Схема Бернулли

Испытания Бернулли

1. Испытания независимы (вероятность появления любого исхода в каждом опыте не зависит от результатов других испытаний)
2. Число испытаний известно и равно n
3. Вероятность успеха в каждом испытании одинакова и равна p
4. Вероятность неудачи в каждом испытании одинакова и равна $q = 1 - p$

$0 \le p, q \le 1$

Схема Бернулли

Пример

На факультете насчитывается 1825 студентов.

Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для 4 студентов факультета?

Схема Бернулли

Пример

На факультете на считывается 1825 студентов.
Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для 4 студентов факультета?

А – день рождения 1 сентября

$$\mathrm{P}(A) = P_{1825}(4) = C_{1825}^{4} p^{4} q^{1821}$$

Такое выражение технически очень сложно вычислить.
В схеме Бернулли при больших n (обычно при n > 40) используют **приближенные (асимптотические) формулы**.

Формула Пуассона

Формула Пуассона используется:

- При решении задач, связанных с редкими событиями, например, рождением близнецов, опечаткой в книге, достижением человеком 100-летнего возраста и т.д.
- **Большое** числом испытаний **n ≥ 20**
- **Малая** вероятность успеха **p** в каждом отдельном опыте
  - В случае, когда $np < 10$, при этом обычно $p < 0,01$

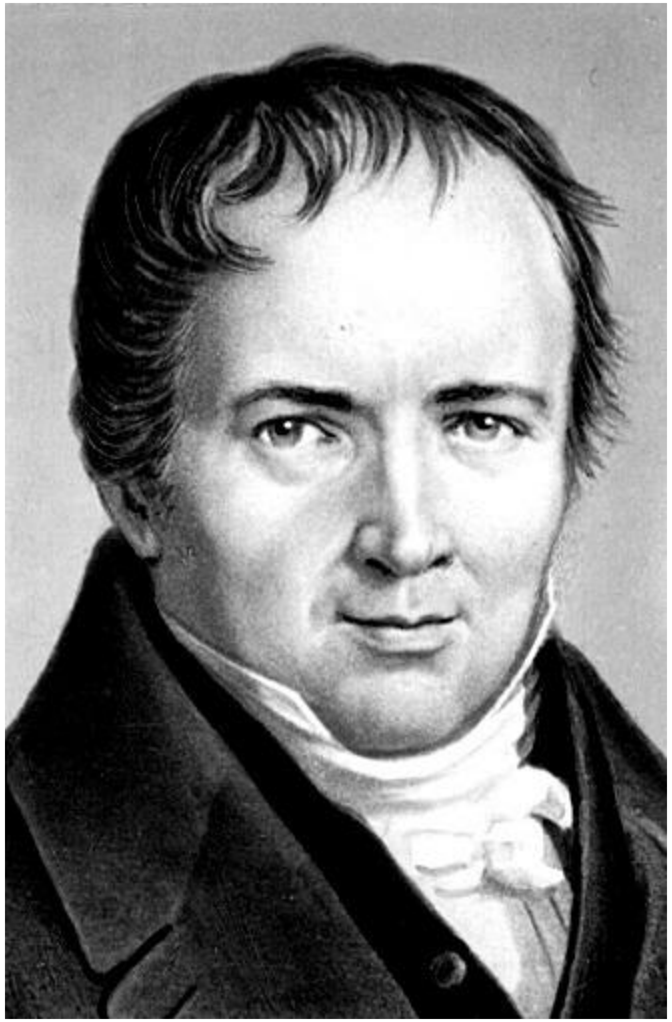
Формула Пуассона

Предельная теорема Пуассона

Если число испытаний в схеме Бернулли *n велико*, вероятность успеха в одном испытании *p мала* и *мало* также число $\boldsymbol{\lambda = np}$, тогда

$$P_n(m) = P(n, m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n$$



Симеон Дени Пуассон

Схема Бернулли

Пример

На факультете на считывается 1825 студентов.
Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для 4 студентов факультета?

p = 1/365
n = 1825
k = 4

np = 1825 * 1/365 = 5 < 10

$$P_{1825}(4) = [\lambda = np = 5] \approx \frac{5^4}{4!} e^{-5} \approx 0.1755$$

Вывод формулы Пуассона

$$P_n(m) \ = C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1) * \cdots * (n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m}$$

$$= \left| \lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \right| =$$

$$= \frac{n(n-1) * \cdots * (n-m+1)}{m!} \frac{\lambda^m}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

Вывод формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda};$$

Вывод формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-m+1)(n-m+2)*\cdots*n}{n^m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-m+1}{n}\right)\left(\frac{n-m+2}{n}\right)*\cdots*\left(\frac{n}{n}\right) = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \frac{\lambda^m}{m!}$$

Вывод формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$$|\lambda = np|$$

Формула Пуассона

- Значения функции Пуассона для некоторых λ = np приводятся в таблицах
- Формулу Пуассона называют еще **формулой редких событий** из-за того, что вероятность *p* появления события в отдельном испытании значительно меньше 1.

Значення функцни Пуассона $P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

m \ λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Формула Пуассона

Пример

По каналу связи передано 100 символов. Вероятность искажения одного символа помехами p = 0,04. Найти вероятность того, что будет искажено 2 символа.

$$P_{100}(2) = \begin{bmatrix} n = 100 \\ p = 0.04 \\ \lambda = np = 4 \end{bmatrix} \approx \frac{4^2}{2!} e^{-4} \approx 0.1465$$

Значения функции Пуассона $P_{\lambda}(m)=\dfrac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

m \ λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Схема Бернулли

Пример

На факультете насчитывается
356 студентов.

Какова вероятность того, что
у 25 из них день рождения в марте?

Схема Бернулли

Пример

На факультете насчитывается 356 студентов.

Какова вероятность того, что
у 25 из них день рождения в марте?

