Федеральное агентство связи
Федеральное государственное
образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»
(ФГОБУ ВПО «СибГУТИ»)

В.К.Трофимов
Т.С.Мурзина
Т.Э.Захарова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Переиздание

*Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по
направлениям «Информатика и вычислительная техника»(230100),
«Телекоммуникации» (210400).*

Новосибирск
2013

УДК 517.3 (075.8)

В.К.Трофимов, Т.С.Мурзина, Т.Э.Захарова. Интегральное исчисление: Учебное пособие. Переиздание. – Новосибирск: ФГОБУ ВПО «СибГУТИ», 2013. – 249 стр.

В учебном пособии достаточно подробно изложен теоретический материал по разделам интегрального исчисления: неопределенные, определенные, двойные, тройные интегралы, интегралы, зависящие от параметра. Приведены примеры решения задач, на которых продемонстрированы основные особенности теоретического материала. Пособие содержит большое количество задач для самостоятельного решения, поэтому рекомендуется при начальном изучении темы «Интегральное исчисление».

Кафедра высшей математики СибГУТИ

Ил. – 101, список лит.- 9 наименований

Для направлений 210400 «Телекоммуникации»,
230100 «Информатика и вычислительная техника».

Рецензенты: академик РАН А.С.Алексеев,
д.ф.-м.н., проф. В.К.Попков,
д.ф.-м.н., проф. А.Г.Марчук

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ в качестве учебного пособия.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава 1. Основные понятия и определения

§1.1. Понятие первообразной. Теорема о первообразной

В разделе математического анализа «Дифференциальное исчисление», изученного ранее, путем дифференцирования известной функции находилась ее производная. Например, при известном уравнении движения $S = S(t)$, где $S(t)$ - пройденный путь за время t, находили скорость движения $v = \frac{dS}{dt}$, а затем и ускорение $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$. Отметим, что в общем случае $v = v(t)$, $a = a(t)$. Однако, очень часто приходится решать противоположную задачу, а именно, при заданной скорости требуется найти пройденный путь S как величину, зависящую от времени t, а по заданному ускорению восстановить скорость. Таким образом, мы приходим к задаче нахождения функции по известной производной.

Задача интегрального исчисления состоит в том, чтобы по известной, заданной в некотором интервале функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, которая была бы связана с функцией $f(x)$ в этом интервале соотношением $F'(x) = f(x)$. Таким образом, мы пришли к задаче – обратной задаче дифференциального исчисления.

<u>Определение 1.1.</u> *Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором интервале, если в любой точке x из этого интервала $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.*

Пример 1.1. Найти первообразные функций:
а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \cos x$.

Решение. а) Очевидно, что первообразной функции $f(x) = x^3$ является функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$, так как по определению получаем $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$.

б) $F(x) = \sin x$, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$.

Легко видеть, что в примере 1.1а) функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является не единственной первообразной. Первообразными для функции $f(x) = x^3$ также будут, например, функции $F(x)=\frac{x^4}{4}-8$, $F(x)=\frac{x^4}{4}+\sqrt{2}$. Очевидно, что любые функции вида $\frac{x^4}{4}+C$ являются первообразными для функции $f(x)=x^3$, здесь и в дальнейшем C – произвольная постоянная величина.

В общем случае, если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то все бесконечное множество функций вида $F(x)+C$ также являются первообразными для $f(x)$. Возникает задача описать все множество первообразных для заданной функции $f(x)$. Нижеследующее утверждение дает ответ на поставленную задачу.

<u>Теорема 1.1</u>. *Если функция $f(x)$ имеет на некотором интервале две первообразные функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то разность между $F_1(x)$ и $F_2(x)$ равна постоянной величине, то есть для любого x из этого интервала выполняется равенство $F_1(x)-F_2(x)=C$, где C – постоянная величина.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - различные первообразные для функции $f(x)$. Тогда для всех x из заданного интервала выполняются равенства:

$$F_1'(x)=f(x); \qquad F_2'(x)=f(x).$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$F_1'(x)-F_2'(x)=0.$$

Так как производная суммы равна сумме производных, то имеем соотношение:

$$\left(F_1(x)-F_2(x)\right)'=0.$$

Воспользовавшись следствием из теоремы Лагранжа, согласно которому, если производная функции равна нулю, то сама функция является постоянной величиной, получаем равенство:

$$F_1(x)-F_2(x)=C.$$

Что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует: *все первообразные для данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на некоторую постоянную величину, то есть семейство первообразных для $f(x)$ можно записать в виде $F(x)+C$, где $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$.*

<u>Определение 1.2</u>. *Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ для заданной функции $f(x)$ называется* ***неопределенным интегралом функции*** *$f(x)$ и обозначается символом: $\int f(x)dx$*. Таким образом, по определению:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

При этом $\int$ – знак неопределенного интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования. Нахождение всех первообразных для заданной функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции.

Если при нахождении первообразной функции $f(x)$ не указывается промежуток, на котором она задана, то считается, что первообразная находится на всей области определения функции $f(x)$.

Заметим, что непосредственно из определения неопределенного интеграла вытекает справедливость следующего равенства:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{1.1.1}$$

Отсюда следует, что для поверки правильности интегрирования нужно продифференцировать полученный ответ, при этом в результате должна получиться подынтегральная функция.

Пример 1.2. Вычислить интегралы: а) $\int 3x^2 dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. а) $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, так как $\left(x^3 + C\right)' = 3x^2$.

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, так как $\left(\operatorname{tg} x + C\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Пример 1.3. Проверить правильность результата интегрирования:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (2\operatorname{tg} x - 1)^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2\operatorname{tg} x - 1)^2} + C.$$

Решение. Найдем производную от результата интегрирования:

$$\left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2\operatorname{tg} x - 1)^2} + C\right)' = -\frac{1}{4}\left((2\operatorname{tg} x - 1)^{-2}\right)' + C' = -\frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot (2\operatorname{tg} x - 1)^{-3} \cdot$$

$$\cdot (2\operatorname{tg} x - 1)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\operatorname{tg} x - 1)^3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot (2\operatorname{tg} x - 1)^3}.$$

Получили подынтегральную функцию, значит интегрирование выполнено верно.

§1.2. Геометрический смысл неопределенного интеграла

Из теории дифференциального исчисления известно, что значение производной $F'(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции $F(x)$, то есть к кривой $y = F(x)$. Отсюда следует, что нахождение первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$ геометрически означает нахождение кривой $y = F(x)$, для которой тангенс угла наклона касательной изменяется по закону $tg\alpha = F'(x)$ или $tg\alpha = f(x)$, где $\alpha = \alpha(x)$ - угол наклона касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке x. Полученная кривая называется интегральной кривой. Если одна из этих интегральных кривых задается уравнением $y = F(x)$, то все остальные интегральные кривые получаются из нее простым сдвигом вдоль оси OY. Таким образом, неопределенный интеграл, как множество всех первообразных, представляет собой семейство «параллельных» кривых (рис.1). Одна кривая семейства соответствует одной первообразной с определенным числовым значением константы C. Поэтому для определения конкретной интегральной кривой, то есть для определения числового значения константы, следует задать точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую этой интегральной кривой, тогда из уравнения $y_0 = F(x_0) + C$ находим постоянную $C = y_0 - F(x_0)$.

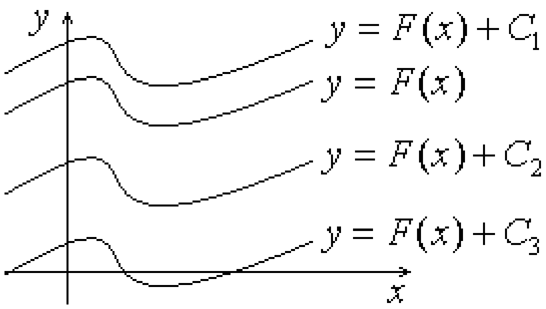


Рис.1

Пример 1.4. Найти первообразную функции $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4}; -2\right)$.

Решение. Легко видеть, что одной первообразной является функция $F(x) = -\operatorname{ctg} x$, так как $F'(x) = (-\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x} = f(x)$. Тогда все множество первообразных описывается формулой $F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$, где C- постоянное число. Так как требуется найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4}; -2\right)$, то найдем значение константы C из условия, что координаты точки $x=\dfrac{\pi}{4}$ и $y=-2$ удовлетворяют уравнению $F(x)=-\operatorname{ctg} x+C$, то есть выполняется $-2=-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}+C$. Значит, $C=-2+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}=-1$. Таким образом, искомая первообразная имеет вид $F(x)=-\operatorname{ctg} x-1$.

Отметим без доказательства, что *для всякой непрерывной на интервале функции существует неопределенный интеграл.* Поэтому в дальнейшем мы будем говорить только о неопределенном интеграле от непрерывных функций, что позволяет не затрагивать вопрос о существовании неопределенного интеграла.

§1.3. Простейшие свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть справедливо равенство*

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

Доказательство. Согласно определению дифференциала функции имеем:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=\left(\int f(x)dx\right)' dx.$$

Отсюда на основании (1.1.1) вытекает:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до аддитивной постоянной, то есть справедливо равенство*

$$\int dF(x)=F(x)+C. \tag{1.1.2}$$

Доказательство. Пусть $F'(x)=f(x)$, то есть по определению $F(x)$ является первообразной для $f(x)$.

По определению дифференциала функции

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx.$$

По определению неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Значит,

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 3. *Постоянный сомножитель, отличный от нуля, можно выносить за знак неопределенного интеграла, то есть справедливо равенство*

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx. \tag{1.1.3}$$

Доказательство. Продифференцируем левую и правую части равенства (1.1.3):

$$\left(\int af(x)dx\right)' = \left(a\int f(x)dx\right)'.$$

Так как

$$\left(\int af(x)dx\right)' = af(x)$$

и

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = af(x)$$

Значит,

$$\left(\int af(x)dx\right)' = \left(a\int f(x)dx\right)'.$$

Следовательно,

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Если множитель $a = 0$, тогда подынтегральная функция равна нулю. В этом случае справедливо свойство 5, которое изложено далее.

Свойство 4. *Неопределенный интеграл суммы двух и более функций равен сумме неопределенных интегралов этих функций, то есть справедливо равенство*

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \tag{1.1.4}$$

Доказательство. Продифференцируем левую и правую части равенства (1.1.4):

$$\left(\int (f_1(x) + f_2(x))dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)'.$$

Согласно (1.1.1) и правилам дифференцирования получаем:

$$f_1(x) + f_2(x) = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)'$$

$$f_1(x) + f_2(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Получили верное равенство, значит,

$$\left(\int (f_1(x) + f_2(x))dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)'.$$

Следовательно, равенство (1.1.4) верно.

Что и требовалось доказать.

Свойство 5. *Если $f(x) \equiv 0$ для любого x, тогда*

$$\int 0dx = C. \tag{1.1.5}$$

Доказательство. Продифференцируем левую и правую части равенства (1.1.5):

$$\left(\int 0dx\right)' = C'.$$

Согласно (1.1.1) и правилам дифференцирования получаем:

$$0 = 0 .$$

Получили верное равенство, это означает, что (1.1.5) справедливо.

Что и требовалось доказать.

§1.4. Таблица основных неопределенных интегралов

Так как интегрирование является действием обратным к дифференцированию, то читая таблицу производных справа налево, можно получить значения некоторых основных неопределенных интегралов, которые справедливы в области определения рассматриваемых функций. Таблица основных неопределенных интегралов имеет вид:

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\int dx = x + C$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$

11. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

12. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$

13. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \quad a \neq -1)$

14. $\int e^x dx = e^x + C$

15. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \quad (a > 0)$ или

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ или $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$

17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0)$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (|x| < |a|,\ a \neq 0)$ или

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos\frac{x}{a} + C \quad (|x| < |a|,\ a \neq 0)$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

21. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$

22. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

23. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

24. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Справедливость каждого из приведенных выше равенств проверяется дифференцированием. Например, рассмотрим соотношение 4: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$ Эта формула применима на любом промежутке, не содержащем нуля. В самом деле, если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$, тогда $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ и $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; если $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$, тогда $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ и $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$ Обе эти формулы объединены одним равенством 4.

Отметим, что в интегральном исчислении, в отличие от дифференциального, нет общего приема интегрирования. При нахождении неопределенного интеграла в классе элементарных функций используют набор стандартных приемов, приводящих заданный интеграл к табличному. Изучим некоторые из них.

Глава 2. Основные методы интегрирования

§2.1. Метод непосредственного интегрирования

Непосредственное интегрирование заключается в приведении данного интеграла к одному или нескольким табличным интегралам с помощью свойств неопределенного интеграла, а также с помощью различных формул, в том числе и тригонометрических, и тождественных алгебраических преобразований подынтегральной функции.

Рассмотрим несколько примеров нахождения неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования.

Пример 2.1. Используя табличные интегралы и свойства неопределенного интеграла, вычислить: а) $\int\left(4x^3+3x^2+3x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{3x^2+25}$.

Решение. а) $\int\left(4x^3+3x^2+3x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=4\int x^3dx+3\int x^2dx+3\int x^{\frac{1}{3}}dx+$

$$+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=4\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4/3}+2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C=x^4+x^3+\frac{9}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt{x}+C$$

б) $\int\frac{dx}{3x^2+25}=\int\frac{dx}{3\left(x^2+\frac{25}{3}\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+\frac{25}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{25/3}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{25/3}}+$

$$=\frac{1}{5\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}\ x}{5}+C.$$

Пример 2.2. Используя тождественные алгебраические преобразования, вычислить: а) $\int\frac{x^2}{x^2+4}dx$; б) $\int\frac{dx}{(2-x^2)(x^2+3)}$.

Решение. а) $\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4}{x^2+4}dx+\int\frac{-4}{x^2+4}dx=$

$$=\int dx-4\int\frac{dx}{x^2+4}=x-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=x-2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

При нахождении этого интеграла в числителе мы добавили 4 и отняли 4, а затем, почленно разделив, получили две дроби, и, таким образом, пришли к двум табличным интегралам.

б) $\int \frac{dx}{(2-x^2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{(2-x^2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{(2+3+x^2-x^2)dx}{(2-x^2)(x^2+3)} =$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{(2-x^2)dx}{(2-x^2)(x^2+3)} + \frac{1}{5}\int \frac{(3+x^2)dx}{(2-x^2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+3} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{2-x^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + C.$$

Пример 2.3. Используя основное тригонометрическое тождество, вычислить: $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} =$

$$= \int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

При нахождении этого интеграла мы сначала использовали основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Затем подынтегральную функцию почленно разделили на знаменатель, получив две дроби, интегралы от которых можно найти в таблице, приведенной выше.

Пример 2.4. Используя формулы сокращенного умножения, вычислить:

$$\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx.$$

Решение. Используя формулу сокращенного умножения: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, преобразуем подынтегральное выражение и вычислим интеграл на основании свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов:

$$\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = \int\left(x^3 + 3x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\right)dx =$$

$$= \int\left(x^3 + 3x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3x\cdot\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \int x^3 dx + 3\int x^{\frac{3}{2}}dx + 3\int dx + \int x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} + 3x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + 3x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 2.5. Вычислить интеграл, используя формулы тригонометрии:

$$\int\left(3+\operatorname{tg}^2 x\right)dx.$$

Решение. $\int\left(3+\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\int\left(2+1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\int\left(2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$

$=2\int dx+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=2x+\operatorname{tg}x+C$.

При вычислении этого интеграла было использовано тригонометрическое тождество: $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$. На основании свойств неопределенного интеграла в итоге мы получили два табличных интеграла.

Для закрепления материала этого параграфа рекомендуется вычислить **самостоятельно** нижеследующие интегралы:

1. $\int\left(e\sqrt[7]{x}-\sqrt[3]{2x}\right)dx$.

2. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+2x-3x^4}{x^2}dx$.

3. $\int\frac{2\cos^3 x-3\cos x+\sqrt{5}}{\cos^2 x}dx$.

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{125-5x^2}}$.

5. $\int\frac{dx}{(2x)^2+4}$.

6. $\int\frac{dx}{4x^2-25}$.

7. $\int\sqrt[7]{x}\left(\sqrt{x}-2\right)dx$.

8. $\int\frac{(x+1)\left(x^2-3\right)}{3x^2}dx$.

9. $\int\frac{3x^2+\operatorname{tg}x}{x^2\cdot\operatorname{tg}x}dx$.

10. $\int\frac{x^3+3x^2-1}{x\sqrt{x}}dx$.

11. $\int\frac{\sqrt{4-x^2}+9+x^2}{\left(9+x^2\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}dx$.

12. $\int 3^x\cdot 4^{2x}dx$.

13. $\int\frac{4e^x+2^x}{3^x}dx$.

14. $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

15. $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}$.

16. $\int\frac{3\sin x-\cos x}{\sin 2x}dx$.

17. $\int\left(\operatorname{ctg}^2 x-5\right)dx$.

18. $\int\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos x dx$.

19. $\int\frac{6dx}{\left(x^2+2\right)\left(1-x^2\right)}$.

20. $\int\left(\frac{1}{2}-\sqrt[4]{x}\right)^2dx$.

21. $\int\frac{x^4-16}{x^2+4}dx$.

22. $\int\frac{x^2-4x\sqrt{x}+4x}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}dx$.

23. $\int \frac{x^2+1}{x^2+3}dx$.   **24.** $\int \frac{(x-5)^3}{2\sqrt{x}}dx$.

25. $\int \frac{8x^3-27}{4x-6}dx$.

§2.2. Внесение под знак дифференциала

Метод внесения (подведения) под знак дифференциала основан на свойстве 3 неопределенного интеграла из предыдущей главы, согласно которому

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

Например, если $F(x) = \cos x$, то $\int d(\cos x) = \cos x + C$.

Используя инвариантность дифференциала, мы можем заметить, что если

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{где } x = \varphi(t),$$

то

$$\int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C.$$

Из последнего равенства вытекает суть ***метода подведения под знак дифференциала***. Он состоит в том, чтобы в подынтегральном выражении найти или создать некоторую функцию так, чтобы все подынтегральное выражение записывалось через выделенную функцию.

Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, тогда имеет место равенство

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

где a, b - константы, $a \neq 0$.

Доказательство. Продифференцируем левую и правую части равенства:

$$\left(\int f(ax+b)dx\right)' = \left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)'.$$

На основании (1.1.1) и правил дифференцирования получаем:

$$f(ax+b) = \frac{1}{a}F'(ax+b)$$

$$f(ax+b) = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot(ax+b)'$$

$$f(ax+b) = f(ax+b).$$

Получили верное равенство, значит,

$$\left(\int f(ax+b)dx\right)' = \left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)'.$$

Таким образом, верно равенство

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C\ .$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько типичных примеров.

Пример 2.6. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \left|\cos x dx = (\sin x)' dx = d(\sin x)\right| =$

$$= \int \sin^3 x d(\sin x) = \left\langle \int u^3 du \right\rangle = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Пример 2.7. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx = \left|\frac{1}{\sin^2 x} dx = -(\operatorname{ctg} x)' dx = -d(\operatorname{ctg} x)\right| =$

$$= -\int \operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x) = \left\langle \int u du \right\rangle = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C.$$

Пример 2.8. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left|\sin x dx = -(\cos x)' dx = -d(\cos x)\right| =$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \left\langle \int \frac{du}{u} \right\rangle = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 2.9. $\int \frac{x dx}{x^4+5} = \left| x dx = \frac{1}{2}(x^2)' dx = \frac{1}{2} d(x^2) \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+5} =$

$$= \left\langle \int \frac{du}{u^2+5} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Пример 2.10. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \left| \frac{1}{x} dx = (\ln x)' dx = d(\ln x) \right| = \int \sqrt{\ln x} d(\ln x) =$

$$= \left\langle \int u^{\frac{1}{2}} du \right\rangle = \frac{\ln^{\frac{3}{2}} x}{3/2} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\ln^3 x} + C.$$

Пример 2.11. $\int \frac{e^{3x}}{\left(e^{3x}-\sqrt{5}\right)^4} dx = \left| e^{3x} dx = \frac{1}{3}\left(e^{3x}\right)' dx = \frac{1}{3} d\left(e^{3x}\right) = \frac{1}{3} d\left(e^{3x} - \sqrt{5}\right) \right| =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(e^{3x}-\sqrt{5}\right)}{\left(e^{3x}-\sqrt{5}\right)^4} = \left\langle \int u^{-4} du \right\rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(e^{3x}-\sqrt{5}\right)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{9\left(e^{3x}-\sqrt{5}\right)^3} + C.$$

Пример 2.12. $\int \cos(4x+1)dx = \left| dx = \frac{1}{4} d(4x+1) \right| = \frac{1}{4} \int \cos(4x+1) d(4x+1) =$

$= \left\langle \int \cos u du \right\rangle = \frac{1}{4} \sin(4x+1) + C$.

Пример 2.13. $\int \frac{dx}{x+8} = \left| dx = d(x+8) \right| = \int \frac{d(x+8)}{x+8} = \left\langle \int \frac{du}{u} \right\rangle = \ln|x+8| + C$.

Пример 2.14. $\int \sqrt[11]{3-2x} \cdot dx = \left| dx = -\frac{1}{2} d(3-2x) \right| = -\frac{1}{2} \int \sqrt[11]{3-2x} \cdot d(3-2x) =$

$= \left\langle \int u^{\frac{1}{11}} du \right\rangle = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3-2x)^{\frac{12}{11}}}{12/11} + C = -\frac{11}{24} \cdot \sqrt[11]{(3-2x)^{12}} + C$.

Пример 2.15. $\int \frac{1-3\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - 3 \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx =$

$= \left| \cos x dx = (\sin x)' dx = d(\sin x) \right| = -\operatorname{ctg} x - 3 \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x} = \left\langle \int u^{-2} du \right\rangle =$

$= -\operatorname{ctg} x - 3 \cdot \frac{\sin^{-1} x}{-1} + C = -\operatorname{ctg} x + \frac{3}{\sin x} + C.$

Из рассмотренных примеров следует, что использование рассмотренного метода возможно только при хорошем знании таблицы производных и правил дифференцирования. Этот метод часто не выделяют как самостоятельный метод, потому что он является частным случаем другого метода – метода подстановки. Однако метод подведения под знак дифференциала, как ни какой другой, позволяет нам понять сущность неопределенного интеграла.

В заключение предлагаем Вам вычислить **самостоятельно** методом подведения под знак дифференциала нижеследующие интегралы:

26. $\int e^{7x} dx$.

27. $\int \operatorname{ctg}(3-5x) dx$.

28. $\int (3x+7)^5 dx$.

29. $\int \sin \frac{3}{5} x \, dx$.

30. $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$.

31. $\int \frac{dx}{\sin^2(1+3x)}$.

32. $\int \frac{dx}{(x-7)^{95}}$.

33. $\int \frac{x^2 dx}{4+3x^3}$.

34. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$.

35. $\int \frac{\sin x}{\cos^9 x} dx$.

36. $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

37. $\int \frac{(6x+7)dx}{3x^2+7x+4}$.

38. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}}$.

39. $\int \frac{xdx}{16+x^4}$.

40. $\int (2x+1)\cos(x^2+x-1)dx$.

41. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

42. $\int \frac{\arcsin^5 x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

43. $\int \frac{3dx}{(1+4x^2)\operatorname{arctg} 2x}$.

44. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x+2}}{\cos^2 x}dx$.

45. $\int \sqrt{4-e^{-x}}\cdot e^{-x}dx$.

46. $\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}}dx$.

47. $\int \frac{4dx}{x(4+x)}$.

48. $\int \frac{7dx}{(x+4)(3-x)}$.

49. $\int \frac{\sqrt{\sin x}\cdot\cos x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin x}dx$.

50. $\int \frac{\ln xdx}{x\cdot\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

§2.3. Интегрирование методом замены переменной

Рассмотрим неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем замену переменной $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ имеет обратную функцию и является дифференцируемой. В этом случае:

$$dx=\varphi'(t)dt,$$

и тогда мы получаем равенство:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (1.2.1)$$

Формула (1.2.1) является формулой интегрирования ***методом замены переменной***.

Равенство (1.2.1) можно доказать, продифференцировав по отдельности обе его части по переменной x. При дифференцировании правой части используется теорема о производной от обратной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x) \qquad (1.2.2)$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx}=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x) \qquad (1.2.3)$$

Так как правые части (1.2.2) и (1.2.3) равны, то равенство (1.2.1) справедливо.

Наша цель при использовании подстановки получить в правой части интеграл с более простым подынтегральным выражением, который в дальнейшем можно свести к табличному. На самом деле, для вычисления неопределенных интегралов требуется изучение классов функций, для которых применимы подстановки определенного вида.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.16. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+4} = \left| \begin{array}{l} x^2+4=t,\ \ d\left(x^2+4\right)=dt \\ \textit{тогда}\ \ 2xdx=dt,\ \ xdx=\dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln(t) +$

$\displaystyle + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + C.$

Пример 2.17. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\cos x}\cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} 1+\cos x = t,\ \ d(1+\cos x)=dt \\ \textit{тогда}\ \ -\sin x dx = dt,\ \ \sin x dx = -dt \end{array} \right| =$

$\displaystyle = -\int \sqrt[3]{t}dt = -\int t^{\frac{1}{3}}dt = -\frac{t^{\frac{4}{3}}}{4/3} + C = -\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(1+\cos x)^4} + C.$

Пример 2.18. $\displaystyle\int \frac{3^x dx}{\sqrt{4-9^x}} = \left| \begin{array}{l} 3^x = t,\quad d\left(3^x\right)=dt \\ \textit{тогда}\ \ 3^x \ln 3 dx = dt,\quad 3^x dx = \dfrac{dt}{\ln 3} \end{array} \right| =$

$\displaystyle = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{\ln 3}\cdot \arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{\ln 3}\cdot\arcsin\frac{3^x}{2} + C.$

Пример 2.19. $\displaystyle\int \frac{5^{\operatorname{arcctg}4x}}{1+16x^2}dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arcctg}4x = y,\ \ d(\operatorname{arcctg}4x) = dy \\ \textit{тогда}\ \ -\dfrac{4}{1+16x^2}dx = dy,\quad \dfrac{dx}{1+16x^2} = -\dfrac{1}{4}dy \end{array} \right| =$

$\displaystyle = -\frac{1}{4}\int 5^y dy = -\frac{1}{4}\cdot\frac{5^y}{\ln 5} + C = -\frac{5^{\operatorname{arcctg}4x}}{4\ln 5} + C.$

Пример 2.20. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2+x}}dx = \left| \begin{array}{l} 2+x=z,\ \ x=z-2 \\ d(2+x)=dz,\ \ dx=dz \end{array} \right| = \int \frac{z-2+1}{\sqrt{z}}dz = \int \frac{z}{\sqrt{z}}dz +$

$$+\int\frac{-1}{\sqrt{z}}dz=\int z^{\frac{1}{2}}dz-\int z^{-\frac{1}{2}}dz==\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3/2}-\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}-2\sqrt{2+x}+C.$$

Пример 2.21. $\displaystyle\int\frac{x^3\left(1-x^4\right)}{1+x^8}dx=\int\frac{x^3-x^7}{1+x^8}dx=\int\frac{x^3dx}{1+x^8}-\int\frac{x^7dx}{1+x^8}$

Вычислим каждый из этих двух интегралов отдельно:

$$\int\frac{x^3dx}{1+x^8}=\left|\begin{array}{l} x^4=t,\ d\left(x^4\right)=dt \\ 4x^3dx=dt,\ x^3dx=\dfrac{dt}{4}\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4+C_1;$$

$$\int\frac{x^7dx}{1+x^8}=\left|\begin{array}{l} 1+x^8=U,\ d\left(1+x^8\right)=dU \\ 8x^7dx=dU,\ x^7dx=\dfrac{dU}{8}\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int\frac{dU}{U}=\frac{1}{8}\ln|U|+C=\frac{1}{8}\ln\left(1+x^8\right)+C_2.$$

Значит, $\displaystyle\int\frac{x^3\left(1-x^4\right)}{1+x^8}dx=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4+\frac{1}{8}\ln\left(1+x^8\right)+C.$

Для закрепления материала вычислите **самостоятельно** неопределенные интегралы, используя метод замены переменных:

51. $\displaystyle\int\frac{dx}{2-3x}.$

52. $\displaystyle\int x\sqrt{2+x^2}dx.$

53. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{8x-15}}.$

54. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\cos^2(6x^3-1)}.$

55. $\displaystyle\int 7^x(7^x-2)^{12}dx.$

56. $\displaystyle\int x^6e^{3x^7-10}dx.$

57. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x}dx.$

58. $\displaystyle\int\frac{3dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}.$

59. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(\log_3 x+2)}.$

60. $\displaystyle\int\frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^3}.$

61. $\displaystyle\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-2x}+9}.$

62. $\displaystyle\int 5^{-x^4}x^3dx.$

63. $\displaystyle\int\frac{6^x dx}{\sqrt{9-36^x}}.$

64. $\displaystyle\int\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}.$

65. $\displaystyle\int\frac{3^{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

66. $\displaystyle\int e^x\operatorname{tg}e^x dx.$

67. $\int x\sin(2-x^2)dx$.

68. $\int \frac{\arcsin^3 x+3x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

69. $\int \frac{(2x+x^2)dx}{x^2+25}$.

70. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$.

71. $\int \frac{dx}{(3x+1)\left(\ln^2(3x+1)-7\right)}$.

72. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$.

73. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$.

74. $\int \frac{xdx}{2x-7}$.

75. $\int (x+1)\cdot\sqrt[8]{3-x}dx$.

76. $\int x\left(\frac{x}{2}+5\right)^{35}dx$.

77. $\int \frac{x^2}{10-x}dx$.

78. $\int x^3\cdot\sqrt{9-x^2}dx$.

79. $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

80. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

§2.4. Интегрирование по частям

Пусть функции $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны вместе со своими производными. Тогда, используя свойства дифференциала, получаем:

$$d(U\cdot V)=UdV+VdU.$$

Отсюда следует, что

$$UdV=d(U\cdot V)-VdU.$$

Проинтегрировав обе части последнего равенства, имеем:

$$\int UdV=\int d(U\cdot V)-\int VdU \qquad (1.2.4)$$

Так как по свойству 3 неопределенного интеграла выполняется равенство

$$\int d(U\cdot V)=U\cdot V+C,$$

то из равенства (1.2.4) вытекает

$$\int UdV=U\cdot V-\int VdU \qquad (1.2.5)$$

Формулу (1.2.5) называют ***формулой интегрирования по частям***. Схема интегрирования по частям предполагает представление подынтегрального выражения в виде произведения двух сомножителей U и dV. При этом, проинтегрировав dV, получим V, а продифференцировав U, найдем dU. Полученные выражения V и dU подставляются в правую часть формулы (1.2.5).

Особо следует отметить, что хотя формула интегрирования по частям применима к любым непрерывным функциям, но позволяет эффективно вычислить неопределенный интеграл только для специальных классов функций. Опишем некоторые из них.

1. Класс функций, представимых в виде произведения многочлена на синус или косинус, то есть подынтегральная функция имеет вид $P_n(x)\cdot\sin\alpha x$ или $P_n(x)\cdot\cos\alpha x$, где $P_n(x)=a_0\cdot x^n+a_1\cdot x^{n-1}+...+a_{n-1}\cdot x+a_n$, $a_0\neq 0$.

В этом случае при вычислении интеграла рекомендуется в качестве U взять $P_n(x)$, а в качестве dV взять оставшиеся множители подынтегрального выражения, то есть $\sin\alpha xdx$ или $\cos\alpha xdx$. Например, при вычислении

$$\int P_n(x)\cdot\sin\alpha xdx$$

возьмем $$U=P_n(x),\ \ dV=\sin\alpha xdx,$$

тогда

$$dU=U'dx=P_n'(x)dx;\quad V=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x.$$

Следовательно,

$$\int P_n(x)\sin\alpha xdx=P_n(x)\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\right)+\frac{1}{\alpha}\int P_n'(x)\cdot\cos\alpha xdx.$$

В правой части мы пришли к интегралу рассматриваемого типа, но с многочленом $P_n'(x)$, степень которого на единицу меньше степени многочлена $P_n(x)$. Продолжая этот процесс, мы придем к интегралам типа $\int\cos\alpha xdx$ или $\int\sin\alpha xdx$.

Пример 2.22. $$\int x\sin 2xdx=\left|\begin{array}{l}\textit{полагаем}\ \ U=x;\ dV=\sin 2xdx,\\ \textit{тогда}\ \ dU=dx;\ V=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

Пример 2.23. $$\int\left(x^2+3\right)\cdot\cos 3xdx=\left|\begin{array}{l}\textit{полагаем}\ \ U=x^2+3;\quad dV=\cos 3xdx,\\ \textit{тогда}\ \ dU=2xdx;\\ V=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right|=$$

$$=\left(x^2+3\right)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2xdx=\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\int x\sin 3xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{полагаем}\ \ U=x;\quad dV=\sin 3xdx,\\ \textit{тогда}\ \ dU=dx;\quad V=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)\cdot\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+\frac{1}{3}\int\cos 3x dx\right)=\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)\cdot\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$$

При вычислении последнего интеграла формула интегрирования по частям применялась два раза, что закономерно, так как многочлен $P_n(x)=x^2+3$ в первоначальном интеграле имеет вторую степень.

2. Класс функций, представимых в виде произведения многочлена $P_n(x)$ на функцию $e^{\alpha x}$.

В данном случае при вычислении $\int P_n(x)\cdot e^{\alpha x}dx$ полагаем $U=P_n(x)$, а $e^{\alpha x}dx=dV$, далее поступаем аналогично случаю 1, рассмотренному выше.

Пример 2.24. $\int(x+1)\cdot e^{-x}dx=\left|\begin{matrix}\textit{полагаем}\;\; U=x+1; & dV=e^{-x}dx,\\ \textit{тогда}\;\; dU=dx; & V=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{matrix}\right|=$

$=(x+1)\cdot\left(-e^{-x}\right)+\int e^{-x}dx=-(x+1)\cdot e^{-x}-e^{-x}+C.$

Понятно, что аналогично вычисляются интегралы вида $\int P_n(x)b^{\alpha x}dx$, где $b=const$ $(b>0,\;\; b\neq 1)$. Рассмотрим вычисление интеграла данного типа на примере.

Пример 2.25. $\int(2-x)\cdot 3^x dx=\left|\begin{matrix}\textit{полагаем}\;\; U=2-x; & dV=3^x dx,\\ \textit{тогда}\;\; dU=-dx; & V=\int 3^x dx=\dfrac{3^x}{\ln 3}\end{matrix}\right|=$

$$=(2-x)\frac{3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}\cdot(-dx)=(2-x)\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx=(2-x)\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{3^x}{\ln^2 3}+C.$$

3. Классы функций, представимых в виде произведения многочлена на $\ln x$ или обратные тригонометрические функции. То есть подынтегральная функция имеет один из пяти следующих видов: $P_n(x)\cdot\ln x$, $P_n(x)\cdot\arcsin x$, $P_n(x)\cdot\arccos x$, $P_n(x)\cdot\mathrm{arctg}\,x$, $P_n(x)\cdot\mathrm{arcctg}\,x$.

В этом случае всегда полагаем $P_n(x)dx=dV$, а U равно либо $\ln x$, либо $\arcsin x$, либо $\arccos x$, либо $\mathrm{arctg}\,x$, либо $\mathrm{arcctg}\,x$.

Пример 2.26. $\int x^4\ln x dx=\left|\begin{matrix}\textit{полагаем}\;\; U=\ln x; & dV=x^4dx,\\ \textit{тогда}\;\; dU=\dfrac{1}{x}dx; & V=\int x^4dx=\dfrac{x^5}{5}\end{matrix}\right|=\ln x\cdot\frac{x^5}{5}-$

$$-\int\frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{5}\int x^4dx=\ln x\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5}+C=\frac{x^5\cdot\ln x}{5}-\frac{x^5}{25}+C.$$

Пример 2.27. $\int (3-2x)\cdot \operatorname{arcctg} x dx =$

$$\left| \begin{array}{l} \textit{полагаем } U = \operatorname{arcctg} x; \;\; dV = (3-2x)dx, \\ \textit{тогда } dU = -\dfrac{1}{1+x^2}dx; \;\; V = \int (3-2x)dx = 3x - x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \operatorname{arcctg} x \cdot (3x - x^2) + \int (3x - x^2)\cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arcctg} x \cdot (3x - x^2) + 3\int \frac{x}{1+x^2}dx -$$

$$-\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} x \cdot (3x - x^2) + \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \operatorname{arcctg} x \cdot (3x - x^2) + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} x \cdot (3x - x^2) +$$

$$+\frac{3}{2}\ln(x^2+1) - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

4. Интегрирование выражений вида $e^{\alpha x}\cdot \cos \beta x$ и $e^{\alpha x}\cdot \sin \beta x$.

В этом случае совершенно безразлично, что обозначать за U, а что за dV. Формула интегрирования по частям в этом случае всегда применяется дважды. После второго применения формулы в правой части получается выражение, содержащее тот же самый интеграл, что и первоначальный в левой. Это циклическое интегрирование. Рассмотрим, как интегрируются выражения такого вида на примере интеграла от функции $\sin \alpha x \cdot e^{\beta x}$.

Пример 2.28. $\int \sin \alpha x \cdot e^{\beta x} dx = \left| \begin{array}{l} \textit{полагаем } U = \sin \alpha x; \;\; dV = e^{\beta x}dx, \;\; \textit{тогда} \\ dU = \alpha \cdot \cos \alpha x \cdot dx; \;\; V = \int e^{\beta x}dx = \dfrac{1}{\beta}e^{\beta x} \end{array} \right| =$

$$= \sin \alpha x \cdot \frac{1}{\beta}e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\beta x}\cdot \cos \alpha x dx = \left| \begin{array}{l} U = \cos \alpha x \;; \quad dV = e^{\beta x}dx \\ dU = -\alpha \sin \alpha x dx \;; \quad V = \int e^{\beta x}dx = \dfrac{1}{\beta}e^{\beta x} \end{array} \right| =$$

$$= \sin \alpha x \cdot \frac{1}{\beta}e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta}\left(\cos \alpha x \cdot \frac{1}{\beta}e^{\beta x} + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\beta x}\cdot \sin \alpha x dx \right) = \sin \alpha x \cdot \frac{1}{\beta}e^{\beta x} -$$

$$-\frac{\alpha}{\beta^2}\cos \alpha x \cdot e^{\beta x} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\beta x}\cdot \sin \alpha x dx.$$

Таким образом, получили

$$\int \sin \alpha x \cdot e^{\beta x}dx = \frac{1}{\beta}\sin \alpha x \cdot e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta^2}\cos \alpha x \cdot e^{\beta x} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int \sin \alpha x \cdot e^{\beta x}dx.$$

Перенесем интеграл из правой части полученного равенства в левую часть и выразим его:

$$\int \sin\alpha x\cdot e^{\beta x}dx+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int \sin\alpha x\cdot e^{\beta x}dx=\frac{1}{\beta}\sin\alpha x\cdot e^{\beta x}-\frac{\alpha}{\beta^2}\cos\alpha x\cdot e^{\beta x}$$

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int \sin\alpha x\cdot e^{\beta x}dx=\frac{1}{\beta}\sin\alpha x\cdot e^{\beta x}-\frac{\alpha}{\beta^2}\cos\alpha x\cdot e^{\beta x}$$

$$\int \sin\alpha x\cdot e^{\beta x}dx=\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{1}{\beta}\sin\alpha x\cdot e^{\beta x}-\frac{\alpha}{\beta^2}\cos\alpha x\cdot e^{\beta x}\right).$$

Итак,

$$\int \sin\alpha x\cdot e^{\beta x}dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\sin\alpha x\cdot e^{\beta x}-\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\cos\alpha x\cdot e^{\beta x}+C.$$

Замечание. Существуют и некоторые другие функции, которые можно проинтегрировать с помощью формулы (1.2.5), но их трудно объединить в какой-либо класс. Рассмотрим вычисление одного из таких интегралов.

Пример 2.29. $\int e^{2x}\cdot\log_5 e^x dx=\left|\begin{array}{l}\textit{полагаем } U=\log_5 e^x;\ dV=e^{2x}dx,\ \textit{тогда}\\ dU=\dfrac{e^x}{e^x\cdot\ln 5}dx=\dfrac{dx}{\ln 5};\ V=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right|=$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\log_5 e^x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot\frac{dx}{\ln 5}=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\log_5 e^x-\frac{1}{2\ln 5}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\log_5 e^x-$$

$$-\frac{1}{4\ln 5}e^{2x}+C.$$

Нижеследующие интегралы следует вычислить **самостоятельно**, используя формулу интегрирования по частям:

81. $\int x\cos 4x dx$.

82. $\int (x+\sqrt{2})\sin\frac{2x}{3}dx$.

83. $\int (1-x^2)\sin(2x+4)dx$.

84. $\int x\cdot e^{x+10}dx$.

85. $\int x^3\cdot 3^{x^2-2}dx$.

86. $\int \sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)dx$.

87. $\int (3x^2-2x+5)\cdot\ln\sqrt{x}dx$.

88. $\int \log_3^2(5x)dx$.

89. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

90. $\int x\cdot\operatorname{arcctg} x dx$.

91. $\int e^{3x}\sin 2x dx$.

92. $\int \sqrt[4]{x}\cdot\log_5 x dx$.

93. $\int \ln(4-x^2)dx$.

94. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

95. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}dx$.

96. $\int \cos(\ln x)dx$.

97. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$.

98. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

99. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$.

100. $\int \sin 2x\cdot\ln(\cos x+2)dx$.

§2.5. Интегрирование рациональных дробей

2.5.1. *Понятие рациональной дроби. Простейшие дроби и их интегрирование*

Рассмотрим два многочлена $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ степеней m и n соответственно (m и n - натуральные числа). Здесь и в дальнейшем

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,\ \ a_0\neq 0;$$
$$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n,\ \ b_0\neq 0.$$

Выражение вида $R_{m,n}(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ назовем ***рациональной дробью***. При этом, если $n>m$, то дробь называется ***правильной***, в противном случае, если $n\leq m$ - дробь называется ***неправильной***. Если рациональная дробь $R_{m,n}(x)$ является неправильной, то она представима в виде суммы многочлена $P_k(x)$ и правильной дроби $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$, то есть

$$R_{m,n}(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=P_k(x)+\frac{R(x)}{Q_n(x)}. \qquad (1.2.6)$$

Последнее равенство получается с помощью деления многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$. Например, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{x^4+2x+3}{x^2+1}$ - неправильная дробь, разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} \_\,x^4+2x+3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} x^4+x^2\quad\;\; & x^2-1 \\ \cline{1-1} \_\,-x^2+2x+3 & \\ -x^2\quad\;\;-1 & \\ \cline{1-1} 2x+4 & \end{array}$$

Получим частное $P_k(x)=x^2-1$ и остаток $R(x)=2x+4$. Значит,

$$\frac{x^4+2x+3}{x^2+1}=x^2-1+\frac{2x+4}{x^2+1}.$$

При интегрировании правой части выражения (1.2.6) основная трудность заключается в интегрировании правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$, так как интегрирование многочлена $P_k(x)$ не представляет труда.

Среди правильных рациональных дробей выделим четыре вида дробей, которые назовем ***простейшими***.

Дробь вида $\frac{A}{x-a}$ называется *простейшей дробью I вида*;

Дробь $\frac{A}{(x-a)^k}$ - *простейшая дробь II вида* ($k>1$);

Дробь $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ - *простейшая дробь III вида* (x^2+px+q - не имеет действительных корней, то есть $D=p^2-4q<0$);

Дробь $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ - *простейшая дробь IV вида* (x^2+px+q - не имеет действительных корней; $k>1$).

Рассмотрим, как интегрируется каждый вид простейших дробей.

а) Интегрирование дробей I вида.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

б) Интегрирование дробей II вида.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C.$$

в) Интегрирование дробей III вида.

