# Проверочная на лекции

Дискретная случайная величина подчинена следующему закону распределения:

| **ξ** | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **p** | 0.1 | 0.2 | 0.3 | ??? |

Чему равно значение *p* при $\xi = 3$ ?

1. Найдите функцию распределения этой случайной величины
2. Постройте график функции распределения
3. Найти математическое ожидание сл. величины
4. Найти дисперсию сл. величины
5. Найти вероятность попадания в диапазон $\xi \in [0, 2)$

# Проверочная на лекции

Дискретная случайная величина подчинена следующему закону распределения:

| **ξ** | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **p** | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

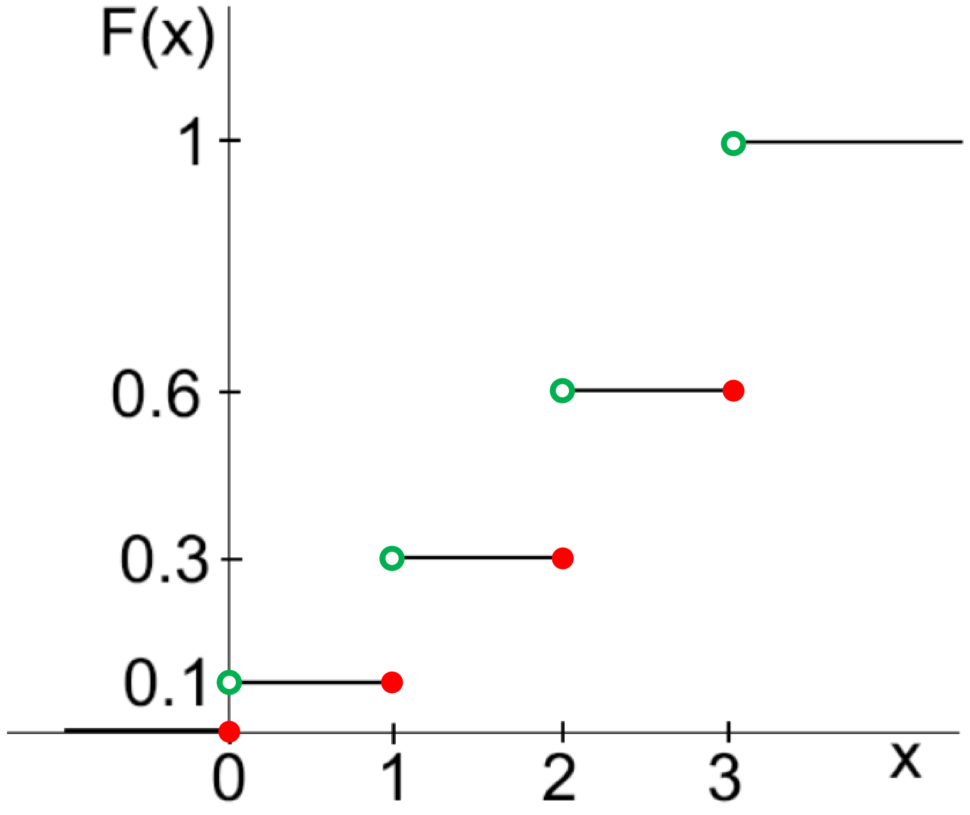
Чему равно значение *p* при $\xi = 3$ ?

1. Найдите функцию распределения этой случайной величины
2. Постройте график функции распределения
3. Найти математическое ожидание сл. величины
4. Найти дисперсию сл. величины
5. Найти вероятность попадания в диапазон $\xi \in [0, 2)$

