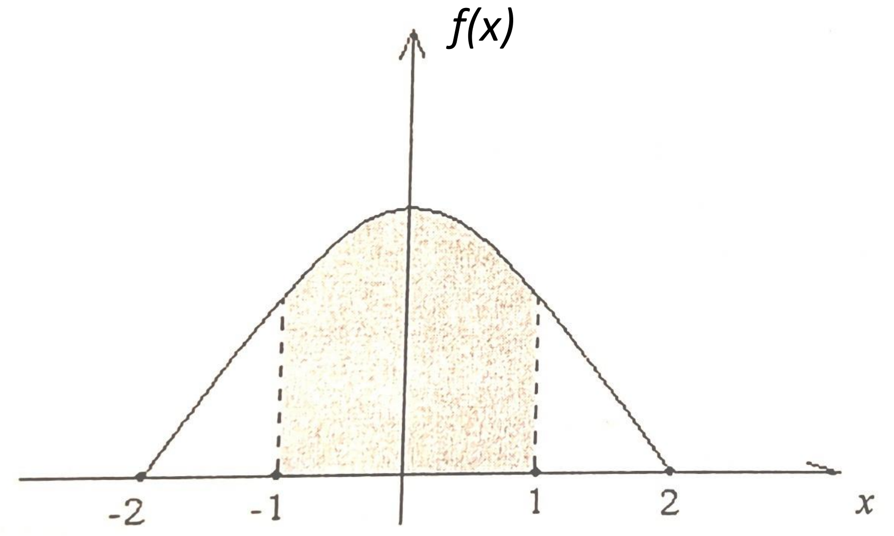
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<-2\\ \frac{1}{2}+\frac{3}{8}x-\frac{x^3}{32}, & \text{при } -2\le x\le 2\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$$



Непрерывные случайные величины

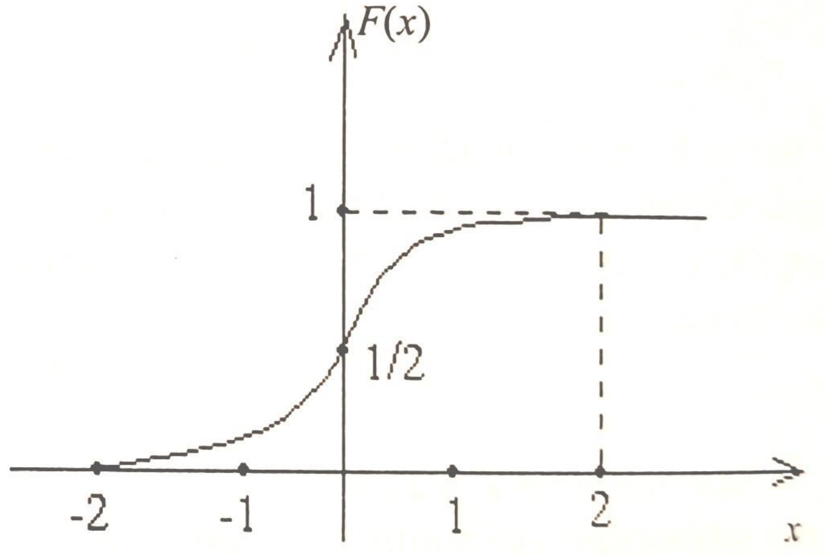
Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$



Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x - \frac{x^3}{32}, & \text{при } -2 \le x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

