Случайные события

Событие – основное понятие в теории вероятностей

Условия – события, известные экспериментатору

Исходы – события, которые могут произойти в результате эксперимента

Эксперимент (испытание, опыт) – совокупность условий и исходов

Детерменированный эксперимент – эксперименты, в которых условия (причины) *полностью определяют* исход (следствие)

Случайный эксперимент – эксперимент, результаты которого *неоднозначно определяются* начальными условиями

Случайные события – исходы случайного эксперимента

Случайные эксперименты

- Подбрасывание игральной кости

Исходы: {1,2,3,4,5,6}

- Подбрасывание монетки

Исходы: {Герб, Решка}

- Подбрасывание двух монеток

Исходы: {ГГ, ГР, РГ, РР}

Случайные эксперименты

Для изучения в ТВ эксперименты должны удовлетворять еще двум условиям:

- *возможности повторять испытания* хотя бы теоретически бесконечное число раз;
- *невозможности предсказать результат* не только в первом испытании, но и во всех последующих.

Теория вероятности изучает **закономерности**, которые возникают при многократном воспроизведении случайных экспериментов.

Пространство элементарных исходов

Пространство элементарных событий (исходов) –
множество событий, таких, что

- обязательно появляется одно из этих событий;
- события взаимоисключающие;
- события не делятся на более мелкие.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},\ n - \text{число элементарных исходов}$$

Множество Ω может быть бесконечным.
Например: монета подбрасывается до первого появления герба.
Исходы: Г; РГ; РРГ; РРРГ; …
Если множество Ω конечно, его называют ***дискретным****.*

События

Иные (не элементарные) события могут объединять элементарные события

Опыт: бросание игрального кубика

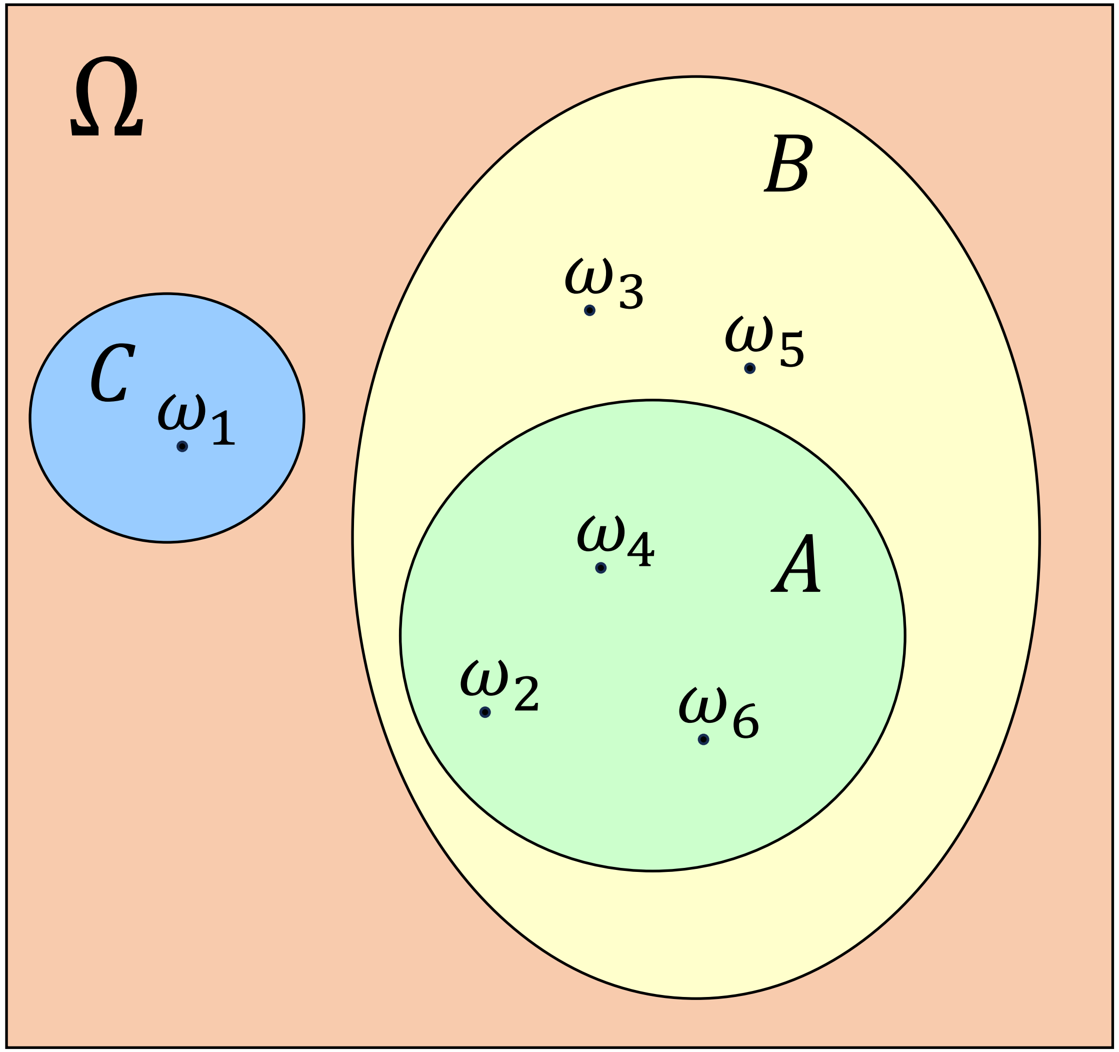
Множество эл. исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Событие A = {выпадение четного числа очков} = $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