# Проверочная на лекции

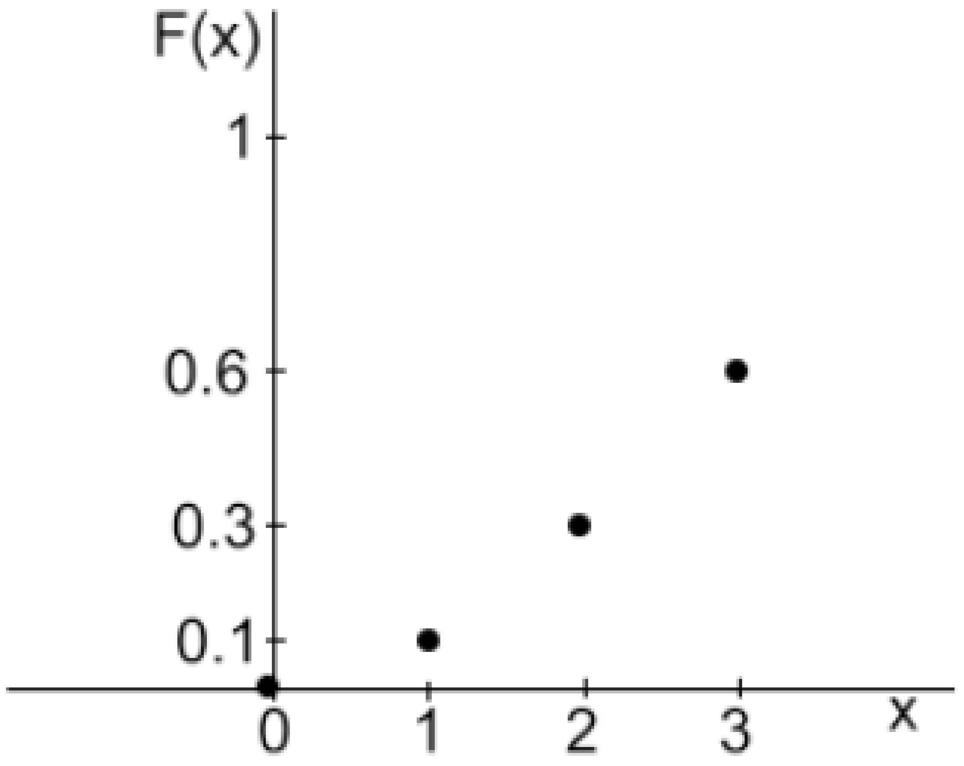
| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

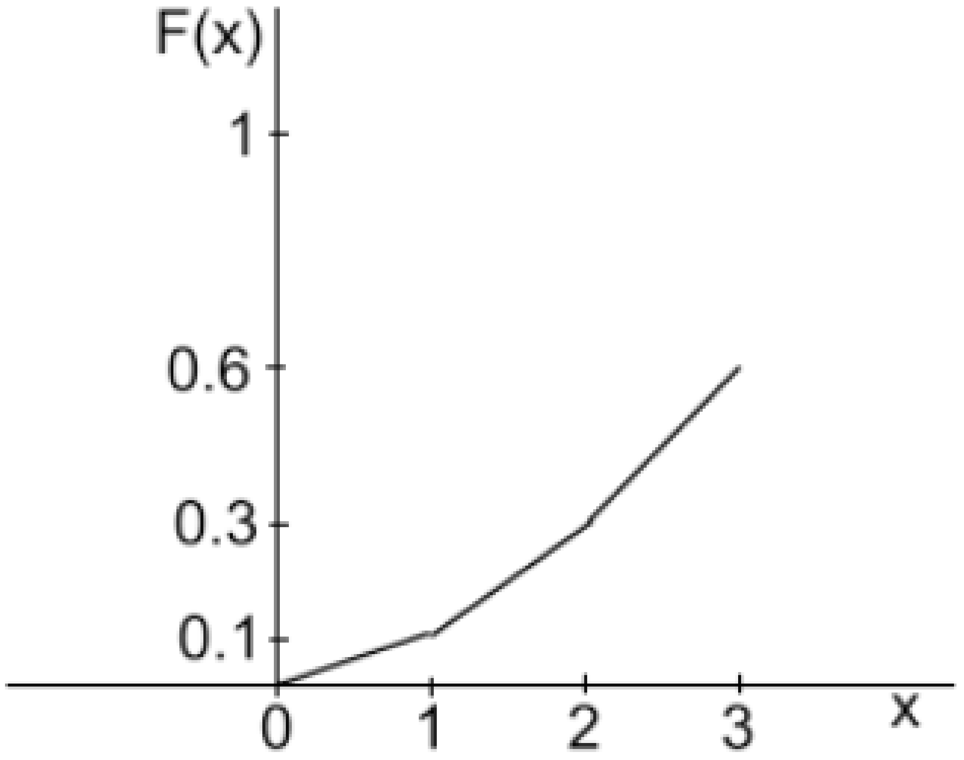
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.1, & 0 < x \le 1 \\ 0.3, & 1 < x \le 2 \\ 0.6, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



НЕПРАВИЛЬНО!!

| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

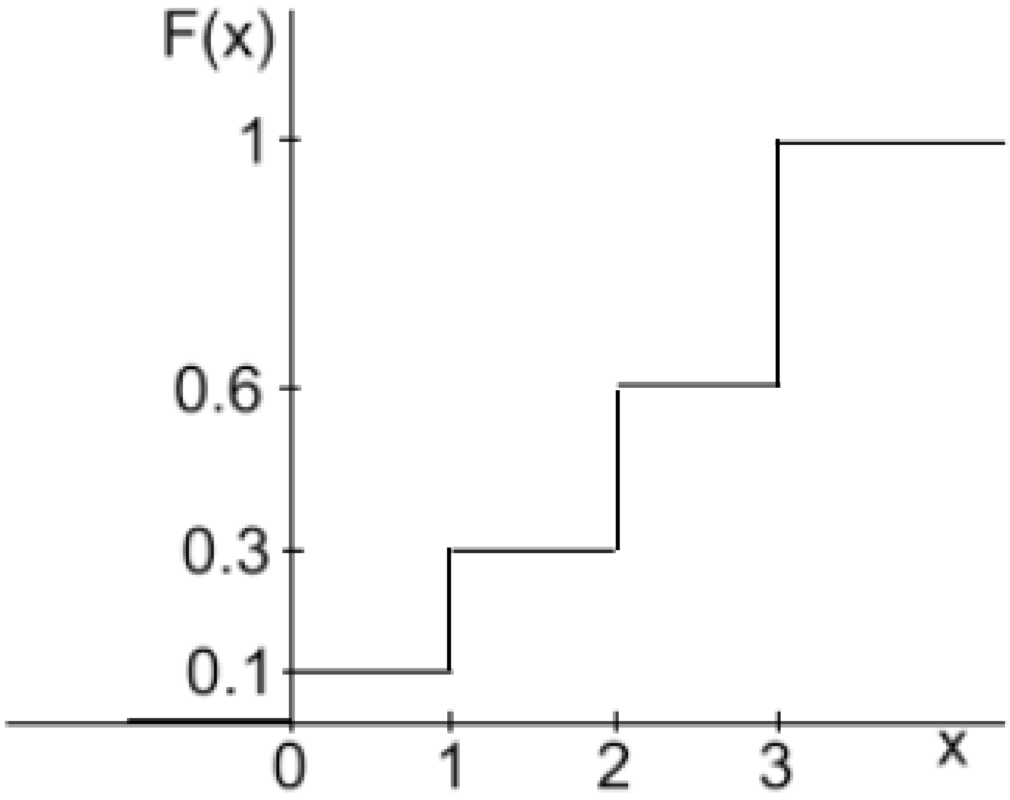


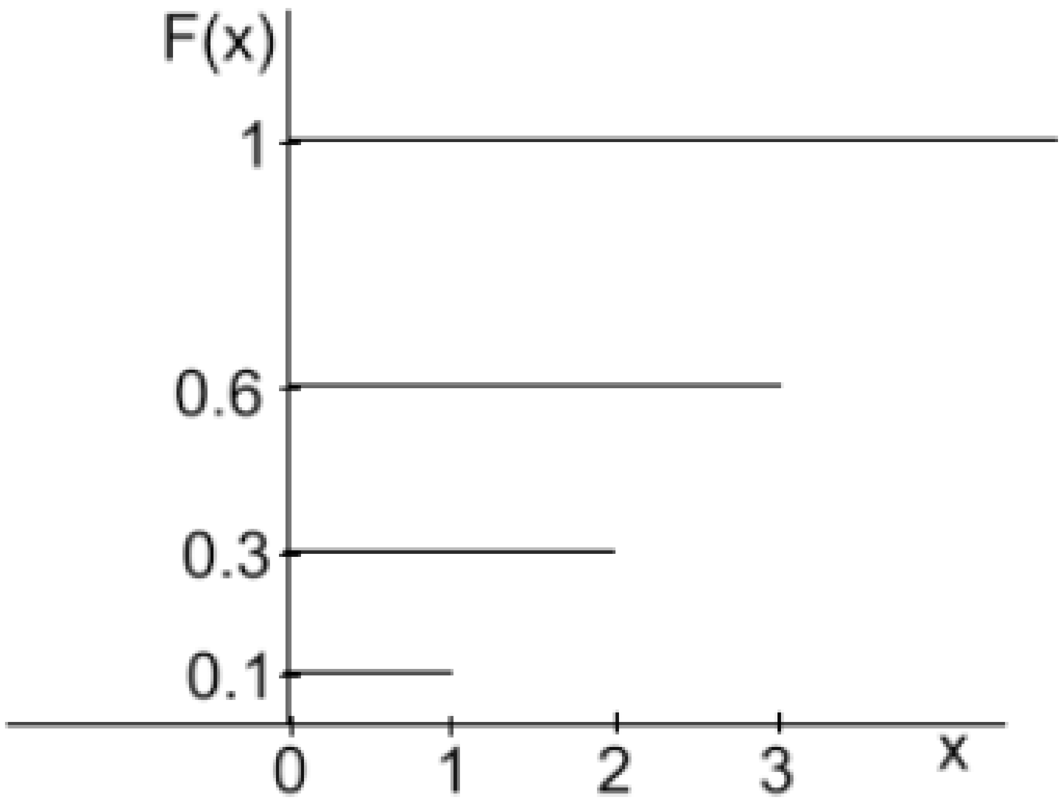




Не соответствует F(x)