Решение

$n = 356$

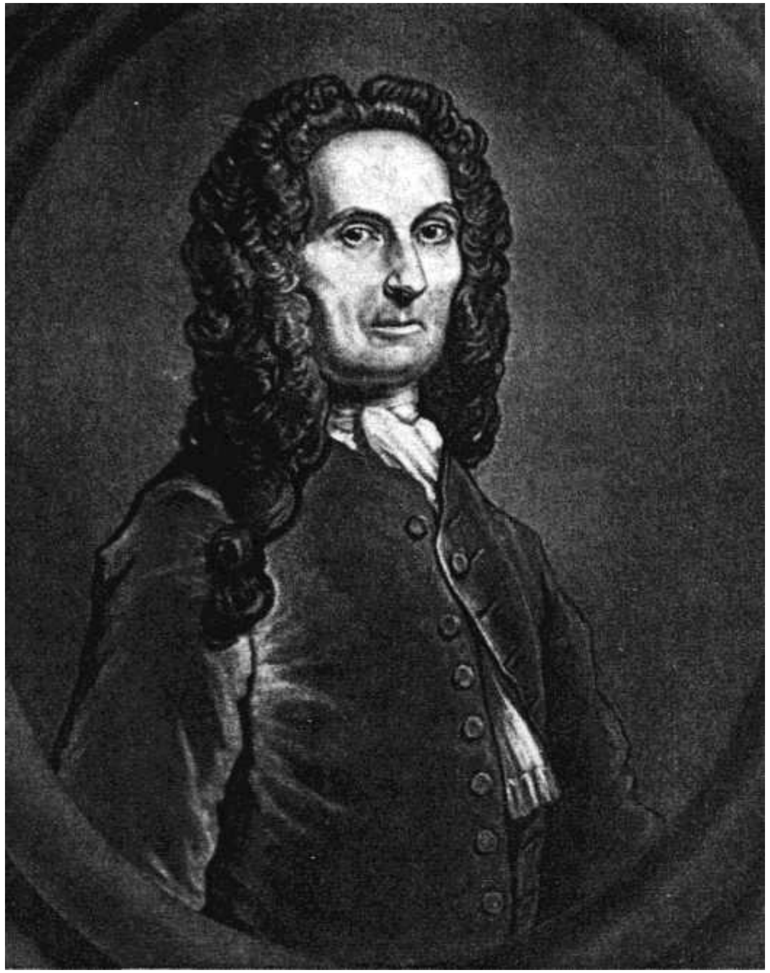
$p = 1/12$

$k = 25$

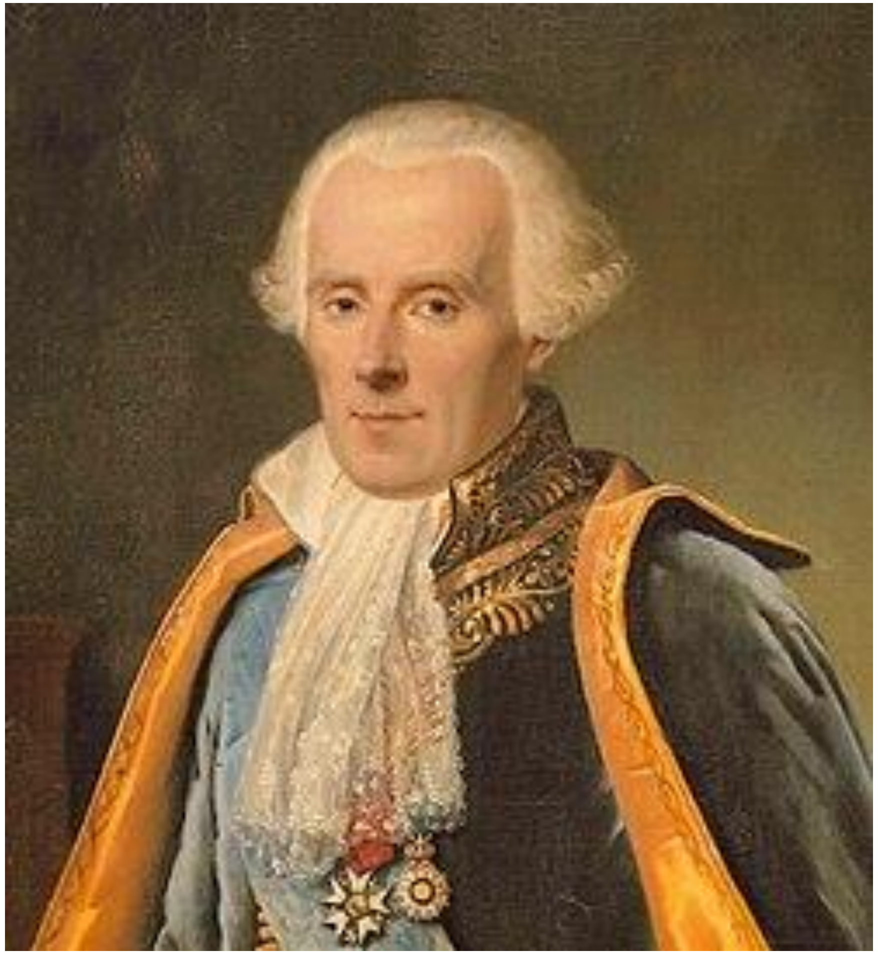
$np = 29{,}7 > 10$

Формула Пуассона не подходит для вычислений

Формулы Муавра-Лапласа



Абрахам де Муавр



Пьер-Симон Лаплас

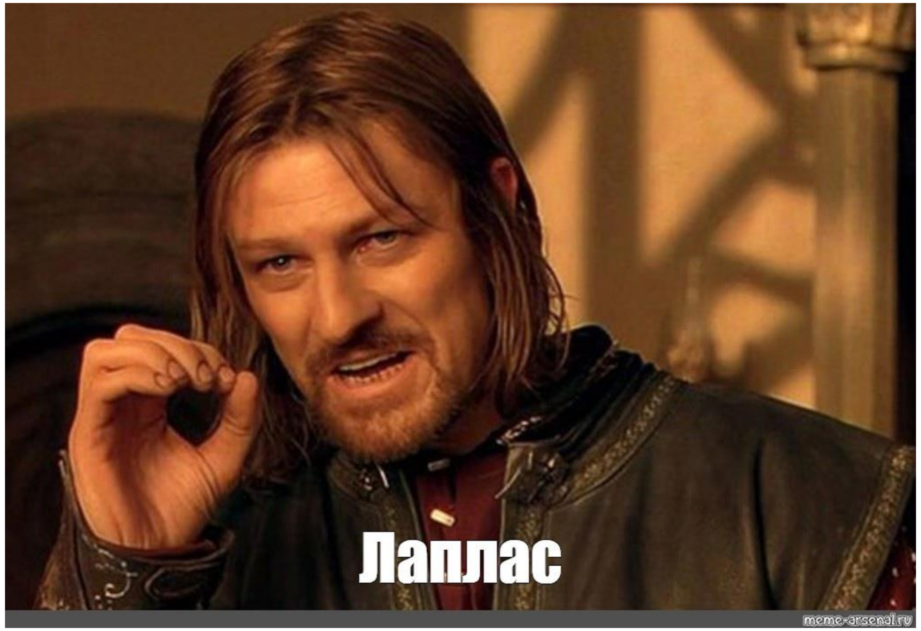
Формулы Муавра-Лапласа

Формулы Муавра-Лапласа используются:

- **Большое** числом испытаний **n**
- **Большие** значения **np** и **nq**

- В случае, когда np > 10
- Когда не применимы формулы Бернулли и Пуассона

Формулы Муавра-Лапласа



Две формулы Муавра-Лапласа:

- **Локальная** – вероятность появления ровно *k* событий в серии из *n* независимых испытаний $P_n(k)$
- **Интегральная** – вероятность получить число успехов, заключенное между числами k_1 и k_2 $P_n(k_1;k_2)$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если в схеме Бернулли число испытаний *k* велико,