Событие B = {выпадение не менее двух очков} = $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

Событие C = {выпадение менее двух очков} = $\{\omega_1\}$

События на диаграмме Венна



$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A = {выпадение четного числа очков} =
$= \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

B = {выпадение не менее двух очков} =
$= \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

C = {выпадение менее двух очков} $= \{\omega_1\}$

D = {выпадение менее одного очка} $= \emptyset$

E = {выпадение более нуля очков} $= \Omega$

События

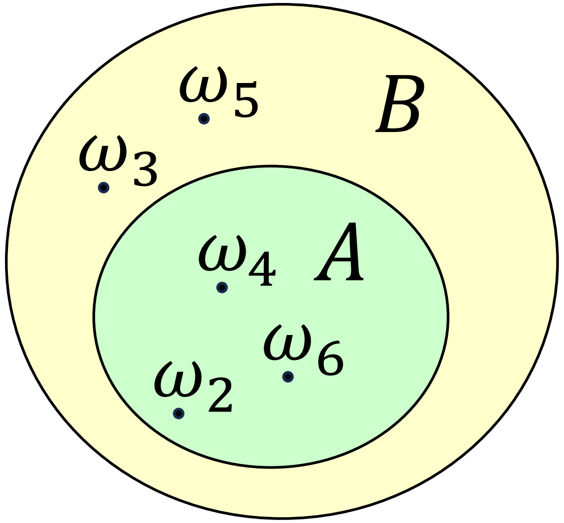
Невозможным называется событие, которое никогда не может произойти в результате данного испытания. *Обозначается* $\varnothing$.

Достоверным называется событие, которое всегда происходит в результате данного испытания. *Обозначается* Ω.

Операции над событиями. Операция включения

Событие *A* **входит (включено)** в событие *B*, если наступление события *A* влечет за собой наступление события *B*.
Обозначается: $A \subseteq B$.