Дроби III вида интегрируются с помощью замены переменной. Чтобы понять, что необходимо обозначать за новую переменную, выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Теперь выражение, полученное «под квадратом», заменим на новую переменную. Итак,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx = \left| \begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t; \;\; dx=dt; \;\; x=t-\frac{p}{2} \\ q-\frac{p^2}{4}=m^2; \quad m=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+m^2}dt = \int \frac{Atdt}{t^2+m^2} + \int \frac{-A\cdot\frac{p}{2}+B}{t^2+m^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{d\left(t^2+m^2\right)}{t^2+m^2} +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{A}{2}\ln\left|t^2+m^2\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

г) Интегрирование дробей IV вида.

Аналогично предыдущему случаю в знаменателе выделим полный квадрат и сделаем замену $x+\frac{p}{2}=t$, обозначим $q-\frac{p^2}{4}=m^2$.

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = A\int \frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$$

Вычислим получившиеся интегралы по отдельности.

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+m^2)}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} + C_1.$$

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2-t^2)dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} -$$

$$-\frac{1}{m^2}\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{m^2}\left(I_{k-1}-I\right).$$

Для вычисления интеграла I применим формулу интегрирования по частям.

$$I = \left| \begin{array}{l} U=t,\ dV=\dfrac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k} \\ dU=dt,\ V=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \left(t^2+m^2\right)^{-k}d\left(t^2+m^2\right) = \dfrac{1}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} = \frac{t}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} -$$

$$-\frac{1}{2(1-k)}\cdot I_{k-1}.$$

Значит, $I_k = \dfrac{1}{m^2}\left(I_{k-1} - \dfrac{t}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} + \dfrac{1}{2(1-k)}I_{k-1}\right)$

или $$I_k = \frac{1}{m^2}\left(\frac{3-2k}{2(1-k)} I_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right).$$

В правой части полученного выражения содержится интеграл того же типа, что и I_k, но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже. Таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1}. Аналогично продолжая вычисления, дойдем до табличного интеграла I_1:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m} + C.$$

Рассмотрим примеры интегрирования простейших дробей:

1) $$\int \frac{2dx}{x+\sqrt{3}} = 2\int \frac{d\left(x+\sqrt{3}\right)}{x+\sqrt{3}} = 2\ln\left|x+\sqrt{3}\right| + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{(x-7)^{13}} = \int \frac{d(x-7)}{(x-7)^{13}} = \int (x-7)^{-13}\, d(x-7) = -\frac{1}{12(x-7)^{12}} + C.$$

3) $$\int \frac{(x+4)dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{x+4}{x^2+2x+1+3}dx = \int \frac{x+4}{(x+1)^2+3}dx = \begin{vmatrix} t = x+1 \\ x = t-1 \\ dt = dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{t-1+4}{t^2+3}dt = \int \frac{tdt}{t^2+3} + 3\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) + \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

4) $$\int \frac{6x}{x^2-4x-5}dx = 6\int \frac{x}{x^2-4x+4-9}dx = 6\int \frac{x}{(x-2)^2-9}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t = x-2; \;\; x = t+2 \\ dt = dx \end{vmatrix} = 6\int \frac{t+2}{t^2-9}dt = 6\int \frac{tdt}{t^2-9} + 12\int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{6}{2}\int \frac{d\left(t^2-9\right)}{t^2-9} -$$

$$-12\int \frac{dt}{3^2-t^2} = 3\ln\left|t^2-9\right| - \frac{12}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right| + C = 3\ln\left|x^2-4x-5\right| - 2\ln\left|\frac{1+x}{5-x}\right| + C.$$

5) $$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+1+4\right)^3} = \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+4\right)^3} = \begin{vmatrix} x+1 = t \\ dx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t^2+4\right)^3} = I_3.$$

Для вычисления I_3 вычислим $I_1,\ I_2\ (m=2)$:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{1}{2^2}\left(I_1\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{t}{-2\left(t^2+4\right)^1}\right)=\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+\frac{t}{8\left(t^2+4\right)}+C_2;$$

$$I_3=\frac{1}{4}\left(I_2\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{t}{-4\left(t^2+4\right)^2}\right)=\frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+\frac{3}{128}\cdot\frac{t}{t^2+4}+\frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2}+C=$$

$$=\frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\frac{3}{128}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+5}+\frac{x+1}{16\left(x^2+2x+5\right)^2}+C.$$

2.5.2. ***Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей***

Сформулируем без доказательства одну из теорем алгебры, которая имеет фундаментальное значение в теории интегрирования рациональных дробей.

<u>Теорема 1.2.</u> *Каждая правильная дробь* $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *представима в виде суммы конечного числа простейших дробей.*

Разложение правильной дроби на простейшие тесно связано с разложением ее знаменателя $Q_n(x)$ на простые множители. Хорошо известно, что многочлен с действительными коэффициентами единственным образом разлагается на множители типа $x-a$ и x^2+px+q, при этом квадратичные множители не имеют действительных корней. Если предположить для простоты, что в многочлене $Q_n(x)$ коэффициент $b_0=1$, то тогда многочлен $Q_n(x)$ представим в виде:

$$Q_n(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot\ldots\cdot(x-b)^{\beta}\cdot\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+lx+s\right)^{\nu},$$

где $\alpha,\ldots,\beta,\mu,\ldots,\nu$ - натуральные числа и $\alpha+\ldots+\beta+2\mu+\ldots+2\nu=n$. В случае такого разложения знаменателя на простые множители правильная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ представима в виде суммы простейших дробей I , II , III , IV видов, а именно:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{B_1}{x-b}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_\mu x+N_\mu}{\left(x^2+px+q\right)^\mu}+\frac{S_1x+F_1}{x^2+lx+s}+\ldots+\frac{S_\nu x+F_\nu}{\left(x^2+lx+s\right)^\nu}.$$

Коэффициенты $A_1,\ldots,A_\alpha,B_1,\ldots,M_1,\ldots,F_\nu$ в правой части последнего равенства являются неизвестными и подлежат нахождению. Для их нахождения приведем правую часть к общему знаменателю. Тогда получим равные дроби, знаменатели которых равны, следовательно, равны и числители. Так как два многочлена равны тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной, то для нахождения неопределенных коэффициентов используют ***метод сравнивания коэффициентов***. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему линейных уравнений, которая решается любым из известных методов, например, методом исключения неизвестных или по правилу Крамера, а также любым другим известным Вам способом.

Используя специфику многочленов или полученной системы уравнений, иногда можно существенно упростить нахождение неизвестных коэффициентов разложения.

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также ***метод отдельных значений переменной***: после приравнивания числителей, переменной x придают конкретные значения столько раз, сколько имеется неопределенных коэффициентов. Обычно берут вместо x значения действительных корней многочлена $Q_n(x)$, поэтому удобно не раскрывать скобки, получившиеся в числителе. Очевидно, что этот метод удобен особенно тогда, когда знаменатель $Q_n(x)$ раскладывается на n различных линейных множителей.

Выделим наиболее часто встречающиеся случаи разложения правильных дробей на простейшие.

Случай 1. Если знаменатель правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ имеет ровно n действительных различных корней $a_1,a_2,\ldots,a_n$, то разложение дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ содержит только простейшие дроби вида I, то есть

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Случай 2. Если корни знаменателя правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ действительные кратные, то есть $Q_n(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_s)^{\alpha_s}$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ - натуральные и $\alpha_1+\ldots+\alpha_s=n$, тогда при разложении $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ каждому из сомножителей $(x-a_t)^{\alpha_t}$ - соответствует ровно α_t слагаемых вида

$$\frac{A_1^{(t)}}{x-a_t}+\frac{A_2^{(t)}}{(x-a_t)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_t}^{(t)}}{(x-a_t)^{\alpha_t}},$$

а вся дробь разлагается на сумму дробей вида I и II, то есть

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(s)}}{(x-a_s)}+\frac{A_2^{(s)}}{(x-a_s)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_s}^{(s)}}{(x-a_s)^{\alpha_s}}$$

Случай 3. Если корни знаменателя правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ являются простыми комплексными числами и кратными действительными числами, то есть если

$$Q_n(x)=\left(x^2+p_1x+q_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_tx+q_t\right)(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{\alpha_s},$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,s$ - натуральные числа и $\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2t=n$, то дробь разлагается на сумму простейших дробей I, II, III видов, то есть

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(s)}}{x-a_s}+\frac{A_2^{(s)}}{(x-a_s)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{A_{\alpha_s}^{(s)}}{(x-a_s)^{\alpha_s}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_tx+N_t}{x^2+p_tx+q_t}.$$

Случай 4. Если корни знаменателя правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ содержат кратные комплексные корни, то разложение на простейшие дроби обязательно содержит дробь вида IV.

Итак, ***схема интегрирования рациональных дробей*:**

1) Если дробь неправильная, надо представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;
2) Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;
3) Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Приведем примеры интегрирования рациональных выражений.

Пример 2.30. Вычислить: $\int\frac{x^2-3x+8}{(x-3)(x+4)(x-2)}dx$.

Решение. При вычислении этого интеграла с помощью разложения подынтегральной функции на простейшие дроби, замечаем, что подынтегральная функция $\dfrac{x^2-3x+8}{(x-3)(x+4)(x-2)}$ является правильной дробью, поэтому выделять целую часть не надо. При этом знаменатель дроби уже разложен на множители, значит, сразу можно выписывать простейшие дроби, соответствующие подынтегральной функции:

$$\frac{x^2-3x+8}{(x-3)(x+4)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x-2}$$

Чтобы определить неизвестные коэффициенты A, B, C, приведем к общему знаменателю дроби из правой части равенства:

$$\frac{x^2-3x+8}{(x-3)(x+4)(x-2)}=\frac{A(x+4)(x-2)+B(x-3)(x-2)+C(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+4)(x-2)}$$

Дроби из левой и правой частей этого равенства имеют одинаковые знаменатели, значит, их числители также должны быть равны, то есть

$$x^2-3x+8=A(x+4)(x-2)+B(x-3)(x-2)+C(x-3)(x+4) \qquad (*)$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом отдельных значений переменной x. Так как в правой части (*) есть множитель $x+4$, то удобно взять $x=-4$, тогда

$$(-4)^2-3\cdot(-4)+8=A\cdot 0+B(-4-3)(-4-2)+C\cdot 0 \;\Rightarrow 36=42\cdot B \;\Rightarrow B=\frac{6}{7}$$

Так как в (*) есть множитель $x-2$, то возьмем $x=2$, тогда

$$2^2-3\cdot 2+8=A\cdot 0+B\cdot 0+C(2-3)(2+4) \;\Rightarrow\; 6=-6\cdot C \;\Rightarrow\; C=-1.$$

Так как в (*) есть множитель $x-3$, то возьмем $x=3$, тогда

$$3^2-3\cdot 3+8=A\cdot(3+4)(3-2)+B\cdot 0+C\cdot 0 \;\Rightarrow\; 8=7A \;\Rightarrow\; A=\frac{8}{7}.$$

Таким образом,

$$\frac{x^2-3x+8}{(x-3)(x+4)(x-2)}=\frac{8/7}{(x-3)}+\frac{6/7}{x+4}+\frac{-1}{x-2}$$

Значит,

$$\int\frac{x^2-3x+8}{(x-3)(x+4)(x-2)}dx=\int\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{8}{7}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{6}{7}\int\frac{dx}{x+4}-\int\frac{dx}{x-2}=\frac{8}{7}\int\frac{d(x-3)}{x-3}+\frac{6}{7}\int\frac{d(x+4)}{x+4}-\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$

$$=\frac{8}{7}\ln|x-3|+\frac{6}{7}\ln|x+4|-\ln|x-2|+C.$$

Пример 2.31. Вычислить: $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x^2-2x-3)}$.

Решение. Подынтегральная функция $\dfrac{1}{(x+1)(x^2-2x-3)}$ является правильной дробью, поэтому выделять целую часть не надо. Разложим знаменатель дроби на простые множители. Корнями квадратного многочлена являются $x_1=-1$ и $x_2=3$, тогда

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-2x-3)}=\frac{1}{(x+1)(x+1)(x-3)}=\frac{1}{(x+1)^2(x-3)}.$$

Теперь можно представить дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}.$$

Приведем к общему знаменателю выражение из правой части:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)}.$$

Получили две дроби, знаменатели которых равны, значит, числители также должны быть равны:

$$1=A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2$$

Найдем числовые значения A, B, C, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x из левой и правой частей равенства, для этого в правой части раскроем скобки и сгруппируем слагаемые.

$$1=Ax^2-2Ax-3A+Bx-3B+Cx^2+2Cx+C$$

$$1=x^2(A+C)+x(-2A+B+2C)-3A-3B+C$$

Теперь можем составить систему:

$$\begin{cases}0=A+C\\0=-2A+B+2C\\1=-3A-3B+C\end{cases}$$

Решим систему методом исключения неизвестных.

$$\begin{cases}A=-C\\-2(-C)+B+2C=0\\-3(-C)-3B+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-C\\B=-4C\\4C-3(-4C)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=1/16\\B=-1/4\\A=-1/16\end{cases}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{-1/16}{x+1}+\frac{-1/4}{(x+1)^2}+\frac{1/16}{x-3}.$$

Значит,

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2-2x-3)}=\int\left(-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x-3}=-\frac{1}{16}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\frac{1}{4}\int(x+1)^{-2}d(x+1)+$$

$$+\frac{1}{16}\int\frac{d(x-3)}{x-3}=-\frac{1}{16}\ln|x+1|+\frac{1}{4\cdot(x+1)}+\frac{1}{16}\ln|x-3|+C\,.$$

Пример 2.32. Вычислить: $\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+4x+6)}$.

Решение. Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей. Так как эта функция является правильной дробью, то целую часть не выделяем. Квадратный многочлен имеет отрицательный дискриминант, поэтому у него действительных корней нет, и знаменатель дроби дальше разложить нельзя. Тогда

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+4x+6)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+6}\,.$$

Далее по стандартной схеме приходим к системе для определения коэффициентов A, B, C:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+4x+6)}=\frac{A(x^2+4x+6)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+6)}$$

$$x^2=Ax^2+4Ax+6A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

$$\begin{cases}1=A+B\\0=4A-B+C\\0=6A-C\end{cases}$$

Найдем значения A, B, C по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0\\4&-1&1\\6&0&-1\end{vmatrix}=1+0+6-0+4+0=11\neq 0;$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=1;\quad \Delta_B=\begin{vmatrix}1&1&0\\4&0&1\\6&0&-1\end{vmatrix}=6+4=10;\quad \Delta_C=\begin{vmatrix}1&1&1\\4&-1&0\\6&0&0\end{vmatrix}=6;$$

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{1}{11};\qquad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=\frac{10}{11};\qquad C=\frac{\Delta_C}{\Delta}=\frac{6}{11}\,.$$

Значит,

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+4x+6)}=\int\left(\frac{1/11}{x-1}+\frac{10/11\cdot x+6/11}{x^2+4x+6}\right)dx=\frac{1}{11}\int\frac{dx}{x-1}+$$

$$+\frac{2}{11}\int\frac{5x+3}{x^2+4x+6}dx=\frac{1}{11}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{2}{11}\int\frac{5x+3}{(x+2)^2+2}dx=\begin{vmatrix}x+2=t;\ \ x=t-2\\dx=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{11}\ln|x-1|+\frac{2}{11}\int\frac{5(t-2)+3}{t^2+2}dt=\frac{1}{11}\ln|x-1|+\frac{2}{11}\int\frac{5tdt}{t^2+2}+\frac{2}{11}\int\frac{-7dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{11}\ln|x-1|+\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+2\right)}{t^2+2}-\frac{14}{11\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{11}\ln|x-1|+\frac{5}{11}\ln\left|t^2+2\right|-$$

$$-\frac{14}{11\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{11}\ln|x-1|+\frac{5}{11}\ln\left(x^2+4x+6\right)-\frac{14}{11\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример 2.33. Вычислить: $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3-2}{x^3+2x}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является неправильной дробью, поэтому выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4-3x^3-2 & x^3+2x \\ \underline{x^4+2x^2\qquad} & \overline{x-3} \\ -\,-3x^3-2x^2-2 & \\ \underline{-3x^3-6x\qquad} & \\ -2x^2+6x-2 & \end{array}$$

Значит, $\displaystyle\frac{x^4-3x^3-2}{x^3+2x}=x-3+\frac{-2x^2+6x-2}{x^3+2x}=x-3-2\cdot\frac{x^2-3x+1}{x^3+2x}$.

Новую дробь, которая теперь является правильной, можем разложить на простейшие дроби:

$$\frac{x^2-3x+1}{x^3+2x}=\frac{x^2-3x+1}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2};$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{A\left(x^2+2\right)+(Bx+C)\cdot x}{x\left(x^2+2\right)};$$

$$x^2-3x+1=Ax^2+2A+Bx^2+Cx$$

$$\begin{cases}1=A+B\\-3=C\\1=2A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-3\\A=1/2\\B=1/2\end{cases}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^4-3x^3-2}{x^3+2x}dx=\int\left(x-3-2\left(\frac{1/2}{x}+\frac{1/2\cdot x-3}{x^2+2}\right)\right)dx=\int xdx-3\int dx-\int\frac{dx}{x}-$$

$$-2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{x-6}{x^2+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x|-\int\frac{xdx}{x^2+2}+6\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x|-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2\right)}{x^2+2}+\frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+$$

$+\dfrac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$.

Пример 2.34. Вычислить: $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{3x^2-5x-2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является неправильной дробью, так как степень числителя равна степени знаменателя, поэтому, выписав подынтегральную дробь, выделим целую часть, у полученной правильной дроби разложим знаменатель на множители, затем представим ее в виде простейших дробей.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2-3x+1 & 3x^2-5x-2 \\ \cline{2-2} x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3} & \quad 1/3 \\ \cline{1-1} -\frac{4}{3}x+\frac{5}{3} & \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x^2-3x+1}{3x^2-5x-2}=\frac{1}{3}+\frac{-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5-4x}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5-4x}{(3x+1)(x-2)};$$

$$\frac{5-4x}{(3x+1)(x-2)}=\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{x-2}$$

$$\frac{5-4x}{(3x+1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(3x+1)}{(3x+1)(x-2)}$$

$$5-4x=Ax-2A+3Bx+B$$

$$\begin{cases}A+3B=-4\\-2A+B=5\end{cases}.$$

Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим со вторым уравнением системы, тогда

$$6B+B=-8+5 \quad\Rightarrow\quad 7B=-3 \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{3}{7};$$

подставим B в первое уравнение системы: $A-\dfrac{9}{7}=-4 \quad\Rightarrow\quad A=-\dfrac{19}{7}$.

Таким образом,

$$\int\frac{x^2-3x+1}{3x^2-5x-2}dx=\int\frac{1}{3}dx+\frac{1}{3}\int\left(\frac{-19/7}{3x+1}+\frac{-3/7}{x-2}\right)dx=\frac{1}{3}dx-\frac{19}{21}\int\frac{dx}{3x+1}-$$

$$-\frac{1}{7}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{3}x-\frac{19}{21}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+1)}{3x+1}-\frac{1}{7}\int\frac{d(x-2)}{x-2}=\frac{1}{3}x-\frac{19}{63}\ln|3x+1|-$$

$-\frac{1}{7}\ln|x-2|+C$.

Замечание. Таким образом, *интеграл от рациональной дроби всегда существует.*

Для закрепления материала вычислите следующие интегралы **самостоятельно**:

101. $\int \frac{(x-1)dx}{(3x+2)(x-2)}$.

102. $\int \frac{xdx}{x^2-4x+3}$.

103. $\int \frac{3x^2+x+4}{x^2+5x+6}dx$.

104. $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$.

105. $\int \frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x+1)}dx$.

106. $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^3-4x}$.

107. $\int \frac{x^3+x-5}{x^2-9}dx$.

108. $\int \frac{(2+x)dx}{x^3-27}$.

109. $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x-2)(x^2-x+2)}$.

110. $\int \frac{x^3-5}{x^3-x^2-6x}dx$.

111. $\int \frac{(x^2-3x)dx}{(x+4)(x^2-3x+2)}$.

112. $\int \frac{(4x+1)dx}{(x+3)(x^2+4x+3)}$.

113. $\int \frac{2xdx}{(4x-1)(x^2+1)}$.

114. $\int \frac{3-x^2+x}{(x^2+2)(x^2+3)}dx$.

115. $\int \frac{dx}{x^4-16}$.

116. $\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$.

§2.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

2.6.1. ***Вычисление неопределенных интегралов типа*** $\int R(\sin x;\cos x)dx$**,** где $R(\sin x;\cos x)$ - рациональная функция от $\sin x$, $\cos x$. Напомним, что функция называется рациональной, если она включает рациональные действия: сложение, вычитание, умножение и деление.

1) Универсальная тригонометрическая подстановка.

Универсальной тригонометрической подстановкой является подстановка

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \qquad (1.2.7)$$

На основании тригонометрических тождеств легко видеть, что

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2-1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Таким образом, если $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, то

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Кроме того, из (1.2.7) следует, что $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, отсюда

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Учитывая все выше сказанное, получаем, что при подстановке (1.2.7) выполняется равенство:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} \qquad (1.2.8)$$

Выражение, стоящее справа в (1.2.8), является рациональной функцией переменной t и, следовательно, этот интеграл всегда можно найти, используя теорию предыдущего параграфа.

Замечание. Подстановка $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = t$, также является универсальной тригонометрической подстановкой.

В зависимости от конкретного вида подынтегральной функции кроме подстановки (1.2.7) используются и другие подстановки. Рассмотрим некоторые из них.

2) Подстановка $t = \operatorname{tg} x$. (1.2.9)

В том случае, когда подынтегральная функция не меняется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, то есть $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$ наиболее удобной является подстановка $t = \operatorname{tg} x$. В частности, эту подстановку используют, если подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Из тригонометрии известно, что

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}; \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Тогда в случае подстановки (1.2.9) имеем

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}.$$

При этом $x = \operatorname{arctg} t$, значит,

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

3) Подстановка $t = \sin x$.

Если подынтегральная функция меняет лишь знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, то есть $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, тогда применима подстановка $t = \sin x$. При этом

$$x = \arcsin t; \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt; \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}.$$

4) Подстановка $t = \cos x$.

Если подынтегральная функция меняет лишь знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, то есть $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, тогда применима подстановка $t = \cos x$. При этом

$$x = \arccos t; \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt; \quad \sin x = \sqrt{1-t^2}.$$

Рассмотрим некоторые примеры использования данных подстановок при вычислении интегралов.

Пример 2.35. $$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t\left(2+2t^2+1-t^2-4t\right)}{\left(1+t^2\right)^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt\cdot\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)\cdot 2t\left(t^2-4t+3\right)}=\int\frac{\left(1+t^2\right)dt}{t\left(t^2-4t+3\right)}=I\,.$$

Для вычисления интеграла разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\left|\begin{array}{l}t^2-4t+3=0\\ t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=3;1\end{array}\right|=\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{t-1}$$

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}=\frac{A(t-3)(t-1)+B\cdot t(t-1)+C\cdot t(t-3)}{t(t-3)(t-1)}$$

$$1+t^2=A(t-3)(t-1)+B\cdot t(t-1)+C\cdot t(t-3)$$

Так как в правой части имеем только линейные множители, то найти коэффициенты A, B, C удобно методом конкретных значений переменной, взяв значение t такие, чтобы часть множителей обращалась в нуль:

$$t=3\Rightarrow\quad 1+9=0+B\cdot 6+0\Rightarrow\quad B=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};$$

$$t=1\Rightarrow\quad 1+1=0+0+C\cdot(-2)\Rightarrow\quad C=\frac{2}{-2}=-1;$$

$$t=0\Rightarrow\quad 1=A\cdot 3+0+0\Rightarrow\quad A=\frac{1}{3}.$$

Значит, $\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1/3}{t}+\frac{5/3}{t-3}+\frac{-1}{t-1}.$

Продолжим вычисление интеграла:

$$I=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t}dt+\frac{5}{3}\int\frac{1}{t-3}dt-\int\frac{1}{t-1}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\int\frac{d(t-3)}{t-3}-\int\frac{d(t-1)}{t-1}=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

Пример 2.36. $\int\frac{dx}{2-\cos^2 x}$

Так как подынтегральная функция зависит только от $\cos^2 x$, то удобно вычислить этот интеграл с помощью подстановки $t=\operatorname{tg}x$.

$$\int \frac{dx}{2-\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x; \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{2-\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot \dfrac{2+2t^2-1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}\cdot t\right)}{1+\left(\sqrt{2}\cdot t\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

Пример 2.37. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\left(\cos^2 x - 2\right)}$

Так как при изменении знака $\sin x$ у подынтегральной функции изменяется только знак, то есть $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, значит, вычислять интеграл будем с помощью подстановки $t = \cos x$.

$$\int \frac{dx}{\sin x\left(\cos^2 x - 2\right)} = \left| \begin{matrix} t = \cos x; \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \\ x = \arccos t; \quad dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 \cdot \left(t^2-2\right)} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(t^2-2\right)} = \left|1 = 2-1 = 2-1+t^2-t^2\right| = -\int \frac{\left(2-t^2\right)+\left(t^2-1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(t^2-2\right)} dt =$$

$$= \int \frac{\left(t^2-2\right)dt}{\left(1-t^2\right)\left(t^2-2\right)} + \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{\left(1-t^2\right)\left(t^2-2\right)} = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{2-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}\right| + C.$$

Пример 2.38. $\displaystyle\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$

Так как при изменении знака $\cos x$ у подынтегральной функции меняется только знак, то есть $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, значит, можно вычислить интеграл с помощью подстановки $t = \sin x$.

$$\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x; \quad dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{1+1-t^2}{t^2+t^4} dt = \int \frac{2-t^2}{t^2+t^4} dt = I$$

Вычислим интеграл с помощью разложения подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{2-t^2}{t^2+t^4} = \frac{2-t^2}{t^2\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

$$\frac{2-t^2}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{At\left(1+t^2\right)+B\left(1+t^2\right)+(Ct+D)\cdot t^2}{t^2\left(1+t^2\right)}$$

$$2-t^2=At\left(1+t^2\right)+B\left(1+t^2\right)+(Ct+D)\cdot t^2$$

$$2-t^2=At+At^3+B+Bt^2+Ct^3+Dt^2$$

$$2-t^2=t^3(A+C)+t^2(B+D)+At+B$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t из левой и правой частей равенства, получаем систему для нахождения значений A, B, C, D:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=-1 \\ A=0 \\ B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=-A \\ D=-1-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=-3 \end{cases}.$$

Значит, $\dfrac{2-t^2}{t^2+t^4}=\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{-3}{1+t^2}$.

Тогда

$$I=\int\left(\frac{2}{t^2}-\frac{3}{1+t^2}\right)dt=2\int t^{-2}dt-3\int\frac{dt}{1+t^2}=2\cdot\frac{t^{-1}}{-1}-3\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-\frac{2}{\sin x}-3\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$$

Пример 2.39. $\displaystyle\int\frac{3\sin^2 2x-\sin 2x+4\cos^5 2x+\sin^2 4x}{\cos^2 2x}dx=$

$$=\int\frac{3\sin^2 2x}{\cos^2 2x}dx-\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}dx+\int\frac{4\cos^5 2x}{\cos^2 2x}dx+\int\frac{\sin^2 4x}{\cos^2 2x}dx=I_1-I_2+I_3+I_4$$

$$I_1=3\int\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}dx=3\int\operatorname{tg}^2 2x\,dx=\left|\begin{matrix} R(\operatorname{tg}2x) \quad \Rightarrow \quad t=\operatorname{tg}2x \\ x=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}t; \quad dx=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}dt \end{matrix}\right|=$$

$$=3\int t^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{3}{2}\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=\frac{3}{2}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=\frac{3}{2}\int\frac{t^2+1}{1+t^2}dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\int dt-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}t+C_1=\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}t+C_1=\frac{3}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2x)+C_1=$$

$$=\frac{3}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{3}{2}\cdot 2x+C_1=\frac{3}{2}\operatorname{tg}2x-3x+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}dx=\left|\begin{matrix} R(-\sin 2x;\cos 2x)=-R(\sin 2x;\cos 2x) \\ U=\cos 2x; \quad dU=-2\sin 2x\,dx; \quad \sin 2x\,dx=\dfrac{dU}{-2} \end{matrix}\right|=\int\frac{1}{U^2}\cdot\frac{dU}{-2}=$$

$$= -\frac{1}{2}\int U^{-2}dU = -\frac{1}{2}\cdot\frac{U^{-1}}{-1} + C_2 = \frac{1}{2\cos 2x} + C_2\ ;$$

$$I_3 = 4\int \frac{\cos^5 2x}{\cos^2 2x}dx = 4\int \cos^3 2x dx = \left| \begin{array}{l} R(\sin 2x; -\cos 2x) = -R(\sin 2x; \cos 2x) \\ V = \sin 2x; \\ dV = 2\cos 2x dx;\quad \cos 2x dx = \dfrac{dV}{2} \\ \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - V^2 \end{array} \right| =$$

$$= 4\int \cos^2 2x \cdot \cos 2x dx = 4\int \left(1 - V^2\right)\cdot \frac{dV}{2} = 2\int dV - 2\int V^2 dV = 2V - 2\cdot\frac{V^3}{3} +$$

$$+ C_3 = 2\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 2x + C_3;$$

$$I_4 = \int \frac{\sin^2 4x}{\cos^2 2x}dx = \int \frac{(2\sin 2x\cdot\cos 2x)^2}{\cos^2 2x}dx = 4\int \sin^2 2x dx = 4\int \frac{1 - \cos 4x}{2}dx =$$

$$= 2\int dx - 2\int \cos 4x dx = 2x - \frac{2}{4}\int \cos 4x d(4x) = 2x - \frac{1}{2}\sin 4x + C_4\ ;$$

$$I = I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = \frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x - 3x + C_1 - \frac{1}{2\cos 2x} - C_2 + 2\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 2x +$$

$$+ C_3 + 2x - \frac{1}{2}\sin 4x + C_4 = \frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x - x - \frac{1}{2\cos 2x} + 2\sin 2x - \frac{2}{3}\sin^3 2x -$$

$$-\frac{1}{2}\sin 4x + C.$$

Для закрепления данных методов вычислите **самостоятельно** следующие неопределенные интегралы:

117. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

118. $\int \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\cos^2 x}dx$.

119. $\int \frac{\sin 2x}{(1-\cos 2x)^3}dx$.

120. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}dx$.

121. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.

122. $\int \frac{\cos(x-1)}{2\sin(x-1)+5}dx$.

123. $\int \frac{\cos^3 4x}{\sin^2 4x}dx$.

124. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

125. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.

126. $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$.

127. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

128. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(3\operatorname{ctg} x+1)^4}$.

129. $\int \frac{\cos 5x}{3+\sin^2 5x}dx$.

130. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

131. $\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}+5}dx$.

132. $\int \sin^3 2x(1+\cos^2 2x)dx$.

133. $\int \frac{\sin x}{\sin x+3\cos x}dx$.

134. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$.

135. $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x}$.

136. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin^3 4x}dx$.

2.6.2. *Интегрирование выражений вида* $\sin^m \alpha x\cdot\cos^n \beta x$ *(m, n – целые числа)*

При вычислении интегралов вида

$$\int \sin^m \alpha x\cdot\cos^n \beta x dx \qquad (1.2.10)$$

можно рассмотреть только некоторые частные случаи, в которых данный интеграл вычисляется.

1) Пусть аргументы у синуса и косинуса одинаковы $(\alpha=\beta)$, при этом m и n – целые неотрицательные числа и, по крайней мере, одно из них нечетное.

Если $m=2p+1$, тогда:

$$\sin^{2p+1}\alpha x dx=\sin^{2p}\alpha x\cdot\sin\alpha x dx=-\frac{1}{\alpha}\cdot\sin^{2p}\alpha x d(\cos\alpha x),$$

поэтому, если m - нечетное число, то интеграл $\int\sin^m \alpha x\cdot\cos^n \alpha x dx$ удобно вычислить с помощью подстановки $t=\cos\alpha x$.

При этом используется тождество $\sin^2\alpha x=1-\cos^2\alpha x$ для преобразования подынтегрального выражения. Таким образом, замена выполняется так:

$$\int\sin^{2p+1}\alpha x\cdot\cos^n \alpha x dx=-\frac{1}{\alpha}\int\sin^{2p}\alpha x\cdot\cos^n\alpha x d(\cos\alpha x)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\int\left(\sin^2\alpha x\right)^p\cdot\cos^n\alpha x d(\cos\alpha x)=-\frac{1}{\alpha}\int\left(1-t^2\right)^p\cdot t^n dt.$$

Далее расписывается $\left(1-t^2\right)^p$ по формулам сокращенного умножения или с помощью бинома Ньютона. После раскрытия скобок получается несколько табличных интегралов.

Аналогично, если $n = 2p+1$, тогда

$$\cos^{2p+1}\alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\cos^{2p}\alpha x d(\sin\alpha x).$$

Поэтому, если n - нечетное число, то интеграл $\int \sin^m \alpha x \cdot \cos^n \alpha x dx$ можно вычислить с помощью подстановки $t = \sin\alpha x$.

При этом $\cos^2\alpha x = 1 - \sin^2\alpha x$.

Тогда замена выполняется так:

$$\int \sin^m \alpha x \cdot \cos^n \alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\int \sin^m \alpha x \cdot \left(\cos^2\alpha x\right)^p d(\sin\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\int t^m \cdot \left(1-t^2\right)^p dt.$$

После преобразования подынтегрального выражения получается несколько табличных интегралов.

2) Если m и n - четные неотрицательные числа, тогда при вычислении интеграла (1.2.10) удобно преобразовывать подынтегральное выражение с помощью формул «понижения степени» и синуса двойного угла:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

2.6.3. ***Вычисление интегралов от произведения тригонометрических функций:***

$$\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx; \quad \int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx; \quad \int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx.$$

При вычислении интегралов такого вида удобно заменить произведение функций на сумму, используя равенства:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right]$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right]$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right]$$

2.6.4. Во всех других случаях рекомендуется использовать различные тригонометрические формулы, позволяющие упростить подынтегральное выражение.

Приведем некоторые примеры вычисления таких интегралов.

Пример 2.40. $\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x \text{ в нечетной степени} \Rightarrow \\ \sin x = t; \quad \cos x dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^6 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - t^2\right) t^6 dt = \int \left(t^6 - t^8\right) dt = \int t^6 dt - \int t^8 dt =$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

Пример 2.41. $\int \sin^3 4x dx = \left| \begin{array}{l} \sin 4x \text{ в нечетной степени} \Rightarrow \cos 4x = t \\ -4 \sin 4x dx = dt; \ \sin 4x dx = -\frac{1}{4} dt \\ \sin^2 4x = 1 - \cos^2 4x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$

$$= \int \sin^2 4x \cdot \sin 4x dx = = -\frac{1}{4} \int \left(1 - t^2\right) dt = -\frac{1}{4} \int dt + \frac{1}{4} \int t^2 dt = -\frac{1}{4} t + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{\cos^3 4x}{12} + C.$$

Пример 2.42. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x \text{ и } \sin x \\ \text{в четных степенях} \end{array} \right| = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Пример 2.43. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x dx = \left| \begin{array}{c} \cos 3x \text{ и } \sin 3x \\ \text{в четных степенях} \end{array} \right| =$

$$= \int (\sin 3x \cdot \cos 3x)^2 \cdot \cos^2 3x dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 6x\right)^2 \cdot \cos^2 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 6x \cdot \frac{1 + \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{8} \left(\int \sin^2 6x dx + \int \sin^2 6x \cdot \cos 6x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 12x}{2} dx + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \int \sin^2 6x d(\sin 6x) = \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 12x dx +$$

$$+ \frac{1}{48} \cdot \frac{\sin^3 6x}{3} = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16 \cdot 12} \sin 12x + \frac{1}{144} \sin^3 6x + C.$$

Пример 2.44. $\int \sin 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 7x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x dx +$

$$+\frac{1}{2}\int \sin 7x dx = \frac{1}{6}\int \sin 3x d(3x) + \frac{1}{14}\int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C.$$

Пример 2.45. $\int (\sin 10x \cdot \sin 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x) dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{2}(\cos 7x - \cos 13x) - \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x)\right)dx = \int\left(\frac{1}{2}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos 13x -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 7x\right)dx = \int \cos 7x dx - \frac{1}{2}\int \cos 13x dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos 7x d(7x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{13}\int \cos 13x d(13x) - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{7}\sin 7x - \frac{1}{26}\sin 13x -$$

$$-\frac{1}{2}\sin x + C.$$

Пример 2.46. $\int \frac{\cos^4 3x}{\sin^2 3x} dx = \left|\cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x\right| = \int \frac{(1-\sin^2 3x)^2}{\sin^2 3x} dx =$

$$= \int \frac{1 - 2\sin^2 3x + \sin^4 3x}{\sin^2 3x} dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 3x} - \frac{2\sin^2 3x}{\sin^2 3x} + \frac{\sin^4 3x}{\sin^2 3x}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 3x} - 2\int dx + \int \sin^2 3x dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} - 2x + \int \frac{1-\cos 6x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{3}(-\operatorname{ctg} 3x) - 2x + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = -\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} - 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\int \cos 6x d(6x) =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

Для закрепления данных методов вычислите **самостоятельно** следующие неопределенные интегралы:

137. $\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$.

138. $\int \sin^2 5x \, dx$.

139. $\int \sin x \cdot \cos 5x dx$.

140. $\int \cos^3 \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{3} dx$

141. $\int \cos^3 2x \cdot \sin^3 2x \, dx$.

142. $\int \cos^4 x \, dx$.

143. $\int \cos^3 x \, dx$.

144. $\int \sin^5 6x \, dx$.

145. $\int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx$.

146. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx$.

147. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx$.

148. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$.

149. $\int \dfrac{2\sin 3x - \cos^3 3x \cdot \sin 3x}{\cos^2 3x} dx$.

150. $\int \cos^5 x \cdot \sin^3 x \, dx$.

151. $\int \cos^6 x \cdot \sin^2 x dx$.

152. $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$.

153. $\int \cos^2 x \cdot \cos^2 2x \, dx$.

154. $\int \cos^2 3x \cdot \sin 6x \, dx$.

155. $\int \cos^6 \dfrac{x}{2} dx$.

156. $\int \sin^4 \dfrac{x}{4} \cdot \cos^4 \dfrac{x}{4} dx$.

§2.7. Интегрирование выражений, содержащих радикалы

В материале, изложенном выше, изложены методы интегрирования рациональных выражений. В данном параграфе рассмотрим методы интегрирования иррациональных выражений. Одним из основных приемов интегрирования тех или других выражений, содержащих радикалы, является нахождение подстановок $x = \varphi(t)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному выражению от переменной t. Такой прием называют ***методом рационализации*** подынтегрального выражения.

2.7.1. ***Дробно-линейные подстановки***

1) Рассмотрим в качестве примера интеграл вида:

$$\int R\left(x; \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \right) dx, \tag{1.2.11}$$

где $R\left(x; \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \right)$, как обычно, означает рациональную функцию двух аргументов, m – натуральное число, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - постоянные действительные числа.

Положим

$$t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} .$$

Выразим переменную x:

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad \Rightarrow \quad (\gamma x + \delta) t^m = \alpha x + \beta \quad \Rightarrow$$

$$\gamma t^m x + \delta t^m = \alpha x + \beta \quad \Rightarrow \quad x(\gamma t^m - \alpha) = \beta - \delta t^m \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\beta - \delta t^m}{\gamma t^m - \alpha} = \varphi(t).$$

Таким образом, интеграл (1.2.11) преобразуется в интеграл вида

$$\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt$$

и этот интеграл уже можно вычислить, так как он является интегралом от рационального выражения.

2) Частным случаем интеграла (1.2.11) является интеграл вида

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{x}\right)dx. \tag{1.2.12}$$

В этом случае

$$\sqrt[m]{x}=t,\;\; t^m=x,\;\; dx=mt^{m-1}dt$$

и, следовательно,

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{x}\right)dx=\int R\left(t^m,t\right)mt^{m-1}dt.$$

То есть интеграл вида (1.2.12) сводится к интегралу от рационального выражения.

3) К интегралу вида (1.2.11) сводятся и более общие интегралы вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r_1}{q_1}},\ldots,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r_k}{q_k}}\right)dx, \tag{1.2.13}$$

где $k, r_1,\ldots,r_k, q_1,\ldots,q_k$ - натуральные числа.

Такой интеграл сводится к интегралу от рационального выражения с помощью подстановки

$$t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},$$

где m - общий знаменатель дробей $\frac{r_1}{q_1};\ldots;\frac{r_k}{q_k}$. При этом интеграл получится проще, если m - наименьший общий знаменатель этих дробей. Если $t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, то, как и в случае выше,

$$x=\frac{\beta-\delta t^m}{\gamma t^m-\alpha}$$

и

$$dx=\frac{-\delta mt^{m-1}\left(\gamma t^m-\alpha\right)-\left(\beta-\delta t^m\right)\gamma mt^{m-1}}{\left(\gamma t^m-\alpha\right)^2}dt,$$

то есть x и dx являются рациональными функциями t.

Если m - общий знаменатель дробей $\frac{r_1}{q_1};\ldots;\frac{r_k}{q_k}$,

то $$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{m\cdot\frac{r_1}{q_1}}=t^{m_1},\ldots,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{m\cdot\frac{r_k}{q_k}}=t^{m_k}\ -$$
также рациональные функции переменной t.

Значит,

$$\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r_1}{q_1}};\ldots;\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r_k}{q_k}}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{\beta-\delta t^m}{\gamma t^m-\alpha};t^{m_1};\ldots;t^{m_k}\right)\cdot\frac{-\delta mt^{m-1}\left(\gamma t^m-\alpha\right)-\left(\beta-\delta t^m\right)\gamma mt^{m-1}}{\left(\gamma t^m-\alpha\right)^2}dt.$$

Таким образом, интеграл вида (1.2.13) также сводится к интегралу от рационального выражения, для вычисления которого применимы вышеизложенные ранее в этой главе методы.

Приведем некоторые примеры.

Пример 2.47 $$\int\frac{\sqrt{x+2}+2}{x+2-\sqrt{x+2}}dx=\left|\begin{array}{l}(x+2)^{\frac{1}{2}},\ (x+2)^1\Rightarrow m=2\\ x+2=t^2;\ t=\sqrt{x+2};\ dx=2tdt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{t+2}{t^2-t}\cdot 2tdt=2\int\frac{t+2}{t-1}dt=2\int\frac{t-1+3}{t-1}dt=2\int\frac{t-1}{t-1}dt+2\int\frac{3}{t-1}dt=2\int dt+$$
$$+6\int\frac{d(t-1)}{t-1}=2t+6\ln|t-1|+C=2\sqrt{x+2}+6\ln\left|\sqrt{x+2}-1\right|+C.$$

Пример 2.48 $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$$

Чтобы понять, какую надо сделать замену, необходимо выражение под корнем привести к виду $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. Для этого преобразуем подкоренное выражение, умножив и разделив внутри корня на $(x+1)$:

$$\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(x-1)(x+1)}{x+1}}=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^3(x-1)}{x+1}}=(x+1)\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}=I.$$

Так как подынтегральная функция содержит иррациональность $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}$, то для вычисления интеграла сделаем замену $\dfrac{x+1}{x-1}=t^3$.