то для всех k справедливо приближенное равенство:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

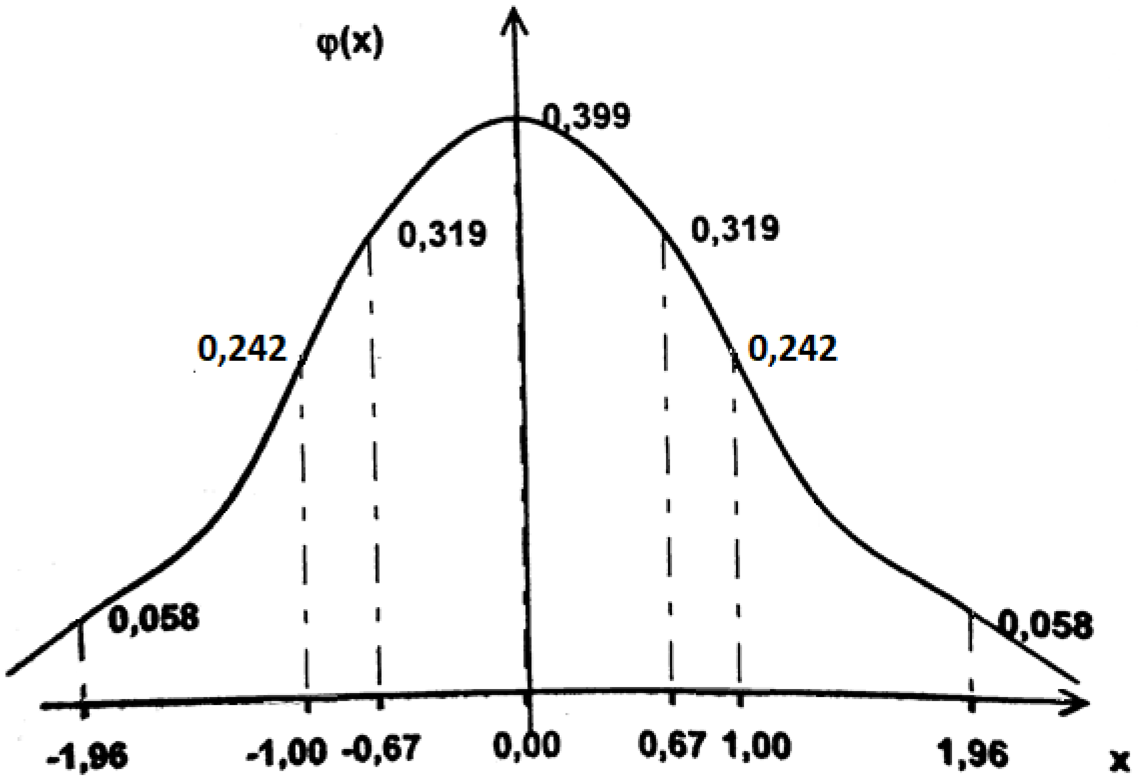
$$\text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in R$$

Функцию $\varphi(x)$ называют **плотностью стандартного нормального распределения**.

Формула дает хорошее приближение уже при $n \geq 25$, совпадения тем лучше, чем ближе p к 1/2

Свойства функции $\varphi(x)$

1. Функция $\varphi(x)$ определена и положительная для всех $x \in R$;
2. Функция $\varphi(x)$ – четная, то есть $\varphi(-x)$ = $\varphi(x)$;



Свойства функции $\varphi(x)$

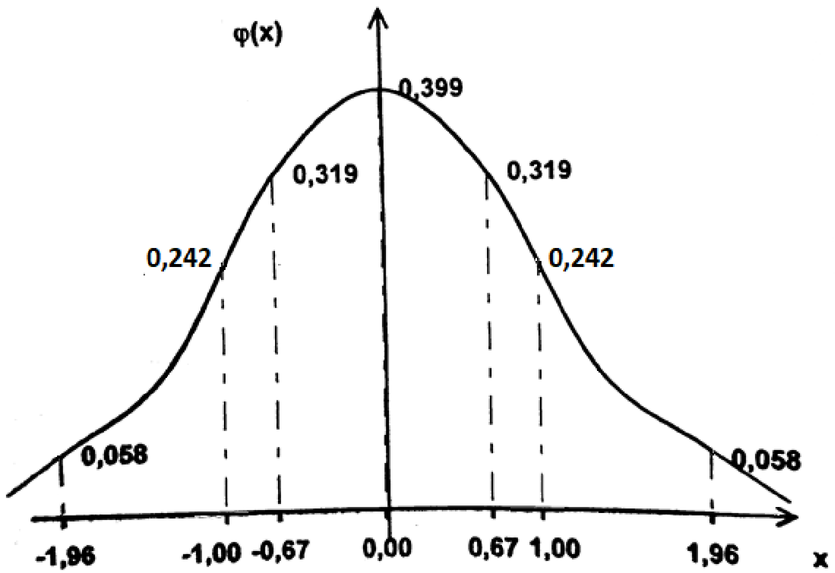
3. При $|x| \to \infty$ функция $\varphi(x)$ монотонно убывает и