$A \subseteq B$ => $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subseteq \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

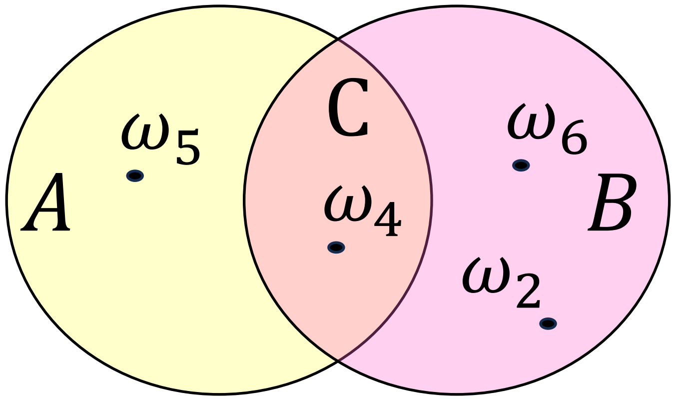


Множество элементарных событий, содержащихся в А, является подмножеством элементарных событий, содержащихся в В.

Если одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то *A* и *B* считаются **равными или эквивалентными** событиями. *Обозначается: A = B.*

Операции над событиями. Произведение событий

Произведением (пересечением) двух событий *A* и *B* назовем событие *C*, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят одновременно оба события *A* и *B*.
Обозначается: $C = A \cap B$ или $C = AB$



Событие *C* состоит из элементарных исходов, принадлежащих одновременно событиям *A* и *B*.

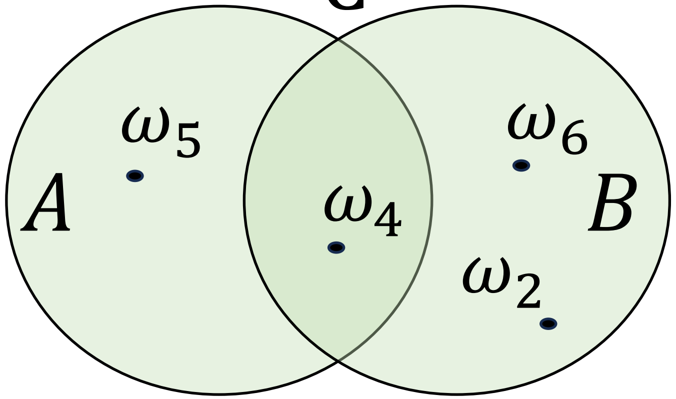
Если $AB = \emptyset$, то события *A* и *B* называют **несовместными**.
В противном случае события **совместны.**

Операции над событиями. Сумма событий

Суммой (объединением) двух событий A и B называют событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A, B,

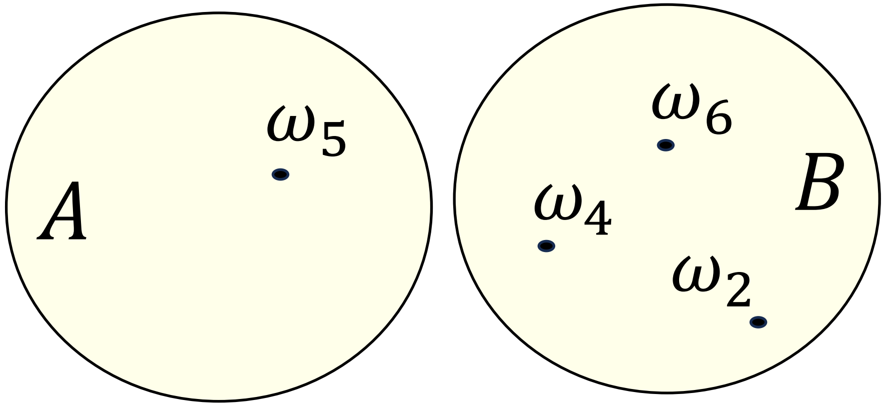
Обозначение: $C = A \cup B$, $C = A + B$, если $A \cap B = \emptyset$.