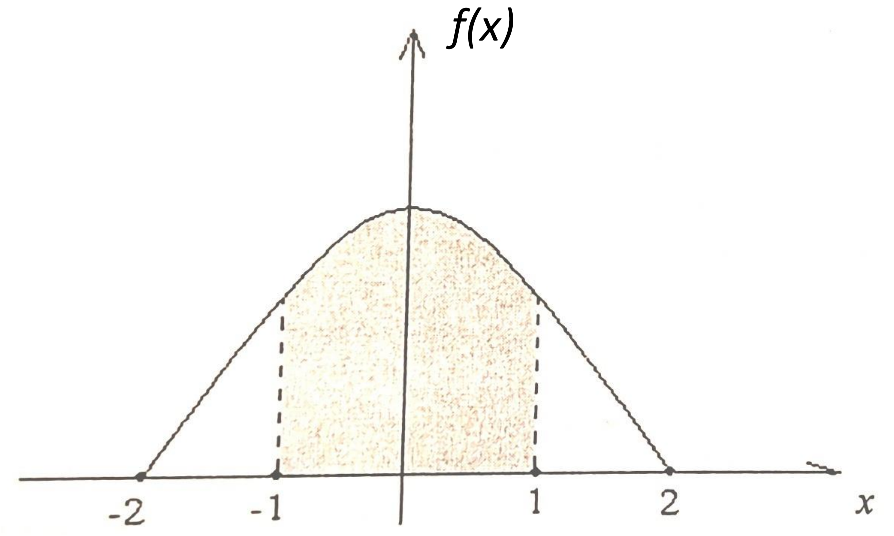


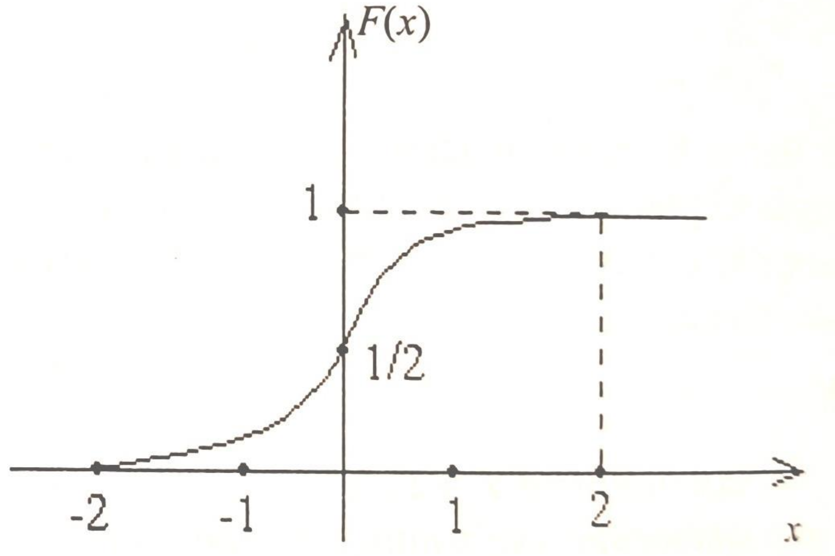
Непрерывные случайные величины

Вероятность попадания значения сл. в. ξ в промежуток [−1, 1]:

$$P\{\,\xi \in [-1, 1]\,\} = F(1) - F(-1) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{32} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{32}\right) = 0.6875$$





Основные непрерывные распределения

Основные **законы распределения** непрерывных случ. величин:

1. Равномерное распределение
2. Показательное (экспоненциальное) распределение
3. Нормальное (гауссово) распределение

Основные непрерывные распределения

Равномерное распределение Rav [a, b]

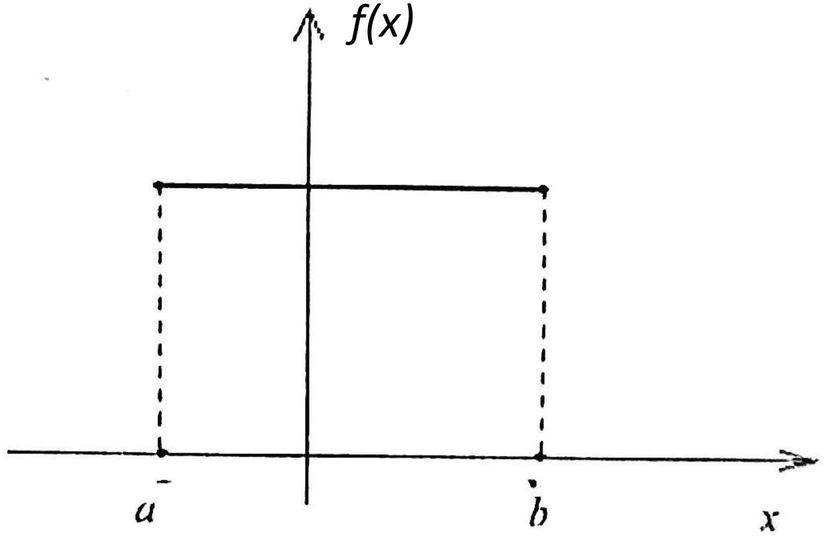
Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [a, b] (a < b), если ее плотность распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Может использоваться в качестве *«нулевого» приближения* при анализе сл. в. в условиях отсутствия априорной информации о законе распределения сл. в.