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$$

Убывание с ростом |x| достаточно быстрое,
при |x|$\geq$ 4 функция $\varphi(x) \approx 0$;

4. Функция $\varphi(x)$ имеет единственный максимум в точке x = 0

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = 0.3989$$



Свойства функции $\varphi(x)$

Пример:

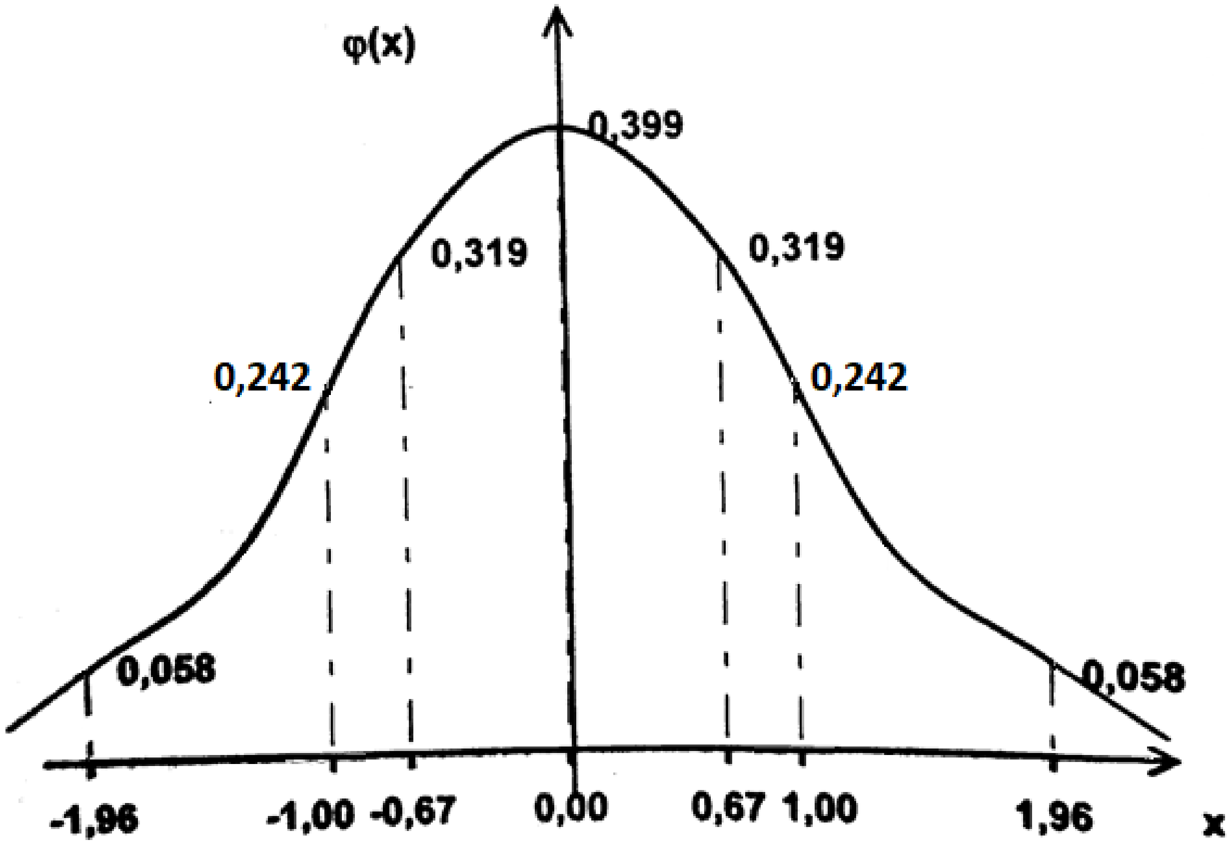
Найти значения функции Лапласа $\varphi(x)$:

а) $\varphi(0)$

б) $\varphi(1)$

в) $\varphi(4)$

г) $\varphi(-10)$



Свойства функции $\varphi(x)$

Пример:

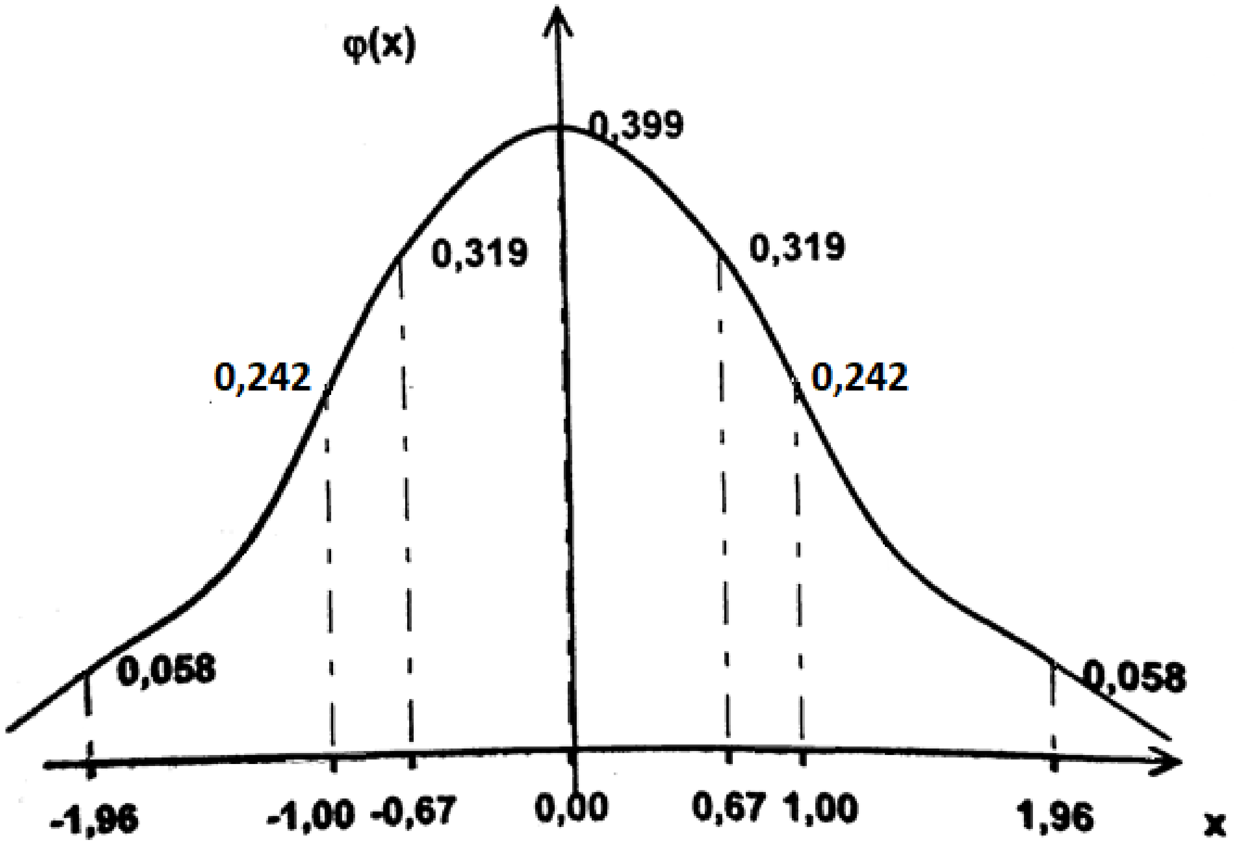
Найти значения функции Лапласа $\varphi(x)$:

а) $\varphi(0) = 0.3989$

б) $\varphi(1) = 0.133$

в) $\varphi(4) = 0$

г) $\varphi(-10) = 0$



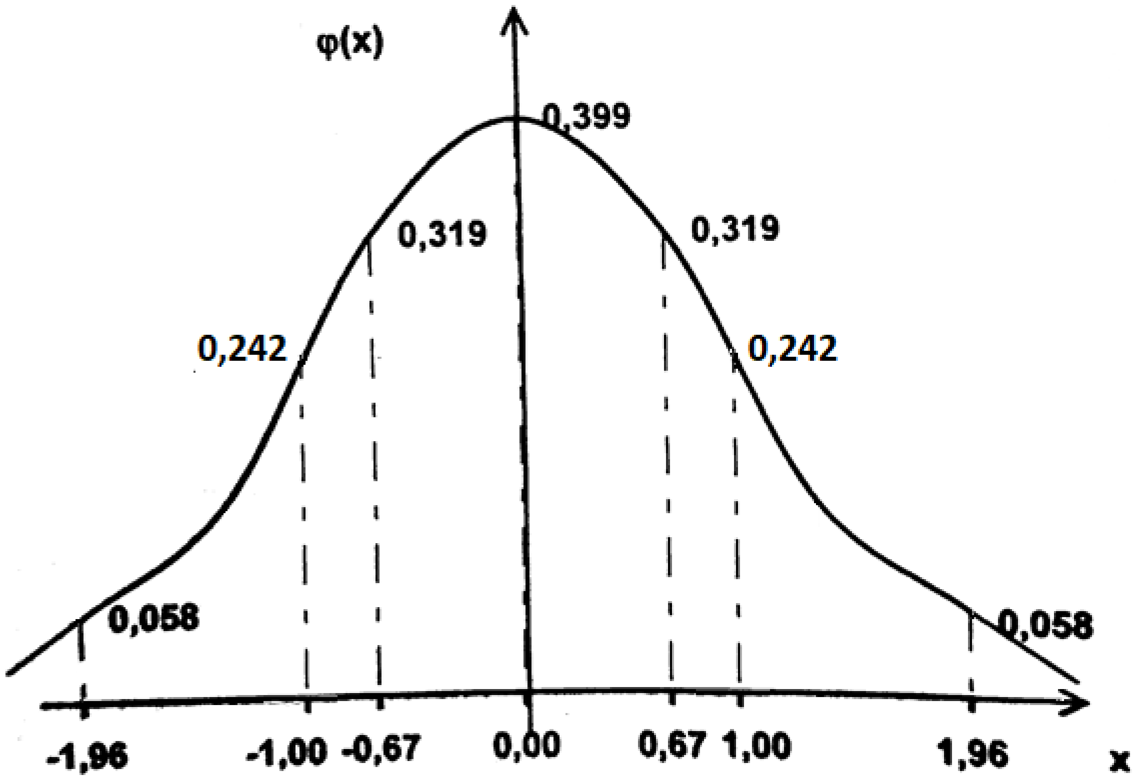
Свойства функции $\varphi(x)$

Таблица 1

Плотность стандартного нормального распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Функция протабулирована



Локальная формула Муавра-Лапласа

Пример:

Товаровед осматривает 100 товаров. В среднем он признает непригодным к продаже треть образцов подобного рода товаров. Какова вероятность, что товаровед признает непригодными 35 товаров?