C



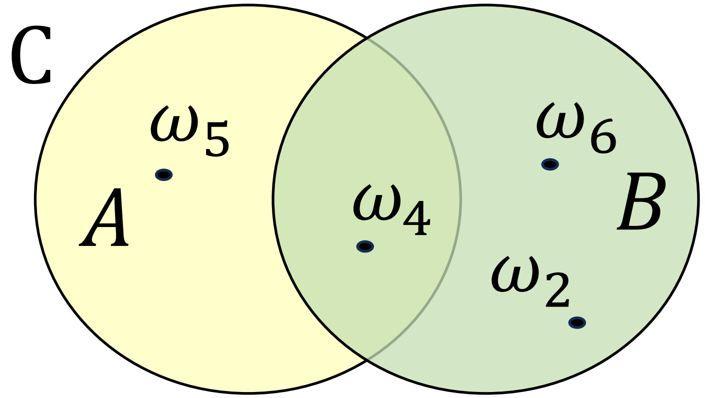
Событие C состоит из эл. событий, принадлежащих либо событию A, либо событию B, либо тому и другому.

$C = A + B$



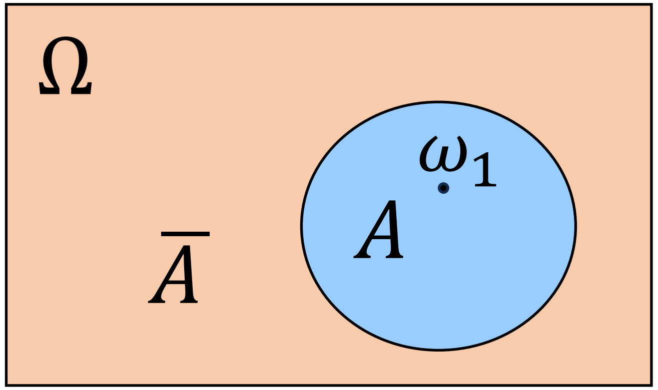
Операции над событиями. Разность событий

Разностью событий А и В называется событие С, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие А и не происходит событие В.
Обозначение: С = А \ В .



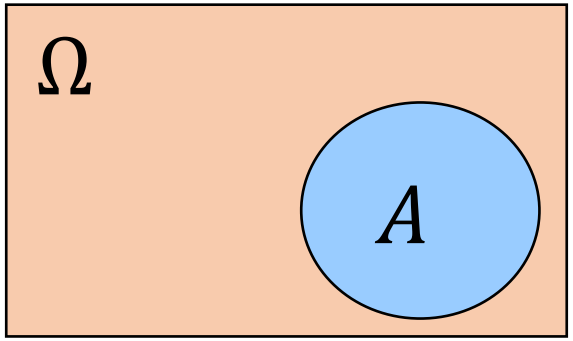
Событие С состоит из тех эл. событий, которые принадлежат А, но не принадлежат В.

Событие Ω\А принято обозначать символом $\overline{A}$ и называть **дополнением события А** или противоположным событию А.



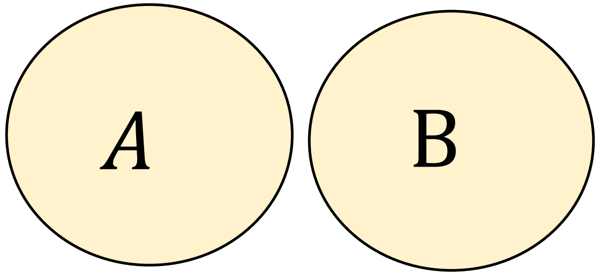
Операции над событиями. Разность событий

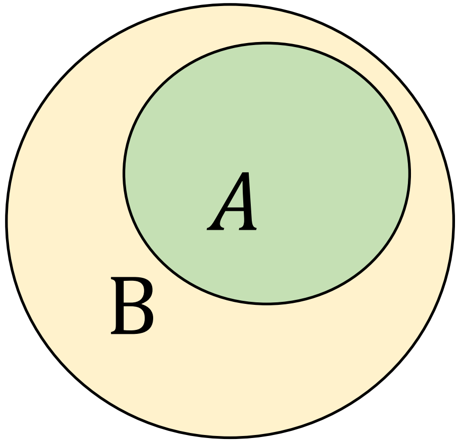
Справедливы соотношения:



- $A \setminus \Omega = \varnothing$
- $A \setminus \varnothing = A$
- $\varnothing \setminus A = \varnothing$

- $A \setminus B = A$, если $A \cap B = \varnothing$
- $A \setminus B = \varnothing$, если $A \subset B$



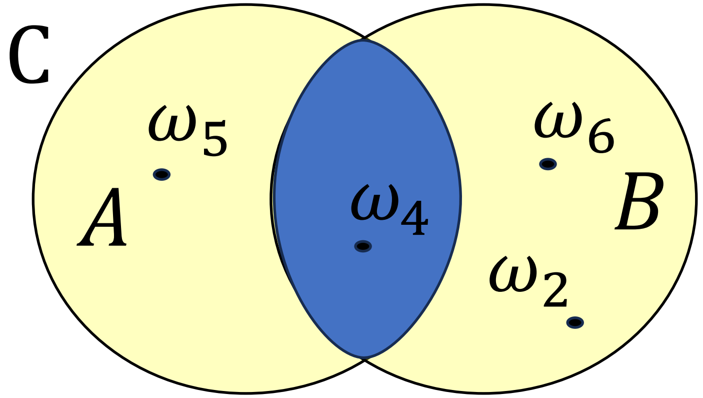


Приоритет выполнения перечисленных выше действий: дополнение; умножение; сложение и вычитание.

Операции над событиями. Симметрическая разность

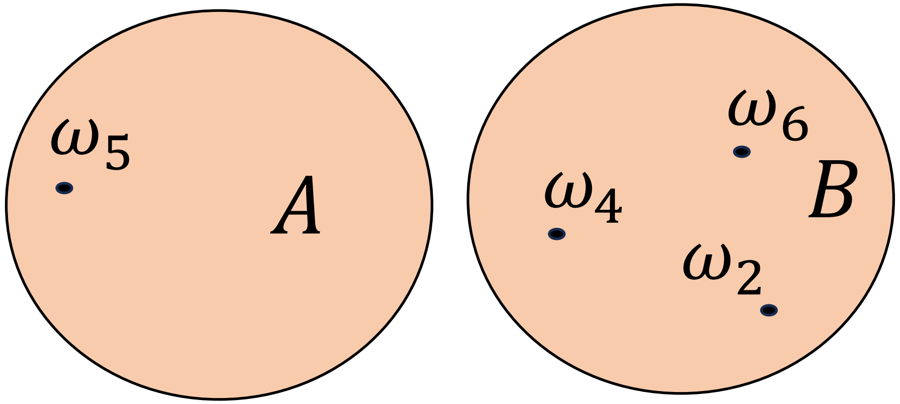
Симметрической разностью двух событий A и B называется объединение двух событий (A \ B) и (B \ A).

Обозначается: C = A Δ B = (A \ B) ∪ (B \ A).



Т.к. A\B = A ∩ $\bar{B}$, B\A = B ∩ $\bar{A}$, то AΔB = A$\bar{B}$ + $\bar{A}B$.

Если A ∩ B = ∅, то A Δ B = A + B



Свойства операций

Операции умножения и сложения обладают всеми свойствами аналогичных операций над числами.

1. **Коммутативность** сложения и умножения:

$A + B = B + A$, $AB = BA$.

2. **Ассоциативность** сложения и умножения:

$(A + B) + C = A + (B + C)$; $(AB)C = A(BC)$.

3. **Дистрибутивность**:

$(A + B)C = AC + BC$.

4. **Двойственность** (для чисел места не имеет):

$AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.

События

События называются **единственно возможными**, если в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

События образуют **полную группу**, если они являются единственно возможными и попарно несовместными, т.е. в результате испытания должно произойти одно и только одно из этих событий.

Пусть выбирается семья, имеющая двух детей. Рассмотрим следующие события:

А – в семье оба ребенка - мальчики;
В – в семье оба ребенка - девочки;
С – в семье разнополые дети.