НЕПРАВИЛЬНО!!

| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

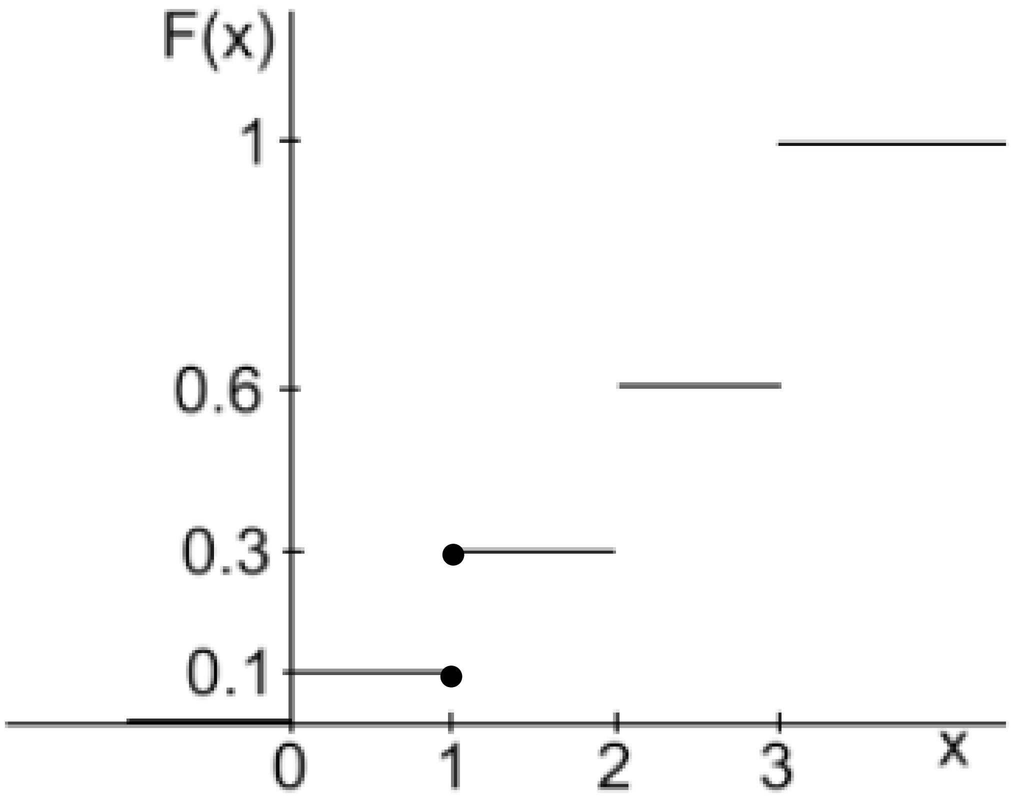



Не функция!

НЕПРАВИЛЬНО!!

| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |



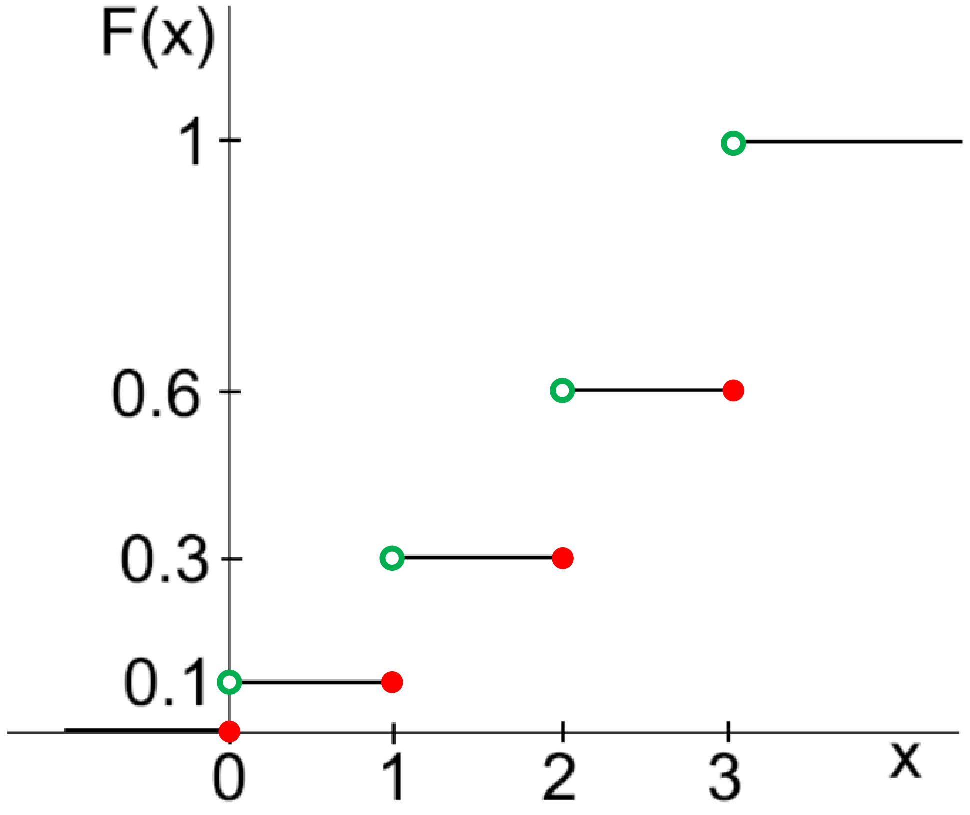

Не функция!

# Проверочная на лекции

| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.1, & 0 < x \le 1 \\ 0.3, & 1 < x \le 2 \\ 0.6, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$$P\{\,\xi \in [1,2)\,\} =$$
$$= F(2) - F(1) =$$
$$= 0.3 - 0.1 = 0.2$$



# Параметры основных законов распределения

| Характеристика | Мат. ожидание Mξ | Дисперсия Dξ |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | | |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | | |
| 3.Геометрическое **G (p)** | | |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | | |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | | |
| Непрерывные случ. величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | | |
| 2.Показательное **exp (λ)** | | |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Дискретные случайные величины

| Распределение | Обозначение | Формула расчета вероятностей |
|---|---|---|
| 1. Распределение Бернулли | $\mathbf{B_p}$ | *p* или $q = 1 - p$ |
| 2. Биномиальное | **B (n, p)** | $p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ *формула Бернулли* |
| 3. Геометрическое | **G (p)** | $p_k = P\{\xi = k\} = pq^k$ *геометрическая прогрессия* |
| 4. Гипергеометрическое | **HG (N, M, n)** | $p_m = P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ *комбинаторные сочетания* |
| 5. Распределение Пуассона | **Po (λ)** | $p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ *формула Пуассона* |

# Основные дискретные распределения

**Распределение Бернулли $B_p$**

*Ряд распределения*:

| ξ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | p | q = 1 - p |

$$M\xi = 0 * q + 1 * p = p;$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = (0^2 * q + 1^2 * p) - p^2 = p - p^2$$
$$= p(1-p) = pq$$

# Параметры основных законов распределения

| **Характеристика** | **Мат. ожидание Mξ** | **Дисперсия Dξ** |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | | |
| 3.Геометрическое **G (p)** | | |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | | |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | | |
| Непрерывные случ. величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | | |
| 2.Показательное **exp (λ)** | | |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Основные дискретные распределения

**Биномиальное распределение B (n, p)**

*Ряд распределения*:

| ξ | 0 | 1 | … | n | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| **P** | $p_0=P_n(0)$ | $p_1=P_n(1)$ | … | $p_n=P_n(n)$ | **1** |

Сл. в. $\xi_i$ - число успехов в i-том испытании, причем $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$.

Испытания независимы, а потому независимы и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

$\xi_i$ имеют биномиальное распределение с параметром p, $M\xi_i = p, D\xi_i = pq.$

$$M\xi = M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i = \sum_{i=1}^{n} p = np; \qquad D\xi = D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i = \sum_{i=1}^{n} pq = npq;$$

# Параметры основных законов распределения

| **Характеристика** | **Мат. ожидание Mξ** | **Дисперсия Dξ** |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | np | npq |
| 3.Геометрическое **G (p)** | | |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | | |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | | |
| Непрерывные случ. величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | | |
| 2.Показательное **exp (λ)** | | |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Основные дискретные распределения

**Геометрическое распределение G (p)**

$$p_k = P\{\xi = k\} = pq^{k-1},\ k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$$

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}\left(q^k\right) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p};$$

По аналогичным вычислениям,

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

# Параметры основных законов распределения

| **Характеристика** | **Мат. ожидание Mξ** | **Дисперсия Dξ** |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | np | npq |
| 3.Геометрическое **G (p)** | 1/p | $q/p^2$ |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | | |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | | |
| Непрерывные случ. величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | | |
| 2.Показательное **exp (λ)** | | |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Основные дискретные распределения

**Гипергеометрическое распределение HG (N, M, n)**

$$p_m = P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$M\xi = n\frac{M}{N};$$

$$D\xi = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

# Параметры основных законов распределения

| **Характеристика** | **Мат. ожидание Mξ** | **Дисперсия Dξ** |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | np | npq |
| 3.Геометрическое **G (p)** | 1/p | $q/p^2$ |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | n*M/N | n*M/N*(1-M/n)*(1-(n-1)/(N-1)) |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | | |
| Непрерывные случ. величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | | |
| 2.Показательное **exp (λ)** | | |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Основные дискретные распределения