Локальная формула Муавра-Лапласа

Решение:

p = 1/3, n = 100, k = 35

Проверяем np = 100 * 1/3 = 33.3 – большое, поэтому используем формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P_{100}(35) \approx \frac{1}{\sqrt{100 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3}}}\varphi\left(\frac{35 - 100 * \frac{1}{3}}{\sqrt{100 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3}}}\right)$$

Локальная формула Муавра-Лапласа

Решение:

$$P_{100}(35) \approx \frac{1}{\sqrt{100 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3}}} \varphi\left(\frac{35 - 100 * \frac{1}{3}}{\sqrt{100 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3}}}\right) = \frac{\varphi(-0.071)}{4.714}$$

$$= \frac{\varphi(-0.071)}{4.714} = \frac{\varphi(-0.071)}{4.714} = \frac{0.3103}{4.714} \approx 0.658$$

Таблица 1

Плотность стандартного нормального распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	$\boxed{3101}$	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	[illegible]	[illegible]						

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если в схеме Бернулли число испытаний *k* велико, то вероятность того, что число успехов k заключено в границах k_1 и k_2 приближенно равно:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

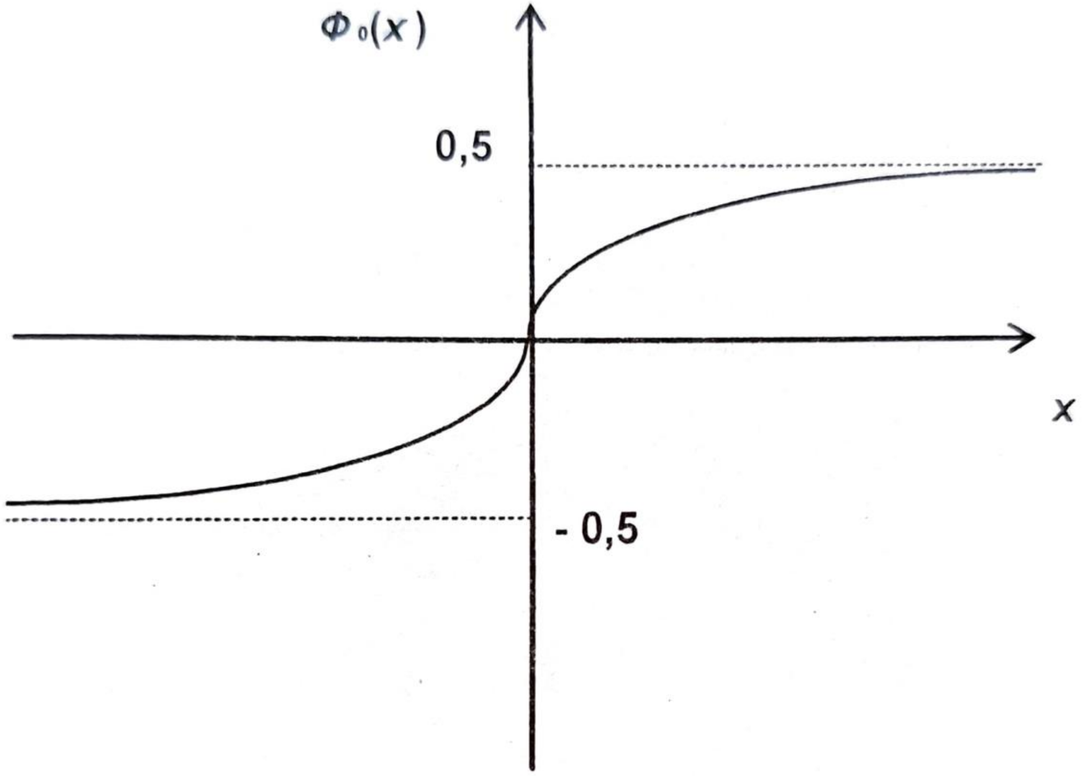
$$\text{где } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

Функцию $\Phi_0(x)$ называют **функцией Лапласа**.

Свойства функции Лапласа $\Phi_0(\text{x})$

1. Функция $\Phi_0(x)$ определена и монотонно возрастает при x ∈ R;
2. Функция $\Phi_0(x)$ – нечетная, то есть $\Phi_0(-x)$ = $-\Phi_0(x)$;



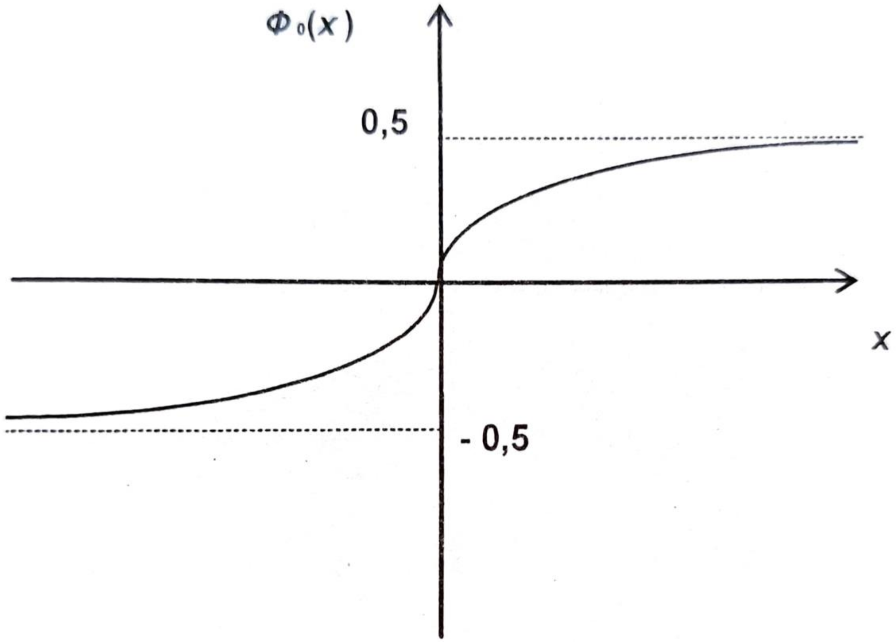
Свойства функции Лапласа $\Phi_0(\mathrm{x})$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 0.5$

Возрастание с ростом x достаточно быстрое,
при x ≥ 5 функция $\Phi_0(x) \approx 0.5$ с высокой точностью;

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi_0(x) = -\,0.5,$

при x ≤ -5 функция $\Phi_0(-x) \approx -0.5$
с высокой точностью.