При этом $x+1=t^3(x-1)\ \Rightarrow\ x(1-t^3)=-t^3-1\ \Rightarrow\ x=\dfrac{t^3+1}{t^3-1}$;

$$x+1=\frac{t^3+1}{t^3-1}+1=\frac{t^3+1+t^3-1}{t^3-1}=\frac{2t^3}{t^3-1}; \qquad \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t;$$

$$dx=\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)'dt=\frac{3t^2(t^3-1)-(t^3+1)\cdot 3t^2}{(t^3-1)^2}dt=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

Продолжим вычисление интеграла:

$$I=\int t\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt\cdot\frac{1}{\frac{2t^3}{t^3-1}}=-3\int\frac{dt}{t^3-1}=-3\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}=$$

$$=-3\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} 1=A(t^2+t+1)+(Bt+C)(t-1)\ \Rightarrow\ 1=(A+B)t^2+(A-B+C)t+A-C \\ \begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A+A+A-1=0 \\ C=A-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=-2/3 \end{cases} \end{array}\right|=$$

$$=-3\int\frac{1/3}{t-1}dt-3\int\frac{-1/3\cdot t-2/3}{t^2+t+1}dt=-\int\frac{d(t-1)}{t-1}+\int\frac{t+2}{(t+1/2)^2+3/4}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=t+\frac{1}{2};\ du=dt \\ t=u-\frac{1}{2} \end{array}\right|=-\ln|t-1|+\int\frac{udu}{u^2+3/4}+\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2+3/4}=-\ln|t-1|+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+3/4)}{u^2+3/4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3/4}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3/4}}=-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{(t+1/2)\cdot 2}{\sqrt{3}}+C=-\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Пример 2.49 $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx = \left| \begin{array}{l} x^1,\ x^{\frac{2}{3}},\ x^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow\ m=6 \\ x=t^6;\ t=\sqrt[6]{x};\ dx=6t^5dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{t^6+\left(t^6\right)^{\frac{2}{3}}+t}{t^6\left(1+\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}\right)}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}\cdot t^5dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt = 6\int \frac{t^5+t^3}{1+t^2}dt +$$

$$+6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^3\left(t^2+1\right)}{1+t^2}dt + 6\,\mathrm{arctg}\,t = 6\cdot\frac{t^4}{4}+6\,\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{x}\right)^4 +$$

$$+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Для закрепления изложенных методов предлагаем Вам вычислить следующие интегралы **самостоятельно**:

157. $\int \frac{\sqrt[5]{x}-1}{x+\sqrt[10]{x^9}}\,dx.$

158. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}\left(\sqrt[3]{1-2x}-1\right)}.$

159. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}\right)}\,dx.$

160. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}}.$

161. $\int \frac{2\sqrt[5]{x}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}\,dx.$

162. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,dx.$

163. $\int \sqrt[3]{\frac{1+2x}{(1-2x)^4}}\,dx.$

164. $\int \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,dx.$

165. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x-2)}}.$

166. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2(x+2)}}.$

2.7.2. *Подстановки Эйлера*

Интегралы типа

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (1.2.14)$$

рационализируются с помощью подстановок Эйлера:

1) Если $a>0$, то $t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}\cdot x$; (1.2.15)

2) Если $c>0$, то $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{c}}{x}$; (1.2.16)

3) Если трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2, то

$$t=\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}}. \qquad (1.2.17)$$

Убедимся, что подстановки Эйлера действительно приводят подынтегральную функцию интеграла (1.2.14) к рациональному виду.

Рассмотрим подстановку (1.2.15), которую перепишем в виде

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\cdot x.$$

Выразим x, для чего возведем обе части равенства в квадрат (заметим, что по смыслу равенства $t\pm\sqrt{a}\cdot x\ge 0$):

$$ax^2+bx+c=\left(t\pm\sqrt{a}\cdot x\right)^2$$
$$ax^2+bx+c=t^2\pm 2\sqrt{a}\cdot tx+ax^2.$$

Тогда

$$x\left(b\pm 2\sqrt{a}\cdot t\right)=t^2 \quad\Rightarrow$$
$$x=\frac{t^2}{b\pm 2\sqrt{a}\cdot t}.$$

При этом

$$dx=\frac{2bt\pm 2\sqrt{a}\cdot t^2}{\left(b\pm 2\sqrt{a}\cdot t\right)^2}dt.$$

Таким образом, при подстановке (1.2.15) интеграл (1.2.14) переписывается в виде:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{t^2}{b\pm 2\sqrt{a}\cdot t};t\pm\sqrt{a}\cdot x\right)\cdot\frac{2bt\pm 2\sqrt{a}\cdot t^2}{\left(b\pm 2\sqrt{a}\cdot t\right)^2}dt,$$

то есть подынтегральное выражение приводится к рациональному виду.

Рассмотрим подстановку (1.2.16), которую перепишем в виде

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}.$$

По смыслу этого равенства $tx\pm\sqrt{c}\ge 0$. Возведем обе части равенства в квадрат и выразим x:

$$ax^2+bx+c=\left(tx\pm\sqrt{c}\right)^2 \quad\Rightarrow$$
$$ax^2+bx+c=t^2x^2\pm 2\sqrt{c}\cdot tx+c \quad\Rightarrow$$
$$ax^2+bx=t^2x^2\pm 2\sqrt{c}\cdot tx \quad\Rightarrow$$
$$ax+b=t^2x\pm 2\sqrt{c}\cdot t$$

То есть

$$x=\frac{\pm 2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2}.$$

При этом

$$dx = \frac{\pm 2\sqrt{c}\cdot t^2 - 2bt \pm 2\sqrt{c}\cdot a}{\left(a - t^2\right)^2} dt.$$

Значит, при подстановке (1.2.16) интеграл (1.2.14) переписывается в виде:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{\pm 2\sqrt{c}\cdot t - b}{a - t^2}; t\cdot \frac{\pm 2\sqrt{c}\cdot t - b}{a - t^2} \pm \sqrt{c}\right)\cdot \frac{\pm 2\sqrt{c}\cdot t^2 - 2bt \pm 2\sqrt{c}\cdot a}{\left(a - t^2\right)^2} dt,$$

то есть подынтегральная функция принимает рациональный вид.

Рассмотрим подстановку (1.2.17). Выразим из этой подстановки x, возведя обе части равенства в квадрат:

$$t^2 = \frac{a(x - x_1)}{x - x_2} \quad \Rightarrow \quad (x - x_2)t^2 = a(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_2\cdot t^2 - ax_1}{t^2 - a}.$$

При этом

$$dx = \frac{2at(x_1 - x_2)}{\left(t^2 - a\right)^2} dt.$$

Преобразуем выражение корня при этой подстановке:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \sqrt{\frac{a(x - x_1)(x - x_2)^2}{x - x_2}} = t\cdot |x - x_2|.$$

Подставим полученное в (1.2.14):

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{x_2 t^2 - ax_1}{t^2 - a}; t\cdot |x - x_2|\right)\frac{2at(x_1 - x_2)}{\left(t^2 - a^2\right)} dt,$$

то есть и в случае подстановки (1.2.17) интеграл (1.2.14) также сводится к интегралу от рациональной функции.

Заметим, что при вычислении интеграла (1.2.14) с помощью подстановки (1.2.17) модуль раскрывается на основании допустимых значений переменной x, то есть в соответствии с условием $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.50. Вычислить: $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция содержит квадратичную иррациональность $\sqrt{1 - 2x - x^2}$, поэтому вычислить данный интеграл можно с помощью подстановки Эйлера (1.2.16):

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} = xt + 1.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и выразим x:

$$1 - 2x - x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1 \;\Rightarrow\; 2 + x = -2t - xt^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2t - 2}{1 + t^2}.$$

Тогда $\quad dx = \left(\dfrac{-2t-2}{1+t^2}\right)' dt \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{2t^2+4t-2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$.

Вычислим интеграл с помощью этой подстановки:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{2\left(t^2+2t-1\right)}{\left(1+t^2\right)^2\left(1+\dfrac{-2t-2}{1+t^2}\cdot t+1\right)} = \int \frac{\left(t^2+2t-1\right)}{\left(1+t^2\right)\left(1-t\right)}dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1+2t-2}{\left(1+t^2\right)\left(1-t\right)}dt = \int \frac{t^2+1}{\left(1+t^2\right)\left(1-t\right)}dt - 2\int \frac{1-t}{\left(1+t^2\right)\left(1-t\right)}dt = \int \frac{dt}{1-t} - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\ln\left|1-t\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = \left| t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x} \right| = -\ln\left|1-\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}\right| -$$

$$-2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x} + C.$$

Пример 2.51. Вычислить: $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$.

Решение. Подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{x^2-2x+2}$. Поэтому для вычисления данного интеграла воспользуемся подстановкой Эйлера (1.2.15):

$$\sqrt{x^2-2x+2} = t + x.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и выразим x:

$$x^2-2x+2 = t^2+2tx+x^2 \;\Rightarrow\; -2x+2 = t^2+2tx \;\Rightarrow\; x = \frac{2-t^2}{2t+2}.$$

Тогда

$$dx = \left(\frac{2-t^2}{2t+2}\right)' dt \;\Rightarrow\; dx = \frac{-t^2-2t-2}{2\left(t+1\right)^2}dt.$$

Вычислим интеграл:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx = \int \left(\frac{2-t^2}{2t+2}\right)^2 \cdot \frac{\left(-t^2-2t-2\right)}{2\left(t+1\right)^2\cdot\left(t+\dfrac{2-t^2}{2t+2}\right)}dt =$$

$$= \int \frac{\left(2-t^2\right)^2}{4\left(t+1\right)^2}\cdot\frac{-\left(t^2+2t+2\right)\cdot 2\left(t+1\right)}{2\left(t+1\right)^2\cdot\left(t^2+2t+2\right)}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{\left(2-t^2\right)^2}{\left(t+1\right)^3}dt = \begin{vmatrix} t+1=u; \;\; t=u-1 \\ dt = du \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\left(2-\left(u-1\right)^2\right)^2}{u^3}du = -\frac{1}{4}\int \frac{u^4-4u^3+2u^2+4u+1}{u^3}du = -\frac{1}{4}\int u\,du + \int du -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du-\int\frac{1}{u^2}du-\frac{1}{4}\int\frac{1}{u^3}du=-\frac{1}{4}\cdot\frac{u^2}{2}+u-\frac{1}{2}\ln|u|-\frac{u^{-1}}{-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-2}}{-2}+C=$$

$$=-\frac{1}{8}(t+1)^2+t+1-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{8(t+1)^2}+C=\left|t=\sqrt{x^2-2x+2}-x\right|=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right)^2+\sqrt{x^2-2x+2}-x+1-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}-x+1}+\frac{1}{8\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right)^2}+C.$$

Пример 2.52. Вычислить: $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(2+3\sqrt{x^2+x}\right)}$.

Решение. Подкоренное выражение имеет действительные корни $x_1=-1$, $x_2=0$. Поэтому интеграл можно вычислить с помощью подстановки Эйлера (1.2.17):

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t.$$

Возведем левую и правую части равенства в квадрат и выразим x:

$$\frac{x+1}{x}=t^2 \;\Rightarrow\; x+1=t^2x \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{t^2-1}.$$

При этом

$$dx=\left(\frac{1}{t^2-1}\right)'dt \;\Rightarrow\; dx=-\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt.$$

Заметим, что областью определения подынтегральной функции является интервал $x\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$, на основании этого преобразуем выражение под радикалом:

$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{\frac{(x+1)x^2}{x}}=t\sqrt{x^2}=t\cdot|x|=\left|\begin{matrix}|x|=-x,\\ при\;\; x\le -1\end{matrix}\right|=-tx;$$

$$\sqrt{x^2+x}=t\cdot|x|=\left|\begin{matrix}|x|=x,\\ при\;\; x\ge 0\end{matrix}\right|=tx.$$

Вычислим интеграл:

а) $x\in(-\infty,-1]$

$$\int\frac{dx}{x\left(2+3\sqrt{x^2+x}\right)}=\int\frac{-2t}{\frac{1}{t^2-1}\cdot\left(2-3\cdot t\cdot\frac{1}{t^2-1}\right)\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{tdt}{2t^2-2-3t}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{разложим на простейшие дроби}\\ 2t^2-2-3t=2(t-2)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\end{matrix}\right|=-2\int\frac{tdt}{(t-2)(2t+1)}=$$

$$=-2\int\left(\frac{A}{t-2}+\frac{B}{2t+1}\right)dt=\left|\begin{matrix}A(2t+1)+B(t-2)=t\\ t=-1/2\ \Rightarrow\ B=1/5\\ t=2\ \Rightarrow\ A=2/5\end{matrix}\right|=-2\cdot\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t-2}-2\cdot\frac{1}{5}\int\frac{dt}{2t+1}=$$

$$=-\frac{4}{5}\ln|t-2|-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\ln|2t+1|+C=-\frac{4}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}-2\right|-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x}}{x}+1\right|+C;$$

б) $x\in(0,+\infty)$

$$\int\frac{dx}{x\left(2+3\sqrt{x^2+x}\right)}=\int\frac{-2t}{\dfrac{1}{t^2-1}\cdot\left(2+3\cdot t\cdot\dfrac{1}{t^2-1}\right)(t^2-1)^2}dt=-2\int\frac{tdt}{2t^2-2+3t}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{разложим на простейшие дроби}\\ 2t^2-2+3t=2(t+2)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\end{matrix}\right|=-2\int\frac{tdt}{(t+2)(2t-1)}=$$

$$=-2\int\left(\frac{A}{t+2}+\frac{B}{2t-1}\right)dt=\left|\begin{matrix}A(2t-1)+B(t+2)=t\\ t=1/2\ \Rightarrow\ B=1/5\\ t=-2\ \Rightarrow\ A=2/5\end{matrix}\right|=-2\cdot\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t+2}-2\cdot\frac{1}{5}\int\frac{dt}{2t-1}=$$

$$=-\frac{4}{5}\ln|t+2|-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\ln|2t-1|+C=-\frac{4}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+2\right|-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x}}{x}-1\right|+C.$$

Замечание. С помощью подстановок Эйлера любой интеграл типа (1.2.14) можно вычислить. Если подкоренное выражение имеет действительные корни, то есть дискриминант положителен, тогда используем подстановку (1.2.17). Если дискриминант отрицателен, то значение радикала, а значит и подынтегральная функция, имеет смысл только при $a>0$ (когда подкоренное выражение неотрицательно), в этом случае интеграл вычисляется с помощью подстановки (1.2.15). Таким образом, интеграл (1.2.14) всегда вычисляется, более того, можно обойтись без подстановки (1.2.16).

На практике подстановки Эйлера зачастую приводят к сложным выкладкам, длинным решениям, поэтому целесообразно применять эти подстановки только в тех случаях, где никакой другой способ вычисления интеграла к результату не приводит. В пунктах 2.7.3 и 2.7.4 изложены методы, которые позволяют избежать подстановки Эйлера при вычислении некоторых типов интегралов.

Для закрепления изложенных методов предлагаем Вам вычислить следующие интегралы **самостоятельно**:

167. $\int \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x^2+4x+1}}$.

168. $\int \frac{\left(x-1-\sqrt{3-2x-x^2}\right)\sqrt{3-2x-x^2}}{x+3+\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

169. $\int \frac{dx}{4-\sqrt{16+2x-x^2}}$.

170. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{(x+2)x}}$.

171. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

172. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{4+2x-x^2}}$.

173. $\int \frac{dx}{1+2\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

174. $\int \frac{dx}{3x-\sqrt{8-2x-x^2}}$.

175. $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$.

176. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{9-2x-3x^2}+1}$.

2.7.3. ***Интегрирование квадратичных иррациональностей***

Рассмотрим неопределенные интегралы от квадратичных иррациональностей типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad (1.2.18)$$

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx. \qquad (1.2.19)$$

Для их вычисления необходимо выделить полный квадрат у подкоренного выражения, а затем сделать подстановку.

Таким образом, сначала выделяем полный квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right),$$

где D - дискриминант квадратичного выражения.

Затем вычисляем интеграл с помощью подстановки

$$x+\frac{b}{2a}=t \text{ (или } x=t-\frac{b}{2a}\text{).}$$

В зависимости от знаков a и $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$ получаем, что интеграл (1.2.18) приводится к одному из двух табличных (формулы 18, 20, §1.4, глава 1, раздел I):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+dx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}}\qquad (a>0,\ D>0);$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+dx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\left(-\frac{D}{4a^2}\right)}}\qquad (a>0,\ D<0);$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+dx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{D}{4a^2}-t^2}}\ (a<0,\ D>0).$$

<u>Замечание.</u> Если $a<0,\ D<0$ интегралы (1.2.18), (1.2.19) не существуют, так как в этом случае подкоренное выражение ax^2+bx+c отрицательно для любых x.

С помощью той же подстановки $x+\frac{b}{2a}=t$ интеграл (1.2.19) приводится к сумме двух табличных:

$$\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\left|\begin{matrix}при\\ a>0\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}}dt=\frac{M}{\sqrt{a}}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}}=\frac{M}{2\sqrt{a}}\int\frac{d\left(t^2-\frac{D}{4a^2}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}}=$$

$$=\frac{M}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\cdot\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{D}{4a^2}}\right|.$$

Аналогично,

$$\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\left|\begin{matrix}a<0\\ D>0\end{matrix}\right|=\frac{M}{\sqrt{-a}}\int\frac{tdt}{\sqrt{\frac{D}{4a^2}-t^2}}+\frac{1}{\sqrt{-a}}\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{D}{4a^2}-t^2}}=$$

$$=\frac{M}{\sqrt{-a}}\sqrt{\frac{D}{4a^2}-t^2}+\frac{1}{\sqrt{-a}}\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\arcsin\frac{t}{\sqrt{\frac{D}{4a^2}}}.$$

Если $D=0$, то тогда выражение под радикалом является полным квадратом. Поэтому в этом случае фактически квадратичной иррациональности нет, от нее легко избавится, преобразовав подынтегральное выражение.

Рассмотрим примеры вычисления интегралов таких типов.

Пример 2.53.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-0{,}75}} = \left| x^2-3x-0{,}75 = x^2-3x+1{,}5^2-1{,}5^2-0{,}75 = (x-1{,}5)^2-3 \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1{,}5)^2-3}} = \left| \begin{matrix} t=x-1{,}5 \\ dt=dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} = \ln\left| t+\sqrt{t^2-3} \right| + C =$$

$$= \ln\left| x-1{,}5+\sqrt{x^2-3x-0{,}75} \right| + C.$$

Пример 2.54.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{5-2x^2-4x}}dx = \left| \begin{matrix} 5-2x^2-4x=-2\left(x^2+2x-2{,}5\right)= \\ =-2\left(x^2+2x+1-1-2{,}5\right)=-2\left((x+1)^2-3{,}5\right) \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{x-2}{\sqrt{-2\left((x+1)^2-3{,}5\right)}}dx = \left| \begin{matrix} t=x+1; \quad x=t-1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t-1-2}{\sqrt{2\left(3{,}5-t^2\right)}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{tdt}{\sqrt{3{,}5-t^2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{3{,}5-t^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d\left(3{,}5-t^2\right)}{\sqrt{3{,}5-t^2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{3{,}5}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(3{,}5-t^2\right)^{1/2}}{1/2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{3{,}5}} + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3{,}5-t^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{3{,}5+C}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3{,}5-(x+1)^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{3{,}5}} + C.$$

Пример 2.55. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-8x+16}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x-4)^2}} = \int \frac{xdx}{|x-4|} = \left| \begin{matrix} t=x-4; \quad x=t+4 \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{t+4}{|t|}dt = \left[\begin{matrix} при \;\; t>0 \quad = \int \frac{t+4}{t}dt = \int dt + 4\int \frac{dt}{t} = t+4\ln|t|+C = \\ при \;\; t<0 \quad = \int \frac{t+4}{-t}dt = -\int dt - 4\int \frac{dt}{t} = -t-4\ln|t|+C = \end{matrix} \right.$$

$$\left[\begin{matrix} = x-4+4\ln|x-4|+C, \;\; при \;\; x>4. \\ = 4-x-4\ln|x-4|+C, \;\; при \;\; x<4. \end{matrix} \right.$$

Для закрепления материала вычислите **самостоятельно** следующие интегралы:

177. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}$.

178. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

179. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}$.

180. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$.

181. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$.

182. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-8}}dx$.

183. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+7}}dx$.

184. $\int \frac{-2x+2}{\sqrt{-x^2+x+1}}dx$.

185. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-7x+13}}dx$.

186. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{8x^2+x+2}}dx$.

2.7.4. *Тригонометрические подстановки*

Рассмотрим интегралы типа

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \tag{1.2.20}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx \tag{1.2.21}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx \tag{1.2.22}$$

Для определенности будем считать $a>0$.

Интегралы этих типов сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

Для вычисления интеграла (1.2.20) используется подстановка

$$x = a\sin t.$$

При этой подстановке

$$dx = a\cos t dt;$$

$$\sin t = \frac{x}{a} \;\Rightarrow\; t = \arcsin\frac{x}{a};$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-(a\sin t)^2} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t| =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{для определенности рассмотрим}\\ \text{один случай } |\cos t| = \cos t\end{array}\right| = a\cos t.$$

Тогда интеграл (1.2.20) принимает вид:

$$\int R\left(x, \ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx = a\int R(a\sin t, \ a\cos t)\cos t dt.$$

То есть интеграл (1.2.20) приводится к интегралу от рационального выражения, зависящего от тригонометрических функций.

Интеграл (1.2.21) вычисляется с помощью подстановки

$$x = a \cdot \mathrm{tg}\, t .$$

При этой подстановке

$$dx = a \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt ;$$

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad t = \mathrm{arctg} \frac{x}{a} ;$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 (a\,\mathrm{tg}\, t)^2} = \sqrt{a^2 \left(1 + \mathrm{tg}^2 t\right)} = a\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = a \cdot \left|\frac{1}{\cos t}\right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{для определенности рассмотрим} \\ \text{один случай } \left|\dfrac{1}{\cos t}\right| = \dfrac{1}{\cos t} \end{array} \right| = a \cdot \frac{1}{\cos t} .$$

Тогда интеграл (1.2.21) приводится к виду:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = a \int R\left(a\,\mathrm{tg}\, t,\ a \cdot \frac{1}{\cos t} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt .$$

Таким образом, интеграл (1.2.21) также приводится к интегралу от рационального выражения.

Интеграл (1.2.22) вычисляется с помощью подстановки

$$x = \frac{a}{\sin t} .$$

При этой подстановке

$$dx = a \cdot \left(\sin^{-1} t\right)' dt = a \cdot (-1) \cdot \sin^{-2} t \cdot (\sin t)' dt \quad \Rightarrow \quad dx = -a \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt ;$$

$$\sin t = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin \frac{a}{x} ;$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sin t}\right)^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)} = a\sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}} = a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} =$$

$$= a \cdot \left|\frac{\cos t}{\sin t}\right| = \left| \begin{array}{l} \text{для определенности рассмотрим} \\ \text{один случай } \left|\dfrac{\cos t}{\sin t}\right| = \dfrac{\cos t}{\sin t} \end{array} \right| = a \cdot \frac{\cos t}{\sin t} .$$

Тогда интеграл (1.2.22) приводится к виду:

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx = -a \int R\left(\frac{a}{\sin t},\ a \cdot \frac{\cos t}{\sin t} \right) \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt .$$

Значит, интеграл (1.2.22) приводится к интегралу от рационального выражения.

Замечания. Для вычисления интеграла (1.2.20) можно также использовать подстановку $x = a\cos t$; для вычисления интеграла (1.2.21) используется и подстановка $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$; а для вычисления (1.2.22) можно использовать подстановку $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Рассмотрим примеры вычисления интегралов с помощью этих подстановок.

Пример 2.56. Вычислить: $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

Решение. Данный интеграл относится к типу (1.2.20), поэтому вычислить его можно с помощью подстановки $x = 3\sin t$ или $x = 3\cos t$.

Вычислим интеграл двумя способами, чтобы продемонстрировать, что обе эти подстановки равноценны как по способу их применения, так и по сложности вычислений.

1) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} x = 3\sin t; \;\; t = \arcsin\dfrac{x}{3}; \\ dx = 3\cos t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(3\sin t)^2}{\sqrt{9-(3\sin t)^2}} \cdot 3\cos t dt =$$

$$= 9\cdot 3\int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t \cdot dt}{3\sqrt{1-\sin^2 t}} = 9\int \frac{\sin^2 t\cdot \cos t \cdot dt}{\cos t} = 9\int \sin^2 t dt = 9\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int dt - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t) = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) + C_1$$

2) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} x = 3\cos t; \;\; t = \arccos\dfrac{x}{3}; \\ dx = -3\sin t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(3\cos t)^2}{\sqrt{9-(3\cos t)^2}} \cdot (-2\sin t)dt =$$

$$= -9\cdot 3\int \frac{\cos^2 t \cdot \sin t \cdot dt}{3\sqrt{1-\cos^2 t}} = -9\int \frac{\cos^2 t \cdot \sin t \cdot dt}{\sin t} = -9\int \cos^2 t dt = -9\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= -\frac{9}{2}\int dt - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t) = -\frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t + C = -\frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} -$$

$$-\frac{9}{4}\sin\left(2\arccos\frac{x}{3}\right) + C_2.$$

На первый взгляд ответы в первом и втором случае получились разные. Но это не так. Если использовать тождество $\arccos\alpha + \arcsin\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то легко доказать, что ответы совпадают:

$$-\frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} - \frac{9}{4}\sin\left(2\arccos\frac{x}{3}\right) + C_2 = -\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{3}\right) -$$

$$-\frac{9}{4}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{3}\right)\right)+C_2=-\frac{9\pi}{4}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\sin\left(\pi-2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C_2=$$

$$=-\frac{9\pi}{4}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C_2=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C_1,$$

где $C_1=-\frac{9\pi}{4}+C_2$.

Пример 2.57. Вычислить: $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$.

Решение. Имеем интеграл типа (1.2.21), поэтому для его вычисления будем использовать подстановку $x=4\,\mathrm{tg}\,t$.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}=\left|\begin{array}{l} x=4\,\mathrm{tg}\,t;\ \ t=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{4};\\ dx=\dfrac{4}{\cos^2 t}dt\end{array}\right|=\int\frac{1}{(4\,\mathrm{tg}\,t)^2\cdot\sqrt{(4\,\mathrm{tg}\,t)^2+16}}\cdot\frac{4}{\cos^2 t}dt=$$

$$=\frac{4}{16}\int\frac{dt}{\mathrm{tg}^2 t\cdot 4\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}\cdot\cos^2 t}=\frac{1}{16}\int\frac{dt}{\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}\cdot\cos^2 t}=\frac{1}{16}\int\frac{dt}{\sin^2 t\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}}=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\left|\begin{array}{l}\sin t=u\\ \cos t\,dt=du\end{array}\right|=\frac{1}{16}\int\frac{du}{u^2}=\frac{1}{16}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{u}+C=$$

$$=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{1}{16\cdot\sin\left(\mathrm{arctg}\dfrac{x}{4}\right)}+C.$$

Пример 2.58. Вычислить: $\int\sqrt{x^2-1}\cdot dx$.

Решение. Имеем интеграл типа (1.2.22), поэтому будем вычислять его с помощью подстановки $x=\frac{1}{\sin t}$.

$$\int\sqrt{x^2-1}\cdot dx=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sin t};\ \ t=\arcsin\dfrac{1}{x};\\ dx=-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt\end{array}\right|=-\int\sqrt{\left(\frac{1}{\sin t}\right)^2-1}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=-\int\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\cos t=u;\ \sin^2 t=1-\cos^2 t=1-u^2; \\ -\sin t dt=du\end{array}\right|=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}\cdot\sin t dt=-\int\frac{u^2}{\left(1-u^2\right)^2}\cdot(-du)=$$

$$=\int\frac{u^2du}{\left(1-u^2\right)^2}=\left|\begin{array}{l}\textit{интеграл вычисляется через} \\ \textit{разложение на простейшие дроби}\end{array}\right|=\int\frac{u^2du}{(1-u)^2(1+u)^2}=$$

$$=\int\left(\frac{A}{1-u}+\frac{B}{(1-u)^2}+\frac{C}{1+u}+\frac{D}{(1+u)^2}\right)du=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u^2=u^3(-A+C)+u^2(-A+B-C+D)+u(A+2B-C-2D)+A+B+C+D \\ \begin{cases}-A+C=0 \\ -A+B-C+D=1 \\ A+2B-C-2D=0 \\ A+B+C+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/4 \\ B=1/4 \\ C=-1/4 \\ D=1/4\end{cases}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{1-u}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{(1-u)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{1+u}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{(1+u)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d(1-u)}{1-u}-\frac{1}{4}\int\frac{d(1-u)}{(1-u)^2}-$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(1+u)}{1+u}+\frac{1}{4}\int\frac{d(1+u)}{(1+u)^2}=\frac{1}{4}\ln|1-u|-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-u)^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{4}\ln|1+u|+\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+u)^{-2+1}}{-2+1}+$$

$$+C=\frac{1}{4}\ln|1-\cos t|+\frac{1}{4(1-\cos t)}-\frac{1}{4}|1+\cos t|-\frac{1}{4(1+\cos t)}+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cos t}{1-\cos t}+C=\left|\sin^2 t=\left(\sin\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)\right)^2=\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}{1+\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}x^2\cdot\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)+C.$$

Пример 2.59. Вычислить: $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2-6}}$.

Решение. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2-6}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{-\left(x^2-6x+6\right)}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{-\left((x-3)^2-3\right)}}=$

$$= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-(x-3)^2}} = \left| \begin{matrix} t = x-3; \;\; x = t+3; \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t+3)^2 dt}{\sqrt{3-t^2}} = \int \frac{(t^2+6t+9)dt}{\sqrt{3-t^2}} =$$

$$= \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{3-t^2}} + 6\int \frac{tdt}{\sqrt{3-t^2}} + 9\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = I_1 + I_2 + 9\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}};$$

$$I_1 = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{3-t^2}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{3}\sin u; \\ dt = \sqrt{3}\cos u du \end{matrix} \right| = \int \frac{3\sin^2 u \cdot \sqrt{3}\cos u \cdot du}{\sqrt{3-3\sin^2 u}} =$$

$$= 3\int \frac{\sin^2 u \cdot \cos u \cdot du}{\cos u} = 3\int \sin^2 u du = 3\int \frac{1-\cos 2u}{2} du = \frac{3}{2}\left(\int du - \int \cos 2u du \right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(u - \frac{1}{2}\sin 2u \right) = \left| u = \arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} \right| = \frac{3}{2}\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} \right);$$

$$I_2 = 6 \cdot \int \frac{tdt}{\sqrt{3-t^2}} = -\frac{6}{2}\int \frac{d(-t^2+3)}{\sqrt{3-t^2}} = -3 \cdot \int (3-t^2)^{-1/2} d(3-t^2) =$$

$$= -3 \cdot \frac{(3-t^2)^{1/2}}{1/2} = -6\sqrt{3-t^2}\,.$$

Итак,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6x-x^2-6}} = \frac{3}{2}\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} \right) - 6\sqrt{3-t^2} + 9\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{21}{2}\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{3}} \right) - 6\sqrt{6x-x^2-6} + C\,.$$

Для закрепления материала вычислите **самостоятельно** следующие интегралы:

187. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

188. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$.

189. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$.

190. $\int x^2\sqrt{7-x^2}\, dx$.

191. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} dx$.

192. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

193. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.

194. $\int \frac{\left(\sqrt{x^2-36}\right)^5}{x^6} dx$.

195. $\int \frac{2dx}{\left(\sqrt{37+4x^2}-4x\right)^3}$. **196.** $\int \frac{\sqrt{x^2+8x+5}}{(x+4)^4}dx$.

2.7.5. *Интегрирование дифференциального бинома (подстановки Чебышева)*

Интегралами от дифференциального бинома называются интегралы типа

$$\int x^k\left(a+bx^n\right)^p dx, \tag{1.2.23}$$

где a, b - действительные числа, k, n, p - рациональные числа. Интегралы типа (1.2.23) можно вычислить (выразить через элементарные функции) только в трех случаях. Рассмотрим эти случаи.

1) Пусть p - целое число. Тогда (1.2.23) относится к интегралу типа (1.2.13), поэтому вычисляется с помощью подстановки

$$x = t^m,$$

где m - наименьший общий знаменатель дробей k и n.

При этой подстановке

$$dx = mt^{m-1}dt;$$

$$x^k = \left(t^m\right)^k = t^{mk}; \quad x^n = \left(t^m\right)^n = t^{mn}.$$

Таким образом, интеграл (1.2.23) принимает вид

$$\int x^k\left(a+bx^n\right)^p dx = \int t^{mk}\left(a+bt^{mn}\right)^p mt^{m-1}dt,$$

то есть сводится к интегралу от рационального выражения (mk, mn - целые числа, так как m - общий знаменатель дробей k и n).

2) Пусть $p = \frac{r}{s}$, но $\frac{k+1}{n}$ - целое число. Тогда (1.2.23) рационализуется с помощью подстановки

$$a+bx^n = t^s. \tag{1.2.24}$$

При этой подстановке

$$x^n = \frac{1}{b}\left(t^s - a\right) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}\left(t^s - a\right)^{1/n};$$

$$dx = \frac{s}{\sqrt[n]{b}\cdot n}\left(t^s - a\right)^{\frac{1-n}{n}} \cdot t^{s-1}dt.$$

Тогда

$$\int x^k\left(a+bx^n\right)^p dx = \int \frac{1}{\sqrt[n]{b^k}}\left(t^s - a\right)^{k/n} \cdot t^{sp} \cdot \frac{s}{\sqrt[n]{b}\cdot n} \cdot \left(t^s - a\right)^{\frac{1-n}{n}} \cdot t^{s-1}dt =.$$

$$= \frac{s}{n} \cdot b^{\frac{-k-1}{n}} \int \left(t^s - a\right)^{\frac{k}{n}+\frac{1-n}{n}} \cdot t^{sp+s-1}dt.$$

Таким образом, интеграл (1.2.23) при подстановке (1.2.24) принимает вид:

$$\int x^k\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{s}{n}\cdot b^{\frac{-k-1}{n}}\int\left(t^s-a\right)^{\frac{k+1}{n}-1}\cdot t^{sp+s-1}dt,$$

то есть подынтегральная функция сводится к рациональному виду ($sp=r$ - целое число, $\frac{k+1}{n}-1$ – целое число по условию рассматриваемого случая).

3) Пусть $\frac{k+1}{n}+p$ - целое число, $p=\frac{r}{s}$. Тогда интеграл (1.2.23) вычисляется с помощью подстановки

$$a+bx^n=x^n\cdot t^s. \tag{1.2.25}$$

При этой подстановке

$$ax^{-n}+b=t^s \;\Rightarrow\; x^n=\frac{a}{t^s-b} \;\Rightarrow\; x=\left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{1/n};$$

$$dx=-\frac{s}{n}\sqrt[n]{a}\left(t^s-b\right)^{-\frac{1}{n}-1}\cdot t^{s-1}dt.$$

Тогда

$$\int x^k\left(a+bx^n\right)^p dx=\int\left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{k}{n}}\cdot\left(\frac{a}{t^s-b}\cdot t^s\right)^p\cdot\left(-\frac{s}{n}\sqrt[n]{a}\right)\cdot\left(t^s-b\right)^{-\frac{1}{n}-1}\cdot t^{s-1}dt=$$

$$=-\frac{s}{n}\cdot a^{\frac{k}{n}+p+\frac{1}{n}}\int\left(t^s-b\right)^{-\frac{k}{n}-p-\frac{1}{n}-1}\cdot t^{sp+s-1}dt.$$

Таким образом, интеграл (1.2.23) при подстановке (1.2.25) принимает вид:

$$\int x^k\left(a+bx^n\right)^p dx=-\frac{s}{n}\cdot a^{\frac{k+1}{n}+p}\int\left(t^s-b\right)^{-\left(\frac{k+1}{n}+p+1\right)}\cdot t^{sp+s-1}dt,$$

то есть приводятся к интегралу от рациональной функции ($sp=r$ - целое число, $\frac{k+1}{n}+p+1$ - целое число по условию данного случая).

Подстановки, рассмотренные в случаях 1)-3), иногда называют ***подстановками Чебышева***. Именно П.Л.Чебышев установил, что интегралы типа (1.2.23) сводятся к интегралам от рациональной функции и, следовательно, выражаются через элементарные функции только тогда, когда хотя бы одно из чисел p, $\frac{k+1}{n}$, $\frac{k+1}{n}+p$ является целым числом; ни в каком другом случае интеграл (1.2.23) не выражается через элементарные функции.

Рассмотрим применение данных подстановок на примерах.

Пример 2.60. Вычислить: $\int\sqrt[3]{x}\left(2-3\sqrt[9]{x}\right)^2dx$.

Решение. Имеем интеграл от функции, где $k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{9}$, $p=2$, который относится к первому случаю, поэтому вычислять его будем с помощью подстановки $x=t^9$ ($m=9$ - наименьший общий знаменатель для дробей $k=\frac{1}{3}$ и $n=\frac{1}{9}$).

$$\int \sqrt[3]{x}\left(2-3\sqrt[9]{x}\right)^2 dx = \left| \begin{matrix} x=t^9 \ ; \ t=\sqrt[9]{x} \\ dx=9t^8dt \end{matrix} \right| = \int \left(t^9\right)^{1/3}\left(2-3\left(t^9\right)^{1/9}\right)^2 \cdot 9t^8dt =$$

$$=9\int t^3(2-3t)^2t^8dt = 9\int t^{11}\left(4-12t+9t^2\right)dt = 9\int 4t^{11}dt - 9\int 12t^{12}dt + 9\int 9t^{13}dt =$$

$$=36\cdot\frac{t^{12}}{12} - 108\frac{t^{13}}{13} + 81\frac{t^{14}}{14} + C = 3\sqrt[9]{x^{12}} - \frac{108}{13}\sqrt[9]{x^{13}} + \frac{81}{14}\sqrt[9]{x^{14}} + C =$$

$$=3x\sqrt[3]{x} - \frac{108}{13}x\sqrt[9]{x^4} + \frac{81}{14}x\sqrt[9]{x^5} + C.$$

Пример 2.61. Вычислить: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{2-\sqrt[6]{x}}}$.

Решение. У данной подынтегральной функции $k=-\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{6}$, $p=-\frac{1}{2}$. Так как $\frac{k+1}{n} = \frac{-\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4$ - целое число, то интеграл относится ко второму случаю. Значит, вычислять его будем с помощью подстановки $2-\sqrt[6]{x}=t^2$.

При этой подстановке

$\sqrt[6]{x} = 2-t^2 \ \Rightarrow \ x=(2-t^2)^6$;

$dx = d((2-t^2)^6) = \left((2-t^2)^6\right)' dt = 6(2-t^2)^5\left(2-t^2\right)' dt = -12t(2-t^2)^5 dt$;

$\sqrt[3]{x} = \left((2-t^2)^6\right)^{\frac{1}{3}} = (2-t^2)^2$.

Вычислим интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{2-\sqrt[6]{x}}} = \left| \begin{matrix} 2-\sqrt[6]{x}=t^2; \ \ t=\sqrt{2-\sqrt[6]{x}}; \\ dx=-12t(2-t^2)^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-12t(2-t^2)^5 dt}{(2-t^2)^2\cdot(t^2)^{1/2}} =$$

$$=-12\int(2-t^2)^3 dt = -12\int(8-12t^2+6t^4-t^6)dt = -96\int dt + 144\int t^2 dt -$$

$$-72\int t^4 dt + 12\int t^6 dt = -96t + 144\cdot\frac{t^3}{3} - 72\cdot\frac{t^5}{5} + 12\cdot\frac{t^7}{7} + C = -96\sqrt{2-\sqrt[6]{x}} +$$

$$+48\left(\sqrt{2-\sqrt[6]{x}}\right)^3-\frac{72}{5}\left(\sqrt{2-\sqrt[6]{x}}\right)^5+\frac{12}{7}\left(\sqrt{2-\sqrt[6]{x}}\right)^7+C.$$

Пример 2.62. Вычислить: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Имеем интеграл от дифференциального бинома, у которого $k=-3$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$. Так как $\frac{k+1}{n}+p=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$ - целое число, то интеграл будем вычислять с помощью подстановки случая 3:

$$2-x^3=x^3t^3.$$

Тогда $\quad x^3=\frac{2}{t^3+1};\quad x=\sqrt[3]{\frac{2}{t^3+1}};\quad t=\sqrt[3]{\frac{2-x^3}{x^3}};$

$$dx=d\left(\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{1/3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{-2/3}\cdot\left(\frac{2}{t^3+1}\right)'dt=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{-2/3}(t^3+1)^{-2}\cdot 3t^2dt=-2t^2\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{-2/3}(t^3+1)^{-2}dt.$$

Вычислим интеграл:

$$\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=\left|x=\sqrt[3]{\frac{2}{t^3+1}};\ t=\sqrt[3]{\frac{2-x^3}{x^3}};\ dx=-2t^2\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{-2/3}(t^3+1)^{-2}dt\right|=$$

$$=\int\frac{-2t^2\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{-2/3}(t^3+1)^{-2}dt}{\frac{2}{t^3+1}\cdot t\cdot\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{1/3}}=-2\int t\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{-2}(t^3+1)^{-2}dt=-\frac{2}{4}\int tdt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{2-x^3}{x^3}}\right)^2+C=-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C.$$

Для закрепления материала вычислите с помощью подстановок Чебышева следующие интегралы **самостоятельно**:

197. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **198.** $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{(4-3x^2)^{3/2}}$.

199. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x^3)^{7/6}}$.

200. $\int x^9 \cdot \sqrt[5]{(6+x^5)^4}\,dx$.

201. $\int \frac{\sqrt[4]{7+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[12]{x^{17}}}\,dx$.

202. $\int \sqrt[3]{5+3\sqrt[4]{x}}\,dx$.

203. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[4]{x}+1)}$.

204. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{1+x^3}}$.

205. $\int \sqrt[3]{\frac{1-8x^2}{x^5}}\,dx$.

206. $\int \frac{\sqrt{9-x^4}}{x^5}\,dx$.

§2.8. «Неберущиеся» интегралы

Изложенные в данном пособии методы интегрирования позволяют вычислить неопределенный интеграл, при этом найденная первообразная является элементарной функцией. Однако не всякая первообразная выражается через элементарные функции.

Мы говорили в §1.2 (глава 1, раздел I), что любая непрерывная функция интегрируема. При этом, если первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, то говорят, что $\int f(x)dx$ «берется» (интеграл вычисляется). Если первообразная функция не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «не берется». Например, «не берется» интеграл $\int e^{-x^4}dx$, так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна e^{-x^4}.

Как говорилось выше, Чебышев доказал, что «не берутся» биномиальные интегралы, если в интегралах типа (1.2.23) значения p, $\frac{k+1}{n}$, $\frac{k+1}{n}+p$ не являются целыми. На основании этого можно привести несколько примеров интегралов, которые не вычисляются в элементарных функциях:

$$\int x^5\cdot\sqrt[8]{7-x^4}\,dx,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},\quad \int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^2}},\quad \int\sqrt[4]{1+x^4}\,dx.$$

Изучив методы интегрирования данного пособия, можно вычислить $\int\frac{\sqrt[4]{\ln x-2}}{x}dx$ с помощью подведения под дифференциал, $\int\frac{\ln^3 x}{x\cdot\sqrt[4]{1+\ln^2 x}}dx$ – с помощью замены переменной $t=1+\ln^2 x$, $\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt[4]{x}}dx$ – с помощью формулы интегрирования по частям. Но вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^5 x - 2}}{x} dx$ не удается, хотя по виду он похож на предыдущие три. Чтобы доказать, что данный интеграл является «неберущимся», сделаем замену переменной $\ln x = z$:

$$\int \frac{\sqrt[4]{\ln^5 x - 2}}{x} dx = \int \sqrt[4]{z^5 - 2} dz .$$

Полученный интеграл не вычисляется (на основании теоремы Чебышева), значит, и первоначальный интеграл также не вычисляется.

К «неберущимся» интегралам относятся так же нижеследующие интегралы, некоторые из них имеют большое значение в различных разделах математики и физики:

$\int \sqrt{x} \cdot \cos x dx$, $\int \frac{\sin x}{x^7} dx$,

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (теории вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм (теория чисел),

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ - интегралы Френеля (физика),

$\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральные синус и косинус,

$\int \frac{e^x}{x} dx$ - интегральная показательная функция.