**Распределение Пуассона Po (λ)**

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$$

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^{k-1} \lambda}{k(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = [\text{ряд Маклорена}] = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

По аналогичным вычислениям,
$D\xi = \lambda$

# Параметры основных законов распределения

| **Характеристика** | **Мат. ожидание Mξ** | **Дисперсия Dξ** |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | np | npq |
| 3.Геометрическое **G (p)** | 1/p | $q/p^2$ |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | n*M/N | n*M/N*(1-M/n)*(1-(n-1)/(N-1)) |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | $\lambda$ | $\lambda$ |
| Непрерывные случ. величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | | |
| 2.Показательное **exp (λ)** | | |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Основные непрерывные распределения

| **Распределение** | **Обозначение** | **Формула плотности распределения** |
|---|---|---|
| 1. Равномерное распределение | **Rav [a, b]** | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$ |
| 2. Показательное распределение | **Exp ($\lambda$)** | $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$ |
| 3. Нормальное распределение | **N ($a$,σ)** | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ |

# Основные непрерывные распределения

**Равномерное распределение Rav [a, b]**

f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x * 0dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} x * 0dx = \frac{a+b}{2}$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

# Параметры основных законов распределения

| Характеристика | Мат. ожид. Mξ | Дисперсия Dξ |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | np | npq |
| 3.Геометрическое **G (p)** | 1 / p | q / $p^2$ |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | n * M / N | n * M / N * (1-M/n)<br>* (1 - ( n – 1 ) / ( N – 1 ) ) |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | $\lambda$ | $\lambda$ |
| Непрерывные случ. Величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | (a + b) / 2 | $(b - a)^2$ / 12 |
| 2.Показательное **exp (λ)** | | |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Основные непрерывные распределения

**Показательное распределение exp (λ)**

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_{0}^{+\infty} xd\left(e^{-\lambda x}\right) = -xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \left(-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} + 0\right) - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} = 0 - \frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}} - 1\right) = \boldsymbol{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{\lambda x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0$$

# Основные непрерывные распределения

**Показательное распределение exp (λ)**

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$M\xi = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}}}$$

# Параметры основных законов распределения

| **Характеристика** | **Мат. ожид. Mξ** | **Дисперсия Dξ** |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | np | npq |
| 3.Геометрическое **G (p)** | 1 / p | q / $p^2$ |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | n * M / N | n * M / N * (1-M/n)<br>* (1 - ( n – 1 ) / ( N – 1 ) ) |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | $\lambda$ | $\lambda$ |
| Непрерывные случ. Величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | (a + b) / 2 | $(b - a)^2$ / 12 |
| 2.Показательное **exp (λ)** | 1 / $\lambda$ | 1 / $\lambda^2$ |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | | |

# Основные непрерывные распределения

**Нормальное распределение N (*a*,σ)**

f(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, x ∈ R

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \begin{bmatrix} t = \frac{(x-a)}{\sigma} \\ x = \sigma t + a \\ dx = \sigma dt \end{bmatrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma t + a)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma t * e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}a * e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \begin{bmatrix} \text{нечетная функция } x \in [-\infty; +\infty] \\ a * \text{плотность станд. норм. распр.} \end{bmatrix} = 0 + a * 1 = \boldsymbol{a}$$

# Основные непрерывные распределения

**Нормальное распределение N (*a*,σ)**

f(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, x ∈ R

$$M\xi = \boldsymbol{a}$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \boldsymbol{\sigma^2}$$

# Параметры основных законов распределения

| **Характеристика** | **Мат. ожид. Mξ** | **Дисперсия Dξ** |
|---|---|---|
| Дискретные случ. величины | | |
| 1.Распределение Бернулли $\mathbf{B_p}$ | p | pq |
| 2.Биномиальное **B (n, p)** | np | npq |
| 3.Геометрическое **G (p)** | 1 / p | q / $p^2$ |
| 4.Гипергеометрическое **HG (N, M, n)** | n * M / N | n * M / N * (1-M/n)<br>* (1 - ( n – 1 ) / ( N – 1 ) ) |
| 5.Распределение Пуассона **Po (λ)** | $\lambda$ | $\lambda$ |
| Непрерывные случ. Величины | | |
| 1.Равномерное **Rav [a, b]** | (a + b) / 2 | $(b - a)^2$ / 12 |
| 2.Показательное **exp (λ)** | 1 / $\lambda$ | 1 / $\lambda^2$ |
| 3.Нормальное **N (*a*,σ)** | *a* | $\sigma^2$ |