Основные непрерывные распределения

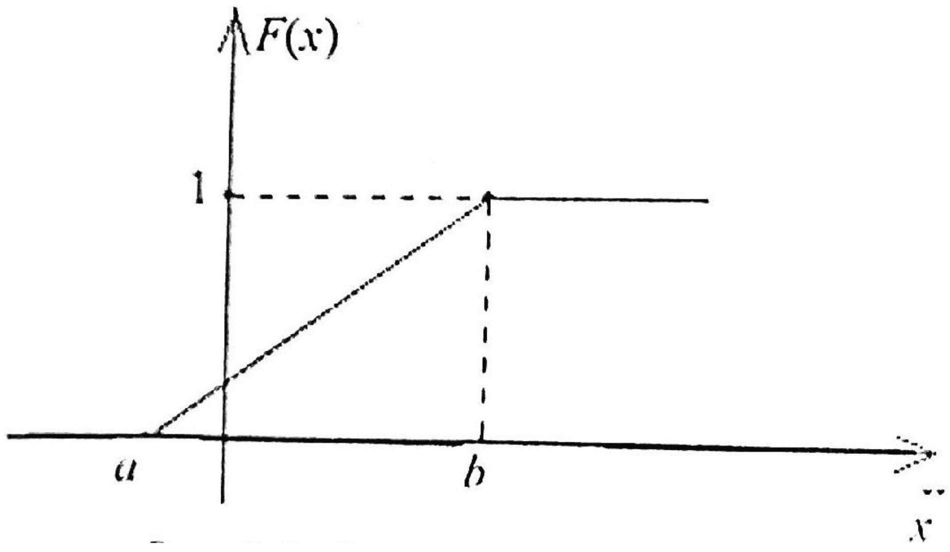
Равномерное распределение Rav [a, b]



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$$



Основные непрерывные распределения

Равномерное распределение Rav [a, b]

Пример:

На перекрестке стоит светофор-автомат, в котором 1 мин горит зеленый свет, 0,5 мин горит красный и 0,1 мин – желтый.

Некто подъезжает к перекрестку на машине в случайный момент времени, не связанный с работой светофора.

Какова вероятность того, что он проедет перекресток не останавливаясь?

Основные непрерывные распределения

Равномерное распределение Rav [a, b]

Решение:

Пусть сл. величина ξ – момент проезда автомашины через перекресток. По условию сл. величина ξ имеет равномерное распределение в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре, $1 + 0,5 + 0,1 = 1,6$ мин.

Для того чтобы машина проехала перекресток не останавливаясь, нужно, чтобы момент проезда пришелся на интервал (0,1).

$$P\{ \xi \in (0, 1) \} = 1/1.6 = 0.625$$

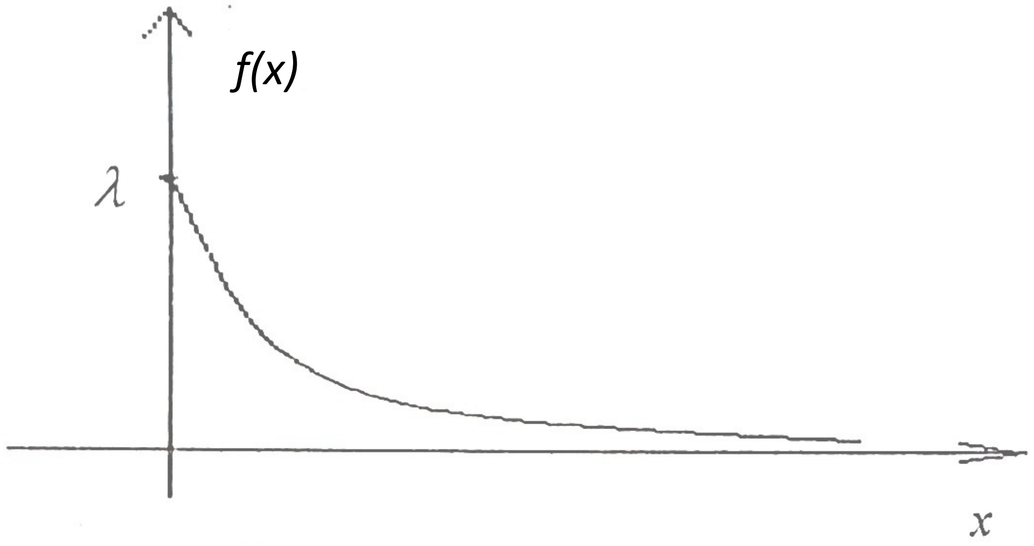
Основные непрерывные распределения

Распределение	Обозначение	Формула плотности распределения
1. Равномерное распределение	**Rav [a,b]**	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$