Первообразные функции, которые используются в приложениях, хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений интеграла при различных значениях x и построены графики.

Например, для интеграла Пуассона $\int e^{-x^2} dx$ из множества всех первообразных $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C$ исследована та, которая обращается в нуль при $x = 0$, эта первообразная называется функцией Лапласа $\Phi(x)$. То есть $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C_0$, если $\Phi(0) = 0$. Графики подынтегральной функции $y = e^{-x^2}$ и функции Лапласа $y = \Phi(x)$ изображены на рис.2 и рис.3.

Первообразная функция $\int \frac{\sin x}{x} dx$+C, которая обращается в нуль при $x = 0$ называется интегральным синусом. Графики подынтегральной функции $y = \frac{\sin x}{x}$ и интегрального синуса $y = \mathrm{Si}(x)$ изображены на рис.4 и рис.5.

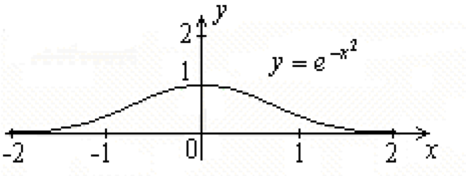


Рис. 2.

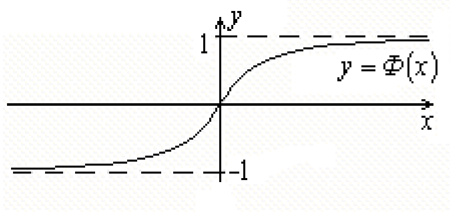


Рис. 3.

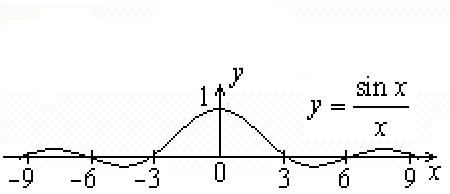


Рис. 4.

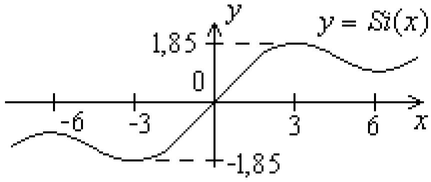


Рис. 5.

В §2.7 (**2.7.2**) данного учебного пособия показано, что с помощью подстановок Эйлера всегда можно вычислить интеграл типа $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$. Если же под радикалом стоит многочлен третьей или четвертой степеней, то практически все такие интегралы «не берутся». Интегралы типа

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right)dx, \quad R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right)dx,$$

которые не вычисляются в элементарных функциях, называются эллиптическими, а которые вычисляются – псевдоэллиптическими. Лиувилль показал, что любой эллиптический интеграл сводятся к одному из трех типов:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

и полученные три интеграла «не берутся» ($h, k = const$). Лежандр упростил эти интегралы, сделав подстановку $z = \sin\varphi$, и получил интегралы, два из которых имеют особую важность и частое применение в приложениях:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Лежандр особо подробно исследовал первообразные этих функций, которые обращаются в нуль при $\varphi = 0$, то есть

$$F(k,\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + C_0, \text{ если } F(k,0) = 0;$$

$$E(k,\varphi) = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + C_0, \text{ если } E(k,0) = 0.$$

Функции $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$ называются эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода в форме Лежандра.

РАЗДЕЛ II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава 1. *Понятие определенного интеграла, его свойства и геометрический смысл*

§1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

1.1.1. ***Площадь криволинейной трапеции***

В курсе элементарной геометрии показано, как вычислять площади плоских фигур, которые ограничены прямолинейными отрезками и дугами окружностей. Площадь плоской фигуры, ограниченной кривой произвольного вида, может быть вычислена средствами математического анализа, как это будет показано ниже.

Рассмотрим фигуру, ограниченную произвольной непрерывной кривой, двумя ординатами $x = a$, $x = b$ и отрезком оси Ox (рис.6). Подобную фигуру будем называть ***криволинейной трапецией***.

Фигура, изображенная на рис.7, может быть разбита на криволинейные трапеции проведением нескольких прямых, параллельных осям. При этом не исключается случай, когда одна из двух параллельных сторон стягивается в точку и криволинейная трапеция имеет вид криволинейного треугольника (рис.8). Таким образом, при вычислении площади произвольной плоской фигуры можно ограничиться задачей вычисления площади криволинейной трапеции.

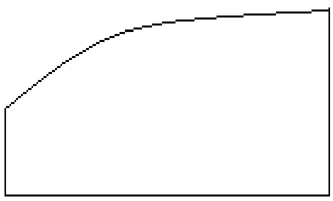


Рис.6

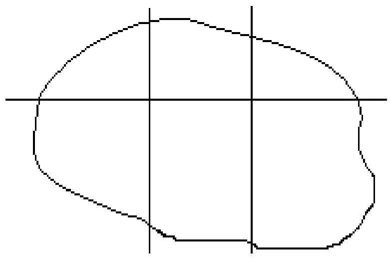


Рис.7

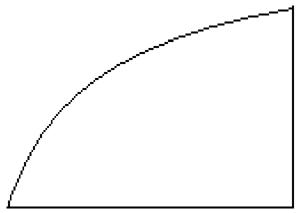


Рис.8

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$, при этом $f(x) \geq 0$ на всем отрезке $[a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис.9).

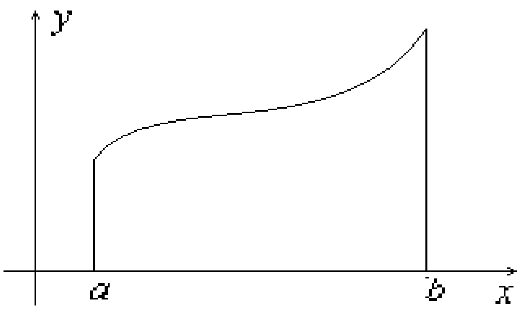


Рис.9

Найдем площадь этой криволинейной трапеции. Для этого отрезок $[a,b]$ $(a < b)$ точками $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , $x_n = b$ $(x_0 < x_1 < ... < x_n)$ разобьем на n частичных отрезков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... , $[x_{n-1}; x_n]$. Отрезки $[x_0; x_1]$,..., $[x_{n-1}; x_n]$ имеют произвольные длины. Проведем прямые $x = x_0$, $x = x_1$, $\ldots$, $x = x_n$. В результате криволинейная трапеция параллельными прямыми будет разделена на n частей (рис.10). В каждом частичном отрезке $\left[x_{i-1}; x_i\right]$ возьмем произвольную точку c_i, которой соответствует значение функции $f(c_i)$. Вычислим произведения $f(c_i)\cdot\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Очевидно, что $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, $i = 1,\ldots,n$. То есть $f(c_1)\cdot\Delta x_1$ - площадь первого прямоугольника, $f(c_2)\cdot\Delta x_2$ - площадь второго прямоугольника, $\ldots$, $f(c_n)\cdot\Delta x_n$ - площадь n-го прямоугольника.

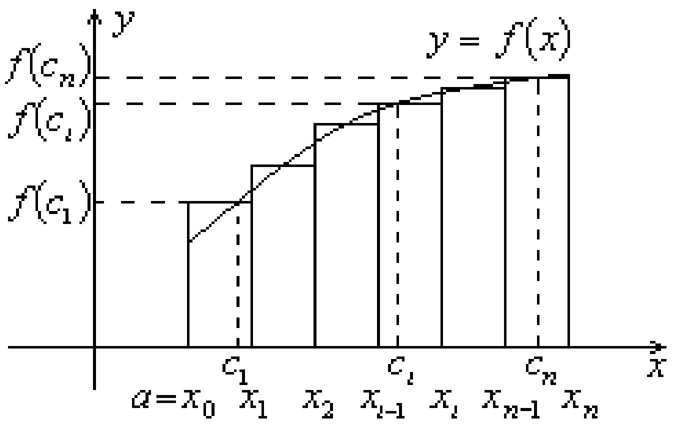


Рис.10

Таким образом, сумма

$$f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

является площадью ступенчатой фигуры, которая приближенно равна площади криволинейной трапеции S:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i \ .$$

Если увеличить количество точек разбиения так, что будут уменьшаться все длины Δx_i, $i = 1,\ldots,n$, тогда величина $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$ будет более точно приближать площадь S. Поэтому за точное значение площади S возьмем предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры, когда n неограниченно возрастает (так как должны уменьшаться все длины Δx_i, то потребуем, чтобы $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0$):

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i \ .$$

Таким образом, число S равно площади криволинейной трапеции, если данный предел существует.

Пример 2.1.1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^4$, осью Ox и прямыми $x = 0$, $x = 3$.

Решение. 1. Разобьем интервал $x \in [0;3]$ на n частичных отрезков равной длины. Длина каждого отрезка будет равна $\frac{3}{n}$, границами отрезков будут точки

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{3}{n},\ \ x_2 = \frac{6}{n},\ \dots\ ,\ x_i = \frac{3}{n}i,\ \ x_{n-1} = \frac{3(n-1)}{n},\ \ x_n = \frac{3n}{n} = 3\ .$$

2. На каждом отрезке $\left[0;\frac{3}{n}\right],\ \left[\frac{3}{n};\frac{6}{n}\right],\ \dots,\ \left[\frac{3}{n}(i-1);\frac{3}{n}i\right],\ \dots,\ \left[\frac{3}{n}(n-1);3\right]$ выберем точки c_i, $i=1,\dots,n$, так, чтобы они совпадали с правым концом соответствующего частичного отрезка, то есть

$$c_1 = \frac{3}{n},\ \ c_2 = \frac{6}{n},\ \dots\ ,\ c_i = \frac{3}{n}i,\ \dots\ ,\ c_n = 3.$$

3. В каждой из точек $c_1,\ \dots\ , c_n$ вычислим значения функции $f(x) = x^4$:

$$f(c_1) = \left(\frac{3}{n}\right)^4;\ \ f(c_2) = \left(\frac{6}{n}\right)^4;\ \dots;\ \ f(c_i) = \left(\frac{3i}{n}\right)^4;\ \dots; f(c_n) = 3^4.$$

4. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^4 \cdot \frac{3}{n} = \left(\frac{3}{n}\right)^5 \sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(\frac{3}{n}\right)^5 \cdot \left(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4\right)$$

5. Найдем предел интегральной суммы при $n \to \infty$, воспользовавшись результатом из теории пределов (см. [1] стр.69):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{k+1}}{k+1} \qquad (k \in N),$$

тогда получим

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{n}\right)^5\left(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{n}\right)^5 \cdot \frac{n^5}{5}\right] = \frac{3^5}{5}.$$

Значит, $S = \dfrac{3^5}{5}$.

1.1.2. *Работа переменной силы*

Пусть некоторое тело движется по прямой под действием силы P, направленной параллельно оси Ox. Если эта сила постоянна, то есть ее величина одинакова во всех точках x прямой Ox, то работой W силы P является величина $W = Ps$, где s - длина участка, на котором вычисляем работу. Пусть теперь тело движется по той же прямой, но величина действующей силы различна в различных точках его пути. Тогда сила будет функцией переменной x: $P = P(x)$. Найдем работу W, произведенную переменной силой P при перемещении тела из точки a в точку b.

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , $x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$ на n частичных отрезков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... ,$[x_{n-1}; x_n]$ произвольной длины. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольную точку c_i. Сила, действующая на тело в точке c_i равна $P(c_i)$, $i = 1,2,...,n$. Если бы она сохраняла это значение на всем протяжении отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, то ее работа на этом участке равнялась бы

$$W_i = P(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Но на самом деле сила в разных точках отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ имеет различные значения, поэтому ее работа отлична от W_i. Однако если отрезок $[x_{i-1}; x_i]$ очень мал, то на его протяжении сила незначительно отличается от значения в выбранной точке c_i, тогда работа W_i, $i = 1,2,...,n$, будет мало отличаться от действительного значения работы. То же самое справедливо на всех отрезках $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... , $[x_{n-1}; x_n]$. Следовательно,

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} P(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Полученное приближенное значение искомой работы будет тем точнее, чем меньше будут длины отрезков $[x_{i-1}; x_i]$. Поэтому за точное значение возьмем предел, к которому стремится $\sum_{i=1}^{n} W_i$, когда n неограниченно возрастает при $\lambda = \max_{i=1,...,n} \Delta x_i \to 0$:

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

Таким образом, число W равно работе переменной силы, если данный предел существует.

§1.2. Понятие определенного интеграла

Две задачи, рассмотренные в §1.1, взяты из разных областей знаний, но их решения свелись к вычислению пределов некоторых сумм определенного вида. Подобные задачи возникают и в других разделах математики и физики, поэтому эти суммы и их пределы нуждаются в более детальном изучении.

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ определена непрерывная функция $y = f(x)$. Выполним нижеследующие операции:

1. Разобьем произвольным образом отрезок $[a, b]$ точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, ...,$ $x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$ на n частичных отрезков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$. Пусть λ - наибольшая из длин этих отрезков: $\lambda = \max_i \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,...,n$.

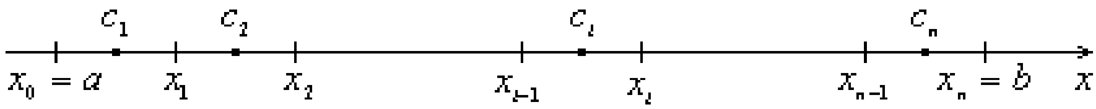


Рис. 11

2. Выберем в каждом из отрезков $\left[x_{i-1}; x_i\right]$ произвольную точку $c_i \in \left[x_{i-1}; x_i\right]$ (рис.11) и вычислим $f(c_i)$, $i = 1,...,n$.
3. Умножим каждое из значений $f(c_i)$ на соответствующее значение $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, получим $f(c_i) \cdot \Delta x_i$, $i = 1,...,n$.
4. Найдем сумму полученных произведений:

$$f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + ... + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \qquad (2.1.1)$$

Сумма вида (2.1.1) называется ***интегральной суммой для функции*** $y = f(x)$ ***при заданном разбиении и выборе точек*** c_i ***в отрезках*** $\left[x_{i-1}; x_i\right]$, $i = 1,...,n$.

5. Неограниченно увеличим количество точек разбиения отрезка $[a,b]$ так, чтобы при этом длины всех частичных отрезков стремились к нулю. Вычислим предел интегральной суммы (2.1.1) при этих условиях:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

<u>Определение 2.1.</u> *Если интегральная сумма (2.1.1) имеет предел при* $\lambda \to 0$, *который не зависит ни от способа разбиения отрезка* $[a,b]$, *ни от выбора точек* c_i *(*$i = 1,...,n$*), то этот предел называют* ***определенным интегралом от функции*** $y = f(x)$ ***на отрезке*** $[a,b]$ *и обозначают* $\int_a^b f(x)dx$. Читается: "интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b". Таким образом, если определенный интеграл существует, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$- подынтегральной функцией, $f(x)dx$- подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, отрезок $[a,b]$ - областью (отрезком) интегрирования.

Отметим, что определенный интеграл является числом в отличие от неопределенного интеграла, который является функцией. *Определенный* *интеграл* зависит от пределов интегрирования и подынтегральной функции, но *не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования*.

<u>Определение 2.2.</u> *Функция* $y = f(x)$, *для которой на отрезке* $[a,b]$ *существует определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *называется* ***интегрируемой*** *на этом отрезке.*

Выясним, при каких условиях определенный интеграл существует.

Заметим, что для неограниченной функции определенный интеграл не существует. Потому что, если $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$, то при любом разбиении она будет неограниченна хотя бы на одном из отрезков $[x_{i-1};x_i]$, и тогда точку c_i из отрезка $[x_{i-1};x_i]$ всегда можно выбрать так, что значение $f(c_i)$ будет сколь угодно большим. Тогда и значение суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$ будет сколь угодно большим, а значит, предел такой суммы не существует.

Таким образом, ограниченность функции является необходимым условием интегрируемости, но не является достаточным условием. Сформулируем без доказательства теоремы, которые устанавливают класс функций, для которых определенный интеграл существует. С доказательством данных теорем можно ознакомиться в [2] – стр.101, [6] – стр.205.

<u>Теорема 2.1.</u> *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на конечном отрезке* $[a,b]$, *то определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *существует.*

<u>Теорема 2.2.</u> *Если ограниченная функция* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *имеет конечное число точек разрыва, то определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *существует.*

<u>Теорема 2.3.</u> *Если ограниченная функция* $y = f(x)$ *монотонна на* $[a,b]$, *то определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *существует.*

Примером функции, для которой определенный интеграл не существует, является функция Дирихле, задаваемая следующим образом:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}.$$

Функция Дирихле имеет бесконечное множество точек разрыва I рода, покажем, что она не является интегрируемой.

Разобьем отрезок интегрирования $[0,1]$ на n частичных отрезков. Каждый из частичных отрезков содержит как рациональные числа, так и иррациональные. Если на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем рациональную точку c_i, то все значения $\chi(c_i)$, $i = 1,...n$, будут равны единице и, следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\chi(c_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}1 = 1, \qquad (2.1.2)$$

где $\lambda = \max_i \Delta x_i$.

Если на каждом частичном отрезке выберем иррациональную точку c_i, то значения $\chi(c_i)$, $i = 1,...n$, будут равны нулю, тогда

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\chi(c_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}0 = 0, \qquad (2.1.3)$$

где $\lambda = \max_i \Delta x_i$.

Из (2.1.2) и (2.1.3) следует, что при одном выборе точек c_i значение предела интегральной суммы равно единице, а для другого выбора это значение равно нулю. Таким образом, предела интегральных сумм для функции $\chi(x)$ не существует, и, следовательно, не существует определенного интеграла для функции $\chi(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Вернемся к задачам, рассмотренным в §1.1. Из задачи о площади криволинейной трапеции (пример 1.1.1) следует ***геометрический смысл определенного интеграла:*** *определенный интеграл от неотрицательной функции $f(x)$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью абсцисс:*

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

На основании задачи о работе переменной силы (пример 1.1.2) также следует, что *работа переменной силы $P(x)$ на отрезке $[a,b]$ равна*:

$$W = \int_a^b P(x)dx.$$

Пример 2.1.2. Вычислить по определению определенного интеграла:

$$\int_0^2 (2x+1)dx.$$

Решение. Функция $f(x) = 2x + 1$ на отрезке $x \in [0;2]$ является непрерывной, поэтому на основании теоремы 2.1 она интегрируема на этом отрезке.

1. Разобьем интервал $x \in [0;2]$ на n частичных отрезков (рис.12). Возьмем эти отрезки равной длины, то есть длина каждого отрезка будет равна $\frac{2}{n}$, границами отрезков будут точки

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{2}{n},\ \ x_2 = \frac{4}{n},\ \dots,\ x_i = \frac{2}{n}i,\ \ x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n},\ \ x_n = \frac{2n}{n} = 2\ .$$

2. На каждом отрезке $\left[0;\frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n};\frac{4}{n}\right], \dots, \left[\frac{2}{n}(i-1);\frac{2}{n}i\right], \dots, \left[\frac{2}{n}(n-1);2\right]$ выберем по точке $c_1 = \frac{1}{n},\ c_2 = \frac{1}{n} + \frac{2}{n},\ \dots,\ c_i = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}(i-1),\ \dots,$ $c_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}(n-1)$. Для удобства вычислений точки c_i возьмем в середине соответствующего частичного отрезка.

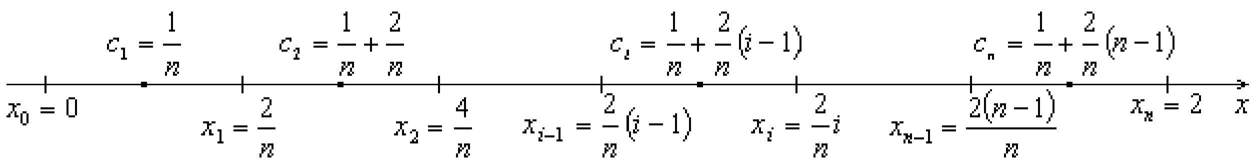


Рис. 12.

3. В каждой из точек $c_1, \dots, c_n$ вычислим значения функции $f(x) = 2x + 1$:

$$f(c_1) = \frac{2}{n} + 1;\ \ f(c_2) = \frac{2\cdot 3}{n} + 1;\ \dots; f(c_i) = \frac{2\cdot(2i-1)}{n} + 1;\ \dots; f(c_n) = \frac{2\cdot(2n-1)}{n} + 1.$$

4. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = f(c_1)\cdot\frac{2}{n} + f(c_2)\cdot\frac{2}{n} + \dots + f(c_n)\cdot\frac{2}{n} =$$

$$= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n} + 1 + \frac{2\cdot 3}{n} + 1 + \dots + \frac{2(2n-1)}{n} + 1\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n} + \frac{2\cdot 3}{n} + \dots + \frac{2(2n-1)}{n} + n\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}(1 + 3 + \dots + (2n-1)) + n\right) = \left| \begin{array}{l} 1 + 3 + \dots + (2n-1) - \textit{сумма } n \textit{ членов} \\ \textit{арифметической прогрессии с } a_1 = 1 \\ \textit{и } d = 2,\ \textit{тогда } 1 + 3 + \dots + (2n-1) = \\ = \frac{1 + 2n - 1}{2}\cdot n = n^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\cdot n^2 + n\right) = 4 + 2 = 6.$$

5. Вычислим предел интегральной суммы при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} 6 = 6.$$

Значит, $\int\limits_0^2 (2x+1)dx = 6$.

§1.3. Основные свойства определенного интеграла

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и k – произвольное постоянное число, то справедливо равенство

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

то есть постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

Доказательство. Рассмотрим интеграл из левой части равенства:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = \left|\begin{matrix}\textit{по определению определенного}\\ \textit{интеграла}\end{matrix}\right| = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\cdot f(c_i)\cdot\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left(k\cdot\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i\right) = \left|\begin{matrix}\textit{по свойству}\\ \textit{предела}\end{matrix}\right| = k\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i =$$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{по определению определенного}\\ \textit{интеграла}\end{matrix}\right| = k\int_a^b f(x)dx.$$

Получили интеграл из правой части равенства, значит, равенство справедливо.

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда справедливо равенство

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx,$$

то есть определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждой из этих функций.

Доказательство. Рассмотрим интеграл из левой части равенства:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \begin{vmatrix} \text{по определению определенного} \\ \text{интеграла} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} (f_1(c_i)+f_2(c_i))\cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f_1(c_i)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(c_i)\cdot \Delta x_i \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{по свойству} \\ \text{предела} \end{vmatrix} = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(c_i)\cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(c_i)\cdot \Delta x_i = \begin{vmatrix} \text{по определению} \\ \text{определенного} \\ \text{интеграла} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Получили интеграл из правой части равенства, значит, равенство справедливо.

Что и требовалось доказать.

Если подынтегральная функция является суммой конечного числа функций, то справедливо следующее утверждение.

<u>Следствие.</u> Если функции $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то имеет место равенство:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots \int_a^b f_n(x)dx.$$

<u>Доказательство.</u> Докажем утверждение следствия методом математической индукции.

На первом шаге (при n=2) утверждение верно на основании свойства 2.

Предположим, что оно верно для некоторого $n = k$, то есть выполняется соотношение:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots \int_a^b f_k(x)dx.$$

Докажем, что из этого следует справедливость равенства при $n = k+1$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_{k+1}(x))dx = \begin{vmatrix} \text{обозначим} \\ g(x) = f_1(x)+\ldots+f_k(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_a^b (g(x)+f_{k+1}(x))dx = \begin{vmatrix} \text{по свойству 2} \\ \text{определенного интеграла} \end{vmatrix} = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b f_{k+1}(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f_1(x)+\ldots+f_k(x))dx + \int_a^b f_{k+1}(x)dx = \begin{vmatrix} \text{по предположению} \\ \text{индукции при } n=k \end{vmatrix} =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots \int_a^b f_{k+1}(x)dx.$$

Таким образом, из истинности утверждения на шаге k следует истинность утверждения на шаге $k+1$. Значит, по методу математической индукции равенство справедливо для любого $n \in N$.

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 3.</u> Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

то есть при перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак на противоположный.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим отдельно вычисление интегралов левой и правой частей равенства.

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} \textit{по определению} \\ \textit{определенного} \\ \textit{интеграла} \end{array} \right| = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$.

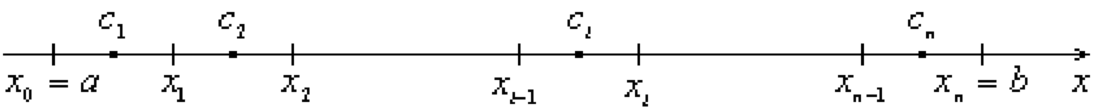


Рис. 13

Рассмотрим $\int_b^a f(x)dx$. При вычислении этого интеграла по определению возьмем разбиение интервала $[b;a]$ теми же точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, что и в случае интеграла $\int_a^b f(x)dx$, и точки c_i выберем те же самые, так как если определенный интеграл существует, то предел интегральной суммы не зависит ни от способа разбиения на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i, $i = 1, \ldots, n$, в них (рис.13). Тогда имеем

$$\int_b^a f(x)dx = \left| \begin{array}{l} \textit{по определению определенного} \\ \textit{интеграла} \end{array} \right| = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_{i-1} - x_i) = \lim_{\lambda \to 0}\left(-\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})\right) = -\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Таким образом, интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^a f(x)dx$ отличаются только знаком, то есть $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Что и требовалось доказать.

<u>***Свойство 4***</u>***. (Свойство аддитивности определенного интеграла).*** Если функция $f(x)$ интегрируема на $[d_1; d_2]$ и $a, b, c \in [d_1; d_2]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

<u>Доказательство.</u> 1) Рассмотрим случай, когда $a < c < b$.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ разобьем отрезок $[a;b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ так, чтобы одна из точек разбиения совпала с точкой c. Это можно сделать, так как $\int_a^b f(x)dx$ существует, значит, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки. Пусть $c = x_m$. Докажем свойство.

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} \textit{по определению определенного} \\ \textit{интеграла} \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\sum_{i=1}^{m} f(c_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \right) = \left| \begin{matrix} \textit{по свойству} \\ \textit{предела} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(c_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) Рассмотрим случай, когда $c \notin [a;b]$, пусть, например, $a < b < c$.

Тогда на основании случая 1) имеем

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

то есть $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

На основании свойства 3 определенного интеграла $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$,

значит, $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Таким образом, свойство аддитивности 4 справедливо для любого расположения точки c при условии существования интегралов на всех трех отрезках $[a;b]$, $[b;c]$, $[a;c]$.

Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация свойства 4.

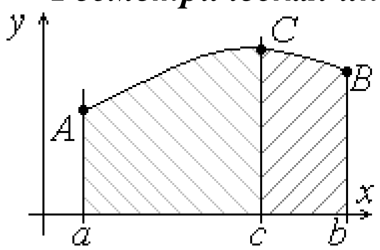


Рис. 14

Площадь криволинейной трапеции $aABb$ представляет собой сумму площадей трапеций $aACc$ и $cCBb$ (рис.14).

Пример 2.1.3. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-1,2]$, задана следующим образом: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad -1 \le x < 0 \\ 2x+1, & \text{при} \quad 0 < x \le 2 \end{cases}.$

Вычислить $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

Решение. Функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[-1,2]$ и непрерывна во всех точках отрезка, за исключением $x = 0$, в которой функция имеет разрыв I рода. Следовательно, на основании теоремы 2.2, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-1,2]$. Вычислим интеграл:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \left| \begin{matrix} \textit{на основании} \\ \textit{свойства аддитивности} \end{matrix} \right| = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 0 \cdot dx +$$

$$+ \int_{0}^{2} (2x+1)dx = 0 + 6 = 6, \text{ так как}$$

$\int_{-1}^{0} 0 \cdot dx = 0$ (по определению определенного интеграла),

$\int\limits_0^2 (2x+1)dx = 6$ (см. пример 2.1.2).

<u>Свойство 5.</u> Определенный интеграл с совпадающими пределами интегрирования равен нулю, то есть справедливо равенство

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

<u>Доказательство.</u> Для вычисления определенного интеграла по определению необходимо разбить отрезок интегрирования на частичные отрезки точками $x_0, x_1, ..., x_n$ и вычислить $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Но так как $x_0 = a$, $x_n = a$ и точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ лежат внутри отрезка $[a;a]$, то $x_0 = x_1 = ... = x_n = a$, значит, $\Delta x_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$. Таким образом,

$$\int\limits_a^a f(x)dx = \left| \begin{matrix} \textit{по определению определенного} \\ \textit{интеграла} \end{matrix} \right| = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot 0 = \lim_{\lambda \to 0} 0 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 6.</u> Если функция $f(x)$ принимает значения $f(x) = 1$ во всех точках отрезка $[a;b]$, то определенный интеграл от $f(x)$ на $[a;b]$ равен длине отрезка $[a;b]$:

$$\int\limits_a^b dx = b - a, \quad \text{где } a < b.$$

<u>Доказательство.</u> Для вычисления определенного интеграла разобьем отрезок $[a;b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ и выберем точки $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Так как $f(x) \equiv 1$ на всем $[a;b]$, то $f(c_i) = 1$ $(i = 1, ..., n)$. Тогда имеем

$$\int\limits_a^b dx = \left| \begin{matrix} \textit{по определению определенного} \\ \textit{интеграла} \end{matrix} \right| = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + ... + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) = \lim_{\lambda \to 0} (x_n - x_0) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} (b - a) = \left| \begin{matrix} \textit{по свойству} \\ \textit{предела} \end{matrix} \right| = b - a.$$

Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация свойства 6.

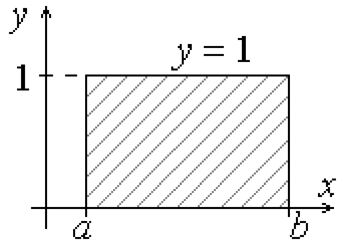


Рис. 15

Если на всем отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ равна единице $(f(x)=1)$, то $\int_a^b dx$ представляет собой площадь прямоугольника с высотой, равной 1, и основанием $b-a$ (рис.15), таким образом

$$\int_a^b dx = 1\cdot(b-a) = b-a.$$

§1.4. Свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами

<u>Свойство 7.</u> Если функция $f(x)$ интегрируема и сохраняет знак на отрезке $[a;b]$, где $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx$ имеет тот же знак, что и функция $f(x)$.

<u>Доказательство.</u> По определению имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

а) Пусть $f(x)\geq 0$ на $[a;b]$.

Так как $a<b$, то $\Delta x_i>0$. Если $f(x)\geq 0$, то $f(c_i)\geq 0$. Значит, $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \geq 0$, так как все слагаемые этой суммы неотрицательны. По свойству предела следует, что предел интегральной суммы также неотрицателен, то есть

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

б) Пусть $f(x)\leq 0$ на $[a;b]$.

Так как $a<b$, то $\Delta x_i>0$. Если $f(x)\leq 0$, то $f(c_i)\leq 0$. Значит, $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \leq 0$, так как все слагаемые суммы неположительны. По свойству предела следует, что предел интегральной суммы также неположителен, то есть

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

Таким образом, в обоих случаях определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет такой же знак, что и подынтегральная функция $f(x)$.

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 8.</u> (Интегрирование неравенств). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, при этом для любого $x \in [a;b]$ справедливо неравенство $f(x) \le g(x)$, тогда верно неравенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx \quad (a < b).$$

<u>Доказательство.</u> Так как

$$f(x) \le g(x),$$

то

$$f(x) - g(x) \le 0.$$

Тогда при $a < b$ по свойству 7 определенного интеграла получаем

$$\int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx \le 0.$$

По свойству 2 определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx \le 0.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация свойства 8.

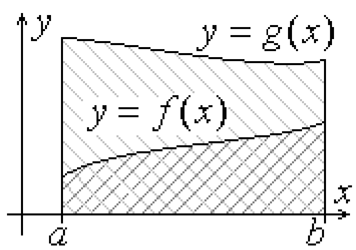


Рис. 16

Если на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают только неотрицательные значения, то есть $0 \le f(x) \le g(x)$, то тогда площадь криволинейной трапеции для функции, лежащей выше, больше площади криволинейной трапеции для функции, лежащей ниже (рис.16).

<u>Свойство 9.</u> (Оценка определенного интеграла). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, и при этом m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a;b]$ $(a < b)$, тогда справедливо неравенство

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

<u>Доказательство.</u> Из определения наибольшего и наименьшего значений функции следует, что если m, M являются наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$, то для любого $x \in [a;b]$ справедливо неравенство

$$m \le f(x) \le M .$$

Тогда по свойству 8 определенного интеграла получаем

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx .$$

На основании свойств 1 и 6 определенного интеграла имеем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация свойства 9.

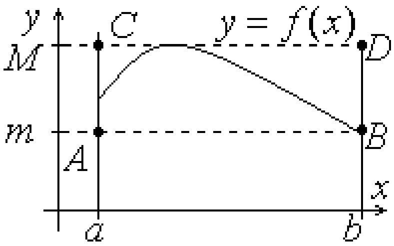


Рис. 17

Если на отрезке $[a;b]$ $f(x) \ge 0$ (рис.17), то значение площади криволинейной трапеции заключено между значениями площадей прямоугольников $aABb$ с высотой m и $aCDb$ с высотой M (трапеция и прямоугольники имеют общее основание – отрезок $[a;b]$).

Пример 2.1.4. Оценить значение определенного интеграла:

а) $\int_1^3 \ln xdx$; б) $\int_{-1}^1 3^{-x}dx$; в) $\int_1^4 (4x - x^2 - 3)dx$.

Решение.

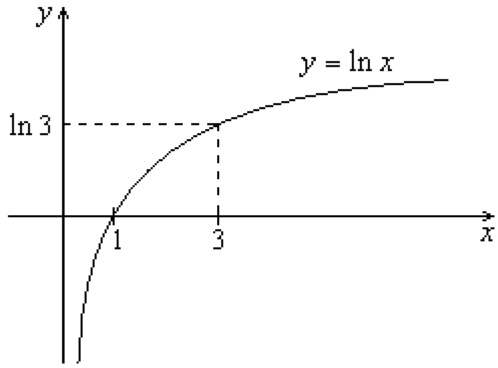


Рис.18

а) Подынтегральная функция $y = \ln x$ является возрастающей на всей области определения (рис.18). При этом если $1 \le x \le 3$, то $\ln 1 \le \ln x \le \ln 3$. То есть для функции $y = \ln x$ на отрезке $[1,3]$: $m = \ln 1 = 0$, $M = \ln 3$. Тогда на основании свойства 9 получаем:

$$0 \cdot 2 \le \int_1^3 \ln xdx \le \ln 3 \cdot 2 \quad \Rightarrow$$

$$0 \le \int_1^3 \ln xdx \le 2\ln 3 .$$

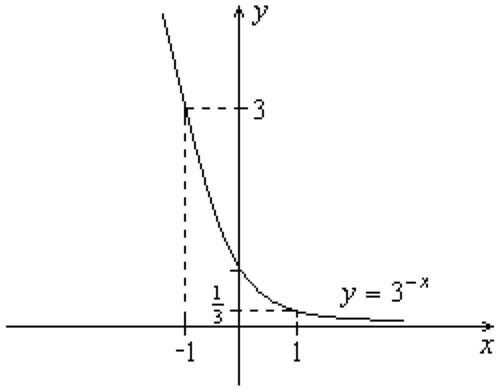


Рис.19

б) Так как $3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, то подынтегральная функция $y=3^{-x}$ является убывающей на всей области определения (рис.19). Если $-1\le x\le 1$, то $3^{-1}\le 3^{-x}\le 3^{-(-1)}$. То есть для функции $y=3^{-x}$ на отрезке $[-1{,}1]$: $m=\frac{1}{3}$, $M=3$. Тогда на основании свойства 9 получаем:

$$\frac{1}{3}\cdot 2\le\int_{-1}^{1}3^{-x}\,dx\le 3\cdot 2\quad\Rightarrow\quad\frac{2}{3}\le\int_{-1}^{1}3^{-x}\,dx\le 6.$$

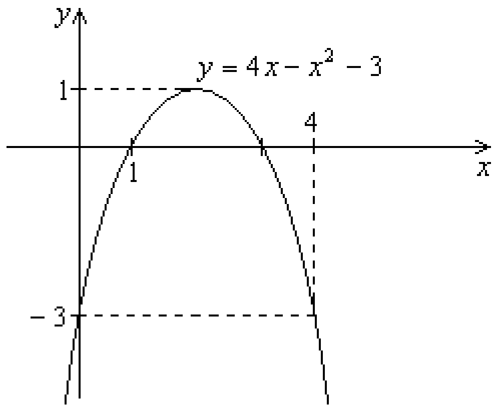


Рис.20

в) Построим график функции $y=4x-x^2-3$ (рис.20). По графику функции видно, что на отрезке $[1{,}4]$ наименьшее значение $m=y(4)=-3$, наибольшее значение $M=y(2)=1$. Таким образом, на основании свойства 9 получаем:

$$-3\le 4x-x^2-3\le 1\quad\Rightarrow$$

$$-3\cdot 3\le\int_{1}^{4}(4x-x^2-3)dx\le 1\cdot 3\quad\Rightarrow$$

$$-9\le\int_{1}^{4}(4x-x^2-3)dx\le 3.$$

Пример 2.1.5. Доказать справедливость неравенства: $\int_{0,1}^{1}x^x\,dx<\int_{0,1}^{0,2}e^{x^2+3}dx$.

Решение. Оценим значения интегралов из левой и правой частей неравенства на основании свойства 9.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^x$ на отрезке $x\in[0{,}1;1]$. С помощью логарифмического дифференцирования вычислим производную:

$$\ln y=\ln x^x\quad\Rightarrow\quad\ln y=x\ln x;$$

$$(\ln y)'=(x\ln x)'\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1\quad\Rightarrow\quad y'=(\ln x+1)\cdot x^x.$$

Если $y' = 0$, то $\ln x + 1 = 0$, значит, $x = e^{-1}$ - критическая точка функции $y = x^x$. Так как $y(0{,}1) \approx 0{,}79$, $y(1) = 1$, $y\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0{,}69$, то $m = y\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$, $M = y(1) = 1$. На основании свойства 9 получаем:

$$0{,}9 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \le \int_{0,1}^{1} x^x dx \le 0{,}9 \cdot 1.$$

То есть значение интеграла из левой части не превосходит 0,9.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = e^{x^2+3}$ на отрезке $x \in [0{,}1;\ 0{,}2]$. Вычислим производную:

$$\left(e^{x^2+3}\right)' = 2xe^{x^2+3}.$$

Если $y' = 0$, то $2x = 0$, значит, $x = 0$ - критическая точка и на интервале $x \ge 0$ функция $y = e^{x^2+3}$ возрастает. Поэтому $m = y(0{,}1) = e^{3,01} \approx 20{,}29$, $M = y(0{,}2) = e^{3,04} \approx 20{,}91$. На основании свойства 9 получаем:

$$0{,}1 \cdot e^{3,01} \le \int_{0,1}^{0,2} e^{x^2+3} dx \le 0{,}1 \cdot e^{3,04}.$$

Итак,

$$\int_{0,1}^{1} x^x dx \le 0{,}91 < 20{,}91 \le \int_{0,1}^{0,2} e^{x^2+3} dx.$$

Таким образом, неравенство доказано.

Отметим, что неопределенные интегралы для $\int x^x dx$ и $\int e^{x^2+3} dx$ не берутся в элементарных функциях. Следовательно, доказать предложенное неравенства непосредственным вычислением первообразных не представляется возможным.

Для закрепления изученного материала предлагаем Вам решить следующие задачи **самостоятельно.**

Вычислить интегралы по определению:

207. $\int_{1}^{2} (2 - x) dx$. **208.** $\int_{0}^{1} x^2 dx$. **209.** $\int_{1}^{3} x^3 dx$.

210. $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2}$. **211.** $\int_{0}^{4} x(2x^2 + 1) dx$. **212.** $\int_{0}^{1} e^x dx$.

213. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, при этом $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$. Доказать, что $f(x) = 0$ во всех точках отрезка $[a,b]$.

Доказать, что для функции $f(x)$ существует на заданном отрезке определенный интеграл и вычислить его, используя результаты задач 207-212 и свойства определенного интеграла:

214. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & \text{при} \quad 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{4}, & \text{при} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}, \qquad [0,4].$

215. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{при} \quad -2 \le x < 0 \\ e^x, & \text{при} \quad 0 \le x < 1 \\ x^3, & \text{при} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}, \qquad [-2,3].$

Доказать равенства:

216. $\int\limits_2^3 \frac{x^4 - 1}{x + 1} dx = \int\limits_3^2 (x^2 + 1)(1 - x)dx.$

217. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6} \mathrm{tg}^5\, x \cos x\, dx = -\int\limits_{\pi/6}^{\pi/12} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)^4 dx.$

218. Используя свойства 4 и 8 определенного интеграла, доказать неравенство:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \le \int\limits_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

На основании свойства 9 оценить значение интеграла:

219. $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx.$

220. $\int\limits_3^7 \frac{1}{x - 2} dx.$

221. $\int\limits_{\pi/2}^{8\pi/7} \sin x dx.$

222. $\int\limits_{-2}^{1} (x^2 - 1)dx.$

223. $\int_0^3 (-x^2+2x+3)dx$.

224. $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

225. $\int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x}dx$.

226. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.

Доказать справедливость неравенств:

227. $\int_{0,25}^{0,75} \ln(1-x^2)dx \le \int_0^{\pi/6} \sin^{10} x\cdot dx$.

228. $\int_0^{0,5} \sqrt[4]{1+x^2}\,dx < \int_{1,5}^2 \left(\sqrt{x}\right)^{x^2} dx$.

§1.5. Теорема о среднем для определенного интеграла

Теорема 2.4. ***(Теорема о среднем).*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c\in[a,b]$ $(a<b)$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна, то по свойству 9 определенный интеграл имеет оценку

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

где m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Разделим все части этого неравенства на $b-a$, не меняя знаков неравенства, так как $b-a>0$:

$$m\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Функция $f(x)$ непрерывна, поэтому по теореме Вейерштрасса непрерывная функция на отрезке принимает все значения, заключенные между ее наименьшим m и наибольшим M значениями. Следовательно, найдется точка $c\in[a,b]$ такая, что функция примет значение $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \text{и} \qquad m\le f(c)\le M.$$

Из последнего равенства и вытекает утверждение теоремы.

Что и требовалось доказать.

Число $f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ назовем ***средним значением*** непрерывной ***функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a,b]$.

Геометрический смысл теоремы о среднем.

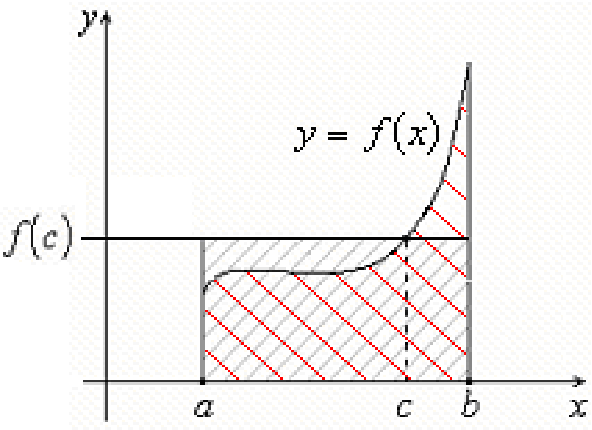


Рис. 21

Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения функции $f(x)$ в некоторой точке $x=c$ на длину отрезка $[a,b]$. Поэтому среднее значение функции является высотой прямоугольника, у которого основание равно $b-a$, при этом площадь этого прямоугольника равна площади криволинейной трапеции (рис.21).

Пример 2.1.6. Найти среднее значение функции $y=x^4+1$ на отрезке $x\in[-1;2]$.

