

**Занятие 6 Комбинаторные конфигурации**

- 2.1** Сколькими способами можно упорядочить множество  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  так, чтобы четные числа стояли на четных местах, а нечетные – на нечетных?
- 2.2** Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?
- 2.3** На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с нее? А если спуск и подъем происходят по разным дорогам?
- 2.4** Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т.е. чтобы какое-то число очков встречалось на обеих костях)?
- 2.5** Сколько различных браслетов можно изготовить, имея 7 различных бусин?
- 2.6** Сколькими способами можно разделить 8 пирожных разного вида между 5 девочками?
- 2.7** Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих ровно одну цифру 6?
- 2.8** Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих хотя бы одну цифру 6?
- 2.9** Сколько существует различных четырехзначных положительных чисел, если по крайней мере 2 цифры в числе совпадают?
- 2.10** Каково число матриц из  $n$  строк и  $m$  столбцов с элементами из множества  $\{0, 1\}$ ? А при условии, что все строки матрицы различны?
- 2.11** Сколько строк длины 9 содержат ровно 5 единиц и 4 нуля?
- 2.12** Сколькими способами можно распределить 3 билета среди 20 студентов, если:
- 1) распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более 1 билета;
  - 2) распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое ( $\leq 3$ ) число билетов;
  - 3) распределяются билеты на вечер, и каждый студент может получить не более 1 билета?
- 2.13** Сколькими способами можно выстроить 9 человек:
- 1) в колонну по одному;
  - 2) в колонну по три шеренги, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту и нет людей одинакового роста?
- 2.14** Сколько палиндромов длины  $n$  можно образовать, используя 26 букв алфавита? Палиндромом называется выражение, которое читается одинаково как справа налево, так и слева направо (например, топот).
- 2.15** Бросают три игральные кости. Сколькими способами они могут упасть так, что все оказавшиеся сверху грани либо одинаковы, либо попарно различны?

- 2.16** Крокодил имеет 68 зубов. Зубы различаются только местом, на котором произрастают. У конкретной особи может не хватать каких-то зубов. Доказать, что среди  $16^{17}$  крокодилов может не оказаться двух с одинаковым набором зубов.
- 2.17** Во взводе три сержанта и 30 солдат. Сколько существует способов выделения одного сержанта и трёх солдат для патрулирования?
- 2.18** Имеется колода из  $4n$  ( $n \geq 5$ ) карт, которая содержит карты 4 мастей по  $n$  карт каждой масти, занумерованных числами  $1, 2, \dots, n$ . Подсчитать, сколькими способами можно выбрать 5 карт так, что среди них окажутся:
- 1) 5 последовательных карт одной масти;
  - 2) 4 карты из 5 с одинаковыми номерами;
  - 3) 3 карты с одним номером и 2 карты с другим;
  - 4) 5 карт одной масти;
  - 5) 5 последовательно занумерованных карт.
  - 6) ровно 3 из 5 с одним и тем же номером.
- 2.19** Алфавит  $X$  состоит из двух символов. Сколько существует слов алфавита  $X$ , длины которых не превосходят 4?
- 2.20** Сколькими способами можно расставить  $m$  нулей и  $k$  единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?
- 2.21** На книжной полке стоит 12 книг. Сколько существует способов достать 5 книг так, чтобы никакие 2 из взятых не были соседними?
- 2.22** За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей, каждый из них враждует только со своими непосредственными соседями. Для спасения прекрасной дамы от злобного дракона требуется сформировать отряд из трех рыцарей. Врагов в отряде быть не должно. Сколькими способами это можно сделать?

### Занятие 7 *Биномиальные коэффициенты*

- 2.23** Найти  $n$ , если известно, что в разложении  $(1+x)^n$  коэффициенты при  $x^5$  и  $x^{12}$  равны.
- 2.24** Сколькими способами можно составить комиссию из трех человек, выбирая их из четырех супружеских пар, если:
- а) в комиссию могут входить любые 3 из 8 человек;
  - б) в комиссию не могут входить члены одной семьи?
- 2.25** В одном ящике находится  $m$  яблок  $m$  различных сортов, в другом –  $n$  груш  $n$  различных сортов. Сколькими способами можно выбрать  $r$  яблок и  $s$  груш?
- 2.26** При игре в домино четверо игроков делит поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?
- 2.27** Найти число способов раздела 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами, если:

- а) годится любой способ;  
б) каждый должен получить хотя бы один гриб каждого сорта.

**2.28** Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении:

1)  $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20}$ ;      2)  $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{50}$ .

**2.29** Доказать, что:

- 1)  $C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$ ;
- 2)  $C(n, k)$  возрастает по  $n$  при фиксированном  $k$ ;
- 3)  $C(n-r, k-r)$  убывает по  $r$  при фиксированных  $n$  и  $k$ ;
- 4) если  $n$  фиксировано, то  $C(n, k)$  возрастает по  $k$  при  $k \leq [n/2]$  и убывает при  $k > [n/2]$ ?