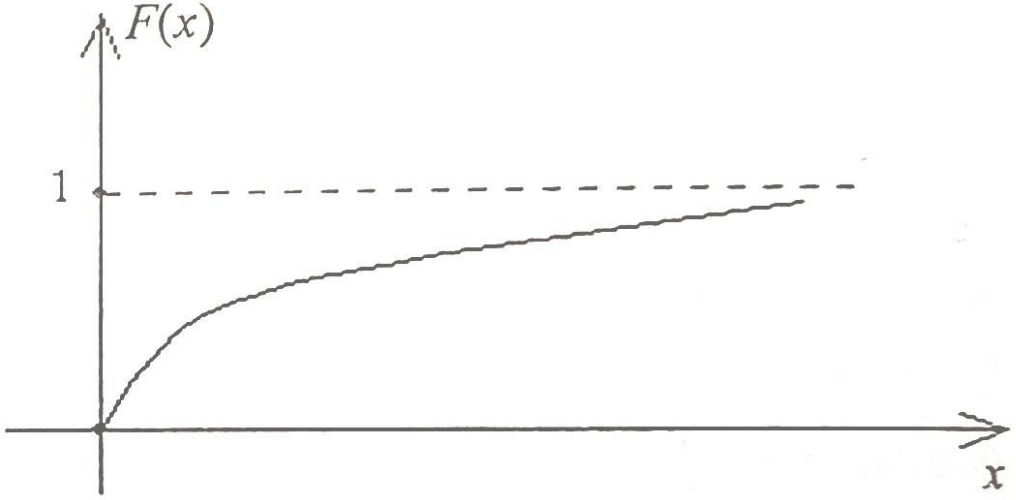
Основные непрерывные распределения

Показательное распределение exp (λ)

f(x) = $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$



F(x) = $\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$



Основные непрерывные распределения

Показательное распределение exp (λ)

Используется для *моделирования времени между событиями*, которые происходят на постоянной средней скоростью

<u>Величины типа «время жизни»:</u>

- продолжительность жизнь больных при клинических исследованиях;
- продолжительность безотказной работы машин и механизмов;
- продолжительность периодов стагнации в экономике;
- время между двумя падающими звездами на небе;

Основные непрерывные распределения

Показательное распределение exp (λ)

Может использоваться для моделирования *возникновения событий* на расстоянии *в единицу.*

$$\lambda = \frac{1}{MX}$$

Задачи массового обслуживания:

- расстояние между выбоинами на улице;
- число заявок, поступающих за день и т.д.

Дискретным аналогом экспоненциального распределения случайных величин является геометрическое распределение.

Основные непрерывные распределения

Показательное распределение exp (λ)

Пример:

Среднее время безотказной работы прибора равно 80 часов.

Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:

а) выражение его плотности вероятности и функции распределения;

б) вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Основные непрерывные распределения

Показательное распределение exp (λ)

Решение:

$$\lambda = \frac{1}{MX} = \frac{1}{80}$$

Пусть сл. величина ξ – время безотказной работы прибора.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{80} e^{-\frac{x}{80}}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{80}}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$P\{\xi > 100\} = P\{100 < \xi < \infty\}$$

$$= F(+\infty) - F(100) =$$

$$= (1 - e^{-\infty}) - \left(1 - e^{-\frac{100}{80}}\right) =$$

$$= \left(1 - 1 + e^{-\frac{5}{4}}\right) = 0.287$$

Основные непрерывные распределения

Распределение	Обозначение	Формула плотности распределения
1. Равномерное распределение	**Rav [a, b]**	f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$
2. Показательное распределение	**Exp (λ)**	f(x) = $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$