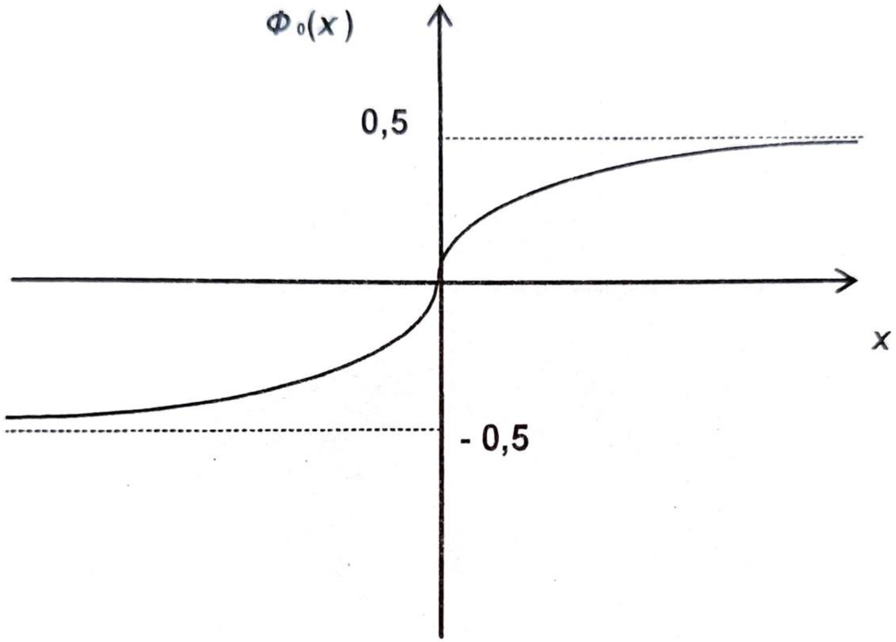


Свойства функции Лапласа $\Phi_0(x)$

Значения функции Лапласа $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4658	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4725	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4858
2.2	4861	4864	4863	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4993	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4954	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	499032									
3.2	499313									
3.3	499517									
3.4	499663									
3.5	499767									
3.6	499841									
3.7	499892									
3.8	499928									
3.9	499952									
4.0	0.499968									
4.5	499997									
5.0	499997									

Функция протабулирована



Интегральная формула Муавра-Лапласа

Пример:

Товаровед осматривает 100 товаров. В среднем он признает непригодным к продаже треть образцов подобного рода товаров. Какова вероятность, что товаровед признает непригодным:

а) не менее 25, но не более 40 товаров

б) не более 30% товаров

Интегральная формула Муавра-Лапласа

Решение:

p = 1/3, n = 100, k = 35

Проверяем np = 100 * 1/3 = 33.3 – большое, поэтому используем формулу Муавра-Лапласа, но уже интегральную

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \qquad \text{где } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$P_{100}(25; 40\ ) \approx \Phi_0\left(\frac{40 - 100 * \frac{1}{3}}{\sqrt{100 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{25 - 100 * \frac{1}{3}}{\sqrt{100 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3}}}\right)$$

Интегральная формула Муавра-Лапласа

Решение:

$$P_{100}(25;40\,) \approx \Phi_0\left(\frac{40-100*\frac{1}{3}}{\sqrt{100*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{25-100*\frac{1}{3}}{\sqrt{100*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= \Phi_0(1.414) - \Phi_0(-1.768) \approx 0.421 + 0.461 = 0.882$$

Значения функции Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4723	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767

Интегральная формула Муавра-Лапласа

Решение:

$$P_{100}(0;30\,) \approx \Phi_0\left(\frac{30-100*\frac{1}{3}}{\sqrt{100*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-100*\frac{1}{3}}{\sqrt{100*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= \Phi_0(-0.707) - \Phi_0(-7.071) = -\Phi_0(-0.707) + \Phi_0(-7.071)$$

$$\approx -0.26 + 0.5 = 0.24$$

Значения функции Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	$\boxed{2611}$	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4725	4732	4738	4744	4750	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Эксперимент: подбрасывание монеты

Событие (успех): выпадение герба

- p = 0.5 – абсолютная вероятность
- При $n \to \infty$ $p \to 0.5$

- При различном количестве испытаний n относительная (реальная) вероятность выпадения герба $\frac{k}{n}$ может отличаться от абсолютной вероятности p.

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Например:

- При трех подбрасываниях может выпасть 2 герба из 3. Тогда относительная вероятность $\frac{k}{n} = 0.67$
- При 1000 подбрасываниях герб может выпасть 510 раз. Тогда $\frac{k}{n} = 0.51$.
- Чем больше число экспериментов n, тем ближе значение $\frac{k}{n}$ к p.

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Пусть k – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p.

Найдем вероятность того, что относительная частота появления успеха $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}$ отличается от постоянной вероятности p не более, чем на $\varepsilon > 0$.

Обозначим эту вероятность, как $P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\}$

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon \le \frac{k}{n} - p \le \varepsilon\right\} =$$

$$P\{-n\varepsilon + np \le k \le n\varepsilon + np\} = P\{-n\varepsilon + np;\ n\varepsilon + np\}$$

Воспользуемся интегральной формулой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \qquad \text{где } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \qquad \text{где } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

Пусть $k_1 = -n\varepsilon + np, k_2 = n\varepsilon + np$

$$P\{-n\varepsilon + np;\ n\varepsilon + np\} = \Phi_0\left(\frac{n\varepsilon + np - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-n\varepsilon + np - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi_0\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi_0\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Следствие из интегральной формулы Муавра-Лапласа

Пусть k – число успехов и k/n – относительная частота(доля) успехов в n испытаниях Бернулли с абсолютной вероятностью успеха p. Если выполнены условия теоремы Муавра-Лапласа, то для любого $\varepsilon > 0$:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right| \le \varepsilon\right\} = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{k}{n}$ *от абсолютной частоты* p *не превышает* ε*, приближенно равна удвоенному значению функции Лапласа* $\Phi_0(x)$ *при* $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Пример

При установившемся технологическом процессе в среднем 1,5% продукции уходит в брак.

Определить вероятность того, что доля забракованных изделий среди 1000 изготовленных будет отличаться от вероятности производства бракованного изделия не более, чем на 0.005 (в ту или другую сторону)?