Решение. Вычислим среднее значение $f(c)$ функции:

$$f(c)=\frac{1}{2-(-1)}\cdot\int\limits_{-1}^{2}\left(x^4+1\right)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}x^4dx+\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{2}+\frac{1}{3}x\Big|_{-1}^{2}=\frac{1}{15}\left(2^5-(-1)^5\right)+$$

$$+\frac{1}{3}(2-(-1))=\frac{1}{15}\cdot 33+\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{11}{5}+1=\frac{16}{5}.$$

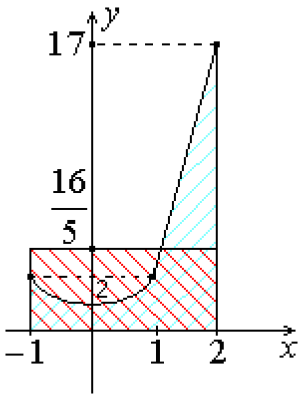


Рис. 22

Проиллюстрируем этот результат геометрически (рис.22). Площадь криволинейной трапеции под графиком функции $y=x^4+1$ на отрезке $x\in[-1;2]$ равна площади прямоугольника с высотой $f(c)=\frac{16}{5}$ на том же отрезке $x\in[-1;2]$.

§1.6. Теорема о производной от интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $x\in[a,b]$ функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,x]$, а значит, интегрируема на нем. Известно, что определенный интеграл является постоянным числом, то есть $\int_a^b f(x)dx = I = const$. Если заменить верхний предел на переменную величину x, то результат интегрирования не будет числом, а будет зависеть от x. Рассмотрим функцию $\Phi(x)$, определяемую равенством

$$\int_a^x f(x)dx = \Phi(x). \tag{2.1.4}$$

Значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, поэтому (2.1.4) можно записать в виде:

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x). \tag{2.1.5}$$

Функция $\Phi(x)$ является функцией переменной x, $x \in [a,b]$.

<u>Теорема 2.5.</u> *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\Phi(x)$ также является непрерывной функцией на этом же отрезке.*

<u>Доказательство.</u> Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), тогда $\Phi(x)$ получит приращение $\Delta\Phi(x)$:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \left| по\ \ (2.1.5) \right| = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} по\ свойству\ 4 \\ определенного\ интеграла \end{matrix} \right| = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} по\ теореме\ о\ среднем\ для \\ определенного\ интеграла \end{matrix} \right| = f(\xi)\cdot(x+\Delta x - x) = f(\xi)\cdot\Delta x,$$

где точка $\xi \in (x; x+\Delta x)$.

Таким образом,

$$\Delta\Phi(x) = f(\xi)\cdot\Delta x. \tag{2.1.6}$$

Устремим Δx к нулю, тогда имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x) = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)\cdot\Delta x = 0.$$

Из последнего равенства следует непрерывность функции $\Phi(x)$.

Что и требовалось доказать.

<u>Теорема 2.6.</u> *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для всех $x \in [a,b]$ функция $\Phi(x)$, определяемая равенством (2.1.5), дифференцируема и при этом справедливо равенство*

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

то есть производная от интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной в точке x.

Доказательство. Выпишем левую часть равенства и преобразуем ее

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = \left|\begin{matrix}\textit{по} \\ (2.1.5)\end{matrix}\right| = \frac{d}{dx}(\Phi(x)) =$$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{так как } \Phi(x) \textit{ непрерывна по теореме } 2.5, \\ \textit{то по определению производной имеем}\end{matrix}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{на основании } (2.1.6), \\ \textit{если } \xi \in (x; x+\Delta x)\end{matrix}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \left|\begin{matrix}\textit{так как } \Delta x \to 0 \\ \textit{и } \xi \in (x; x+\Delta x), \\ \textit{то } \xi \to x\end{matrix}\right| = f(x).$$

Таким образом,

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Что и требовалось доказать.

Следовательно, всякая непрерывная функция имеет первообразную. Интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции.

Геометрическая интерпретация теоремы 2.6.

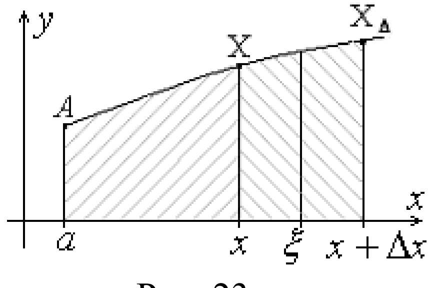


Рис. 23

Если $f(t)$ - неотрицательная на $[a,b]$ функция, то $\Phi(x)$ - это площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,x]$. Приращение $\Delta I = S_{aAX_\Delta x+\Delta x} - S_{aAXx} = f(\xi)\Delta x$ – площадь криволинейной трапеции с основанием Δx, а значение производной $(\Phi(x))' = f(x)$ равно длине отрезка xX (рис.23).

Пример 2.1.7. Доказать, что

1) При $x \to \infty$ величины $\int\limits_0^x e^{t^2} dt$ и $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ являются эквивалентными бесконечно большими;

2) При $x \to 0$ величины $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ и x являются эквивалентными бесконечно малыми.

<u>Решение.</u> 1) Докажем, что предел отношения этих величин при $x \to \infty$ равен 1

Так как функция e^{t^2} положительна для любых значений t и является возрастающей, то $\int\limits_0^x e^{t^2} dt \to \infty$ при $x \to \infty$. Кроме того, при $x \to \infty$ имеем $e^{x^2} \to \infty$ и $2x \to \infty$.

Вычислим требуемый предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\int\limits_0^x e^{t^2} dt}{\dfrac{e^{x^2}}{2x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x\int\limits_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}\right) = \left|\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to\infty} 2x\int\limits_0^x e^{t^2} dt = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2} = \infty; \\ \textit{правило Лопиталя} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{d}{dx}\left(2x\int\limits_0^x e^{t^2} dt\right)}{\dfrac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2} dt + 2x\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2} dt\right)}{2xe^{x^2}}\right) = \left|\begin{array}{c} \textit{по} \\ \textit{теореме} \\ 2.6 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2} dt}{2xe^{x^2}} + \lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x e^{t^2} dt}{xe^{x^2}} + 1 = \left|\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^x e^{t^2} dt = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} xe^{x^2} = \infty; \\ \textit{правило Лопиталя} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2} dt\right)}{\dfrac{d}{dx}\left(xe^{x^2}\right)} + 1 = \left|\begin{array}{c} \textit{по} \\ \textit{теореме} \\ 2.6 \end{array}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Так как предел отношения величин при $x \to \infty$ равен 1, значит, они эквивалентны.

2) Докажем, что предел отношения величин $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ и x при $x \to 0$ равен 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_0^x \cos t^2 dt=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 0} x=\infty;\\ \textit{правило Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x \cos t^2 dt\right)}{\frac{d}{dx}(x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{по}\\ \textit{теореме}\\ 2.6\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1.$$

Так как предел отношения величин $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ и x при $x\to 0$ равен 1, значит, они эквивалентны.

Для закрепления материала главы решите **самостоятельно** следующие задачи.

Найти среднее значение функции на заданном отрезке:

229. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ на $[0;4]$.

230. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{\ln x+3}}$ на $[1;e]$.

231. $f(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$ на $[0;2]$.

232. $f(x)=\dfrac{(x-4)^2}{x^2+16}$ на $[-1;0]$.

233. $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$ на $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

234. $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{(e^{3x}+3)^4}$ на $[-2;3]$.

Найти экстремумы функции $\Phi(x)$:

235. $\Phi(x)=\int\limits_0^x \dfrac{2t+1}{t^2+t+2}dt$.

236. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t^2-1)e^{t^2}dt$.

237. Найти точки перегиба графика функции $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$.

Доказать эквивалентность величин:

238. $\int\limits_0^x \arccos t^4 dt$ и $x^2+\dfrac{\pi}{2}x$ при $x\to +0$.

239. $\int\limits_0^x \ln(t^2+2t+3)dt$ и $2x(\ln x-1)$ при $x\to\infty$.

Глава 2. *Методы вычисления определенного интеграла*

§2.1. Формула Ньютона-Лейбница

<u>Теорема 2.7.</u> *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - какая-либо ее первообразная на $[a,b]$, тогда справедлива* ***формула Ньютона-Лейбница****:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

<u>Доказательство.</u> Так как $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$, то на основании теоремы 2.6 об интеграле с переменным верхним пределом интеграл $\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для функции $f(x)$. По условию доказываемой теоремы $F(x)$ также является первообразной для $f(x)$. Из теории неопределенных интегралов известно, что разность между двумя первообразными является постоянной величиной (Раздел I, глава 1, §1.1, теорема 1.1), значит,

$$\int_a^x f(t)dt - F(x) = C,$$

тогда
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \qquad (2.2.1)$$

Найдем значение постоянной в (2.2.1). Так как равенство (2.2.1) справедливо для всех $x \in [a,b]$, то возьмем значение $x = a$, тогда получим

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C.$$

Определенный интеграл с равными верхним и нижним пределами интегрирования по свойству 5 равен нулю, поэтому

$$0 = F(a) + C,$$

отсюда
$$C = -F(a).$$

Подставим теперь в равенство (2.2.1) значение $x = b$. Учитывая найденное значение *C,* получим:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

или
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(определенный интеграл не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования).

Что и требовалось доказать.

Из теоремы 2.7 следует, что определенный интеграл равен приращению первообразной на интервале интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница связывает первообразную данной функции и определенный интеграл и является основной формулой интегрального исчисления. Значение формулы Ньютона-Лейбница очень велико, так как она дает основной удобный способ вычисления определенного интеграла в том случае, когда $f(x)$ имеет первообразную в элементарных функциях. Задача вычисления определенных интегралов теперь полностью сводится к отысканию первообразных, то есть к методам вычисления неопределенных интегралов. Итак, чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, надо найти ее первообразную $F(x)$, затем вычислить разность $F(b)-F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a,b]$.

Обозначим $F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, тогда формула Ньютона-Лейбница записывается в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Пример 2.2.1. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^2 \left(x+3^x\right)dx$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$.

Решение.

а) $\int_1^2 \left(x+3^x\right)dx = \left|\begin{matrix}\textit{свойство } 2\\ \textit{определенного интеграла}\end{matrix}\right| = \int_1^2 xdx + \int_1^2 3^x dx =$

$= \left|\begin{matrix}\textit{формула Ньютона}-\\ \textit{Лейбница}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(2^2-1^2\right)+\frac{1}{\ln 3}\left(3^2-3^1\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\ln 3}$.

б) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} = \left|\begin{matrix}\textit{формула Ньютона}-\\ \textit{Лейбница}\end{matrix}\right| = \left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{3}-\operatorname{arctg}\frac{0}{3}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{12}$.

Для закрепления материала параграфа вычислите **самостоятельно** следующие интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

240. $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{7+x^3}$.

241. $\int\limits_\pi^{3\pi} \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{4}}$.

242. $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

243. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{5x-3}$.

244. $\int\limits_1^{2/3} \sin(2-3x)dx$.

245. $\int\limits_0^4 e^{\frac{1}{4}x-2}dx$.

246. $\int\limits_{\sqrt{7}/3}^{\sqrt{7}/\sqrt{3}} \frac{dx}{7+9x^2}$.

247. $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

248. $\int\limits_\pi^{6\pi} \cos\left(\frac{x}{3}-\pi\right)dx$.

249. $\int\limits_{-7}^{-9/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x+1)^2}}$.

250. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 9} \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$.

251. $\int\limits_{-1}^{1} x^3\sqrt{3-x^4}dx$.

252. $\int\limits_1^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

253. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\cdot\sqrt[4]{2-\cos^2 x}dx$.

254. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$.

255. $\int\limits_e^{e^8} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$.

256. $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} \frac{(1-\operatorname{tg} x)^2}{\cos^2 x}dx$.

257. $\int\limits_2^3 \frac{x^2dx}{25+x^6}$.

258. $\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}}$.

259. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

§2.2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ сделана подстановка $x=\varphi(t)$.

Теорема 2.8. *Если функция $x=\varphi(t)$ и ее производная $x'=\varphi'(t)$ непрерывны при $t\in[\alpha,\beta]$, при этом $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и множеством значений функции $\varphi(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ является отрезок $[a,b]$, тогда справедливо равенство:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2.2.2}$$

Это равенство определяет ***формулу замены переменной в определенном интеграле***.

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то есть $F'(x)=f(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{2.2.3}$$

Рассмотрим подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, удовлетворяющая условиям теоремы при $t\in[\alpha,\beta]$. На основании правила вычисления производной сложной функции получаем

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Значит, $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$. Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a). \tag{2.2.4}$$

Так как правые части (2.2.3) и (2.2.4) равны, то равны и левые, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Часто вместо описанной подстановки $x=\varphi(t)$ удобно применить подстановку вида $t=g(x)$. Удобство подстановки такого типа проиллюстрировано примером 2.2.3.

Пример 2.2.2. Вычислить $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}}$.

Решение. Для вычисления интеграла сделаем подстановку $x=2\operatorname{tg}t$. Тогда $dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}$. Если $x=2$, то $2=2\operatorname{tg}t$, следовательно, $t=\dfrac{\pi}{4}$. Если $x=2\sqrt{3}$, то $2\sqrt{3}=2\operatorname{tg}t$, следовательно, $t=\dfrac{\pi}{3}$.

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}} = \left|\begin{matrix} x=2\operatorname{tg}t \\ dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}\end{matrix}\right| = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{2\operatorname{tg}t\cdot\sqrt{(2\operatorname{tg}t)^2+4}}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}\cdot\cos^2 t} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right|\right) =$$

$$=\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4}}=\sqrt{2}-1\right|=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{3}}-\ln(\sqrt{2}-1)\right).$$

Пример 2.2.3. Вычислить: $\int\limits_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}}{e^x+2}dx$.

Решение. Для вычисления интеграла сделаем подстановку $t=e^x+2$. Тогда $dt=e^x dx$ или $dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t-2}$. Если $x=0$, то $t=e^0+2=3$. Если $x=\ln 3$, то $t=e^{\ln 3}+2=5$. Таким образом,

$$\int\limits_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}}{e^x+2}dx=\int\limits_3^5\frac{(t-2)^3}{t}\cdot\frac{dt}{t-2}=\int\limits_3^5\frac{(t-2)^2}{t}dt=\int\limits_3^5\frac{t^2-4t+4}{t}dt=\int\limits_3^5 tdt-4\int\limits_3^5 dt+$$

$$+4\int\limits_3^5\frac{1}{t}dt=\left(\frac{t^2}{2}-4t+4\ln|t|\right)\Bigg|_3^5=\frac{25}{2}-20+4\ln 5-\frac{9}{2}+12-4\ln 3=4\ln\frac{5}{3}.$$

Для закрепления материала параграфа вычислите **самостоятельно** следующие интегралы с помощью замены переменной:

260. $\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}-3}$.

261. $\int\limits_{-4}^1\frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$.

262. $\int\limits_{-3/4}^0\frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$.

263. $\int\limits_0^4\frac{x^2+\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}}dx$.

264. $\int\limits_{2\pi/3}^{3\pi/2}\sin^3 2x\,dx$.

265. $\int\limits_{-1/3}^2\frac{xdx}{\sqrt[3]{3x+2}}$.

266. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^3-8}$.

267. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^2}dx$.

268. $\int\limits_e^{e^2}\frac{\ln^5 x\,dx}{x(1+\ln^3 x)}$.

269. $\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}x\cdot\ln\cos x\cdot dx$.

270. $\int\limits_{1/4}^{1/2}\frac{\left(\arccos\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

271. $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$.

272. $\int\limits_2^7 \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$.

273. $\int\limits_{-8}^0 \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$.

274. $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

275. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

276. $\int\limits_1^2 \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$.

277. $\int\limits_{-1}^3 \frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$.

278. $\int\limits_0^{1/4} \frac{4x-3}{2x^2-x+2}dx$.

279. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^2}dx$.

280. $\int\limits_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{\sqrt[4]{x-\sin x}}dx$.

281. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

282. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6}dx$.

§2.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

<u>Теорема 2.9.</u> *Если функции $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны вместе со своими производными $U'(x)$, $V'(x)$ на отрезке $[a,b]$, то справедлива* ***формула интегрирования по частям*** *для определенного интеграла:*

$$\int\limits_a^b UdV = (UV)\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU \qquad (2.2.5)$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим произведение функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ и найдем его производную по правилам дифференцирования:

$$(UV)' = U'V+UV'.$$

Значит, функция UV является первообразной функции $U'V+UV'$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница справедливо равенство

$$\int\limits_a^b (U'V+UV')dx = (UV)\Big|_a^b.$$

На основании свойства 2 определенного интеграла преобразуем левую часть этого равенства:

$$\int\limits_a^b U'Vdx + \int\limits_a^b UV'dx = (UV)\Big|_a^b.$$

Так как $U'dx = dU$, $V'dx = dV$ по определению дифференциала функции, то получаем

$$\int_a^b VdU + \int_a^b UdV = \left(UV\right)\Big|_a^b .$$

То есть
$$\int_a^b UdV = \left(UV\right)\Big|_a^b - \int_a^b VdU .$$

Что и требовалось доказать.

Для применения формулы (2.2.5) необходимо подынтегральное выражение разбить на два множителя U и dV, затем найти $dU = U'dx$ и $V = \int dV$. После подстановки найденных функций в формулу (2.2.5) остается вычислить интеграл из правой части равенства. Формулу (2.2.5) целесообразно применять тогда, когда новый получившийся интеграл более прост для вычисления, чем первоначальный.

Формулу интегрирования по частям для определенных интегралов можно использовать неоднократно. При выборе множителей U и dV рекомендуется использовать указания из теории неопределенных интегралов.

Пример 2.2.4. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\pi} (2 - x)\cos x dx$.

Решение.
$$\int_0^{\pi} (2-x)\cos x dx = \left| \begin{array}{l} U = 2 - x; \quad dV = \cos x dx; \\ dU = (2-x)' dx = -dx; \\ V = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = \left((2-x)\cdot \sin x\right)\Big|_0^{\pi} -$$

$$- \int_0^{\pi} \sin x \cdot (-dx) = (2-\pi)\cdot \sin\pi - (2-0)\cdot \sin 0 + \int_0^{\pi} \sin x dx = 0 - 0 - \cos x\Big|_0^{\pi} =$$
$$= -(\cos\pi - \cos 0) = 1 + 1 = 2 .$$

Пример 2.2.5. Вычислить определенный интеграл: $\int_{1/3}^{4} \ln^2(3x)dx$.

Решение.
$$\int_{1/3}^{4} \ln^2(3x)dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln^2 3x; \quad dV = dx \quad \Rightarrow \quad V = \int dx = x \\ dU = \left(\ln^2 3x\right)' dx = 2\ln 3x \cdot \dfrac{1}{3x} \cdot 3dx = \dfrac{2\ln 3x}{x} dx \end{array} \right| =$$

$$= \left(x \cdot \ln^2 3x\right)\Big|_{1/3}^{4} - \int\limits_{1/3}^{4} x \cdot \frac{2\ln 3x}{x}dx = 4 \cdot \ln^2(3 \cdot 4) - \frac{1}{3}\ln^2\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) - 2\int\limits_{1/3}^{4} \ln 3x dx =$$

$$= \left| \begin{aligned} &U = \ln 3x;\ dV = dx \ \Rightarrow \ V = \int dx = x \\ &dU = (\ln 3x)' dx = \frac{1}{3x} \cdot 3dx = \frac{1}{x}dx \end{aligned} \right| = 4\ln^2 12 - \frac{1}{3}\ln^2 1 - 2\left((x \cdot \ln 3x)\Big|_{1/3}^{4} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{1/3}^{4} x \cdot \frac{1}{x}dx \right) = 4\ln^2 12 - 2\left(4 \cdot \ln(3 \cdot 4) - \frac{1}{3}\ln\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) - \int\limits_{1/3}^{4} dx\right) = 4\ln^2 12 - 8\ln 12 +$$

$$+ \frac{2}{3\ln 1} + 2x\Big|_{1/3}^{4} = 4\ln^2 12 - 8\ln 12 + 2\left(4 - \frac{1}{3}\right) = 4\ln^2 12 - 8\ln 12 + \frac{22}{3}.$$

Для закрепления материала параграфа вычислите **самостоятельно** следующие интегралы с помощью интегрирования по частям:

283. $\int\limits_{0}^{3} (3 - x)\cos 2x dx$.

284. $\int\limits_{-1/7}^{1/7} x \cdot e^{-7x} dx$.

285. $\int\limits_{0}^{1/4} \operatorname{arctg} 4x dx$.

286. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x^3} \ln x dx$.

287. $\int\limits_{\pi/5}^{\pi/2} x \sin 5x dx$.

288. $\int\limits_{0}^{3} \arcsin \frac{x}{3} dx$.

289. $\int\limits_{0}^{1} x \cdot \operatorname{arcctg} x dx$.

290. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \ln\left(3 + x^2\right) dx$.

291. $\int\limits_{-2}^{0} x \ln(1 - 3x) dx$.

292. $\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} dx$.

293. $\int\limits_{0}^{1} x^2 \arcsin x dx$.

294. $\int\limits_{-\pi}^{0} x \cdot \cos^2 2x dx$.

295. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

296. $\int\limits_{0}^{\sqrt{8}} \ln\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) dx$.

297. $\int\limits_{e^2}^{e^4} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

298. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \left(2x^2 + 5\right)\sin x dx$.

299. $\int\limits_{0}^{1} \left(x - x^2\right) e^{3x} dx$.

300. $\int\limits_{1}^{e} (1 - \ln x)^2 dx$.

301. $\int\limits_{-1}^{0} \left(3x^2 + 1\right)\mathrm{arctg}^2 x dx$.

302. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(2\pi - x^3\right)\sin(x + \pi) dx$.

303. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-x} \sin 5x dx$.

304. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}} x^5 \sin x^2 dx$.

§2.4. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

***Теорема 2.10*. (Теорема об интегрировании четных и нечетных функций).**
1) Если четная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a, a]$ $(a > 0)$, тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

2) Если нечетная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a, a]$ $(a > 0)$, тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Доказательство. 1) Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a, a]$ $(a > 0)$ и является четной. На основании свойства аддитивности для определенного интеграла распишем интеграл из правой части на сумму интегралов:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Для вычисления первого интеграла суммы сделаем подстановку

$$t = -x.$$

Тогда

$$dt = -dx \quad \text{или} \quad dx = -dt.$$

Так как $f(x)$ - четная функция, то

$$f(x) = f(-x) = f(t).$$

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$x=-a \;\Rightarrow\; t=a,$$
$$x=0 \;\Rightarrow\; t=0.$$

Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(t)dt=\left|\begin{array}{l}\textit{по свойству 3}\\ \textit{определенного интеграла}\end{array}\right|=\int_{0}^{a} f(t)dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{значение определенного интеграла}\\ \textit{не зависит от того, какой}\\ \textit{буквой названа переменная}\end{array}\right|=\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

2) Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a,a]$ $(a>0)$ и является нечетной. На основании свойства аддитивности имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Для вычисления первого интеграла суммы как и в случае 1) сделаем подстановку

$$t=-x.$$

Тогда

$$dt=-dx \quad \text{или} \quad dx=-dt.$$

Так как $f(x)$ - нечетная функция, то

$$f(x)=-f(-x)=-f(t).$$

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$x=-a \;\Rightarrow\; t=a,$$
$$x=0 \;\Rightarrow\; t=0.$$

Тогда аналогично случаю 1) получаем

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(t)(-dt)=\int_{a}^{0} f(t)dt=-\int_{0}^{a} f(t)dt=-\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0.$$

Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация теоремы 2.10.

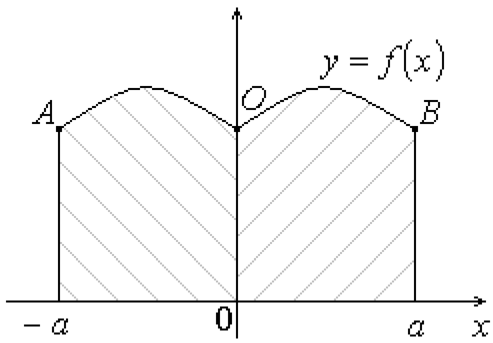


Рис. 24

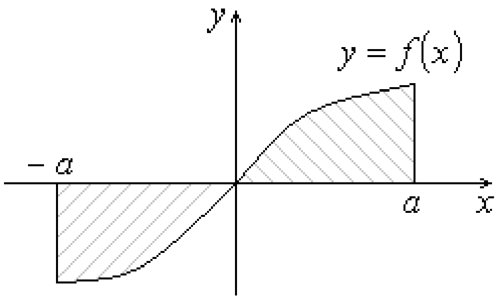


Рис. 25

График четной функции $y=f(x)$ симметричен относительно оси Oy поэтому площадь криволинейной трапеции $-aABa$ состоит из двух одинаковых площадей $oOBa$ (рис.24).

График четной функции $y=f(x)$ симметричен относительно начала координат, значит, площади криволинейных трапеций на отрезках $[-a;0]$ и $[0;a]$ равны. Но так как значения $f(x)$ при $x\in[-a;0]$ и при $x\in[0;a]$ противоположны по знаку, то определенные интегралы на $[-a;0]$ и $[0;a]$ также имеют противоположные знаки, поэтому при сложении получается нуль (рис.25).

Пример 2.2.6. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-2}^{2}\left(x^2+\cos x\right)dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}x^2\operatorname{tg}xdx$.

Решение. а) Функция $f(x)=x^2+\cos x$ является четной, так как

$$f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x).$$

Значит, вычислим интеграл, используя теорему 2.10:

$$\int\limits_{-2}^{2}\left(x^2+\cos x\right)dx=2\cdot\int\limits_{0}^{2}\left(x^2+\cos x\right)dx=2\left(\int\limits_{0}^{2}x^2dx+\int\limits_{0}^{2}\cos xdx\right)=$$

$$=2\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2+\left.\sin x\right|_0^2\right)=2\left(\frac{1}{3}(8-0)+\sin 2-\sin 0\right)=\frac{16}{3}+2\sin 2.$$

б) Функция $f(x)=x^2\operatorname{tg}x$ является нечетной, так как

$$f(-x)=(-x)^2\cdot\operatorname{tg}(-x)=x^2\cdot(-\operatorname{tg}x)=-x^2\cdot\operatorname{tg}x=-f(x).$$

Значит, на основании теоремы 2.10 интеграл от $f(x)=x^2\operatorname{tg}x$ на любом симметричном отрезке интегрирования равен нулю. Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{1}x^2\operatorname{tg}xdx=0.$$

<u>Теорема 2.11</u>. (Теорема об интегрировании периодических функций). *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$ *и является периодической с периодом T,* $T \neq 0$, *тогда* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a+T, b+T]$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx, \tag{2.2.6}$$

то есть значение определенного интеграла не изменится, если отрезок интегрирования сдвинуть на период.

<u>Доказательство.</u> Для вычисления интеграла из правой части равенства сделаем подстановку

$$u = x - T \quad \text{или} \quad x = u + T.$$

Тогда

$$dx = d(u+T) \quad \Rightarrow \quad dx = du.$$

Так как $f(x)$ - периодическая функция с периодом *T*, то

$$f(x) = f(x-T) = f(u).$$

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$x = a+T \quad \Rightarrow \quad u = a+T-T = a,$$
$$x = b+T \quad \Rightarrow \quad u = b+T-T = b.$$

Тогда

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \left| \begin{array}{l} \text{значение определенного интеграла} \\ \text{не зависит от того, какой} \\ \text{буквой названа переменная} \end{array} \right| = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, интеграл из левой части равенства (2.2.6) равен интегралу из правой части равенства (2.2.6).

Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация теоремы 2.11.

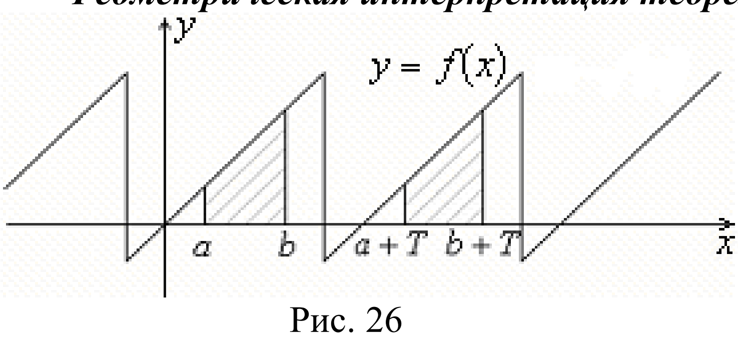


Рис. 26

Для периодической функции $f(x)$ криволинейные трапеции на отрезке $[a,b]$ и на отрезке $[a+T, b+T]$ равны, а значит, равны и их площади (рис.26).

<u>Замечание.</u> Если $f(x)$ имеет период *T*, $T \neq 0$, то все числа nT, $n = 1,2,...$, являются периодом этой функции, тогда по доказанной теореме справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx.$$

Пример 2.2.7. Вычислить $\int\limits_{-5\pi/4}^{-3\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$.

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с периодом $T = \pi$ (рис.27), поэтому по теореме 2.11 значение интеграла не изменится, если отрезок интегрирования «сдвинуть» на π.

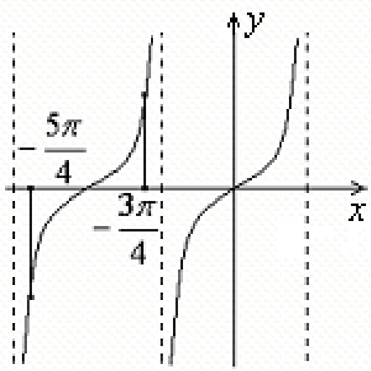


Рис. 27

Тогда $\int\limits_{-5\pi/4}^{-3\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx = \int\limits_{\frac{-5\pi}{4}+\pi}^{\frac{-3\pi}{4}+\pi} \operatorname{tg} x\, dx = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx = 0$

(по теореме 2.10, так как $y = tgx$ - нечетная функция, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ - симметричный относительно $x = 0$ отрезок интегрирования).

Для закрепления материала параграфа решите **самостоятельно** следующие задачи.

Используя четность/нечетность подынтегральной функции и свойства определенного интеграла, вычислить интегралы:

305. $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1+x^8}} dx$.

306. $\int\limits_{-1}^{1} |\operatorname{arctg} x| \cdot x^4 dx$.

307. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{|x|}{1+x^2} dx$.

308. $\int\limits_{-1/2}^{1} \arcsin x \cdot x^8 dx + \int\limits_{1/2}^{1} \arccos x \cdot x^8 dx$.

309. Функция $f(x)$ непрерывна и является четной, функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, при этом $F(5) = -F(-5) = 3$. Вычислить $\int\limits_0^5 f(x)dx$.

310. Вычислить $\int\limits_{-3}^{3} \frac{\sin f(x) \cdot f'(x)}{1+f^2(x)} dx$, если $f(x)$ определена и непрерывна при $x \in (-\infty, +\infty)$, является нечетной.

Доказать равенства:

311. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos 2x}\,dx = \int_{3\pi}^{7\pi/2} \frac{\sin x}{\cos 2x}\,dx$.

312. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{tg}^2\, 3x \cdot \cos^3 2x\,dx = \int_{3\pi}^{13\pi/4} \mathrm{tg}^2\, 3x \cdot \cos^3 2x\,dx$.

313. $\displaystyle\int_{0}^{54\pi} \sqrt{1-\cos 4x} \cdot \cos^{10} 4x\,dx = 108\sqrt{2}\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x \cdot \cos^{10} 4x\,dx$.

314. Доказать, что $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$. С помощью доказанного равенства вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Глава 3. *Несобственные интегралы*

В главах 1, 2 раздела II было изучено понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ для случая конечного отрезка интегрирования $[a,b]$ и ограниченной подынтегральной функции $f(x)$. В этой главе обобщим понятие определенного интеграла на следующие два случая:

1) интеграл от ограниченной функции, но с бесконечным отрезком интегрирования;

2) интеграл с конечным отрезком интегрирования от неограниченных функции.

Такие интегралы называются ***несобственными интегралами***.

§3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим три возможных варианта таких интегралов.

1) Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a;+\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $b \in (a;+\infty)$, то есть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует при любом $b > a$. При этом значение интеграла зависит от значения b, поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I(b),$$

то есть является функцией от b.

Вычислим предел $I(b)$ при $b \to \infty$.

<u>Определение 2.3.</u> ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования*** *называется предел определенного интеграла*

$$\lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

который будем обозначать $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел определенного интеграла существует и конечен, то говорят, что ***несобственный интеграл*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится***. Если же этот предел не существует или он бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***расходится***.

Функция $I(b)$ является неубывающей. Докажем это свойство.

Теорема 2.12. *Если функция* $f(x)$ *определена и неотрицательна на интервале* $[a;+\infty)$, *при этом интегрируема на отрезке* $[a,b]$ *для любого* $b \in (a;+\infty)$, *то тогда* $\int\limits_a^b f(x)dx = I(b)$ *является неубывающей функцией значения* b.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим два значения b_1 и b_2 величины b такие, что $a < b_1 < b_2$, тогда

$$I(b_2) - I(b_1) = \int\limits_a^{b_2} f(x)dx - \int\limits_a^{b_1} f(x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{по свойству аддитивности} \\ \text{определенного интеграла} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_a^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx - \int\limits_a^{b_1} f(x)dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geq 0,$$

так как по свойству 7 определенный интеграл от неотрицательной функции имеет неотрицательное значение.

Таким образом, если $b_1 < b_2$, то $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx < \int\limits_a^{b_2} f(x)dx$, значит, $I(b)$ является неубывающей функцией.

Что и требовалось доказать.

2) Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty;b]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $a \in (-\infty;b]$, то есть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует при любом $a < b$. При этом значение интеграла зависит от значения a, поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I(a),$$

то есть является функцией от a.

Вычислим предел $I(a)$ при $a \to -\infty$, то есть при неограниченном убывании a.

<u>Определение 2.4.</u> ***Несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом интегрирования*** *называется предел определенного интеграла*

$$\lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

и обозначается $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ***сходится***, если предел существует и конечен; $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ***расходится***, если предел не существует или бесконечен.

3) Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, то есть интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ существует ($a < b$). Если точки a, b не фиксированы, то значение интеграла зависит от значений a, b, поэтому

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = I(a,b),$$

то есть является функцией от a, b.

Пусть $x = c$ – произвольная фиксированная точка из интервала (a,b), тогда на основании свойства аддитивности определенного интеграла справедливо равенство:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

При этом один из полученных интегралов зависит только от a, а другой – только от b. Таким образом,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = I_1(a) + I_2(b).$$

Вычислим предел $I_1(a)$ при $a \to -\infty$, то есть при неограниченном убывании a, и предел $I_2(b)$ при $b \to \infty$, то есть при неограниченном возрастании b. Тогда на основании определений 2.3, 2.4 имеем

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

<u>Определение 2.5.</u> ***Несобственным интегралом с бесконечными нижним и верхним пределами интегрирования*** *называется сумма пределов определенных интегралов*

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

и обозначается $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, несобственным интегралом с бесконечными нижним и верхним пределами интегрирования является сумма двух несобственных интегралов:

а) с бесконечным нижним пределом интегрирования и постоянным верхним пределом интегрирования c;

б) с бесконечным верхним пределом интегрирования и постоянным нижним пределом интегрирования c (c - произвольное число):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2.3.1)$$

где $x=c$ – произвольная точка числовой прямой.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами ***сходится*** только в том случае, когда сходятся оба интеграла правой части (2.3.1). Если же хотя бы один интеграл из правой части (2.3.1) расходится, тогда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ***расходится***.

Рассмотрим несколько примеров вычисления несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Пример 2.3.1. Вычислить: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b x^{-1/2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_2^b\right)=$

$=2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-\sqrt{2}\right)=2\lim_{b\to+\infty}\sqrt{b}-2\sqrt{2}=\infty$.

Значит, интеграл расходится.

Пример 2.3.2. Вычислить: $\int_{-\infty}^{3}\sin 2x dx$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{3} \sin 2x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{3} \sin 2x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \int\limits_{a}^{3} \sin 2x d(2x) \right) =$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left(\cos 2x \Big|_{a}^{3} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} (\cos 6 - \cos a) = -\frac{1}{2} \cdot \cos 6 + \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \cos a .$$

Интеграл расходится, так как значение $\cos a$ при $a \to -\infty$ не существует (предел вычислить невозможно).

Пример 2.3.3. Вычислить: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

Решение. Для удобства вычисления сначала найдем первообразную функцию:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 - 4 + 5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2 + 1} = \left\langle \int \frac{du}{u^2 + 1} \right\rangle =$$

$= \operatorname{arctg}(x - 2)$.

Теперь вычислим требуемый интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int\limits_{-\infty}^{c} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} + \int\limits_{c}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg}(x-2) \Big|_{a}^{c} \right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg}(x-2) \Big|_{c}^{b} \right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg}(c-2) - \operatorname{arctg}(a-2)) + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg}(b-2) - \operatorname{arctg}(c-2)) =$$

$$= \operatorname{arctg}(c-2) - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(a-2) + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(b-2) - \operatorname{arctg}(c-2) =$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Интеграл сходится.

Пример 2.3.4. Вычислить: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x} dx$.

Решение. Вычислим сначала первообразную функцию:

$$\int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} \int e^{-5x} d(-5x) = -\frac{1}{5} e^{-5x} .$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x} dx = \int\limits_{-\infty}^{c} e^{-5x} dx + \int\limits_{c}^{+\infty} e^{-5x} dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} e^{-5x} dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} e^{-5x} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{5} e^{-5x} \Big|_{a}^{c} \right) + \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{5} e^{-5x} \Big|_{c}^{b} \right) = -\frac{1}{5} \lim_{a\to-\infty} \left(e^{-5c} - e^{-5a} \right) -$$

$$-\frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-5b}-e^{-5c}\right)=-\frac{1}{5}e^{-5c}+\frac{1}{5}\lim_{a\to-\infty}e^{-5a}-\frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}e^{-5b}+\frac{1}{5}e^{-5c}=\infty.$$

Интеграл расходится.

Геометрический смысл несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Пусть непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна на рассматриваемом интервале интегрирования $(f(x)\geq 0)$. Тогда несобственный интеграл выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (рис.28):

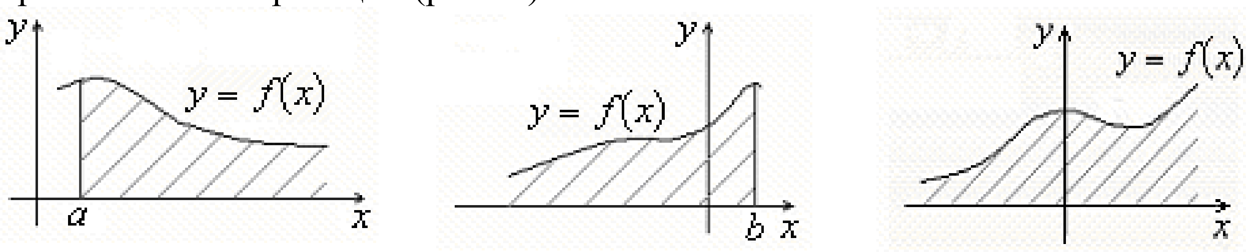


Рис. 28

Поэтому сходимость несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования означает, что эту площадь можно посчитать, а расходимость означает, что площадь вычислить невозможно.

§3.2. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования

Чтобы ответить на вопрос о сходимости несобственного интеграла необходимо этот интеграл вычислить. Но в некоторых задачах найти результат интегрирования затруднительно, тогда исследование сходимости становится сложным, а иногда и невозможным. Поэтому существует несколько признаков сходимости, которые позволяют без непосредственного вычисления самого интеграла ответить на вопрос, сходится или расходится несобственный интеграл.

Теорема 2.13. (Необходимый признак сходимости). *Если несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, то тогда*

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

Доказательство. Так как интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, значит, его значение равно некоторому постоянному значению I, то есть

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = I.$$

На основании свойства аддитивности интеграл левой части можно расписать на сумму двух интегралов, тогда справедливо

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = I.$$

Перейдем к пределу при $b\to+\infty$ в полученном равенстве. Заметим, что пределы левой и правой частей существуют, так как интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится по условию теоремы. Таким образом, получаем

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx\right) = \lim_{b\to+\infty} I,$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I.$$

Используя свойства пределов и равенства $\lim\limits_{b\to+\infty} I = I$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = I$, получаем

$$I + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = I.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.13 дает необходимый признак сходимости несобственного интеграла, который не является достаточным. Если $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = 0$, то это вовсе не означает, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но если $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx \neq 0$, то несобственный интеграл расходится.

Приведем несколько достаточных признаков сходимости несобственных интегралов.

<u>Теорема 2.14.</u> ***(Признак сравнения)***. *Если на интервале $[a;+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и связаны неравенством $f(x)\leq g(x)$ во всех точках интервала, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.*

<u>Доказательство.</u> По условию теоремы $0\leq f(x)\leq g(x)$. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $[a;+\infty)$, то по свойствам 7, 8 определенного интеграла и на основании теоремы 2.12 для любого $b\in[a;+\infty)$ и $x\in[a;+\infty)$ справедливо неравенство

$$0\leq\int\limits_a^b f(x)dx\leq\int\limits_a^b g(x)dx\leq\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx. \qquad (2.3.2)$$

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Значит, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx = const$. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ при фиксированном нижнем пределе интегрирования a и меняющемся верхнем пределе b является функцией значения b, то есть $\int\limits_a^b f(x)dx = I(b)$, при этом функция $I(b)$ является неубывающей на основании теоремы 2.12 и равномерно ограниченной на основании (2.3.2). Таким образом, $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$ существует и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, тогда по только что доказанному $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а это противоречит условию. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы полностью.

Что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация признака сравнения.

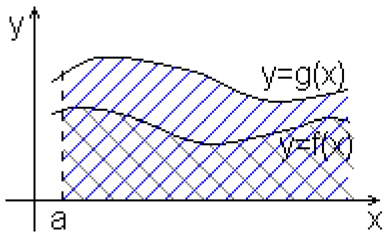


Рис.29

Пусть обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и $f(x)\le g(x)$ на интервале $[a;+\infty)$. Тогда, если площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=g(x)$, конечна, то и площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции, ограниченной снизу графиком функции $y=f(x)$, также конечна. Если же площадь меньшей криволинейной трапеции бесконечна, то площадь большей криволинейной трапеции также бесконечна (рис.29).

Выбирая конкретную функцию для сравнения, можно получить частные признаки сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Практическое значение имеет сравнение с функцией $\dfrac{1}{x^\alpha}$.

<u>Теорема 2.15.</u> *Несобственный интеграл вида*

$$\int\limits_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (c>0)$$

сходится при $\alpha>1$*, расходится при* $\alpha\le 1$.

<u>Доказательство.</u> По определению 2.3 имеем

$$\int\limits_c^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=I.$$

Рассмотрим три случая.

1) $\alpha<1$.

$$I=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_c^b\right)=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}-c^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty}b^{1-\alpha}-c^{1-\alpha}\right)=$$

$$=\left|\alpha>1\ \Rightarrow\ 1-\alpha<0\right|=\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}}-c^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}(0-c^{1-\alpha})=-\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

2) $\alpha>1$.

$$I=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_c^b\right)=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}-c^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty}b^{1-\alpha}-c^{1-\alpha}\right)=$$

$$=\left|\alpha<1\ \Rightarrow\ 1-\alpha>0\right|=\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty}b^{1-\alpha}-c^{1-\alpha}\right)=\infty.$$

3) $\alpha=1$.

$$I=\lim_{b\to\infty}\left(\ln x\Big|_c^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\ln b-\ln c\right)=\lim_{b\to\infty}\ln b-\ln c=\infty.$$

Таким образом,

$$\int\limits_c^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\left[\begin{array}{l}-\dfrac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha},\quad \text{при } \alpha>1,\quad \text{значит, интеграл сходится;}\\ \infty,\quad \text{при } \alpha\le 1,\quad \text{значит, интеграл расходится.}\end{array}\right.$$

Что и требовалось доказать.