# Проверочная на лекции

1. Разделите распределения на 2 группы:

A – дискретные

B – непрерывные

1 – Бернулли

2 – равномерное

3 – Пуассона

4 – биномиальное

5 – геометрическое

6 – нормальное

7 – гипергеометрическое

8 – показательное

# Проверочная на лекции

## 2. Сопоставьте формулы и названия распределений

A
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$$

B
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

C
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

1 – Бернулли

2 – равномерное

3 – Пуассона

4 – биномиальное

5 – геометрическое

6 – нормальное

7 – гипергеометрическое

8 – показательное

# Проверочная на лекции

## 3. Сопоставьте формулы и названия распределений

A $p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$

B $p_k = P\{\xi = k\} = pq^k$

C $p_k = P\{\xi = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

D $p_m = P\{\xi = m\} = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

1 – Бернулли

2 – равномерное

3 – Пуассона

4 – биномиальное

5 – геометрическое

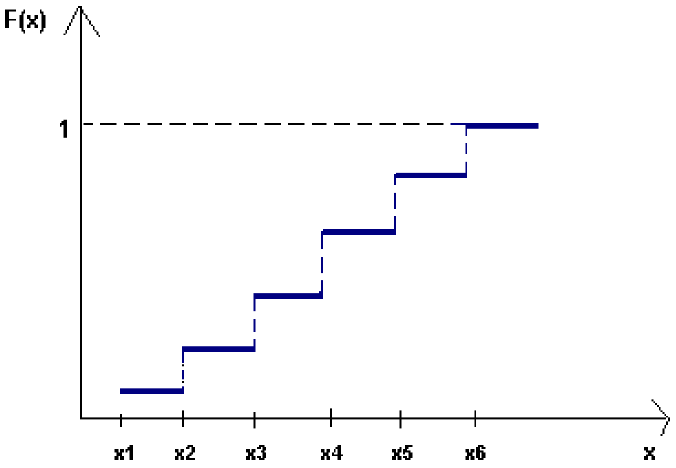
6 – нормальное

7 – гипергеометрическое

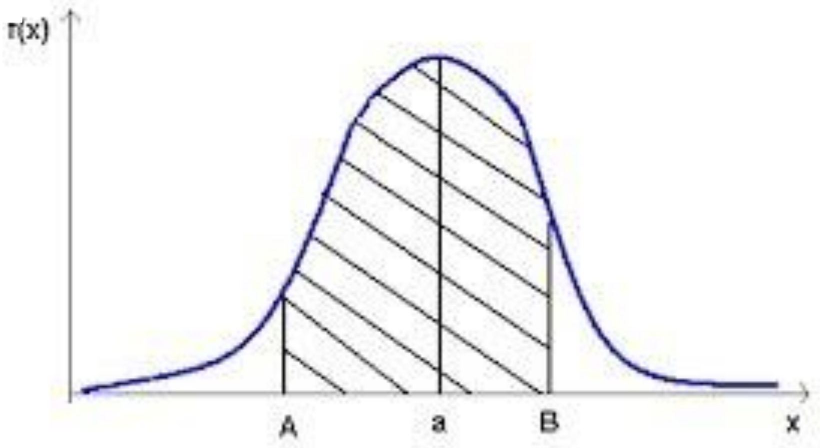
8 – показательное

# Проверочная на лекции

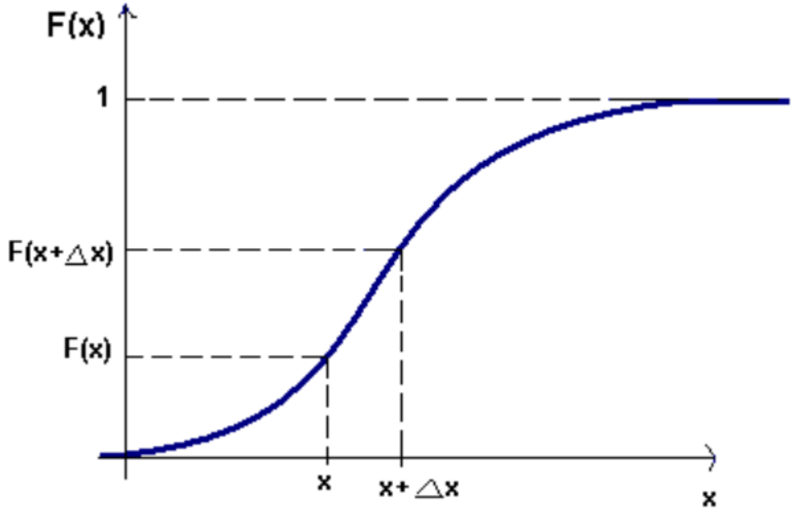
## 4. Подпишите название графика и какой случайной величине он соответствует (непрерывной или дискретной)