Основные непрерывные распределения

Нормальное (гауссово) распределение N (*a*,σ)

Случайная величина ξ имеет нормальное (гауссово) распределение с параметрами *a* и σ ($\sigma > 0$, $a \in$ R), если ее плотность распределения имеет вид:

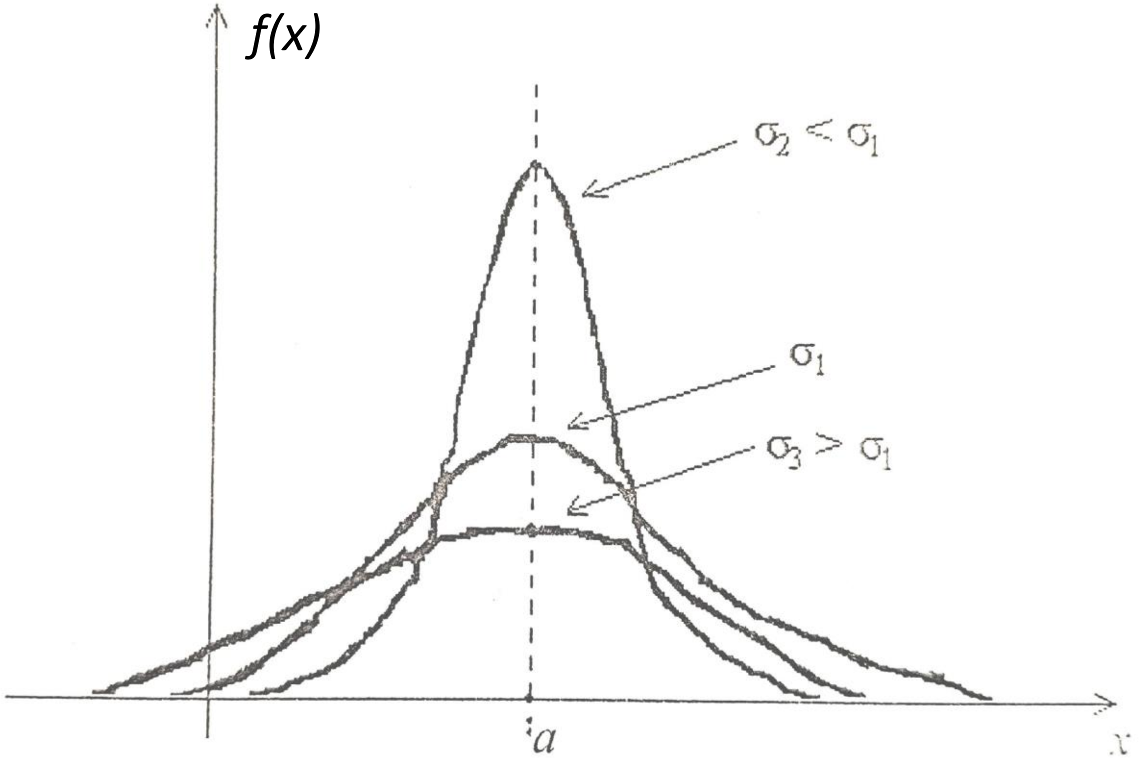
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in R$$

Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

f(x) – четная, убывающая с возрастанием |x|, имеет максимум в точке x = *a* (*f(a)* ≈ 0.4/σ) и перегиб в точках x = *a*+σ, x = *a*-σ