При использовании на практике признака сравнения для исследования сходимости несобственных интегралов возникают некоторые трудности при подборе оценки подынтегрального выражения, так как если нам удалось оценить подынтегральную функцию $f(x)$ сверху функцией $g(x)$, то она должна быть такой, чтобы $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ обязательно сходился, иначе применение признака сравнения не дает результата. Аналогично, вывод о расходимости $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ можно сделать только в том случае, если подобранная функция $f(x)$ дает расходящийся несобственный интеграл. Поэтому более удобным для практического применения является предельный признак сравнения.

<u>Теорема 2.16.</u> (Предельный признак сравнения). *Если на интервале* $[a;+\infty)$ *для непрерывных положительных функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *существует предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k\ \ (0<k<\infty),$$

то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *одновременно оба сходятся или оба расходятся.*

<u>Доказательство.</u> По условию теоремы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Из существования предела следует, что выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничено при $x\to+\infty$, тогда существуют постоянные m и M такие, что

$$m\le\frac{f(x)}{g(x)}\le M.$$

Домножим все три части неравенства на $g(x)$ ($g(x)>0$ по условию теоремы):

$$m\cdot g(x)\le f(x)\le M\cdot g(x) \tag{2.3.3}$$

Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $[a;+\infty)$, то для них справедлив признак сравнения. Поэтому, если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $M\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Таким образом, по признаку сравнения $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, так как $f(x)\le M\cdot g(x)$. Если же $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то $m\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ также расходится. Значит, по признаку сравнения $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, так как $m\cdot g(x)\le f(x)$.

Аналогично, если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то на основании (2.3.3) по признаку сравнения также сходится $m\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Значит, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Если

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то на основании (2.3.3) по признаку сравнения также расходится $M\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Значит, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Таким образом, оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Что и требовалось доказать.

Замечание. Очевидно, что несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $-\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Поэтому, если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна и принимает отрицательные значения на интервале $[a;+\infty)$, то, используя теоремы 2.14 и 2.16, исследуется интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (-f(x))dx$, чтобы сделать вывод о сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

В §3.2 сформулированы признаки сходимости для несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом интегрирования. Аналогичные признаки сходимости справедливы и для несобственных интегралов с бесконечным нижним пределом интегрирования и с бесконечными верхним и нижним пределами интегрирования.

Приведем несколько примеров исследования на сходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования с помощью признаков сравнения.

Пример 2.3.5. Исследовать сходимость: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5+2x+5}$.

Решение. Исследуем сходимость этого интеграла, используя признак сравнения. Так как для любого $x \in [1;+\infty)$ справедлива оценка $\frac{1}{x^5+2x+5} < \frac{1}{x^5}$, то для сравнения выберем интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}dx$. На основании теоремы 1.15

интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx$ сходится ($\alpha = 5,\ a = 1 > 0$). Тогда по признаку сравнения $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5 + 2x + 5}$ также сходится.

Пример 2.3.6. Исследовать сходимость: $\int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{1 + x^2} dx$.

Решение. Исследуем сходимость этого интеграла по признаку сравнения.

Так как $\sqrt{x^2} < \sqrt{1 + x^2}$ и $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ при $x \le 0$, то на интервале $(-\infty; 0]$ для сравнения выберем интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} (-x) dx$. Вычислим его:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (-x) dx = -\lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 x dx = -\lim_{a \to -\infty} \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_a^0 \right) = -\frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} \left(0 - a^2 \right) = \frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} a^2 = \infty.$$

Значит, $\int\limits_{-\infty}^{0} (-x) dx$ расходится. Тогда по признаку сравнения $\int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{1 + x^2} dx$ также расходится.

Пример 2.3.7. Исследовать сходимость: $\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x^5} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot dx$.

Решение. Исследуем сходимость этого интеграла по предельному признаку сравнения. Для этого для подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{x^5} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ подберем функцию $g(x)$ такую, чтобы выполнялось условие теоремы 2.16, и при этом $\int\limits_3^{+\infty} g(x) dx$ легко вычислялся. Так как величины $\operatorname{tg}\alpha$ и α эквивалентные бесконечно малые при $\alpha \to 0$, то выберем $g(x) = \frac{1}{x^6}$.

Проверим условие теоремы при таком выборе функции $g(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^5} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) \Big/ \left(\frac{1}{x^6} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot x^6}{x^5} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/\!{}_x}{{}^1\!/\!{}_x} = \left[y = \frac{1}{x} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{\cos y \cdot y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{1}{\cos y} =$$

$$=\begin{vmatrix} \textit{по первому} \\ \textit{замечательному пределу} \end{vmatrix} = 1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$$

Значит, условие теоремы выполняется, и интегралы $\int\limits_3^{+\infty}\frac{1}{x^5}\cdot\mathrm{tg}\frac{1}{x}\cdot dx$ и $\int\limits_3^{+\infty}\frac{1}{x^6}dx$ сходятся или расходятся одновременно. Несобственный интеграл $\int\limits_3^{+\infty}\frac{1}{x^6}dx$ сходится на основании теоремы 2.15 ($\alpha=6,\ a=3>0$). Таким образом, по предельному признаку сравнения $\int\limits_3^{+\infty}\frac{1}{x^5}\cdot\mathrm{tg}\frac{1}{x}\cdot dx$ также сходится.

Пример 2.3.8. Исследовать сходимость: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2-2x+7)x^2}{x^4-3x^2+10}dx$.

Решение. Исследуем сходимость этого интеграла с помощью предельного признака сравнения. Для этого для подынтегральной функции $f(x)=\frac{(x^2-2x+7)x^2}{x^4-3x^2+10}$ подберем функцию $g(x)$ такую, чтобы выполнялось условие теоремы 2.16. Так как при $x\to\infty$ многочлен $P_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ эквивалентен величине a_nx^n, то выберем $g(x)=\frac{x^2\cdot x^2}{x^4}=1$.

Проверим условие теоремы при таком выборе функции $g(x)$. Так как интеграл содержит две особенности ($x\to-\infty$ и $x\to+\infty$), то и проверять условие теоремы будем для двух случаев.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^4-2x^3+7x^2}{x^4-3x^2+10}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^4-2x^3+7x^2}{x^4}}{\frac{x^4-3x^2+10}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^4}}=1$$

Следовательно, условие теоремы выполняется при $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x^3+7x^2}{x^4-3x^2+10}=\begin{vmatrix} \textit{аналогично} \\ \textit{случаю } x\to+\infty \end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, условие теоремы выполняется и при $x\to-\infty$.

Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot dx = \int_{-\infty}^{c} dx + \int_{c}^{+\infty} dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} dx = \lim_{a\to-\infty}\left(x\Big|_{a}^{c} \right) + \lim_{b\to+\infty}\left(x\Big|_{c}^{b} \right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(c-a) + \lim_{b\to+\infty}(b-c) = c - \lim_{a\to-\infty} a + \lim_{b\to+\infty} b - c = -\lim_{a\to-\infty} a + \lim_{b\to+\infty} b = \infty .$$

Значит, $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ расходится. На основании предельного признака сравнения $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-2x+7)x^2}{x^4-3x^2+10}\,dx$ также расходится.

§3.3. Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования

<u>Определение 2.6.</u> *Если для функции* $f(x)$ *интеграл* $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится, то* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся****.*

<u>Определение 2.7.</u> *Если для функции* $f(x)$ *интеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, а интеграл* $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *расходится, то* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***условно сходящимся****.*

<u>Теорема 2.17.</u> (Признак абсолютной сходимости). *Если* $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$*.*

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим вспомогательные функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ определенные по следующему правилу:

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{при } f(x)\ge 0 \\ 0, & \text{при } f(x)<0 \end{cases} \quad \text{(рис.30);}$$

$$f_-(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } f(x)\ge 0 \\ -f(x), & \text{при } f(x)<0 \end{cases} \quad \text{(рис.30).}$$

Очевидно, что

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x).$$

Для функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$ имеют место оценки:

$$0\le f_+(x)\le |f(x)|,$$
$$0\le f_-(x)\le |f(x)|.$$

Тогда на основании сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ и признака сравнения интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f_+(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f_-(x)dx$ сходятся.

Значит, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, так как равен разности двух сходящихся интегралов:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_a^{+\infty}(f_+(x)-f_-(x))dx=$$
$$=\int\limits_a^{+\infty} f_+(x)dx-\int\limits_a^{+\infty} f_-(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

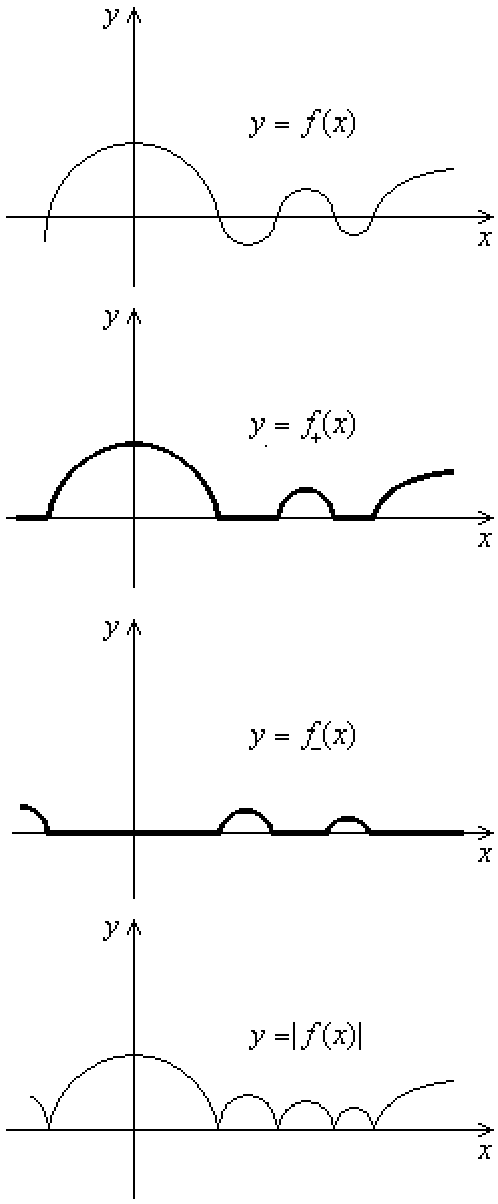


Рис.30

Сформулированный признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом интегрирования справедлив и для остальных видов несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Пример 2.3.9. Исследовать сходимость: $\int\limits_4^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$.

Решение. В этом интеграле подынтегральная функция на интервале $[4;+\infty)$ может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения.

Исследуем этот интеграл на абсолютную сходимость, то есть рассмотрим интеграл $\int\limits_4^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$.

Так как $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{|x^2|} = \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ $\left(0 \le |\cos x| \le 1\right)$, то вычислим

На основании теоремы 2.15 интеграл $\int\limits_4^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ сходится.

Так как $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, следовательно, по признаку сравнения интеграл $\int\limits_4^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}dx$ сходится. Отсюда из признака абсолютной сходимости вытекает,

что несобственный интеграл $\int\limits_4^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ сходится.

Для закрепления изученного материала предлагается решить следующие задачи **самостоятельно**.

Вычислить несобственные интегралы:

315. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^7}$.

316. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

317. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

318. $\int\limits_{-\infty}^{-7}\cos\frac{x}{7}dx$.

319. $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

320. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}dx$.

321. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

322. $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2(x+1)}$.

323. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{9x^2+3}$.

324. $\int\limits_2^{\infty}e^{-3x}dx$.

325. $\int\limits_{-\infty}^{0}4^{-x^5}x^4dx$.

326. $\int\limits_{-\infty}^{-1/2}\frac{dx}{4x^2+1}$.

327. $\int\limits_{14}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$.

328. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

329. $\int\limits_{-\infty}^{-1}(4x-2)\ln(-x)dx$.

С помощью признака сравнения исследовать сходимость несобственных интегралов:

330. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{xdx}{x^3+1}$. **331.** $\int\limits_{-\infty}^{-e}\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{x\ln x^2}$. **332.** $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{\ln\ln x}$.

333. $\int\limits_{0}^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x^2}dx$. **334.** $\int\limits_{3}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx$. **335.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^{10}+4x^4+6}$.

С помощью предельного признака сравнения исследовать сходимость несобственных интегралов:

336. $\int\limits_{\pi}^{\infty}\left(1-\cos\frac{4}{x}\right)dx$. **337.** $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{x^{12}}{(x^4+x^3+1)^4}dx$. **338.** $\int\limits_{2}^{\infty}\sin\frac{1}{x}dx$.

339. $\int\limits_{7}^{\infty}\frac{\ln^2x-3}{x+5}dx$. **340.** $\int\limits_{-\infty}^{-2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^6-2x}dx$. **341.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^7e^{-\frac{1}{x^2}}dx$.

Используя признак абсолютной сходимости, исследовать сходимость интегралов:

342. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^3}dx$. **343.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^4+2}dx$.

344. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\cos x\cdot\sin 3x}{x^2+1}dx$. **345.** $\int\limits_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{e^{-4x^2}}{x\ln^3 2x}dx$.

Доказать неравенство:

346. $\frac{1}{3}<\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1+x^{10}}{1+x^{14}}dx<\frac{1}{13}+\frac{1}{3}$.

§3.4. Несобственные интегралы от разрывных функций

Рассмотрим четыре варианта интегралов, подынтегральная функция которых неограничена на отрезке интегрирования.

1) Пусть отрезок интегрирования $[a;b]$ конечен, функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;b)$, а в точке $x=b$ функция $f(x)$ имеет разрыв II рода, то есть $f(x)\to\infty$ при $x\to b$ (рис.31).

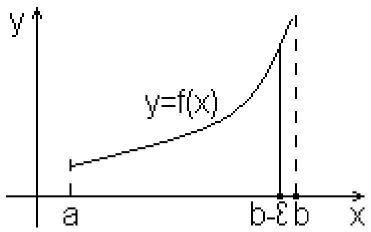


Рис.31

Так как на $[a;b]$ функция имеет разрыв, то понятие определенного интеграла для $f(x)$ на $[a;b]$ не существует. Отступим от точки $x=b$ на $\varepsilon>0$ влево (таким образом, чтобы попасть в отрезок $[a;b]$). Тогда $b-\varepsilon\in[a;b)$ и $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b-\varepsilon]$. Значит, на отрезке $[a;b-\varepsilon]$ существует определенный интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, который обозначим $I(\varepsilon)$:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I(\varepsilon).$$

Вычислим предел $I(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$, при этом $\lim_{\varepsilon\to 0}(b-\varepsilon)=b$.

<u>Определение 2.8.</u> ***Несобственным интегралом от функции*** $f(x)$***, имеющей разрыв II рода в граничной точке*** $x=b$*, называется предел определенного интеграла* $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$*, и обозначается* $\int_a^b f(x)dx$*, то есть*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.3.4)$$

В случае если этот предел конечен, то говорят, что ***несобственный интеграл*** $\int_a^b f(x)dx$ ***сходится***. Если же этот предел не существует или бесконечен, то говорят, что ***несобственный интеграл расходится***.

Теорема 2.18. *Если функция* $f(x)$ *определена и неотрицательна на интервале* $[a;b)$*, при этом интегрируема на отрезке* $[a,b-\varepsilon]$ *для любого* $\varepsilon>0$ *и* $b-\varepsilon\in[a;b)$*, то тогда* $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I(\varepsilon)$ *является невозрастающей функцией значения* ε.

<u>Доказательство.</u> Возьмем два значения $\varepsilon=\varepsilon_1$ и $\varepsilon=\varepsilon_2$ такие, что $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ и $b-\varepsilon_1\in[a;b)$, $b-\varepsilon_2\in[a;b)$, тогда $a<b-\varepsilon_2<b-\varepsilon_1$. Рассмотрим разность значений функции

$$I(\varepsilon_2)-I(\varepsilon_1)=\int\limits_a^{b-\varepsilon_2} f(x)dx-\int\limits_a^{b-\varepsilon_1} f(x)dx=\left|\begin{matrix}\textit{по свойству аддитивности}\\ \textit{определенного интеграла}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_a^{b-\varepsilon_2} f(x)dx-\int\limits_a^{b-\varepsilon_2} f(x)dx-\int\limits_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx=-\int\limits_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx.$$

По свойству 7 определенный интеграл от неотрицательной функции имеет неотрицательное значение, значит

$$-\int\limits_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx\le 0,$$

или $$I(\varepsilon_1)-I(\varepsilon_2)\ge 0.$$

Таким образом, если $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, то $I(\varepsilon_1)\ge I(\varepsilon_2)$, и $I(\varepsilon)$ является невозрастающей функцией.

Что и требовалось доказать.

2) Пусть отрезок интегрирования $[a;b]$ конечен, функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b]$, а в точке $x=a$ функция $f(x)$ имеет разрыв II рода, то есть $f(x)\to\infty$ при $x\to a$ (рис.32).

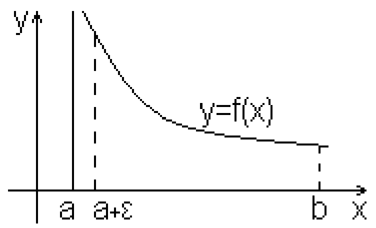


Рис.32

Функция $f(x)$ на $[a;b]$ не является интегрируемой, так как $f(x)$ имеет разрыв на этом отрезке. Но определенный интеграл от $f(x)$ существует на отрезке $[a+\varepsilon;b]$ $(\varepsilon>0$ и $a+\varepsilon\in(a,b])$, так как на нем $f(x)$ непрерывна. При этом значение интеграла зависит от значения ε, поэтому

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=I_1(\varepsilon)$$

является функцией от ε.

Вычислим предел $I_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$, при этом $a+\varepsilon\to a$.

<u>Определение 2.9</u>. Несобственным интегралом от функции $f(x)$***, имеющей разрыв II рода в граничной точке*** $x=a$, *называется предел определенного интеграла* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, *и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{2.3.5}$$

Если этот предел существует и конечен, то ***несобственный интеграл (2.3.5) сходится***. Если предел не существует или бесконечен, тогда несобственный интеграл ***расходится***.

3) Пусть отрезок интегрирования $[a;b]$ конечен, функция $f(x)$ непрерывна во всех точках $[a;b]$ за исключением точки $x = c$ $(c \in (a;b))$, в которой функция терпит разрыв II рода (рис.33).

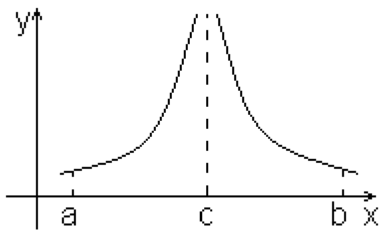


Рис.33

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ полагаем равным сумме несобственных интегралов этой функции на отрезках от *a* до *c* и от *c* до *b*.

<u>Определение 2.10.</u> Несобственным интегралом от функции $f(x)$, имеющей разрыв II рода во внутренней точке отрезка интегрирования $c \in (a;b)$, *называется сумма двух несобственных интегралов с разрывами в граничной точке:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2.3.6}$$

Несобственный интеграл с бесконечным разрывом во внутренней точке, стоящий слева в равенстве (2.3.6) ***сходится*** тогда, когда оба интеграла из правой части равенства (2.3.6) сходятся. Если хотя бы один из интегралов правой части расходится, тогда и несобственный интеграл из левой части также ***расходится***.

4) Пусть отрезок интегрирования $[a;b]$ конечен, функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, а в граничных точках $x = a$ и $x = b$ функция имеет разрывы II рода (рис.34).

<u>Определение 2.11.</u> Несобственным интегралом от функции $f(x)$, имеющей разрывы II рода в граничных точках $x = a$ и $x = b$, *называется сумма двух несобственных интегралов, в каждом из которых разрыв только в одной граничной точке, то есть*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad (2.3.7)$$

где c - произвольная точка из интервала $(a;b)$.

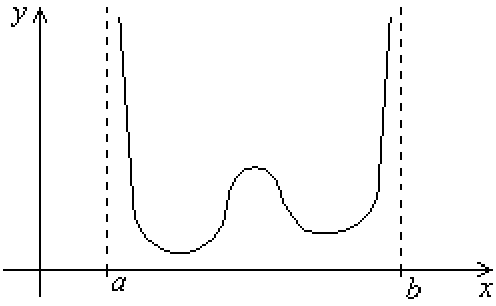


Рис.34

Такой ***несобственный интеграл*** $\int_a^b f(x)dx$ ***сходится***, если сходятся оба несобственных интеграла из правой части равенства (2.3.7). Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ ***расходится***.

Замечание. Случаи 1)-4) описывают несобственные интегралы, которые имеют либо одну, либо две точки разрыва II рода. Подынтегральная функция на отрезке интегрирования может также иметь любое конечное количество точек разрыва II рода. Несобственные интегралы в этом случае вычисляются по аналогии со случаем 3), когда вычисляемый интеграл представляют в виде суммы нескольких интегралов, в каждом из которых только одна точка разрыва.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления несобственных интегралов.

Пример 2.3.10. Вычислить: $\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$.

Решение. Интеграл является несобственным. Чтобы в этом убедиться, необходимо найти точки разрыва подынтегральной функции $\frac{1}{x-2}$. Подозрительные на разрыв точки находятся на основании области определения. Поэтому в данном примере необходимо приравнять знаменатель к нулю: $x-2=0$. Значит, $x=2$ - точка разрыва. Точка $x=2$ попадает в отрезок интегрирования (правая граничная точка), поэтому проверим, является ли она точкой разрыва II рода. Для этого найдем левый предел подынтегральной функции в точке $x=2$:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

Так как предел равен бесконечности, значит, точка $x=2$ - является точкой разрыва II рода функции, то есть заданный интеграл действительно является несобственным (случай 1). Вычислим его по формуле (2.3.4):

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{d(x-2)}{x-2} = \left\langle \int \frac{du}{u} \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x-2| \Big|_0^{2-\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|2-\varepsilon-2| - \ln|0-2|\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|-\varepsilon|\right) - \ln 2 = -\infty .$$

Интеграл расходится.

Пример 2.3.11. Вычислить: $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

Решение. Найдем точки разрыва подынтегральной функции:

$x^2-6x+5=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\; x_2=5$ - точки разрыва подынтегральной функции.

$x_1=1\in[1;2]$, $x_2=5\notin[1;2]$, поэтому проверим, является ли $x=1$ точкой разрыва II рода. Так как $x=1$ - левая граничная точка отрезка интегрирования, то найдем правый предел подынтегральной функции в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2-6x+5} = \infty .$$

Значит, $x=1$ является точкой разрыва II рода, то есть заданный интеграл является несобственным с разрывом подынтегральной функции в точке $x=1$ (случай 2). Вычислим интеграл по формуле (2.3.5):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-6x+5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2-6x+5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2-6x+9-9+5} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-3)^2-4} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x-3)}{4-(x-3)^2} = \left\langle \int \frac{du}{2^2-u^2} \right\rangle =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+x-3}{2-(x-3)}\right| \Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} \right) = -\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\left|\frac{\varepsilon}{4-\varepsilon}\right| \right) = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\varepsilon}{4-\varepsilon}\right| = -\infty .$$

Интеграл расходится.

Пример 2.3.12. Вычислить: $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-3}}$.

Решение. Найдем точки разрыва подынтегральной функции:

$\sqrt[3]{x^2-3}=0 \;\Rightarrow\; x^2-3=0 \;\Rightarrow\; x^2=3 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}$;

$x_1=-\sqrt{3} \;\notin[1;4]$, $x_2=\sqrt{3} \;\in[1;4]$.

Проверим, что $x=\sqrt{3}$ является точкой разрыва II рода. Так как $x=\sqrt{3}$ – внутренняя точка отрезка интегрирования, то необходимо убедиться, что хотя бы один (левый или правый) предел бесконечен:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-3}}\right)=\infty.$$

Значит, $x=\sqrt{3}$ – точка разрыва II рода, интеграл является несобственным с разрывом подынтегральной функции в точке $x=\sqrt{3}$ (случай 3). Найдем сначала первообразную функцию, а потом посчитаем интеграл:

$$\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{x^2-3}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt[3]{x^2-3}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-3\right)^{1/3}}=\frac{1}{2}\int\left(x^2-3\right)^{-1/3}d\left(x^2-3\right)=$$

$$=\left\langle\int u^{-1/3}du\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-3\right)^{2/3}}{2/3}=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}.$$

Вычислим интеграл по формуле (2.3.6):

$$\int_1^4\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{x^2-3}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{x^2-3}}+\int_{\sqrt{3}}^4\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{x^2-3}}=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_1^{\sqrt{3}-\varepsilon_1}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-3}}+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{\sqrt{3}+\varepsilon_2}^4\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0}\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}\Bigg|_1^{\sqrt{3}-\varepsilon_1}\right)+\lim_{\varepsilon_2\to0}\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}\Bigg|_{\sqrt{3}+\varepsilon_2}^4\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\lim_{\varepsilon_1\to0}\left(\sqrt[3]{\left(\left(\sqrt{3}-\varepsilon_1\right)^2-3\right)^2}-\sqrt[3]{4}\right)+\frac{3}{4}\lim_{\varepsilon_2\to0}\left(\sqrt[3]{169}-\sqrt[3]{\left(\left(\sqrt{3}+\varepsilon_2\right)^2-3\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\lim_{\varepsilon_1\to0}\sqrt[3]{\left(\left(\sqrt{3}-\varepsilon_1\right)^2-3\right)^2}-\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{4}+\frac{3\cdot\sqrt[3]{169}}{4}-\frac{3}{4}\lim_{\varepsilon_2\to0}\sqrt[3]{\left(\left(\sqrt{3}+\varepsilon_2\right)^2-3\right)^2}=$$

$$=0-\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{4}+\frac{3\cdot\sqrt[3]{169}}{4}-0=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{169}-\sqrt[3]{4}\right)=const.$$

Интеграл сходится.

Пример 2.3.13. Вычислить: $\displaystyle\int_0^e\frac{dx}{x(\ln x-1)}$.

Решение. Найдем точки разрыва подынтегральной функции:

$x(\ln x-1)=0\ \Rightarrow\ x=0$ или $\ln x=1\ \Rightarrow\ x_1=0,\ x_2=e$.

Обе граничные точки отрезка интегрирования являются точками разрыва II рода подынтегральной функции, так как

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x(\ln x-1)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{\ln x-1}=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 0+0}(\ln x-1)=\infty;\\ \qquad\textit{правило}\quad\textit{Лопиталя}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(1/x\right)'}{(\ln x-1)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{-1/x^2}{1/x}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty;$$

$$\lim_{x\to e-0}\frac{1}{x(\ln x-1)}=\infty.$$

Значит, интеграл является несобственным (случай 4). Вычислим сначала первообразную функцию:

$$\int\frac{dx}{x(\ln x-1)}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x-1}=\int\frac{d(\ln x-1)}{\ln x-1}=\left\langle\int\frac{du}{u}\right\rangle=\ln\left|\ln x-1\right|.$$

Вычислим интеграл по формуле (2.3.7):

$$\int_0^e\frac{dx}{x(\ln x-1)}=\int_0^c\frac{dx}{x(\ln x-1)}+\int_c^e\frac{dx}{x(\ln x-1)}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{0+\varepsilon_1}^{c}\frac{dx}{x(\ln x-1)}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c}^{e-\varepsilon_2}\frac{dx}{x(\ln x-1)}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\ln\left|\ln x-1\right|\Big|_{\varepsilon_1}^{c}\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\ln\left|\ln x-1\right|\Big|_{c}^{e-\varepsilon_2}\right)=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\ln\left|\ln c-1\right|-\ln\left|\ln\varepsilon_1-1\right|\right)+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\ln\left|\ln(e-\varepsilon_2)-1\right|-\ln\left|\ln c-1\right|\right)=\ln\left|\ln c-1\right|-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\ln\left|\ln\varepsilon_1-1\right|+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\ln\left|\ln(e-\varepsilon_2)-1\right|-\ln\left|\ln c-1\right|=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\ln\left|\ln\varepsilon_1-1\right|+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\ln\left|\ln(e-\varepsilon_2)-1\right|.$$

Интеграл расходится, так как

$$-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\ln\left|\ln\varepsilon_1-1\right|=-\infty \quad\text{и}\quad \lim_{\varepsilon_2\to 0}\ln\left|\ln(e-\varepsilon_2)-1\right|=\infty.$$

Пример 2.3.14. Вычислить: $\int\limits_0^1\ln x\,dx$.

Решение. Область определения подынтегральной функции определяется из условия $x>0$, поэтому $x=0$ - граничная точка области определения. Точка $x=0$ также является точкой разрыва II рода (точнее сказать, обрыва) функции $\ln x$. Значит, мы имеем несобственный интеграл с разрывом в точке $x=0$. Вычислим этот интеграл.

$$\int_0^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l}U=\ln x;\quad dV=dx\\ dU=\dfrac{1}{x}dx;\quad V=\displaystyle\int dx=x\end{array}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left(\ln x\cdot x\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1-\ln\varepsilon\cdot\varepsilon-x\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\varepsilon\cdot\ln\varepsilon-1+\varepsilon\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\cdot\ln\varepsilon\right)-1+\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 = \left| \begin{matrix} \textit{правило} \\ \textit{Лопиталя} \end{matrix} \right| = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'} - 1 = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} - 1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} - 1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Интеграл сходится.

Геометрический смысл несобственных интегралов от функций, имеющих точки разрыва II рода. Пусть непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$. Тогда, вычисляя несобственный интеграл от разрывных функций, мы пытаемся посчитать площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции. Сходимость несобственного интеграла означает, что эту площадь можно вычислить, так как она конечна, а расходимость означает, что площадь вычислить невозможно.

§3.5. Признаки сходимости несобственных интегралов от разрывных функций

Признаки сходимости несобственных интегралов от разрывных функций такие же, что и для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Сформулируем их для одного случая из четырех.

Теорема 2.19. (Признак сравнения). *Пусть на интервале $[a;b)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, при $x = b$ терпят разрыв II рода и удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in [a;b)$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.*

Доказательство. По условию теоремы $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $[a;b)$ и ограничены на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$ и $b - \varepsilon \in [a,b)$, то по свойствам 7, 8 определенного интеграла и на основании теоремы 2.17 для любого $x \in [a;b)$ справедливо неравенство:

$$0 \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \qquad (2.3.8)$$

1) Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Значит, $\int\limits_a^b g(x)dx = const$. Интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ является функцией значения ε, то есть $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I(\varepsilon)$, при этом функция $I(\varepsilon)$ является неубывающей на основании теоремы 2.17 и равномерно ограниченной на основании (2.3.8). Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)$ существует и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, тогда по доказанному, если $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то и $\int\limits_a^b f(x)dx$ обязан сходится. Получили противоречие с условием. Значит, предположение неверно и, если $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^b g(x)dx$ также расходится.

Что и требовалось доказать.

При использовании признака сравнения практическое значение имеет сравнение с функцией $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$.

<u>Теорема 2.20.</u> Несобственный интеграл вида $\int\limits_0^a \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ $(a > 0)$ сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

<u>Доказательство.</u> Данный интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет разрыв II рода в точке $x = 0$. По определению 2.9 имеем

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^a \frac{dx}{x^\alpha} = I.$$

Пусть $\alpha \neq 1$, тогда

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^a\right) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(a^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(a^{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \left|1-\alpha < 0 \;\Rightarrow\; \alpha > 1\right| = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(a^{1-\alpha} - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) = \infty; \\ \left|1-\alpha > 0 \;\Rightarrow\; \alpha < 1\right| = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(a^{1-\alpha} - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \dfrac{1}{1-\alpha}a^{1-\alpha}. \end{array}\right.$$

Пусть $\alpha = 1$, тогда

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x|\Big|_\varepsilon^a\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln a - \ln\varepsilon) = \ln a - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = \infty.$$

Таким образом,

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \text{при } \alpha < 1, \quad \text{значит, интеграл сходится;} \\ \infty, \quad \text{при } \alpha \geq 1, \quad \text{значит, интеграл расходится.} \end{array}\right.$$

Что и требовалось доказать.

<u>Теорема 2.21.</u> (Предельный признак сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и положительны на интервале $[a;b)$, в точке $x=b$ имеют разрыв II рода. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 < k < \infty)$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.*

<u>Доказательство.</u> По условию теоремы

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Так как предел существует, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничена при $x \to b-0$, то есть существуют постоянные m и M такие, что

$$m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M.$$

Домножим все три части неравенства на $g(x)$ ($g(x) > 0$ по условию теоремы):

$$m\cdot g(x) \leq f(x) \leq M\cdot g(x) \tag{2.3.9}$$

Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $[a;b)$, то для них справедлив признак сравнения. Поэтому, если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $M\int_a^b g(x)dx$ сходится. Таким образом, по признаку сравнения интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, так как $f(x)\le M\cdot g(x)$. Если же $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то $m\int_a^b g(x)dx$ также расходится. Значит, по признаку сравнения $\int_a^b f(x)dx$ расходится, так как $m\cdot g(x)\le f(x)$.

Аналогично, если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то на основании (2.3.9) по признаку сравнения также сходится $m\int_a^b g(x)dx$. Значит, $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то на основании (2.3.9) по признаку сравнения также расходится $M\int_a^b g(x)dx$. Значит, $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Таким образом, оба интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Что и требовалось доказать.

***<u>Теорема 2.21.</u>* (Признак абсолютной сходимости).** *Пусть функция $f(x)$ при $x=b$ имеет разрыв II рода. Если интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится также и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ (интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при этом называется абсолютно сходящимся).*

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим вспомогательные функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ определенные по следующему правилу:

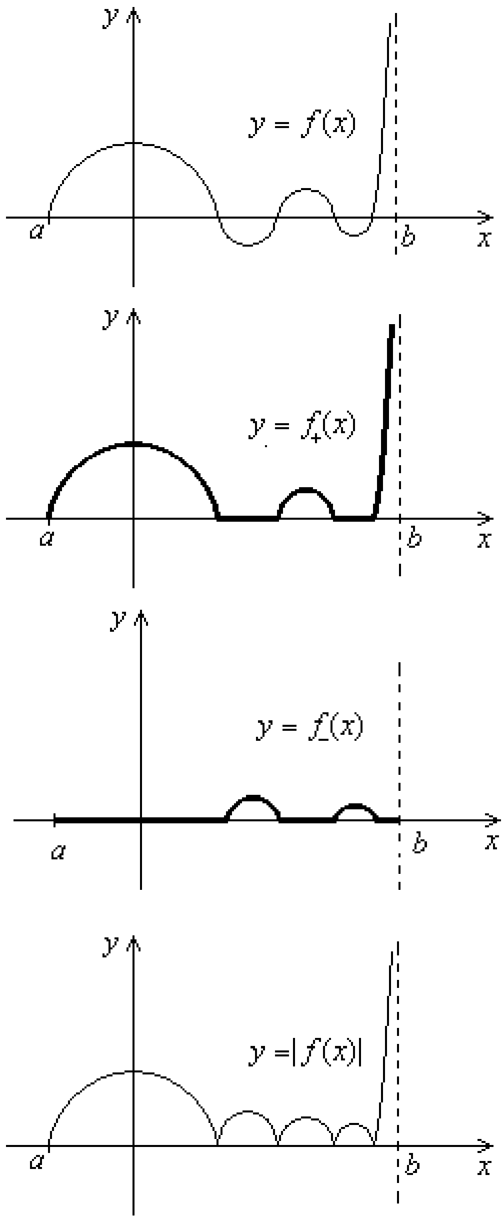


Рис.35

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{при } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{(рис.35);}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{при } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{(рис.35).}$$

Очевидно, что

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Для функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$ имеют место оценки:

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|,$$

$$0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|.$$

Тогда на основании сходимости интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ и признака сравнения интегралы $\int\limits_a^b f_+(x)dx$, $\int\limits_a^b f_-(x)dx$ сходятся.

Значит, $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, так как равен разности двух сходящихся интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b (f_+(x) - f_-(x))dx =$$

$$= \int\limits_a^b f_+(x)dx - \int\limits_a^b f_-(x)dx.$$

Что и требовалось доказать.

Сформулированные признаки сходимости справедливы для всех случаев несобственных интегралов от разрывных функций.

Приведем примеры исследования сходимости разных случаев несобственных интегралов от разрывных функций с помощью признаков сходимости.

Пример 2.3.15. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}dx$.

Интеграл является несобственным, так как точка разрыва II рода подынтегральной функции $\frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}$ лежит на отрезке интегрирования $(x=0\in[0;1])$. Исследуем сходимость этого ряда по признаку сравнения, для этого оценим подынтегральную функцию. Так как рассматриваем отрезок интегрирования $[0;1]$, то

$0\le x\le 1 \;\Rightarrow\; 0\le x^2\le 1 \;\Rightarrow\; 2\le x^2+2\le 3 \;\Rightarrow\; \ln 2\le \ln(x^2+2)\le \ln 3$.

Значит, при $x\in[0;1]$ справедливо неравенство: $\frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}\le\frac{\ln 3}{\sqrt{x}}$.

Установим сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln 3}{\sqrt{x}}dx$, подынтегральная функция которого так же, как и первоначального интеграла, имеет разрыв II рода в точке $x=0$:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln 3}{\sqrt{x}}dx=\ln 3\cdot\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ сходится на основании теоремы 2.20 $\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$. Значит, $\int\limits_0^1 \frac{\ln 3}{\sqrt{x}}dx$ сходится. По признаку сравнения интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}dx$ сходится.

Пример 2.3.16. $\int\limits_{-1}^0 \frac{\sin x}{x^2(x+2)}dx$.

Данный интеграл является несобственным, так как точка разрыва II рода подынтегральной функции попадает в отрезок интегрирования ($x^2(x+2)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \;\in[-1;0],\; x_2=-2\;\notin[-1;0]$). Для исследования сходимости этого интеграла воспользуемся предельным признаком сравнения. Так как $\sin x$ эквивалентен x при $x\to 0$, то для исследования сходимости подберем функцию

$$g(x)=\frac{x}{x^2(x+2)} \;\Rightarrow\; g(x)=\frac{1}{x(x+2)}.$$

Проверим условие теоремы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x^2(x+2)}}{\dfrac{1}{x(x+2)}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)\cdot\sin x}{x^2(x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left|\begin{matrix}\textit{первый}\\ \textit{замечательный}\\ \textit{предел}\end{matrix}\right|=1.$$

Условие теоремы выполнено, поэтому исследуем сходимость интеграла $\int\limits_{-1}^{0} g(x)dx$, подынтегральная функция которого так же, как и первоначального интеграла, имеет разрыв II рода в точке $x=0$:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{x(x+2)}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x(x+2)}dx=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{2}{x(x+2)}dx=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{2+x-x}{x(x+2)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{2+x}{x(x+2)}dx-\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{x}{x(x+2)}dx\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}-\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{d(x+2)}{x+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}-\ln|x+2|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon-\ln 1-\ln|-\varepsilon+2|+\ln 1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon-\ln|-\varepsilon+2|\right)=-\infty.$$

Интеграл расходится.

Значит, по предельному признаку сравнения интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\sin x}{x^2(x+2)}dx$ также расходится.

Для закрепления изученного материала предлагается решить следующие задачи **самостоятельно**.

Вычислить несобственные интегралы:

347. $\int\limits_{-3}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$ **348.** $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{x-1}$ **349.** $\int\limits_{-\pi/2}^{0}\operatorname{tg}xdx$

350. $\int\limits_{-\pi/2}^{0}\operatorname{ctg}xdx$. **351.** $\int\limits_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$. **352.** $\int\limits_{-8}^{0}\frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

353. $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{(x-4)^2}$. **354.** $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$. **355.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-1}$.

356. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **357.** $\int\limits_{-6}^{-4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$. **358.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

359. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$. **360.** $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$. **361.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$.

362. $\int\limits_{-\pi/3}^0 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$. **363.** $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx$. **364.** $\int\limits_{-1}^3 \frac{(x+2)dx}{(x+1)(2x-4)(x-3)}$.

С помощью признака сравнения исследовать сходимость несобственных интегралов:

365. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(1-x)^2}$. **366.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+5\right)}$. **367.** $\int\limits_2^4 \frac{3+\cos x}{(x-2)^4}dx$.

368. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$. **369.** $\int\limits_1^2 \frac{\log_2(x^2+3)dx}{\sqrt[5]{4-2x}}$. **370.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{(1-x^4)^3}$.

С помощью предельного признака сравнения исследовать сходимость несобственных интегралов:

371. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{e^{\sqrt{x-1}}-1}$. **372.** $\int\limits_2^{2,2} \frac{dx}{\mathrm{tg}(2x-4)-\sin(3x-6)}$.

373. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{e^{x^4}-\cos x^2}$. **374.** $\int\limits_{-2}^1 \frac{(x+2)^2 dx}{\sqrt[10]{1+(x+2)^6}-1}$.

375. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$. **376.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\arcsin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-\pi}{\sin(3x-2\pi)}dx$.

Исследовать на абсолютную сходимость:

377. $\int\limits_{-1}^3 \frac{\cos x-2}{x^{10}}dx$. **378.** $\int\limits_1^4 \frac{\log_7\frac{x^2}{3}}{x^2-4x}dx$. **379.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}(3-\sin x)}$.

Глава 4. *Геометрические приложения определенного интеграла*

§4.1. Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах

В §1.1 главы 1 раздела II было установлено, что геометрический смысл определенного интеграла в том, что его значение есть площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси Ox ($f(x) \geq 0$). Но с помощью определенного интеграла можно находить площади не только криволинейных трапеций, но и других плоских фигур. Рассмотрим некоторые случаи.

4.1.1. *Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в явном виде*

1) Пусть $y = f(x) \geq 0$ непрерывная функция на отрезке $[a;b]$, то есть график функции лежит выше оси Ox (рис.36).

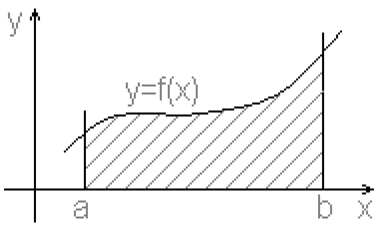


Рис.36

На основании геометрического смысла определенного интеграла площадь S криволинейной трапеции под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ можно вычислить по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.4.1}$$

2) Пусть $y = f(x) \leq 0$ непрерывная функция на отрезке $[a;b]$, то есть график функции лежит ниже оси Ox (рис.37).

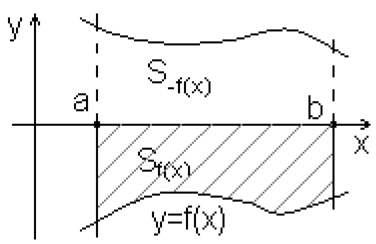


Рис.37

Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, которую условно также назовем площадью под графиком функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $y = -f(x)$. Эта функция симметрична функции $y = f(x)$ относительно оси Ox. Очевидно, что площади криволинейных трапеций $S_{f(x)}$ и $S_{-f(x)}$ под графиками $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ равны. Так как $y = -f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то $S_{-f(x)}$ вычисляется по формуле (2.4.1). Значит,

$$S_{f(x)} = S_{-f(x)} = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, если $f(x) \le 0$ на $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции под графиком функции вычисляется по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.4.2)$$

3) Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_2(x) \ge f_1(x)$ на $[a;b]$. Вычислим площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (площадь между кривыми).