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Решение:

Пусть успех – это возникновение брака. Тогда p = 0.015 – мало, n = 1000 – велико. Однако величина np = 15 – большая. Поэтому выполняются условия теоремы Муавра-Лапласа и можно использовать формулу при значении ε = 0.005

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right| \le \varepsilon\right\} = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$P\left\{\left|\frac{k}{1000}-0.015\right| \le 0.005\right\} = 2\Phi_0\left(0.005\sqrt{\frac{1000}{0.015 * 0.985}}\right)$$

$$= 2\Phi_0(1.3) = 2 * 0.4032 = 0.8064$$

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Пример

При установившемся технологическом процессе в среднем 1,5% продукции уходит в брак.

Сколько нужно изготовить изделий, чтобы с вероятностью 0.95 можно было утверждать, что доля брака среди них отличается от вероятности производства бракованного изделия не более чем на 0.005?

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности успеха

Решение:

Нужно найти n из равенства $P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = 0.95$

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - 0.015\right| \leq 0.005\right\} = 0.95$$

Заменим левую часть по предыдущей формуле:

$$2\Phi_0\left(0.005\sqrt{\frac{n}{0.015 * 0.985}}\right) \approx 0.95$$

$$\Phi_0(0.041\sqrt{n}) \approx 0.475$$

По таблице находим $0.041\sqrt{n} \approx 1.96$, откуда $\mathrm{n} \approx \left(\frac{1.96}{0.041}\right)^2 \approx 2286$

Закон больших чисел в схеме Бернулли

Закон больших чисел в схеме Бернулли (Теорема Бернулли):

Если выполнены условия теоремы Муавра-Лапласа, то для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = 1$$

При больших $n \to \infty$ *относительная частота* $\frac{k}{n} \to p$.

Закон больших чисел в схеме Бернулли

Закон больших чисел в схеме Бернулли (Теорема Бернулли):

Для любого $\varepsilon > 0$, то есть и для очень маленького ε

Пусть ε = 1e^{-20}

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq 1\mathrm{e}^{-20}\right\} = 1$$

При $n \to \infty$ $\left|\frac{k}{n} - p\right|$ точно меньше, чем 1e^{-20}*, а значит $\frac{k}{n} = p$, то есть относительная частота появления успеха совпадает с абсолютной.*

Закон больших чисел в схеме Бернулли

Доказательство:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right\}=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right\}=\lim_{n\to\infty}2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2*\lim_{x\to\infty}\Phi_0(x)$$

$$=2*0.5=1$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right\}=1$$

Формулы Муавра-Лапласа

Пример

Всхожесть семян гороха в среднем составляет 86%. Найти вероятность того, что из 2000 посаженных семян:

а) прорастут 1700 семян;

б) число непроросших семян будет от 270 до 300;

Формулы Муавра-Лапласа

Решение:

n = 2000, p = 0.86 – вероятность прорастания, q = 0.14

n – велико, p – велико, np = 1720 – велико, k = 1700

$$P_{2000}(1700) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2000*0.86*0.14}}\varphi\left(\frac{1700-2000*0.86}{\sqrt{2000*0.86*0.14}}\right) =$$

$$= \frac{\varphi(-1.29)}{15.52} = \frac{0.1736}{15.52} = 0.011$$

Формулы Муавра-Лапласа

Решение:

б) число непроросших семян будет от 270 до 300
число проросших – от 1700 до 1730

$$P_{2000}(1700; 1730) \approx \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{1730 - 2000 * 0.86}{\sqrt{2000 * 0.86 * 0.14}}\right) - \Phi_0\left(\frac{1700 - 2000 * 0.86}{\sqrt{2000 * 0.86 * 0.14}}\right) =$$

$$= \Phi_0(0.64) - \Phi_0(-1.29) = 0.2324 + 0.4016 = 0.634$$

Схема Бернулли

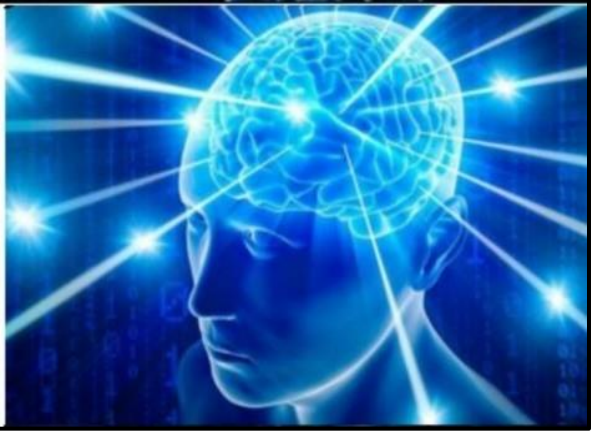
Испытания Бернулли

1. Испытания независимы
2. Число испытаний n
3. Вероятность успеха в каждом испытании p одинакова
4. Вероятность неудачи в каждом испытании q = 1 – p одинакова

$0 \le p, q \le 1$

Схема Бернулли

$n < 20$			**Формула Бернулли**
$n \geq 20$	$n \in [20,100]$ $\lambda = np \in [0,7]$	$n > 100$ $\lambda \in [0,15]$	**Формула Пуассона**
	$n \in [20,100]$ $\lambda > 7$	$n > 100$ $\lambda > 15$	**Формулы Муавра-Лапласа**



Контрольная по блоку 1

9 заданий

1. Формула вероятности и комбинаторика (основное правило)
2. Формула вероятности и комбинаторика (сочетания)
3. Геометрическая вероятность
4. Формулы сложения и умножения вероятностей
5. Условная вероятность.
   Полная вероятность. Формула Байеса
6. Формула Бернулли и
   наивероятнейшее число успехов
7. Формула Пуассона
8. Формулы Муавра-Лапласа
   и отклонение частоты от вероятности

Контрольная по блоку 1

9 заданий по 2 балла за каждое

ОБЯЗАТЕЛЬНО для каждого задания:

- Формула
- Решение
- Ответ

Общая сумма: 18 баллов

Пороговый балл: 9 баллов

Исправление контрольной возможно, если количество баллов меньше 9 (на 16 неделе)