A



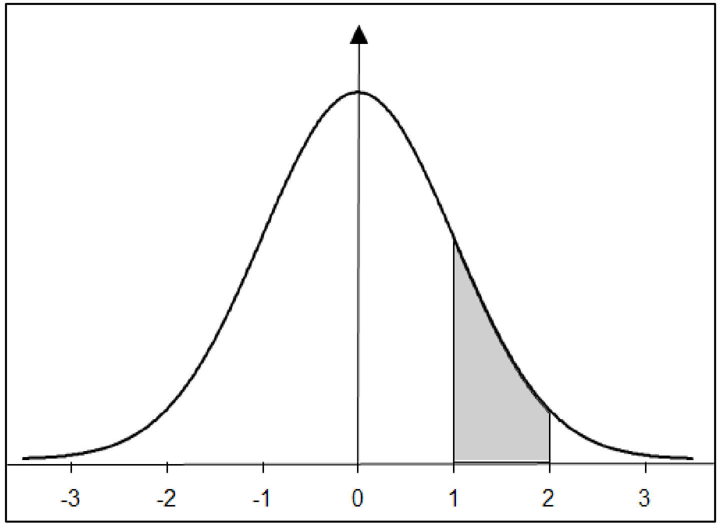

B



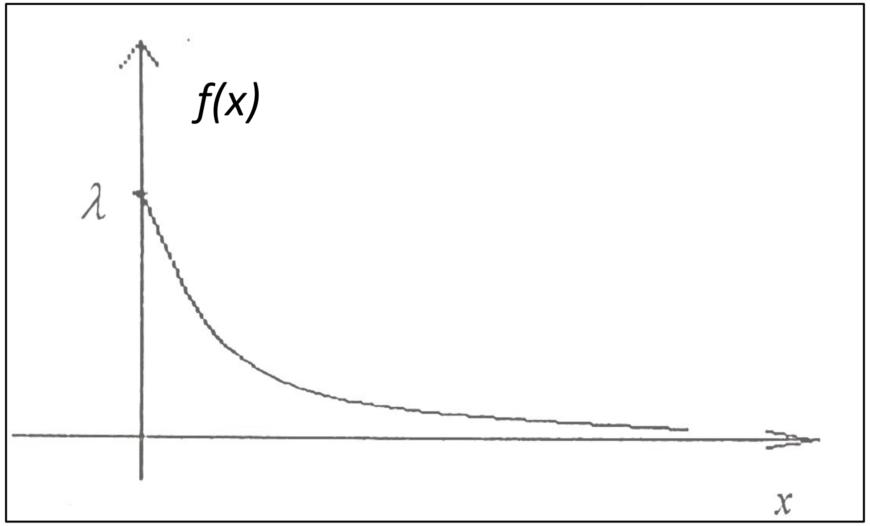

C

# Проверочная на лекции

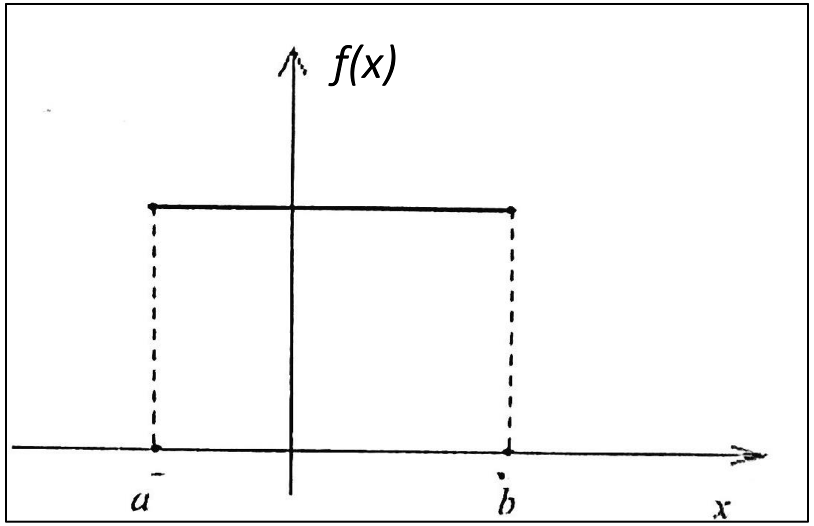
## 5. Сопоставьте график и вид распределения




A




B




C

1 – равномерное

2 – показательное

3 – нормальное

# Проверочная на лекции

## 6. Определите математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение по графику