События А, В, С единственно возможные.
В последнем примере про детей события А, В, С образуют полную группу. Следует заметить, что противоположные события всегда образуют полную группу.

Типы событий

Достоверное | Невозможное | Случайное | Несовместимые

Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. *A* – некоторое событие, состоящее из *m* элементарных исходов $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{im}\}$, где *i1, i2, …, im* – различные числа от 1 до n.

Вероятность события A

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где n – число исходов испытания,
m – число исходов,
благоприятствующих появлению события A.

Свойства:

1. P(∅) = 0.

2. P(Ω) = 1

3. 0 ≤ P(A) ≤ 1 $\qquad$ 0 ≤ m ≤ n => 0 ≤ m/n ≤ 1

Все эл. события **равновероятны**.

Геометрическое определение вероятности

Класс. определение вероятности подходит только для конечных множеств Ω.

Пространство эл. исходов Ω можно отождествить с:

- интервалом конечной длины на числовой прямой;
- фигурой конечной площади на плоскости;
- телом конечного объема в пространстве.

Тогда длину, площадь или объем множество можно называть **мерой множества m(A).**

Эл. события *равновероятны* (равновозможны), а вероятность попадания случайной точки в какую-нибудь область $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере этой области $m(A)$.

Вероятность события A

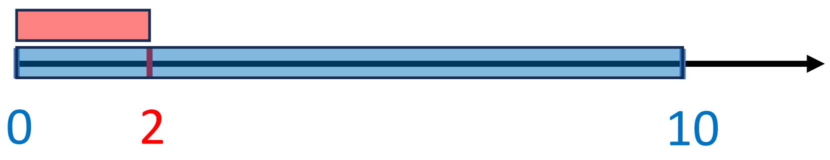
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Геометрическое определение вероятности

На линии связи длиной 10 км произошел обрыв. Какова вероятность, что он произошел не далее чем в 2 км от начала – событие A?

Решение. Предполагаем, что линия связи однородна и потому положение точки обрыва равновозможно на любом отрезке линии, где бы он ни располагался.

Тогда применимо определение $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0.2$

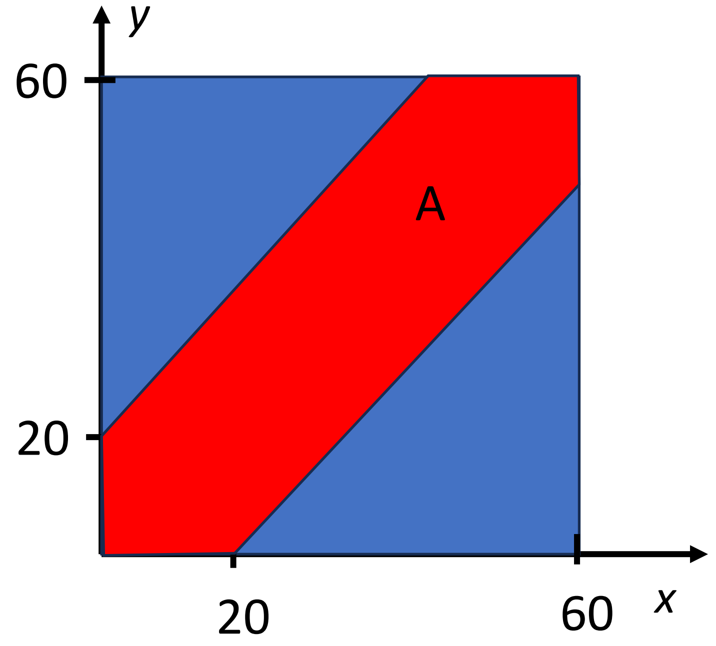


Геометрическое определение вероятности

Двое студентов договорились встретиться между восемью и девятью часами вечера. Каждый пришедший ждет другого в течение двадцати минут, а затем (если встреча не состоялась) уходит. Найти вероятность того, что встреча произойдет, если каждый из них выбирает момент своего прихода независимо от другого и не отдает предпочтения никаким моментам назначенного для встречи часа.