**2.30** Доказать, что числа  $C(p, 1), C(p, 2), \dots, C(p, p-1)$  делятся на  $p$ , если  $p$  – простое число.

**2.31** Доказать тождества:

1)  $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ ;    2)  $\sum_k C_n^{2k} = \sum_k C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$ .

## Занятие 8 *Обобщенные перестановки и разбиения*

**2.32** Пусть нужно расставить на полке 26 книг, среди которых 8 одинаковых учебников по математике, 6 одинаковых учебников по информатике, 9 – по физике и 3 – по химии. Сколькими способами это можно сделать?

**2.33** Тест содержит 35 вопросов, на каждый вопрос имеется по 5 вариантов ответа (а, б, в, г, д). Сколько может быть различных ответных листов, в которых выбрано равное количество ответов а, б, в, г, д.

**2.34** В команде 24 игрока. В гостинице они остановились в 6 4-местных номерах. Сколькими способами их можно расселить?

**2.35** Доказать:  $S(n, 1) = 1 \quad \forall n > 0$  (Число Стирлинга 2 рода).

**2.36** Найти, сколько существует: 1) разбиений множества из  $n$  элементов на  $k$  подмножеств; 2) упорядоченных разбиений на  $k$  подмножеств? Решить двумя способами – с помощью формулы для упорядоченных разбиений и через числа Стирлинга 2 рода.

а)  $n = 4, k = 2$ ;      б)  $n = 5, k = 2; k = 3; k = 4$ ;      в)  $n = 6, k = 2$ .

**2.37** Пользуясь полиномиальной теоремой, вычислить  $(x+y+z)^3$ .

**2.38** Чему равен коэффициент при  $x^2 y^3 z^2$  в выражении  $(x+y+z)^7$ ?

**2.39** Чему равен коэффициент:

А. при  $x^2 \cdot y \cdot z^3$  в выражении  $(2x+3y+2z)^5$ ?

В. при  $x^2 \cdot y \cdot z^3$  в выражении  $(3x+5y+2z)^6$ ?

С. при  $\alpha = x^2 \cdot y^3 \cdot z, \beta = x^2 \cdot y^3 \cdot z^3, \gamma = x^4 \cdot y^3 \cdot z^3$  в выражении  $(4x^2+3y^3+5z)^6$ ?

Д. при  $\alpha = x^3 \cdot y^3 \cdot z^2, \beta = x^2 \cdot y^3 \cdot z^3, \gamma = x^3 \cdot y^5 \cdot z^4$  в выражении  $(5x^3+2y+3z^2)^8$ ?

Е. при  $\alpha = x \cdot y^2 \cdot z, \beta = x \cdot y^2 \cdot z^6, \gamma = x^4 \cdot y^4 \cdot z^2$  в выражении  $(10x^2+3y^4+5z^2)^4$ ?

- 2.40** Найти коэффициент при  $x^k \cdot y^r$  в выражении  $(x+y+z)^n$ .
- 2.41** Найти коэффициенты при  $x^{17}$  и  $x^{18}$  в разложении  $(1+x^5+x^7)^n$ .

**Занятие 9 Формула включений и исключений**

- 2.42** В классе 35 учеников. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, и 10 не посещают ни один кружок. Сколько учеников посещает оба кружка? Сколько посещает только математический кружок?
- 2.43** Доказать, что количество натуральных чисел, делящихся на  $n \in \mathbb{N}$  и не превосходящих  $x \in \mathbb{N}$ , равно  $[x/n]$ .
- 2.44** Сколько целых чисел от 1 до 400 делятся на 7 или на 11?
- 2.45** Сколько целых чисел от 1 до 400 делятся на 10 или на 15?
- 2.46** Сколько целых чисел от 1 до 1000 делится на 10, но не делится на 14?
- 2.47** Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5?
- 2.48** Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 3, 5, 7.
- 2.49** Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 6, 10, 15.
- 2.50** Сколько положительных чисел, меньших 700, не делятся на 8?
- 2.51** Сколько положительных целых чисел, меньших 1001, делятся на 2,3 или 5? Сколько не делятся на 2,3 или 5?
- 2.52** На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром – 38, с ветчиной – 42, с сыром и колбасой – 28, с колбасой и ветчиной – 31, с сыром и ветчиной – 26. 25 человек взяли с собой все три вида бутербродов, а несколько человек взяли вместо бутербродов пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?
- 2.53** В фирме работают 13 человек, и каждый из них знает хотя бы 1 иностранный язык. 10 сотрудников знают английский, 7 – немецкий, 6 – французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо – английский и французский, трое – немецкий и французский.
- Сколько сотрудников знает все три языка?
  - Сколько человек знает ровно два языка?
  - Сколько человек знает только английский язык?