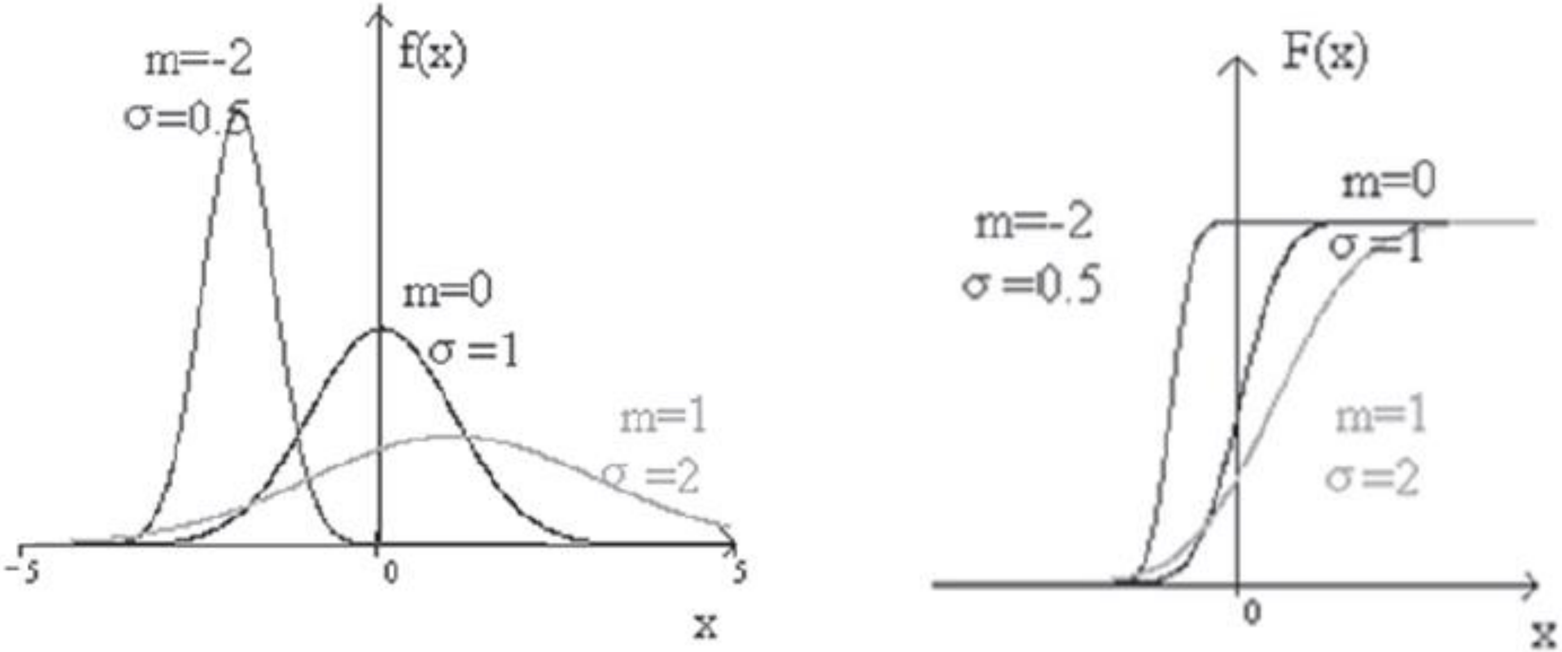
Параметр *a* характеризует **положение графика функции** на числовой оси,
параметр σ характеризует **степень сжатия** или растяжения графика плотности.



Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mathrm{F(x)} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \mathbf{0.5} + \Phi_{\mathbf{0}}\left(\frac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$



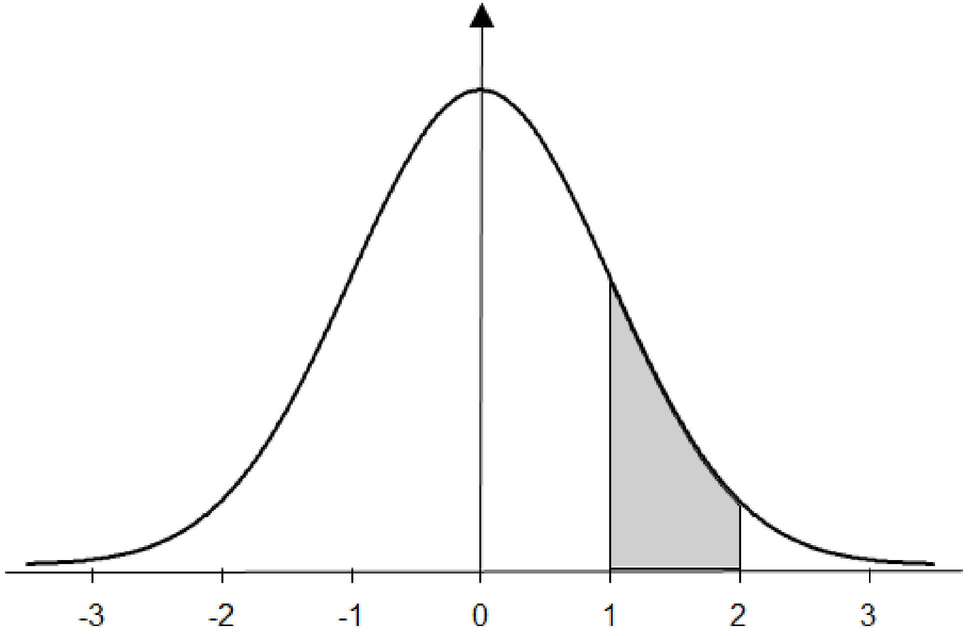
Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