$$\Omega = \left\{(x,y):\begin{matrix} 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{matrix}\right.$$

$$A = \left\{(x,y):\begin{matrix} 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{matrix}, |x-y| \le 20\right.$$



$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{60 * 60 - 40 * 40}{60 * 60} = \frac{2000}{3600} \approx 0{,}5555$$

Аксиоматическое определение вероятности

Вещественная (числовая) функция P(A) называется **вероятностью**, если она удовлетворяет следующим свойствам (**аксиомам**):

А1. $P(A) \geq 0 \;\; \forall A$ – аксиома неотрицательности;

А2. $P(\Omega) = 1$ – аксиома нормированности;

А3. Для любой конечной или бесконечной последовательности попарно несовместных событий вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k) \;\; - \text{аксиома аддитивности}$$

Для решения задач с конечным множеством исходов испытания, достаточно принять аксиому А3 только для любого конечного множества попарно независимых событий.
Но для задач с бесконечными последовательностями событий необходима аксиома А3 для счетного множества событий.

Пример

В урне находится 6 белых и 4 красных шара. Извлекают три шара. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров один белый?

$$P(A) = \frac{C_6^1 * C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{\frac{6!}{1!\,5!} * \frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{10!}{3!\,7!}} = \frac{36}{120} = 0.3$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{4}{10} * \frac{6}{9} * \frac{5}{8} + \frac{6}{10} * \frac{4}{9} * \frac{5}{8} + \frac{6}{10} * \frac{5}{9} * \frac{4}{8}$$

Свойства вероятностей

P1. $P(\emptyset) = 0$.

Доказательство:

$\emptyset + \Omega = \Omega$, причем события $\emptyset$ и Ω несовместны. Согласно аксиоме А3

$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$

P2. $0 \leq P(A) \leq 1$

Доказательство:

$\Omega = A + \bar{A}$, причем A и $\bar{A}$ несовместны. Согласно аксиомам А2 и А3
$1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, то есть $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, причем $P(\bar{A}) \geq 0$

P3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Доказательство вытекает из предыдущего равенства

Свойства вероятностей

P4. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Этот результат следует из того, что $B = A + \bar{A}B$.

Так как $A \cap \bar{A}B = \emptyset$, то с применением аксиом A2, A3 получаем

$P(B) = P(A) + P(\bar{A}B)$.

Отсюда согласно аксиоме A1 имеем $P(B) \geq P(A)$.

Свойства вероятностей

P5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ – **формула сложения вероятностей**.

Доказательство: событие $A \cup B = A + (B \setminus A)$, $B = (B \setminus A) + AB$.

Слагаемые в правых частях обоих равенств – несовместные события, следовательно, с учетом аксиомы А3 для вероятностей событий $A \cup B$ и B имеем:

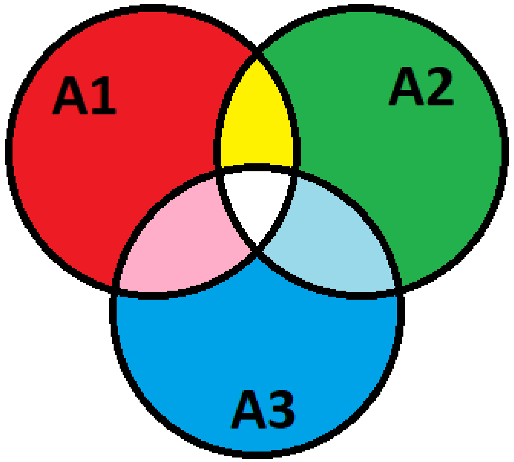
$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$ и $P(B) = P(B \setminus A) + P(AB)$.

И тогда $P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$.

Свойства вероятностей

Свойство P5 может быть обобщено для конечного числа слагаемых

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$



P6. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) -$

$- P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) +$

$+ P(A_1A_2A_3) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$