Стандартное нормальное распределение –

нормальное распределение с параметрами a = 0, σ = 1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad F(x) = 0.5 + \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



Точки перегиба – x = 1, x = -1

f(0) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

Теорема: Если случайная величина ξ ≻ N (*a*,σ), то

1) для любого интервала $< x_1, x_2 >$

$$P\{\xi \in < x_1, x_2 >\} = \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

2) для любого ε > 0

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = P\{|\xi - a| \leq \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

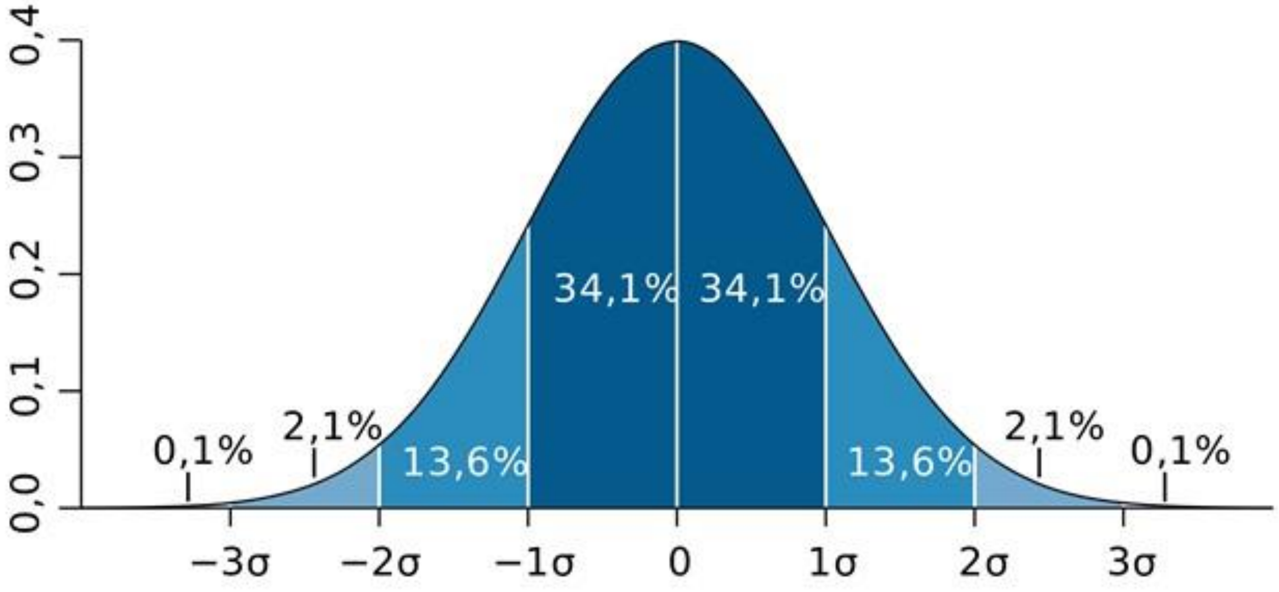
Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

Правило трех сигм: Нормальная случайная величина практически никогда не отклоняется от своего среднего значения m более чем на 3σ.

$$P\{\,|\xi - a| \leq 3\sigma\,\} =$$

$$= 2\Phi_0(3) = 0.9973$$



Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

Пример:

Взвешивается некоторое вещество.

Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 20$.

Найти вероятность того, что взвешивание будет производиться с погрешностью, не превосходящей по модулю 10.

Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

Решение. Пусть случайная величина ξ – погрешность взвешивания.

$$P\{\,|\xi| \le 10\,\} = \Phi_0\left(\frac{10}{20}\right) - \Phi_0\left(-\frac{10}{20}\right) =$$

$$= 2\Phi_0\left(\frac{10}{20}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0.383$$

Основные непрерывные распределения

Нормальное распределение N (*a*,σ)

- Наиболее распространенный на практике закон распределения

- Нормальный закон распределения – *предельный закон*, к которому приближаются другие законы распределения при весьма общих предположениях.
  (Центральная предельная теорема)

Основные непрерывные распределения

Распределение	Обозначение	Формула плотности распределения
1. Равномерное распределение	**Rav [a, b]**	f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$
2. Показательное распределение	**Exp (λ)**	f(x) = $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$
3. Нормальное распределение	**N (a,σ)**	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

Характеристика	**Дискретные случ. величины**	**Непрерывные случ. величины**
Закон распределения	**Ряд** распределения (таблица) $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$	**Плотность** распределения (функция) $f(x) = F'(x)$
Функция распределения	Ступенчатая, разрывная функция со скачками в точках x_k $F(x) = \sum\limits_{k:\ xk<x} p_k$	Непрерывная, почти всюду дифференцируемая $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
Основные распределения	1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ 2.Биномиальное **B (n, p)** 3.Геометрическое **G (p)** 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** 5.Распределение Пуассона **Po (λ)**	1.Равномерное **Rav [a, b]** 2.Показательное **exp (λ)** 3.Нормальное **N (*a*,σ)**
Математическое ожидание	$M\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$	
Дисперсия	$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2$	

Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием (средним значением) **непрерывной** случайной величины:

$$\mathrm{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Справедливо, если интеграл в правой части абсолютно сходится, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

Иначе полагают, что случайная величина не имеет мат. ожидания.

Математическое ожидание случайной величины

Пример: Найти математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины

Пример: Найти математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

$$\mathbf{M\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} x * 0dx + \int_{-2}^{2} x\frac{3}{32}(4 - x^2)dx + \int_{2}^{\infty} x * 0dx =$$

$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}} \int_{-2}^{2} (\mathbf{4}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^3)\boldsymbol{dx} = \frac{3}{32}\left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-2}^{2} = \mathbf{0}$$

Математическое ожидание случайной величины

Пример: Пусть ξ – непрерывная случайная величина, распределенная по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in R$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} ln(1+x^2)\Big|_{-2}^{2} = \infty$$

Следовательно, математическое ожидание ξ не существует

Числовые характеристики случайных величин

Дисперсией непрерывной случайной величины называется величина **Dξ**, равная математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания:

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{D}(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{x_k} - \mathrm{M}\xi)^2 f(x) dx$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(\xi) = \sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi}$$

Дисперсия случайной величины

Дисперсию удобнее находить по формуле:

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2$$

$$\mathrm{M}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

Дисперсия случайной величины

Пример: Найти дисперсию случайной величины, распределенной по закону:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2), & \text{при } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{2}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2 \frac{3}{32}(4 - x^2)dx = \mathbf{0.8}$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2 = 0.8 - 0 = \mathbf{0.8}$$

Характеристика	Дискретные случ. величины	Непрерывные случ. величины
Закон распределения	**Ряд** распределения (таблица) $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$	**Плотность** распределения (функция) $f(x) = F'(x)$
Функция распределения	Ступенчатая, разрывная функция со скачками в точках x_k $F(x) = \sum\limits_{k:\, xk<x} p_k$	Непрерывная, почти всюду дифференцируемая $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
Основные распределения	1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ 2.Биномиальное **B (n, p)** 3.Геометрическое **G (p)** 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** 5.Распределение Пуассона **Po (λ)**	1.Равномерное **Rav [a, b]** 2.Показательное **exp (λ)** 3.Нормальное **N (*a*,σ)**
Математическое ожидание	$M\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$	$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$
Дисперсия	$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2$	

Вероятность	Дискретные случ. величины	Непрерывные случ. величины
$P\{\xi \in <x_1, x_2>\}$	$P\{\xi \in [x_1, x_2)\} = F(x_2) - F(x_1)$ $P\{\xi \in [x_1, x_2]\} = F(x_2 + 0) - F(x_1)$ $P\{\xi \in (x_1, x_2)\} = F(x_2) - F(x_1 + 0)$ $P\{\xi \in (x_1, x_2]\} = F(x_2 + 0) - F(x_1 + 0)$	$P\{\xi \in <x_1, x_2>\} =$ $= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx =$ $= F(x_2) - F(x_1)$