Рассмотрим сначала частный случай $f_2(x) \ge f_1(x) \ge 0$ на $[a;b]$ (рис.38), тогда

$$S_{A_1A_2B_2B_1} = S_{aA_2B_2b} - S_{aA_1B_1b} = \left|\textit{по формуле } (2.4.1)\right| = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx =$$

$$= \left|\textit{по свойству 2 определенного интеграла}\right| = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Итак,

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (2.4.3)$$

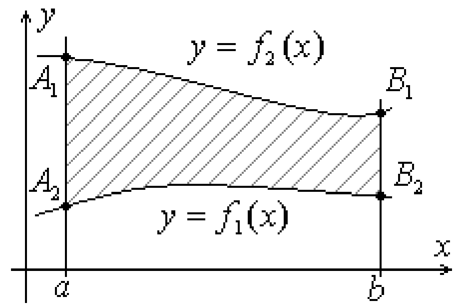


Рис.38

Рассмотрим теперь общий случай, когда $f_2(x) \ge f_1(x)$, но расположены произвольным образом относительно оси Ox (рис.39). Сдвинем оба графика на одно и тоже число C «вверх» относительно оси Oy таким образом, чтобы оба графика оказались выше оси Ox. Такое число всегда найдется. Например, в качестве C можно взять значение $|m_1|$ - модуль наименьшего значения функции $f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, которое по теореме Вейерштрасса всегда существует для непрерывной на конечном отрезке функции. После сдвига мы получим кривые $y = f_1(x) + C$ и $y = f_2(x) + C$, при этом $f_2(x) + C \ge f_1(x) + C$. Очевидно, что на отрезке $[a;b]$ площадь S_2 между кривыми $y = f_1(x) + C$ и $y = f_2(x) + C$ равна площади S_1 между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Тогда

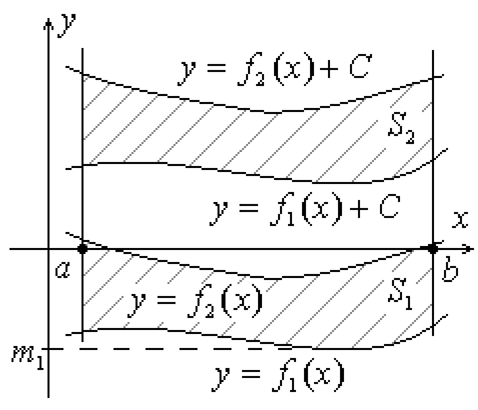


Рис.39

$$S_1 = S_2 = \left| \begin{matrix} \textit{по формуле} \\ (2.4.3) \end{matrix} \right| = \int_a^b \left(f_2(x) + C - \left(f_1(x) + C \right) \right) dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

Таким образом, для любого расположения графиков функций относительно оси абсцисс, площадь фигуры между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ при $f_2(x) \ge f_1(x)$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx . \qquad (2.4.4)$$

4) Пусть плоская фигура имеет «сложную» форму, то есть найдется хотя бы одна прямая, параллельная оси Oy, которая пересечет фигуру более чем в двух точках. Пример такой фигуры приведен на рисунке 40.

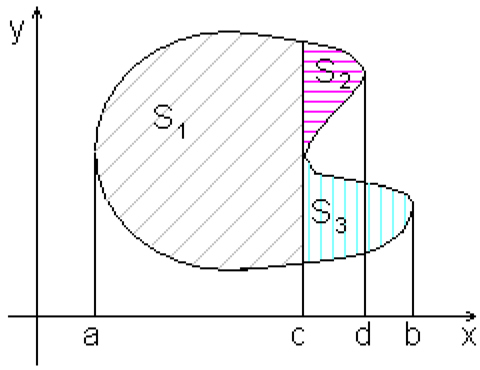


Рис.40

Чтобы посчитать площадь в этом случае, необходимо фигуру разбить на части прямыми, параллельными оси Oy, так, чтобы для каждой части однозначно определялись «верхняя» и «нижняя» границы, затем посчитать площади каждой части с помощью формул (2.4.1) – (2.4.4). Площадь всей фигуры является суммой площадей частей

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots .$$

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, параллельными оси Ox, осью Oy и непрерывной кривой $x = g(y) \ge 0$, тогда можно вычислить площадь, как площадь сложной фигуры (случай 4), либо воспользоваться формулами (2.4.1) – (2.4.4), которые легко переписываются относительно переменной y. Приведем эти формулы без вывода.

1') Пусть $x = g(y) \ge 0$ непрерывная функция на отрезке $y \in [c, d]$, то есть график функции лежит «правее» оси Oy (рис.41), тогда

$$S = \int_c^d g(y) dy \quad . \qquad (2.4.5)$$

2') Пусть непрерывная функция $x = g(y) \le 0$ при $y \in [c, d]$, то есть график функции лежит «левее» оси Oy (рис.42), тогда

$$S = -\int_c^d g(y) dy . \qquad (2.4.6)$$

3') Пусть фигура ограничена графиками непрерывных функций $x = g_1(y)$ и $x = g_2(y)$ при $y \in [c,d]$ (рис.43), при этом $g_2(y) \geq g_1(y)$, тогда

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy. \qquad (2.4.7)$$

Будьте внимательны, $x = g_2(y)$- «правая» кривая, $x = g_1(y)$- «левая» кривая.

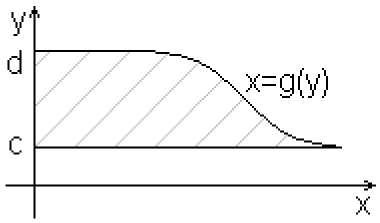


Рис.41

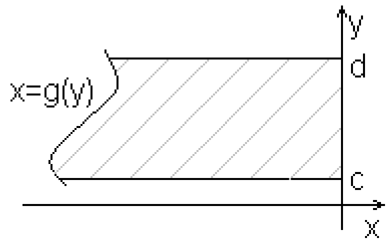


Рис.42

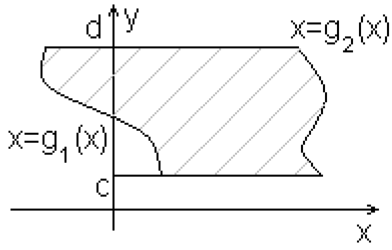


Рис.43

Пример 2.4.1. Вычислить площадь между графиком функции $y = x^2 - 1$ и осью Ox на отрезке $x \in [-2,-1]$.

Решение.

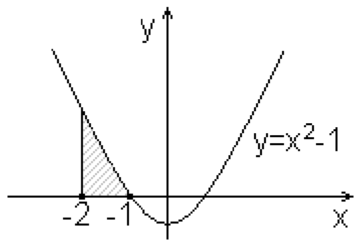


Рис.44

Нарисуем график функции, чтобы понять, какая площадь нас интересует (рис.44). На отрезке $[-2,-1]$ функция $y = x^2 - 1$ неотрицательна (лежит выше оси Ox). Поэтому для вычисления площади воспользуемся формулой (2.4.1):

$$S = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx = \int_{-2}^{-1} x^2 dx - \int_{-2}^{-1} dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - x\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\left((-1)^3 - (-2)^3\right) - (-1 - (-2)) = \frac{1}{3} \cdot 7 - 1 = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, $S = \frac{4}{3}$.

Пример 2.4.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$ и прямыми $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.

Решение.

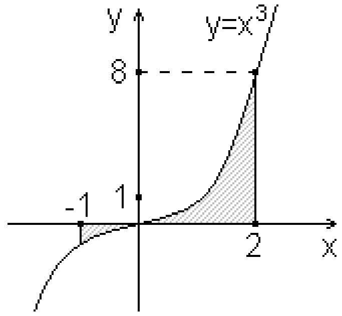


Рис.45

Нарисуем фигуру (рис.45).Чтобы найти площадь этой фигуры, необходимо ее разбить на две части, так как при $x \in [0;2]$ кривая $y = x^3$ лежит выше оси Ox и ее площадь следует считать по формуле (2.4.1), а при $x \in [-1;0]$ кривая $y = x^3$ лежит ниже оси Ox и ее площадь следует считать по формуле (2.4.2).

$$S = S_{[-1;0]} + S_{[0;2]} = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{2} x^3 dx = -\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0} +$$

$$+\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{4}\cdot\left(0-(-1)^4\right)+\frac{1}{4}\left(2^4-0\right) = -\frac{1}{4}\cdot(-1)+\frac{1}{4}\cdot 16 = \frac{17}{4}.$$

Таким образом, $S = \frac{17}{4}$.

Пример 2.4.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 4$ и $y = \sqrt{3}\cdot x^2$, полностью лежащей выше оси Ox.

Решение.

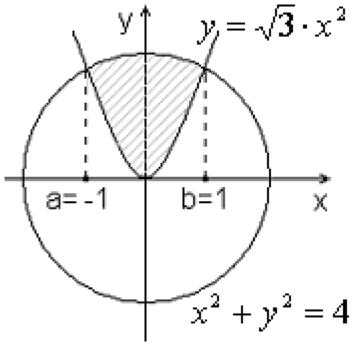


Рис.46

Нарисуем эту фигуру (рис.46).

$x^2 + y^2 = 4$ - окружность радиуса 2 с центром в начале координат; $y = \sqrt{3}\cdot x^2$ - парабола с вершиной в начале координат.

Вычислять площадь полученной фигуры будем по формуле (2.4.4), но для этого необходимо найти координаты точек пересечения графиков. Так как точки пересечения лежат и на окружности, и на параболе, то необходимо решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}\cdot x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\sqrt{3}\cdot x^2\right)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\left(x^2\right)_{1,2} = 1; -\frac{4}{3}$$

Таким образом, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. Значит, $a = -1$, $b = 1$.

Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$ получаем:

$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$, то есть $f_2(x) = \sqrt{4-x^2}$, так как нас интересует верхняя половина окружности.

Так как $f_1(x) = \sqrt{3}\cdot x^2$, имеем

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}\cdot x^2\right)dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx - \sqrt{3}\int_{-1}^{1}x^2dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} x = 2\sin t;\ \ t = \arcsin\frac{x}{2};\ \ dx = 2\cos t dt. \\ x = -1 \Rightarrow t = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \\ x = 1 \Rightarrow t = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \end{array}\right| = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\sqrt{4-(2\sin t)^2}\cdot 2\cos t dt -$$

$$-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=4\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1^3-(-1)^3\right)=4\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^2 t dt-\frac{2\sqrt{3}}{3}=$$

$$=4\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\left(\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}dt+\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos 2t dt\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\left(t\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}\right)-$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi+\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом, $S=\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2.4.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$, $y=0$.

Решение. Нарисуем фигуру (рис.47).

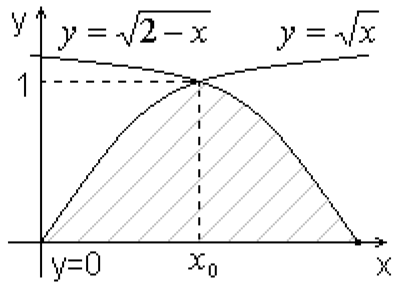


Рис.47

$y=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ y^2=x\ \ (y\geq 0)$ - верхняя ветвь параболы $y^2=x$;

$y=\sqrt{2-x}\ \Rightarrow\ y^2=2-x\ \ (y\geq 0)$ - верхняя ветвь параболы $y^2=2-x$.

Можно вычислить площадь этой фигуры с помощью формулы (2.4.1), но тогда придется разбить фигуру на две части и считать два интеграла, так как надо будет подставлять в формулу $y=\sqrt{2-x}$ при $x\in[0;x_0]$ и $y=\sqrt{x}$ при $x\in[x_0;2]$. Но можно рассмотреть эту фигуру относительно оси Oy и вычислить ее площадь по формуле (2.4.7).

Найдем точку пересечения графиков, решив систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=\sqrt{2-x} \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} y^2=x \\ y^2=2-x \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Найдем $g_2(y)$ и $g_1(y)$:

$y=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ y^2=x\ \Rightarrow\ g_1(y)=y^2$;

$y=\sqrt{2-x}\ \Rightarrow\ y^2=2-x\ \Rightarrow\ x=2-y^2\ \Rightarrow\ g_2(y)=2-y^2$.

Вычислим площадь по формуле (2.4.7):

$$S=\int\limits_0^1\left(2-y^2-y^2\right)dy=\int\limits_0^1 2dy-\int\limits_0^1 2y^2dy=2y\Big|_0^1-2\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Таким образом, $S=\dfrac{4}{3}$.

4.1.2. ***Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде***

Пусть кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически (y зависит от x через параметр t):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Выведем формулу для нахождения площади криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, где $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$. Воспользуемся формулой (2.4.1)

$$S = \int_a^b y dx.$$

Перейдем к переменной t с помощью подстановки $x = x(t)$, тогда $y = y(t)$. Так как $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, то в силу формулы (2.2.2) получаем

$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y(t) d(x(t)) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt.$$

Окончательно имеем, что площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде, вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt. \qquad (2.4.8)$$

Замечание. По формуле (2.4.8) вычисляется площадь между заданной кривой и осью Ox, при этом $y(t) \geq 0$.

Пример 2.4.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностью

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y - 2 = 2\sin t \end{cases}.$$

Решение. Чтобы нарисовать окружность, вспомним, что параметрическая система уравнений

$$\begin{cases} x - x_0 = R\cos t \\ y - y_0 = R\sin t \end{cases} \qquad (x_0, y_0, R = const)$$

определяет окружность радиуса R, центр которой смещен в точку (x_0, y_0).

Поэтому мы имеем окружность радиуса $R = 2$ (рис.48), смещенную вдоль оси Oy, центр этой окружности в точке $(0;2)$.

Так как фигура симметричная, то найдем сначала четверть площади. Кривая задана в параметрическом виде, поэтому для вычисления площади воспользуемся формулой (2.4.8).

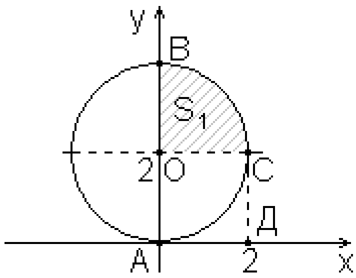


Рис.48

Для площади S_1 интервал изменения x от 0 до 2. Найдем граничные значения t:

$x=0 \;\Rightarrow\; 0=2\cos t \;\Rightarrow\; \cos t=0 \;\Rightarrow\; t=\dfrac{\pi}{2}$;

$x=2 \;\Rightarrow\; 2=2\cos t \;\Rightarrow\; \cos t=1 \;\Rightarrow\; t=0$.

Значит, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $\beta=0$, $y=2\sin t+2$.

Так как с помощью формулы (2.4.8) вычисляется площадь под графиком, то

$$S_1 \neq \int_{\pi/2}^{0}(2\sin t+2)\cdot(2\cos t)'\,dt = S_{ABCD};$$

$$S_1 = S_{ABCD}-S_{AOCD} = \left|\begin{array}{l} S_{AOCD}=2\cdot 2=4, \\ \textit{как площадь квадрата}\end{array}\right| = S_{ABCD}-4.$$

Таким образом,

$$S_1=\frac{1}{4}S=\int_{\pi/2}^{0}(2\sin t+2)\cdot(2\cos t)'\,dt-4=\int_{\pi/2}^{0}(2\sin t+2)\cdot 2(-\sin t)dt-4=$$

$$=4\int_{\pi/2}^{0}\left(-\sin^2 t-\sin t\right)dt-4=-4\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt-4\int_{\pi/2}^{0}\sin t\,dt-4=-4\int_{\pi/2}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}dt+$$

$$+4\cos t\Big|_{\pi/2}^{0}-4=-2\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)dt+4\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{2}\right)-4=-2\int_{\pi/2}^{0}dt+2\int_{\pi/2}^{0}\cos 2t\,dt+$$

$$+4(1-0)-4=-2t\Big|_{\pi/2}^{0}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2t\Big|_{\pi/2}^{0}=-2\left(0-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 0-\sin\pi=\pi.$$

Значит, $S_1=\pi$. Таким образом, $S=4\pi$.

§4.2. *Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах*

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется двумя координатами (r, φ), где r - полярный радиус, φ - полярный угол. Полярная система координат состоит из полярной оси и полюса. Полярная ось – это луч, имеющий начало в полюсе O и соответствующий углу $\varphi = 0$ (рис.49).

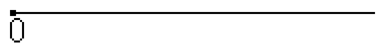


Рис.49

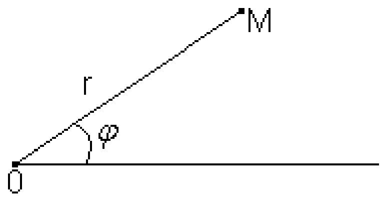


Рис.50

Полярный угол φ определяет луч, образующий с полярной осью угол величины φ (рис.50). Угол φ может иметь направление положительное (против часовой стрелки) и отрицательное (по часовой стрелке), и при этом $-\infty < \varphi < +\infty$. Полярный радиус r определяет расстояние между полюсом и точкой $(r \geq 0)$.

Найдем зависимость между полярными (r, φ) и декартовыми (x, y) координатами.

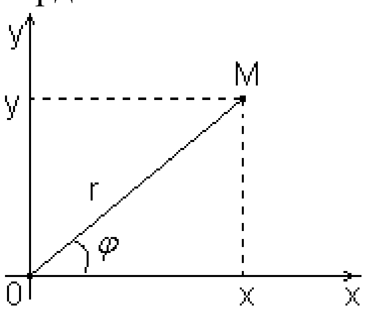


Рис.51

Полюс O совпадает с началом координат в декартовой системе. Полярная ось совпадает с осью Ox декартовых координат (рис.51). Пусть точка M имеет декартовые координаты (x, y) и полярные (r, φ). Тогда из соотношений в прямоугольном треугольнике получаем связь между (x, y) и (r, φ):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

1) Пусть в полярных координатах задан криволинейный сектор.

Определение 2.12. **Криволинейным сектором** *называется плоская фигура, ограниченная непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где r и φ - полярные координаты.*

Найдем площадь S криволинейного сектора.

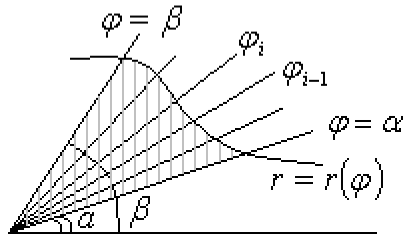


Рис.52

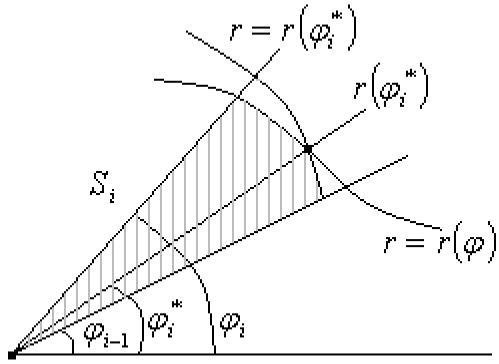


Рис.53

Разделим сектор произвольным образом на n секторов лучами $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$, $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < ... < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$ (рис.52). Внутри каждого из секторов $[\varphi_0, \varphi_1]$, $[\varphi_1, \varphi_2]$,…, $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$,…, $[\varphi_{n-1}, \varphi_n]$ выберем произвольный луч $\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_i^*, ..., \varphi_n^*$ (рис.53) и найдем значения $r(\varphi_1^*)$, $r(\varphi_2^*)$,…, $r(\varphi_i^*)$,…, $r(\varphi_n^*)$.

Очевидно, что площадь каждого из криволинейных секторов S_i практически равна площади кругового сектора радиуса $r(\varphi_i^*)$, ограниченного теми же лучами, то есть

$$S_i \approx \frac{1}{2}\left(r\left(\varphi_i^*\right)\right)^2 \cdot \Delta\varphi_i .$$

Так как площадь всего криволинейного сектора S равна сумме площадей n секторов $[\varphi_0, \varphi_1]$, $[\varphi_1, \varphi_2]$,…, $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$,…, $[\varphi_{n-1}, \varphi_n]$,

то
$$S_n \approx \frac{1}{2} r^2\left(\varphi_1^*\right) \cdot \Delta\varphi_1 + ... + \frac{1}{2} r^2\left(\varphi_i^*\right) \cdot \Delta\varphi_i + ... + \frac{1}{2} r^2\left(\varphi_n^*\right) \cdot \Delta\varphi_n$$

или
$$S_n \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2\left(\varphi_i^*\right) \cdot \Delta\varphi_i . \qquad (2.4.9)$$

Если мы будем увеличивать количество лучей разбиения, то площадь S будет более точно описываться суммой вида (2.4.9). Поэтому за точное значение площади S примем предел при $n \to \infty$ (как и раньше разбиение должно быть равномерным, то есть $\max\limits_i \Delta\varphi_i \to 0$):

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2\left(\varphi_i^*\right) \cdot \Delta\varphi_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi .$$

Таким образом, получаем искомую площадь

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi . \qquad (2.4.10)$$

2) Пусть фигура ограничена двумя полярными кривыми $r_1 = r_1(\varphi)$, $r_2 = r_2(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис.54). Найдем площадь S этой фигуры.

$$S = S_{ABCД} = S_{OBC} - S_{OAД} = \left| \begin{matrix} \text{по формуле} \\ (2.4.10) \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r_2^2(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r_1^2(\varphi) d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi)\right)d\varphi .$$

Таким образом,

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi)\right)d\varphi . \qquad (2.4.11)$$

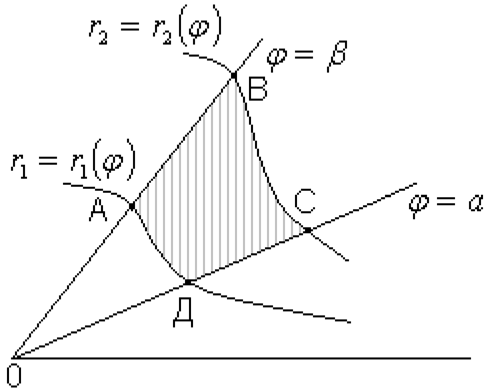


Рис.54

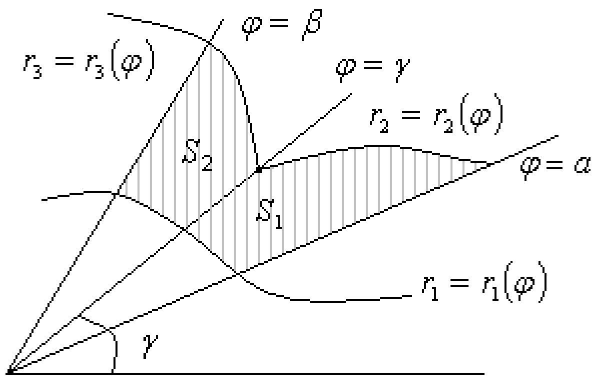


Рис.55

3) Пусть фигура имеет «сложную» форму, для которой площадь невозможно посчитать ни по формуле (2.4.10), ни по формуле (2.4.11). Тогда лучами, выходящими из полюса, фигуру следует разбить на части, к которым можно применить формулы (2.4.10) или (2.4.11). Например, для фигуры, изображенной на рисунке 55:

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\gamma}\left(r_2^2-r_1^2\right)d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\beta}\left(r_3^2-r_1^2\right)d\varphi .$$

Пример 2.4.6. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r=\sin 3\varphi$.

Решение. Построим заданную фигуру, составив сначала таблицу значений.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$
r	0	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

При построении фигуры не наносятся точки, где получилось значение $r<0$ (по смыслу полярного радиуса). Фигура состоит из трех одинаковых лепестков, при этом каждый лепесток состоит из двух половинок одинаковой площади (рис.56). Поэтому посчитаем заштрихованную площадь $S_1=\frac{1}{6}S$, а потом умножим ее на 6. Для части с площадью S_1 полярный угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{6}$, поэтому по формуле (2.4.10) имеем:

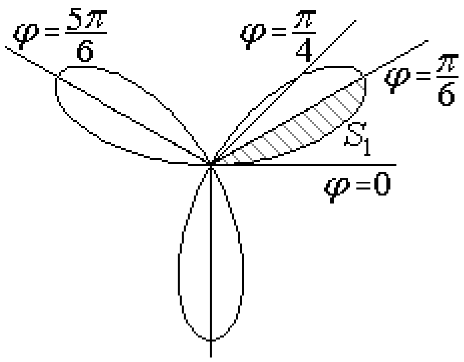


Рис.56

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\sin 3\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 6\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} \cos 6\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{\pi/6} -$$

$$-\frac{1}{24}\int_0^{\pi/6} \cos 6\varphi \cdot d(6\varphi) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{24}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{\pi}{24} - \frac{1}{24}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{24}.$$

$$S = 6\cdot S_1 = 6\cdot\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2.4.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $r = \cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$.

Решение. Нарисуем фигуру, построив таблицу значений для каждой окружности.

$r_1 = \cos\varphi$:

φ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
r	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0

при $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ значения $r_1 < 0$, поэтому точек кривой в этой области нет.

$r_2 = 3\cos\varphi$:

φ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
r	0	$3\sqrt{2}/2$	3	$3\sqrt{2}/2$	0

при $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ значения $r_2 < 0$, поэтому точек кривой в этой области нет.

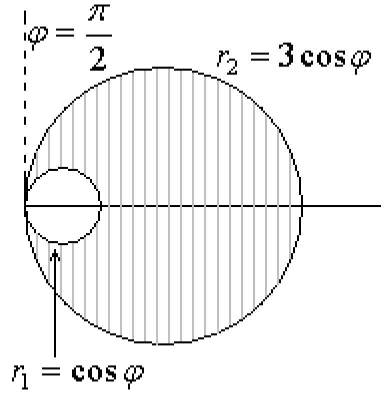


Рис.57

По формуле (2.4.11) вычислим площадь полученной фигуры (рис.57). Фигура симметрична относительно полярной оси, поэтому вычислим площадь верхней половины фигуры и удвоим ее.

$$S = 2S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left((3\cos\varphi)^2 - (\cos\varphi)^2\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 8\cdot\cos^2\varphi\cdot d\varphi = 8\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi +$$

$$+4\int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{\pi/2} + 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi d(2\varphi) = 4\cdot\frac{\pi}{2} + 2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} =$$

$= 2\pi + 2(\sin \pi - \sin 0) = 2\pi$.

Таким образом, $S = 2\pi$.

Для закрепления изученного в главе материала предлагается решить нижеследующие задачи **самостоятельно.**

Найти площадь под графиком функции:

380. $y = 8x - x^2$ при $1 \le x \le 4$.

381. $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$ при $\dfrac{1}{2} \le x \le 1$

382. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$, прямыми $x = 0$, $x = 2$ и осью абсцисс.

383. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x + 2y - 8 = 0$, $y = 1$, $y = 3$ и осью ординат.

384. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = -x^2 - 2x + 3$, осями координат и прямой $x = 2$.

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми:

385. $3x^2 - 4y = 0,\ 2x - 4y + 1 = 0$.

386. $4x - 3y^2 = 0,\ 4x + 2y - 1 = 0$.

387. $y = x^2 + 3,\ \ y = x - 1,\ \ x = 0,\ \ x = 2$.

388. $y = x^2 - 4x + 3,\ \ y = -x^2 + 2x + 3$.

389. $y = \dfrac{3}{x+1},\ \ y = -x^2 + x + 3$.

390. $y = \sin x,\ \ y = \dfrac{2}{\pi}x$.

391. $x = y^2,\ \ x + y^2 = 2$.

392. $y = \ln x,\ \ y = 1,\ \ y = 0,\ \ x = 4$.

393. $2y + 3x = 12,\ \ y + 3x = -3,\ \ y = -3,\ \ y = 3$.

394. $y = \arccos x,\ \ y = \pi,\ \ 2y + x = 1$.

395. $y = \operatorname{tg} x\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right),\ \ y = \operatorname{ctg} x\ \ (0 < x < \pi),\ \ y = \sqrt{3}$.

396. $y = \sqrt{4 - x^2},\ \ y = \sqrt{2}$.

397. $y = 2^x,\ \ y + x = 1,\ \ 2y + x = 5$.

398. $y = \ln x,\ \ y = \ln(x - 1),\ \ x = 2,\ \ x = 5$.

399. $y = \sin x\ \ (0 \le x \le \pi),\ \ y = \sin 2x\ \ (0 \le x \le \pi)$.

400. $x^2 + y^2 = 16,\ \ x^2 + y^2 = 8y$.

401. $4x^2 + y^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 1$.

402. $x = \sqrt{9 - 9y^2},\ \ x = \sqrt{4 - \dfrac{2}{3}y^2}$.

403. $y = 2 - x^2,\ \ y^3 = x^2$.

404. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{25}=1,\ \ y=5$.

405. $y^2=x^3-x^2,\ \ x=2$.

406. $y=|x-3|,\ \ y=6-|x|$.

407. $x^2-\dfrac{y^2}{16}=1,\ \ y=2x,\ \ y=-2x$.

408. $x^2-y^2=1,\ \ y^2-\dfrac{x^2}{9}=1$.

409. $y=\left|5+4x-x^2\right|,\ y=7-|x-2|$.

410. $r=2\cos\varphi$.

411. $r=-6\sin\varphi$.

412. $r^2=2\cos 4\varphi$.

413. $r^2=4\sin 6\varphi$ (одного лепестка).

414. $r=1-\sin\varphi$.

415. $r=2\varphi$ (между первым и вторым витками спирали Архимеда).

416. $r=3+\sin 2\varphi,\ \ r=2+\sin 2\varphi$.

417. $r=3-\cos 3\varphi,\ \ r=4$.

418. $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$ (перейти к полярным координатам).

419. $r=3\cos\varphi,\ \ r=\sqrt{3}\sin\varphi$.

420. $r=\cos\varphi+\sin^2\varphi+1$, между лучами $\varphi=\dfrac{\pi}{4},\ \ \varphi=\pi$.

421. $r=\sin\varphi$, лежащей вне кривой $r=1+\cos\varphi$.

422. $\begin{cases}x=3(t-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$, $y=3$.

423. $\begin{cases}x=3\cos t\\ y=8\sin t\end{cases}$, $y=4$ (выше прямой).

424. $\begin{cases}x=16\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$.

425. $\begin{cases}x=t^2\\ y=\dfrac{t}{3}\left(3-t^2\right)\end{cases}$.

426. $\begin{cases}x=t^2-1\\ y=t^3-t\end{cases}$.

427. $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=2t^2-t^3\end{cases}$.

428. $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\ln\sin t\end{cases}$, $x=\dfrac{1}{2},\ y=0$.

429. $\begin{cases}x=|t|\\ y=t\left(e^{|t|}-e\right)\end{cases}$.

§4.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

1) Вычисление длины дуги кривой, заданной в явном виде.

Пусть в прямоугольных координатах на отрезке $a \le x \le b$ задана непрерывная кривая AB, уравнение которой $y = f(x)$ (рис.58).

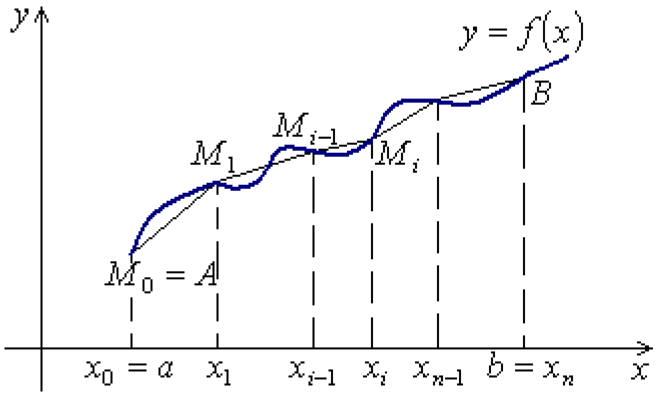


Рис.58

Разобьем дугу AB точками $M_0 = A$, $M_1, \ldots$, M_{i-1}, $M_i, \ldots$, $M_n = B$ на n частей. Построим ломаную $M_0 M_1 \ldots M_i \ldots M_n$. Длина этой ломаной приближенно равна длине кривой AB. При этом, чем больше звеньев ломаной, тем более точно будет это приближение. Длиной дуги AB назовем предел, к которому стремится длина ломаной, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает $(n \to \infty)$, а длина ее наибольшего звена стремится к нулю.

Пусть длины звеньев ломаной равны $l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_n$, тогда длина дуги AB равна

$$l = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} l_i .$$

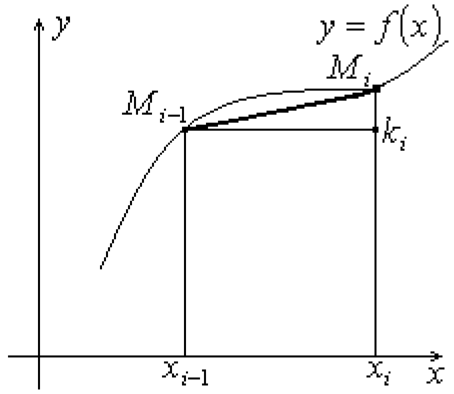


Рис.59

Вычислим длину l_i звеньев ломаной.

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длину звена l_i можно вычислить по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $M_{i-1} K_i M_i$ (рис.59). Так как $M_{i-1} K_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $M_i K_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta y_i$, то

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, \ \ i = 1, \ldots n .$$

По теореме Лагранжа для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ существует точка $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ такая, что $\Delta y_i = f'(c_i) \Delta x_i$, поэтому

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \Delta x_i)^2} = \sqrt{\left(1 + (f'(c_i))^2\right) \cdot (\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x .$$

Таким образом,

$$l = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\max l_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i .$$

Но, $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i$ является интегральной суммой для функции $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, предел этой интегральной суммы есть определенный интеграл. Значит,

$$l=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\max l_i\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Итак, длина дуги кривой, заданной в явном виде, непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке $x\in[a,b]$ и имеющей непрерывную производную $y'=f'(x)$ на этом отрезке вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \tag{2.4.12}$$

2) Вычисление длины дуги кривой, заданной в параметрическом виде.

Пусть в прямоугольных координатах непрерывная кривая AB задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывные функции с непрерывными производными $x'(t)$ и $y'(t)$; $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$.

Чтобы вычислить длину дуги кривой AB, воспользуемся формулой (2.4.12):

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\textit{подстановка}\ \ x=x(t),\ \ y=y(t);\\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{y'_t}{x'_t};\\ x=a\ \Rightarrow\ t=\alpha\ ;\ x=b\ \Rightarrow\ t=\beta\end{array}\right|=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\frac{(y'_t)^2}{(x'_t)^2}}\,d(x(t))=\int_\alpha^\beta\frac{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}}{x'_t}\,x'_t dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt.$$

Итак, длина дуги кривой, заданной в параметрическом виде, вычисляется по формуле:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \tag{2.4.13}$$

Замечание. При вычислении длины дуги кривой нижний предел интегрирования всегда меньше верхнего предела. Поэтому если $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ и $\alpha>\beta$, то

$$l=\int_\beta^\alpha\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

3) Вычисление длины дуги кривой, заданной в полярных координатах.

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, при этом $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывные функции на отрезке $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Чтобы вычислить длину дуги кривой AB, воспользуемся формулой (2.4.13). Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и $r = r(\varphi)$, то можно считать угол φ параметром. Тогда кривая AB задана параметрически:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\cdot\sin\varphi \end{cases}.$$

Тогда по формуле (2.4.13) можем вычислить длину дуги:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'_{\varphi}\right)^2 + \left(y'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\left(r(\varphi)\cdot\cos\varphi\right)'_{\varphi}\right)^2 + \left(\left(r(\varphi)\cdot\sin\varphi\right)'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r'_{\varphi}\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin\varphi\right)^2 + \left(r'_{\varphi}\cdot\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\right)^2}\ \ d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r'_{\varphi}\right)^2\cdot\cos^2\varphi - 2\cdot r'_{\varphi}\cdot r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi + r^2\cdot\sin^2\varphi + \left(r'_{\varphi}\right)^2\cdot\sin^2\varphi + 2\cdot r'_{\varphi}\cdot r\cdot}$$

$$\overline{\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi}\ \ d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r'_{\varphi}\right)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}\ \ d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r'_{\varphi}\right)^2 + r^2}\ \ d\varphi.$$

Таким образом, длина дуги кривой, заданной в полярных координатах вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\ \ d\varphi. \qquad (2.4.14)$$

Пример 2.4.8. Вычислить длину дуги линии $y = \ln(\sin x)$ от $x = \dfrac{\pi}{3}$ до $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. Кривая задана в явном виде, поэтому для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (2.4.12).

$$l = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1 + \left(\left(\ln\sin x\right)'\right)^2}\, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx =$$

$$= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\pi/3}^{2\pi/3} = \ln\left|tg\frac{\pi}{3}\right| - \ln\left|tg\frac{\pi}{6}\right| = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\ln\sqrt{3}.$$

Пример 2.4.9. Вычислить длину части кардиоиды $r=1-\cos\varphi$, находящуюся внутри окружности $x^2+y^2=1$.

Решение. Кривая задана в полярных координатах, поэтому воспользуемся формулой (2.4.14).

Построим график кардиоиды, для чего составим таблицу значений

φ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

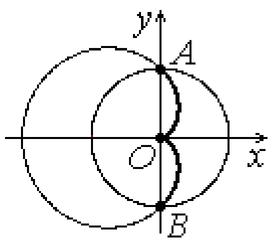


Рис.60

Построим окружность с центром в начале координат радиуса 1.

Из рисунка 60 видно, что необходимо вычислить длину дуги AOB. Дуга состоит из двух одинаковых частей, симметричных относительно полярной оси, поэтому найдем длину дуги OA, а потом полученное значение удвоим. Для дуги OA полярный угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Тогда по формуле (2.4.14) получаем:

$$l_{OA}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\left((1-\cos\varphi)'\right)^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi=\left|1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right|=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2\cdot2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2\int_0^{\pi/2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=2\cdot2\int_0^{\pi/2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=-4\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2}=-4\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos0\right)=-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=4-2\sqrt{2}.$$

$$l_{BOA}=2\cdot\left(4-2\sqrt{2}\right)=8-4\sqrt{2}.$$

Пример 2.4.10. Вычислить длину дуги одной арки кривой $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$.

Решение. Построим график этой кривой, составив таблицу значений x и y в зависимости от t.

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
x	3	$3\cdot\left(\sqrt{2}/2\right)^3\approx1{,}1$	0	$3\cdot\left(\sqrt{2}/2\right)^3\approx-1{,}1$	-3
y	0	$3\cdot\left(\sqrt{2}/2\right)^3\approx1{,}1$	3	$3\cdot\left(\sqrt{2}/2\right)^3\approx1{,}1$	0

Напомним, что одна арка кривой заключена между точками, где $y=0$, то есть в данной задаче при $t\in[0;\pi]$. При построении кривой, заданной в параметрическом виде, в таблице значений не обращаем внимание на значения переменной t, кривую строим относительно переменных x, y (рис.61).

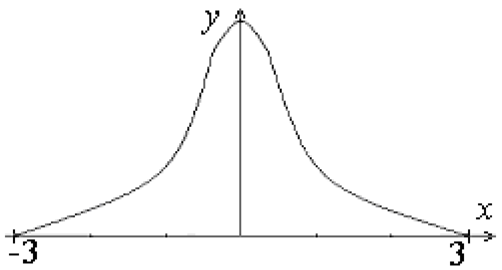


Рис.61

Для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (2.4.13). Дуга кривой состоит из двух одинаковых частей, поэтому будем вычислять длину половины дуги, а потом результат удвоим.

Правая часть дуги соответствует значениям x от 0 до 3, значит, значения t от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Так как при вычислении длины дуги нижний предел интегрирования всегда меньше верхнего, то $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$l=2\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\left(3\cos^3 t\right)'\right)^2+\left(\left(3\sin^3 t\right)'\right)^2}\,dt=2\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(3\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\right)^2+\left(3\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\,dt=2\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{9^2\left(\cos^4 t\cdot\sin^2 t+\sin^4 t\cdot\cos^2 t\right)}\,dt=$$

$$=18\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t\cdot\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=18\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt=18\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2t\,dt=$$

$$=9\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\cdot d(2t)=-\frac{9}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{9}{2}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{9}{2}\cdot(-2)=9.$$

Таким образом, $l=9$.

Для закрепления изученного материала вычислите длины следующих кривых **самостоятельно**:

430. $y=\frac{3}{2}\left(e^{x/3}+e^{-x/3}\right)$ между точками с абсциссами $x=-2,\ x=2$.

431. Части кривой $y=x^2-\frac{1}{4}$, отсеченной осью Ox.

432. Части кривой $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=\frac{3}{4}$.

433. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\ y\in[1,e]$.

434. $y=\ln\cos x,\ -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$.

435. $y=e^{2x}$**,** $0\le x\le 2$.

436. $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$**.**

437. Части кривой $y=\ln(2\sin x)$, заключённой между соседними точками пересечения с осью Ox.

438. $y=2\ln\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}-\sqrt{4-x^2},\ 1\le y\le 3$.

439. $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

440. $\begin{cases}x=3(\cos t+t\sin t)\\ x=3(\sin t+t\cos t)\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

441. $\begin{cases}x=8\cos^3 t\\ y=8\sin^3 t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{6}$.

442. $\begin{cases}x=3(2\cos t-\cos 2t)\\ y=3(2\sin t-\sin 2t)\end{cases},\ 0\le t\le 2\pi$.

443. $\begin{cases}x=8\sin t+6\cos t\\ y=6\sin t-8\cos t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

444. $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\ln\pi$**.**

445. Петли кривой $\begin{cases}x=\dfrac{t^3}{3}-t\\ y=t^2+2\end{cases}$.

446. Найти длину кривой $x^2+y^2=8x$, заключённой между линиями $x=y$ и $y=0$.

447. Длина одного витка спирали $r=e^{3\varphi+1}$.

448. $r=\varphi^2,\ \pi\le\varphi\le 2\pi$.

449. $r=2(1+\cos\varphi)$.

450. $r=\dfrac{1}{\cos\varphi}$**,** находящейся внутри окружности $x^2+y^2=4$.

451. Вычислить периметр криволинейного треугольника, ограниченного кривыми $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $y = \arccos x - \sqrt{1-x^2} + \dfrac{\pi}{2}$ и отрезком прямой $x = -1$ при $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{3\pi}{2}$.

§4.4. Вычисление объема тела

1) Вычисление объема тела с известными поперечными сечениями.

Пусть требуется вычислить объем тела, причем известны площади поперечных сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси. Пусть для определенности известны площади сечений, перпендикулярных оси Ox: $S = S(x)$ при $a \le x \le b$ (рис.62).

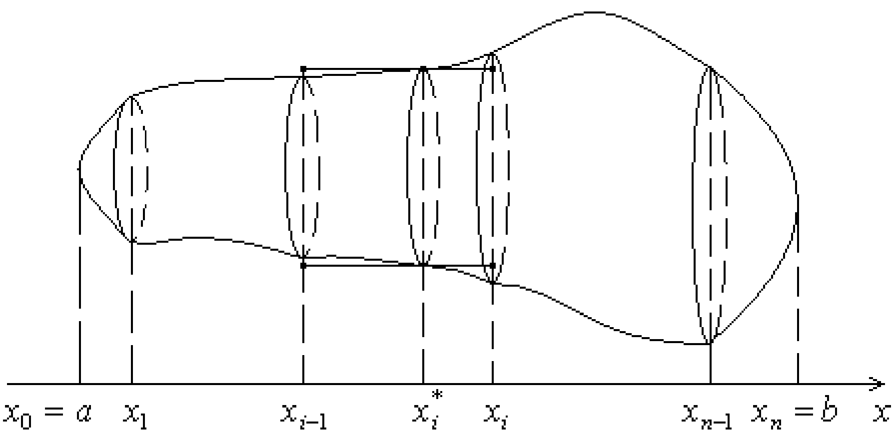


Рис.62

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков точками $x_0 = a$, $x_1,\dots,$ x_i $,\dots, x_n = b$ $(x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n)$. Тогда каждой точке x_i соответствует сечение с площадью $S(x_i)$, $i = 1,\dots n$. Сечениями с площадями $S(x_1)$, $S(x_2),\dots,$ $S(x_i)$ $,\dots,$ $S(x_n)$ объем тела разбивается на n объемов V_1, $V_2,\dots,$ V_n.

Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ некоторую точку $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, которой соответствует сечение с площадью $S(x_i^*)$, $i = 1,\dots n$. Вычислим объемы цилиндров на каждом частичном отрезке $[x_0, x_1],\dots,$ $[x_{i-1}, x_i],\dots,$ $[x_{n-1}, x_n]$ с площадями оснований $S(x_1^*),\dots,S(x_i^*),\dots,S(x_n^*)$: $S(x_1^*)\cdot \Delta x_1$, $\dots,$ $S(x_i^*)\cdot \Delta x_i$, $\dots,$ $S(x_n^*)\cdot \Delta x_n$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Очевидно, что

$$V_1 \approx S(x_1^*)\cdot \Delta x_1, \dots, V_i \approx S(x_i^*)\cdot \Delta x_i, \dots, V_n \approx S(x_n^*)\cdot \Delta x_n,$$

и чем меньше будут величины Δx_i, тем точнее будет приближение.

Так как полный объем тела складывается из суммы объемов $V_1,...,V_i,...,V_n$, то

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S\left(x_i^*\right)\cdot \Delta x_i \,. \qquad (2.4.15)$$

А точным значением объема V будет значение предела полученной суммы при $n \to \infty$ и $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$. То есть

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} S\left(x_i^*\right)\Delta x_i \,.$$

Но сумма (2.4.15) является интегральной суммой для функции $S(x)$, поэтому предел этой интегральной суммы равен определенному интегралу $\int\limits_a^b S(x)dx$.

Таким образом, если заданы площади параллельных сечений тела, то

$$V = \int_a^b S(x)dx \,. \qquad (2.4.16)$$

2) Объем тела вращения (вращение относительно оси Ox).

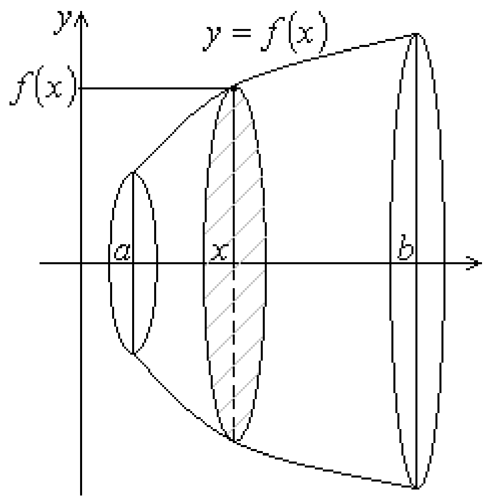


Рис.63

Пусть в плоскости xOy задана непрерывная кривая $y = f(x) \geq 0$. Рассмотрим вращение вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Найдем объем полученного тела вращения (рис.63). Площади сечений этого тела параллельными плоскостями, перпендикулярными оси Ox, легко вычисляются, так как каждое такое сечение является кругом с радиусом $y = f(x)$. Значит,

$$S(x) = \pi\left(f(x)\right)^2 .$$

Для вычисления объема применим формулу (2.4.16), тогда получаем

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \,. \qquad (2.4.17)$$

3) Объем тела вращения (вращение относительно оси Oy).

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $x = g(y) \geq 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$. Найдем объем тела, полученного

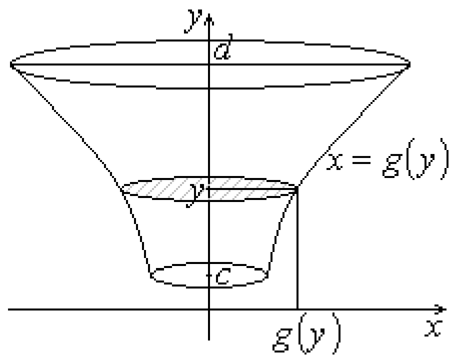


Рис.64

вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Oy (рис.64).

В этом случае площадь сечения, перпендикулярного оси Oy, проведенного через произвольную точку y, равна $S(y)=\pi(g(y))^2$. Значит, объем вычисляем по формуле (2.4.16):

$$V=\pi\int_c^d (g(y))^2\,dy. \qquad (2.4.18)$$

Пример 2.4.11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=8$, $y=x^3$, $x=0$.

Решение.

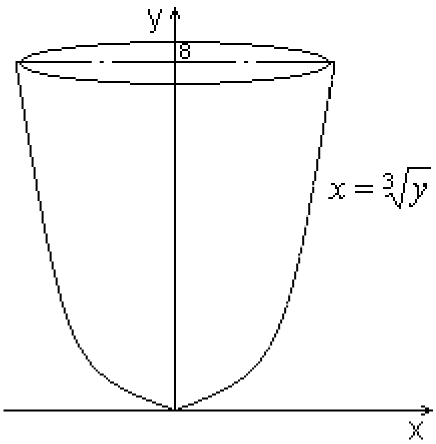


Рис.65

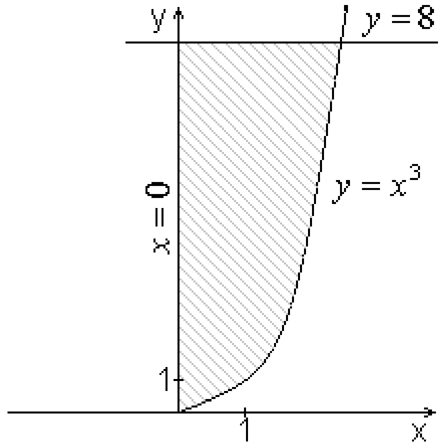


Рис.66

Так как тело образовано вращением вокруг оси Oy (рис.65, 66), то вычислять объем будем по формуле (2.4.18). Выразим из уравнения $y=x^3$ переменную x, тогда получим $g(y)=\sqrt[3]{y}$. Вычислим объем:

$$V=\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy=\pi\cdot\left.\frac{y^{5/3}}{5/3}\right|_0^8=\frac{3}{5}\pi\left(8^{5/3}-0^{5/3}\right)=\frac{3}{5}\pi\left(\sqrt[3]{8}\right)^5=\frac{3}{5}\pi\cdot 32=\frac{96}{5}\pi.$$

Для закрепления материала вычислите **самостоятельно** объемы тел вращения**.**

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми:

452. $x^2-y=0$, $x=-1$, $y=0$.

453. $y=1+8x^3$, $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$.

454. $y=\frac{4}{x}$, $x=3$, $x=12$, $y=0$.

455. $y=\frac{x}{2}$; $x=4$; $x=6$; $y=0$.

456. $y = \sin x$ при $0 \le x \le \pi$, $y = 0$.

457. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$.

458. $x^2 + y^2 = 16$, лежащей в первой четверти, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

459. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 3$.

460. $y = 2x^2$, $y = x^3$.

461. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми:

462. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

463. $y = 3x$, $y = 2$, $y = 4$, $x = 0$.

464. $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = 5$, $x = 0$.

465. $y^2 = 2x$, $2x + 2y - 3 = 0$.

466. $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$, $y = 1$.

467. Найти объём тела, образованного вращением эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ вокруг его малой оси.

468. Вычислить объём тела, образованного вращением общей части парабол $y = x^2$ и $y^2 = 8x$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

469. Фигура, ограниченная кривыми $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и прямой $x = \dfrac{\pi}{6}$, вращается вокруг оси Ox. Найти объём тела вращения.

470. Фигура, лежащая в I четверти и ограниченная кривыми $x^2 - y^2 = 3$, $xy = 2$ и прямой $x = 3$, вращается вокруг оси Ox. Найти объём тела вращения.

Глава 5. *Интегралы как функции параметров*

§5.1. Интегралы с конечными пределами, зависящие от параметров

Данный раздел посвящен изучению интеграла от функции, которая зависит от одного или более параметров. Изучение таких интегралов позволяет, как и теория рядов, изучить новый класс функций, полезных при их практическом применении. Результаты данного раздела выходят за рамки основного материала, но эффективно используются при изучении общих и специальных дисциплин. Учитывая все вышесказанное, мы не намерены обременять читателя сложными математическими выкладками, но приведем основные результаты в достаточно общей форме. Более подробное изложение данного материала и, в частности, доказательства приведенных теорем можно найти в [2], стр.654-749, [9], стр. 667-692.

Пусть $f(x,u)$ - функция двух независимых переменных, заданных в области $\Omega\{a \le x \le b; \alpha \le u \le \beta\}$. Предположим, что $f(x,u)$ - непрерывная функция в Ω. Зафиксируем произвольное значение u из области ее допустимых значений, тогда функция $f(x,u)$ - непрерывная функция переменного x на интервале (a,b). Известно, что в этом случае определенный интеграл от функции $f(x,u)$ по отрезку $[a,b]$ существует, но зависит от выбранного значения u, то есть

$$\int_a^b f(x,u)dx$$

является функцией переменного u, $u \in [\alpha,\beta]$. Обозначим эту функцию через $\varphi(u)$, таким образом

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x,u)dx, \quad \alpha \le u \le \beta \tag{2.5.1}$$

Переменную u, которая при вычислении интеграла (2.5.1) мыслится постоянной, будем называть ***параметром***.

В более общем случае подынтегральная функция в (2.5.1) зависит от двух и более параметров, но мы в основном остановимся на случае, когда в (2.5.1) единственный параметр. Наши результаты достаточно просто перенести на общий случай. Одно из основных свойств функции – ее непрерывность. Нижеследующая теорема позволяет нам определить, при каких условиях на функцию $f(x,u)$, функция, определенная равенством (2.5.1), является непрерывной.

Теорема 2.22. *Если функция $f(x,u)$ - непрерывна в прямоугольнике $\Omega\{a \le x \le b; \alpha \le u \le \beta\}$, то функция $\varphi(u) = \int_a^b f(x,u)dx$ непрерывна на интервале (α,β).*

Итак, при достаточно общих предположениях $\varphi(u)$ - непрерывна, следовательно, ее можно интегрировать на (α,β) или его части. Другими словами, всегда имеет место равенство:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x,u)dx \right\} du. \tag{2.5.2}$$

Вспомним, что для функциональных рядов существенное значение имеет возможность почленного интегрирования ряда, то есть интегрирования под знаком суммы. Стоял вопрос имеет ли место равенство:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_k(x) dx \right).$$

Так и сейчас стоит вопрос о возможности интегрирования по u под знаком интегрирования по x. Решается вопрос: будет ли интеграл (2.5.2) совпадать с интегралом

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x,u) du \right\} dx. \tag{2.5.3}$$

Таким образом, независимость результата последовательного интегрирования функции $f(x,u)$ по x и по u от порядка, в котором они выполняются, равносильна возможности интегрирования функции $\varphi(u)$ по u под знаком интеграла по x.

При определенных ограничениях, наложенных на функцию $f(x,u)$, положительный ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

<u>Теорема 2.23.</u> *Если функция $f(x,u)$ непрерывна в прямоугольнике Ω, то*

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\, du = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x,u) dx \right\} du = \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x,u) du \right\} dx.$$

Обратимся к вопросу о дифференцировании функции $\varphi(u)$, определяемой равенством (2.5.1). По аналогии с интегрированием функционального ряда здесь также ставится вопрос о возможности выразить производную, изменив порядок интегрирования и дифференцирования, то есть о возможности выразить производную функции $\varphi(u)$, определяемой равенством (2.5.1), в виде

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx.$$

Вопрос о дифференцировании функции $\varphi(u)$ решается ниже следующей теоремой.

<u>Теорема 2.24.</u> *Если функция $f(x,u)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ непрерывны в прямоугольнике Ω, то функция $\varphi(u)$, определяемая равенством* (2.5.1), *дифференцируема на интервале (α, β) и при этом*

$$\varphi'(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx, \qquad \alpha \le u \le \beta.$$

§5.2. Интегралы, зависящие от параметра, с бесконечными пределами

В предыдущем параграфе рассматривались интегралы с конечными пределами, зависящими от параметров. Мы неоднократно указывали на аналогию рассматриваемых задач с задачами теории функциональных рядов. Совершенно очевидно, что эта аналогия в полной мере может раскрыться лишь при изучении интегралов с бесконечными пределами, зависящими от параметра, то есть интеграла вида

$$\int_a^{\infty} f(x,u)dx. \tag{2.5.4}$$

Теория таких интегралов является основой для вывода большого числа формул математического анализа.

Допустим, что интеграл (2.5.1) сходится для всех значений параметра u, $\alpha \le u \le \beta$. Значение интеграла (2.5.1) в этом случае есть функция $\varphi(u)$, определенная в интервале (α, β):

$$\varphi(u) = \int_a^{\infty} f(x,u)dx. \tag{2.5.5}$$

Как и в теории функциональных рядов, особую роль в теории интегралов, зависящих от параметров с бесконечными пределами, играет понятие равномерной сходимости.

По определению, если интеграл (2.5.1) сходится в точке $u \in (\alpha, \beta)$, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $A_0 = A_0(\varepsilon, u)$ такое, что при любом $A > A_0$ выполняется неравенство:

$$\left| \int_A^{\infty} f(x,u)dx \right| < \varepsilon. \tag{2.5.6}$$

Как указано в определении, A_0 при заданном ε различно для различных u. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует A_0, такое, что при $A > A_0$ неравенство (2.5.6) справедливо при любом $u \in (\alpha, \beta)$, то говорят, что интеграл (2.5.1) ***равномерно сходится*** на интервале (α, β).

Если интеграл (2.5.1) сходится на интервале (α, β), но не является равномерно сходящимся по параметру u на интервале (α, β), то говорят, что интеграл (2.5.1) ***сходится неравномерно*** на интервале (α, β). В этом случае существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого A_0, существуют $A > A_0$ и $u \in (\alpha, \beta)$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_A^{\infty} f(x,u)dx \right| \ge \varepsilon.$$

Сформулируем признак равномерной сходимости, аналогичный признаку равномерной сходимости для функциональных рядов.

Признак равномерной сходимости. *Если существует непрерывная функция* $F(x)$ *такая, что для всех достаточно больших* x *и всех* u*,* $u \in (\alpha, \beta)$ *выполняется неравенство* $|f(x,u)| < F(x)$*, и если*

$$\int_a^\infty F(x)\,dx$$

сходится, то интеграл в правой части (2.5.5) *сходится равномерно.*

Аналогично тому, как равномерная сходимость функционального ряда гарантирует нам непрерывность суммы этого ряда, так и равномерная сходимость интеграла гарантирует непрерывность функции $\varphi(u)$, определяемой равенством (2.5.5).

Теорема 2.24. *Если функция* $f(x,u)$ *непрерывна при* $a \le x$*,* $\alpha \le u \le \beta$ *и интеграл в* (2.5.5) *сходится равномерно на интервале* (α, β)*, то функция* $\varphi(u)$ *непрерывна в этом интервале.*

Данная теорема определяет достаточные условия непрерывности функции $\varphi(u)$, но это условие не является необходимым. Нижеследующее утверждение описывает важный случай, когда это условие является также необходимым.

Теорема 2.26. *Если функция* $f(x,u)$ *непрерывна и сохраняет постоянный знак в области* $a \le x$*,* $\alpha \le u \le \beta$*, то из непрерывности функции* $\varphi(u)$*,* $u \in (\alpha, \beta)$ *вытекает равномерная сходимость интеграла* (2.5.5).

Далее по аналогии с почленной интегрируемостью и дифференцируемостью равномерно сходящегося ряда имеют место утверждения.

Теорема 2.27. *Если функция* $f(x,u)$ *непрерывна при* $a \le x$*,* $u \in (\alpha, \beta)$ *и интеграл в* (2.5.5) *сходится равномерно на интервале* (α, β)*, то выполняется равенство:*

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_a^\infty \left\{ \int_\alpha^\beta f(x,u)du \right\} dx.$$

Теорема 2.27 гарантирует при определенных условиях изменение порядка интегрирования по x и по u.

В заключение приведем теорему, полностью соответствующей теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов.

Теорема 2.28. *Если в области* $a \le x$, $\alpha \le u \le \beta$ *функция* $f(x,u)$ *непрерывна и имеет непрерывную частную производную* $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ *и если*

$$\int_a^\infty \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx$$

сходится равномерно в интервале (α,β), *то функция* $\varphi(u)$, *определяемая интегралом* (2.5.5), *дифференцируема в этом отрезке и имеет место соотношение:*

$$\varphi'(u) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx.$$

Мы ограничили рассмотрение интегралов зависящих от параметра, только несобственными интегралами с бесконечными пределами. При этом мы сознательно не затрагивали несобственные интегралы от разрывных функций. Это обусловлено тем, что все результаты, сформулированные выше, в равной мере сохраняются и для несобственных интегралов от разрывных функций. Читатель может в качестве полезного упражнения проверить это самостоятельно. Приведем некоторые примеры изложенной выше теории.

Пример 2.5.1. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xy\, dx$ сходится равномерно по параметру y на интервале $(-\infty,+\infty)$.

Решение. Пусть $A_0 = \ln\dfrac{2}{\varepsilon}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует A_0, такое, что при $A > A_0$ и любых $y \in (-\infty,+\infty)$ справедливо неравенство

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-x}\cos xy\, dx\right| \le \int_A^{+\infty} e^{-x}\, dx = e^{-A} \le e^{-A_0} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xy\, dx$ сходится равномерно по параметру y на интервале $(-\infty,+\infty)$.

Пример 2.5.2. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} ue^{-xu}\, dx$ сходится неравномерно по параметру y на интервале $[0,+\infty)$.

Решение. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{e}$. Тогда для любого $A_0 \in (0, +\infty)$ существует $A = A_0$ и $u = \frac{1}{A_0}$ такие, что

$$\int_A^{+\infty} ue^{-xu}\, dx = \int_{A_0}^{+\infty} ue^{-xu}\, dx = \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = e^{-1} = \varepsilon .$$

Таким образом, интеграл $\int_0^{+\infty} ue^{-xu}\, dx$ сходится неравномерно по параметру u на интервале $[0, +\infty)$.

Пример 2.5.3. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx$ сходится равномерно по параметру y на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Так как $\frac{|\cos xy|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ и $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$, то по признаку равномерной сходимости интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx$ сходится равномерно по параметру y на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2.5.4. Исследовать равномерную сходимость интеграла $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$ на интервале $[a_0, +\infty)$, $a_0 > 0$.

Решение. Пусть $a \ge a_0 > 0$. Так как

$$e^{-ax^2} \le e^{-a_0 x^2}$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-a_0 x^2} dx$$

сходится, то по признаку равномерной сходимости интеграл $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$ сходится равномерно по параметру a на интервале $[a_0, +\infty)$, $a_0 > 0$.

§5.3. Применение интегралов, зависящих от параметров

Пример 2.5.5. Вычислить: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

Решение. Неопределенный интеграл от подынтегральной функции не берется в элементарных функциях, но этот интеграл сходится ([2], п 477, стр.565).

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ux}{x}dx, \qquad k > 0$$

и вычислим его с помощью дифференцирования по параметру u. Для этого интеграла дифференцирование по u под знаком интеграла возможно, так как подынтегральная функция и ее частная производная $\frac{\partial\left(e^{-kx}\frac{\sin ux}{x}\right)}{\partial u}$ непрерывны по x и u для $x \ge 0$ и $u \ge 0$. Интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx$, полученный в результате дифференцирования, сходится равномерно относительно u, так как выполняется достаточный признак равномерной сходимости: $\left|e^{-kx}\cos ux\right| < e^{-kx}$ и $\int\limits_0^\infty e^{-kx}dx$ сходится.

Вычислим этот интеграл, используя интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx = \left|\begin{matrix} U = e^{-kx}, & dV = \cos ux\,dx \\ dU = -ke^{-kx}dx, & V = \frac{1}{u}\sin ux \end{matrix}\right| = \frac{1}{u}e^{-kx}\sin ux\Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{k}{u}\int\limits_0^\infty e^{-kx}\sin ux\,dx = 0 + \frac{k}{u}\int\limits_0^\infty e^{-kx}\sin ux\,dx = \left|\begin{matrix} U = e^{-kx}, & dV = \sin ux\,dx \\ dU = -ke^{-kx}dx, & V = -\frac{1}{u}\cos ux \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{k}{u}\left(-\frac{1}{u}e^{-kx}\cos ux\Big|_0^\infty - \frac{k}{u}\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx\right) = -\frac{k}{u^2}(0-1) - \frac{k^2}{u^2}\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx.$$

Итак,

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx = \frac{k}{u^2} - \frac{k^2}{u^2}\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx,$$

то есть $$\left(1 + \frac{k^2}{u^2}\right)\cdot\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx = \frac{k}{u^2},$$

тогда $$\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos ux\,dx = \frac{k}{u^2 + k^2}.$$

Итак, для $u \geq 0$ справедливо равенство:

$$\frac{dI}{du} = \frac{k}{u^2 + k^2}.$$

Интегрируя по u данное равенство, найдем

$$I = \int \frac{k}{u^2 + k^2} du = \operatorname{arctg}\frac{u}{k} + C.$$

Постоянная C равна нулю, так как $I = 0$ при $u = 0$.

Таким образом,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ux}{x} dx = \operatorname{arctg}\frac{u}{k}.$$

Эта формула выведена для $k > 0$. Но при $u = const$, интеграл I оказывается функцией от k, которая является непрерывной и при $k = 0$ по теореме 2.25. Иначе говоря,

$$\lim_{k \to +0} I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ux}{x} dx,$$

тогда при $u > 0$ имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ux}{x} dx = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg}\frac{u}{k} = \left| \frac{u}{k} \to +\infty \right| = \frac{\pi}{2}.$$

В частности, при $u = 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.5.6. Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Решение. Заметим, что $I > 0$. Положим $x = ut$, где $u > 0$. Получим

$$I = u \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

Умножим обе части этого равенства на e^{-u^2} и проинтегрируем по u от 0 до ∞:

$$I \cdot \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = I^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt = \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u dt.$$

В силу того, что интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u du = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}$$

есть непрерывная функция от t для $t \geq 0$, а интеграл

$$\int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u dt = e^{-u^2} \cdot I$$

есть непрерывная функция для $0 < u_0 < u$, тогда в прямоугольнике $\left[u_0 < u < \infty; 0 < t < \infty\right]$ можно записать

$$\int_{u_0}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u dt = \int_{0}^{\infty} dt \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u du .$$

При $u_0 \to 0$ можно записать

$$\int_{0}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u dt = \int_{0}^{\infty} dt \int_{0}^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u du .$$

Продолжим вычисление:

$$I^2 = \int_{0}^{\infty} dt \int_{0}^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u du = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \int_{0}^{\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} u \, d(-(1+t^2)u^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \; e^{-u^2\left(t^2+1\right)}\Big|_0^{\infty} = \left| \begin{matrix} \lim\limits_{u\to\infty} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} = 0 \\ \lim\limits_{u\to 0} e^{-u^2\left(t^2+1\right)} = 1 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \; = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} .$$

Таким образом,

$$I^2 = \frac{\pi}{4}, \qquad I > 0 .$$

Получаем $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то есть $$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Заметим, что

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0 .$$

Действительно, если для вычисления интеграла сделать замену $\sqrt{a} x = t$ ($\sqrt{a} dx = dt$, t меняется от 0 до ∞), то получим

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} .$$

Пример 2.5.7. Путем дифференцирования по параметру известных интегралов можно вывести новые интегралы. Рассмотрим интеграл из примера 2.5.6:

.
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Продифференцируем обе части равенства по параметру a:
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}(-x^2)dx=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)',$$
тогда
$$-\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2a\sqrt{a}}\right).$$

Упрощая это равенство, получим
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x^2dx=\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Еще раз дифференцируя по параметру, получаем:
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x^4\,dx=\frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Пример 2.5.8. Вычислить интегралы Лапласа:
$$I_1(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}dx\,;\qquad I_2(y)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xy}{1+x^2}dx\,.$$

Решение. Рассмотрим $y\in(0,+\infty)$. Данные интегралы сходятся равномерно ([9], стр.680). Продифференцируем $I_1(y)$ по параметру, используя теорему 2.28, тогда получим:
$$\frac{d\,I_1(y)}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}dx\right)=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dy}\left(\frac{\cos xy}{1+x^2}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xy}{1+x^2}dx=-I_2(y).$$

Преобразуем $I_2(y)$:
$$I_2(y)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xy}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\right)\sin xy\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x\left(1+x^2\right)}dx=$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt-\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x\left(1+x^2\right)}dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xy}{x\left(1+x^2\right)}dx\,.$$

Применяя теорему 2.28, получаем
$$\frac{d\,I_2(y)}{dy}=-\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}dx=-I_1(y).$$

Так как
$$I_1'(y)=-I_2(y)\quad\text{и}\quad I_2'(y)=-I_1(y),$$
то $\quad I_1''(y)-I_1(y)=0\,.$

Решая полученное дифференциальное уравнение, получаем

$$I_1(y) = C_1 e^{-y} + C_2 e^{y},$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Покажем, что $C_2 = 0$. Так как

$$|I_1(y)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx \right| \le \int_0^{+\infty} \frac{|\cos xy|}{1+x^2}\, dx \le \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

то $I_1(y)$ является ограниченной функцией при $y \in (0, +\infty)$. Так как e^y - неограниченная функция при $y \in (0, +\infty)$, то в выражении для $I_1(y)$ необходимо принять $C_2 = 0$.

Таким образом,

$$I_1(y) = C_1 e^{-y}, \quad y \in (0, +\infty).$$

Так как $I_2(y) = -I_1'(y)$, то

$$I_2(y) = -\left(C_1 e^{-y}\right)' = C_1 e^{-y}, \quad y \in (0, +\infty).$$

Интеграл Лапласа $I_1(y)$ есть четная функция на $(-\infty, +\infty)$, а интеграл $I_2(y)$ есть нечетная функция на $(-\infty, +\infty)$, значит, полученные выражения для $I_1(y)$ и $I_2(y)$ можно переписать в виде

$$I_1(y) = C_1 e^{-|y|}, \qquad I_2(y) = C_1 \operatorname{sign} y\, e^{-|y|} \qquad \text{при } y \ne 0.$$

Так как интеграл Лапласа $I_1(y)$ сходится равномерно по параметру y на $(-\infty, +\infty)$, что доказано в примере 2.5.3, поэтому $I_1(y)$ есть непрерывная функция в точке $y = 0$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = I_1(0) = \lim_{y \to +0} I_1(y) = \lim_{y \to +0} C_1 e^{-y} = C_1.$$

Таким образом, $C_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и при любом $y \in (-\infty, +\infty)$ справедливы равенства:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|y|}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y\, e^{-|y|}.$$

Заметим, что справедливость полученных формул при $y = 0$ проверяется непосредственно.

Глава 6. *Интегралы Эйлера*

§6.1. Основные определения

<u>Определение 2.13.</u> *Интеграл вида*

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (2.6.1)$$

называют ***бета функцией*** *от p и q или интегралом Эйлера первого рода.*

<u>Определение 2.14.</u> *Интеграл вида*

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \qquad (2.6.2)$$

называют ***гамма функцией*** *от s или интегралом Эйлера второго рода.*

Оба интеграла являются неэлементарными функциями, играющими значительную роль в различных приложениях. Свойства этих интегралов детально изучены, для них составлены достаточно подробные таблицы. Здесь мы рассмотрим только некоторые простейшие свойства этих функций. Прежде всего найдем области определения этих функций, то есть множества тех параметров p и q, s, для которых сходятся соответственно интегралы в правой части (2.6.1) и (2.6.2).

Рассмотрим более детально каждый из этих интегралов.

Очевидно, что при $p\ge 1$, $q\ge 1$ подынтегральная функция в (2.6.1) является непрерывной и, следовательно, $\mathrm{B}(p,q)$ определена во всей области $p\ge 1$, $q\ge 1$. Если $p<1$, то подынтегральная функция в (2.6.1) при $x\to 0$ неограниченно возрастает и эквивалентна x^{p-1}, то есть при $x\to 0$

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}, \qquad (2.6.3)$$

потому что в этом случае $(1-x)^{q-1}\to 1$. Из (2.6.3) и условия сходимости несобственного интеграла вида $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$, $a>0$, следует, что при $p>0$ интеграл (2.6.1) сходится в нуле. Аналогичные рассуждения показывают, что он сходится при $q>0$ в точке $x=1$. При $p\le 0$ или $q\le 0$ интеграл, определяющий функцию $\mathrm{B}(p,q)$, расходится.

Таким образом, *функция $\mathrm{B}(p,q)$ (интеграл Эйлера первого рода) определена тогда и только тогда, когда $p>0$ и $q>0$*. В дальнейших наших рассуждениях, рассматривая интеграл Эйлера первого рода, мы предполагаем, что $p>0$, $q>0$.

Интеграл, определяющий гамма функцию, очевидно всегда сходится на бесконечности. В самом деле,

$$\lim_{x\to\infty} x^{s-1}e^{-\frac{1}{2}x}=0$$

и, следовательно, при достаточно больших x выполняется неравенство:

$$x^{s-1}e^{-\frac{1}{2}x}<1,$$

откуда $$x^{s-1}e^{-x} = x^{s-1}e^{-\frac{1}{2}x}e^{-\frac{1}{2}x} < e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Так как при любом $a > 0$ интеграл $\int\limits_a^\infty e^{-\frac{1}{2}x}dx$ сходится, то по признаку сравнения сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty x^s e^{-\frac{1}{2}x}dx$.

При $s < 1$
$$\lim_{x\to 0} x^{s-1}e^{-x} = \infty,$$
но $$\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1,$$
следовательно, имеет место асимптотическое равенство
$$x^{s-1}e^{-x} \sim x^{s-1}.$$

Отсюда и из признаков сходимости интегралов вида $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$ вытекает, что интеграл, определяющий функцию $\Gamma(s)$, сходится тогда и только тогда, когда $s > 0$.

Таким образом, *функция* $\Gamma(s)$ *определена для всех* $s > 0$.

Отметим, что при любых $p > 0$, $q > 0$ функция $\mathrm{B}(p,q)$ непрерывна, а $\Gamma(s)$ непрерывна при любом $s > 0$.

§6.2. Простейшие свойства функции $\Gamma(s)$

Пусть $s > 0$. Используя интегрирование по частям, имеем
$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^\infty x^s e^{-x}dx = x^s e^{-x}\Big|_0^\infty + s\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = s\Gamma(s).$$

Итак, справедливо равенство:
$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s > 0. \tag{2.6.4}$$

Используя равенство (2.6.4) для любого натурального n и произвольного $s > n-1$ имеем:
$$\Gamma(s+1) = s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+1)\cdot\Gamma(s-n+1). \tag{2.6.5}$$

Так как
$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$
то из (2.6.5) для $s = n$ получаем
$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!$$

Тем самым получена очень важная формула, дающая простое аналитическое выражение для $n!$, а именно:

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.6.6}$$

Пусть $s > 0$ - не целое число, тогда оно заключено между целыми числами n и $n+1$, то есть $n < s < n+1$. Используя формулу (2.6.5), получаем:

$$\Gamma(s) = (s-1)\cdot(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-n)\cdot\Gamma(s-n). \tag{2.6.7}$$

Из неравенства $n < s < n+1$ вытекает, что $0 < s-n < 1$. Отсюда и из (2.6.7) следует, что изучение функции $\Gamma(s)$ на отрезке $(n, n+1)$ сводится к исследованию ее поведения на интервале $(0,1)$. Другими словами, зная поведение функции $\Gamma(s)$ в отрезке $0 \le s \le 1$, мы можем оценить ее и найти ее свойства во всей области $s > 0$. Отметим, что все вышесказанное является следствием соотношения (2.6.4), которому удовлетворяет функция $\Gamma(s)$.

§6.3. Простейшие свойства функции $\mathrm{B}(p,q)$

Пусть $p > 0$, $q > 0$. Интегрируя по частям, получаем:

$$\mathrm{B}(p+1, q+1) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]\Bigg|_0^1 + \frac{p}{p+1}\int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx,$$

но $x^{p+1} = x^p - x^p(1-x)$, поэтому предыдущее равенство перепишется в виде:

$$\mathrm{B}(p+1, q+1) = \frac{q}{p+q+1}\mathrm{B}(p+1, q). \tag{2.6.8}$$

Аналогично

$$\mathrm{B}(p+1, q+1) = \frac{p}{p+q+1}\mathrm{B}(p, q+1). \tag{2.6.9}$$

Применяя формулу (2.6.9) к правой части (2.6.8) окончательно получаем:

$$\mathrm{B}(p+1, q+1) = \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}\mathrm{B}(p,q), \quad p > 0,\ q > 0. \tag{2.6.10}$$

Формула (2.6.10) дает возможность уменьшить аргументы бета функции.
Кроме того, справедлива формула

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1. \tag{11}$$

Доказательство формулы (2.6.11) можно найти в [9], гл.XV, §73, стр.691.

§6.4. Связь между бета и гамма функциями. Формула Стирлинга

Связь между бета и гамма функциями имеет вид:

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{2.6.12}$$

Доказательство равенства (2.6.12) выходит за рамки нашего изложения.

На основании (2.6.11) и (2.6.12) получаем

$$\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}=\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}, \qquad 0<p<1.$$

(2.6.13)

Приведем также без доказательства формулу

$$n!=\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx,$$

которая в случае целого $n\geq 1$ дает величине $n!$ простое аналитическое выражение, а для $n\geq -1$ служит определением функции $n!$. Формула имеет вид:

$$\Gamma(n+1)=n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1+o(1)) \tag{2.6.14}$$

и называется ***формулой Стирлинга***. В логарифмической форме она имеет вид:

$$\ln\Gamma(n+1)=\ln n!=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}\ln 2\pi+o(1). \tag{2.6.15}$$

§6.5. Некоторые примеры вычисления интегралов с помощью бета и гамма функций

Пример 2.6.1. Вычислить $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Решение. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx.$

Сделаем замену $x=t^2$, тогда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}\,.$$

При вычислении $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ использовалось значение интеграла Эйлера-Пуассона, вычисленное в примере 2.5.6.

Пример 2.6.2. Вычислить интеграл $P_{nm}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx$, где m,n - целые положительные числа.

Решение. Для вычисления интеграла сделаем замену $\sin^2 x=t$, тогда

$$P_{nm}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)=$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

Пример 2.6.3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^c x \, dx$, $|c| < 1$.

Решение. Воспользуемся результатом примера 2.6.2 при $n = c$ и $m = -c$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^c x \, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-c+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-c+c}{2}+1\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-c+1}{2}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{c}{2}\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{c}{2}\right)\right) = \left|\begin{matrix}\text{по формуле} \\ 2.6.13\end{matrix}\right| = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{c}{2}\right)} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi c}{2}}.$$

РАЗДЕЛ III. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава 1. *Двойные интегралы*

§1.1. Задача об объеме цилиндрического бруса

Рассмотрим тело, которое ограничено поверхностью $z = f(x, y)$, $f(x, y) \geq 0$, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z и плоской фигурой A на плоскости Oxy (рис.67). Требуется найти объем V данного тела. Для решения этой задачи мы прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему, состоящему в разложении искомой величины на элементарные части, приближенному подсчету каждой части, суммированию и последующему предельному переходу.

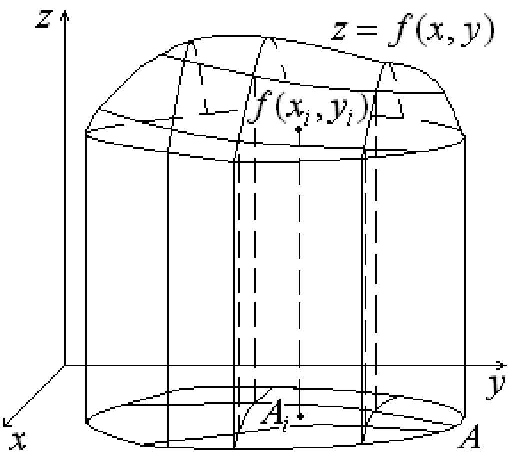


Рис.67

С этой целью разобьем область A сетью кривых линий на части $A_1, A_2, ..., A_n$ и рассмотрим ряд цилиндрических столбиков, которые имеют своими основаниями эти частичные области и в совокупности составляют данное тело (рис.67). Для подсчета объема отдельных столбиков возьмем произвольно в каждой фигуре A_i по точке (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$. Если приближенно принять каждый столбик за настоящий цилиндр с высотой, равной значению $f(x_i, y_i)$, то объем отдельного столбика оказывается приближенно равным $f(x_i, y_i) \cdot S_i$, где S_i означает площадь фигуры A_i, $i = 1, ..., n$. В таком случае приближенное выражение объема всего тела будет равно

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S_i .$$

Введем определение диаметра плоской области:

***<u>Определение 3.1.</u>* Диаметром плоской области** *называется наибольшее расстояние между двумя точками, лежащими на границе этой области.*

(Например, диаметры квадрата и прямоугольника – это длина диагонали, отрезка – его длина, эллипса – большая ось.)

Для повышения точности равенства объемов будем уменьшать размеры площадок A_i, увеличивая их число. В пределе, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех областей $A_1, A_2, ..., A_n$, это равенство становится точным, так что по определению

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S_i , \tag{3.1.1}$$

где λ – наибольший из диаметров областей $A_1, A_2, ..., A_n$. Таким образом, поставленная задача решена.

Именно решение этой задачи привело к понятию двойного интеграла.

§1.2. Определение двойного интеграла и его свойства

Основываясь на рассмотренной задаче, дадим понятие двойного интеграла.

Определение 3.2. *Плоская область имеет* ***кусочно-гладкую границу****, если граница области может быть описана конечным числом уравнений вида* $y = \varphi_i(x)$*, где* $\varphi_i(x)$*,* $i = 1,\dots,k$*, гладкие функции.*

Пусть плоская область *A* имеет кусочно-гладкую границу (в дальнейшем будем рассматривать именно такие плоские области), и в области *A* задана функция $f(x,y)$. Проделаем следующие операции:

1. Разделим область *A* с помощью сети кривых линий на части $A_1, A_2,\dots,A_n$ с площадями $S_1, S_2,\dots,S_n$ и диаметрами $d_1, d_2,\dots,d_n$. Пусть λ - наибольшее из чисел $d_1, d_2,\dots,d_n$, $\lambda = \max(d_1,\dots,d_n)$.
2. Выберем в каждой из областей $A_1, A_2,\dots,A_n$ по точке $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, ..., $P_n(x_n,y_n)$ и вычислим значения $f(x_1,y_1)$, $f(x_2,y_2)$, ..., $f(x_n,y_n)$.
3. Умножим каждое значение $f(x_k,y_k)$ на площадь S_k: $f(x_1,y_1)\cdot S_1,\ f(x_2,y_2)\cdot S_2,\ \dots,\ f(x_n,y_n)\cdot S_n$.
4. Найдем сумму всех таких произведений:

$$V_n = f(x_1,y_1)\cdot S_1 + f(x_2,y_2)\cdot S_2 + \dots + f(x_n,y_n)\cdot S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\cdot S_k . \quad (3.1.2)$$

Полученная сумма называется ***интегральной суммой для функции*** $f(x,y)$ ***в области A.***

5. Устремляя $n \to \infty$, будем выбирать разбиение таким образом, чтобы при этом $\lambda \to 0$.

Определение 3.3. *Если интегральная сумма (3.1.2) имеет конечный предел при* $\lambda \to 0$*, который не зависит ни от способа разбиения области* A *на части* $A_1, A_2,\dots,A_n$ *ни от выбора точек* $P_k(x_k,y_k)$ *внутри* A_k*,* $k = 1,\dots,n$*, то этот предел называется* ***двойным интегралом от функции*** $f(x,y)$ ***по области*** A *и обозначается одним из символов:*

$$\iint_A f(x,y)dS \qquad \text{или} \qquad \iint_A f(x,y)dxdy,$$

при этом функция $f(x,y)$ *называется* ***интегрируемой*** *в области A..*

В первом из этих обозначений символ dS (элемент площади) говорит о происхождении интеграла путем предельного перехода от интегральных сумм.

Форма частей $A_1, A_2, ..., A_n$ при этом произвольна, и чаще всего оказывается наиболее удобным выбирать части $A_1, A_2, ..., A_n$ в виде прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Интегральные суммы тогда имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_k \Delta y_k$$

и, значит, можно пользоваться указанным вторым обозначением двойного интеграла.

Итак,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot S_k = \iint_A f(x, y) dS = \iint_A f(x, y) dxdy .$$

Здесь область A называется ***областью интегрирования***, $f(x, y)$ – ***подынтегральной функцией***, $f(x, y)dS$, $f(x, y)dxdy$ – ***подынтегральным выражением***.

Выясним, при каких условиях существует двойной интеграл. Необходимым условием интегрируемости функции является ограниченность этой функции. Действительно, в противном случае при любом заданном разбиении области A на части можно было бы за счет выбора точек $P_k(x_k, y_k)$ сделать интегральную сумму сколь угодно большой. Сформулируем теорему, которая устанавливает классы интегрируемых функций. В дальнейшем можно для интегрируемой функции предполагать ее ограниченность: $m \le f(x, y) \le M$.

Теорема 3.1. I) *Всякая непрерывная в области A функция $f(x, y)$ интегрируема.*

II) *Если ограниченная функция $f(x, y)$ имеет разрывы лишь на конечном числе кривых нулевой площади, то она интегрируема.*

Доказательство теоремы 3.1 можно найти в [3], п.590, стр.128.

Свойство 1. *Двойной интеграл от функции $f(x, y) = 1$ по области A равен площади этой области, то есть*

$$\iint_A dxdy = S_A .$$

Доказательство. Действительно, по определению двойного интеграла

$$\iint_A 1 \cdot dxdy = \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot S_k = \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ n\to\infty}} (S_1 + S_2 + ... + S_n) = \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ n\to\infty}} S_A = S_A .$$

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 2</u> (Линейность двойного интеграла). *Если* $f(x,y)$, $g(x,y)$ - *интегрируемые в области A функции, c и k - постоянные величины, тогда справедливо равенство*

$$\iint_A (cf(x,y)+kg(x,y))dxdy = c\iint_A f(x,y)dxdy + k\iint_A g(x,y)dxdy .$$

<u>Доказательство.</u> По определению двойного интеграла

$$\iint_A (cf(x,y)+kg(x,y))dxdy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} (cf(x_k,y_k)+kg(x_k,y_k))S_k =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \left(\sum_{k=1}^{n} cf(x_k,y_k)S_k + \sum_{k=1}^{n} kg(x_k,y_k)S_k \right) = \left| \begin{matrix} \textit{по свойствам} \\ \textit{предела} \end{matrix} \right| =$$

$$= c\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)S_k + k\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} g(x_k,y_k)S_k = \left| \begin{matrix} \textit{по определению} \\ \textit{двойного интеграла} \end{matrix} \right| =$$

$$= c\iint_A f(x,y)dxdy + k\iint_A g(x,y)dxdy .$$

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 3</u> (Аддитивность двойного интеграла). *Если* $f(x,y)$ *интегрируемая в области* A *функция, а область* A *разделена на две области* A' *и* A'', *не имеющие общих внутренних точек, тогда справедливо равенство*

$$\iint_A f(x,y)dS = \iint_{A'} f(x,y)dS + \iint_{A''} f(x,y)dS .$$

<u>Доказательство.</u> Интегральную сумму по области A можно представить в виде

$$\sum_A f(x_k,y_k)S_k = \sum_{S_k\in A'} f(x_k,y_k)S_k + \sum_{S_k\in A''} f(x_k,y_k)S_k , \qquad (3.1.3)$$

где первая сумма содержит слагаемые, соответствующие площадкам S_k области A', вторая – соответствующие площадкам S_k области A''. Так как двойной интеграл не зависит от способа разбиения, то проведем разбиение области A так, что общая граница областей A' и A'' является границей площадок S_i. Переходя в равенстве (3.1.3) к пределу при $n\to\infty$ $(\lambda\to 0)$ получим доказываемое равенство.

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 4.</u> *Если функции* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *интегрируемы в области* A, *причем* $f(x,y)\le g(x,y)$ *для всех* $(x,y)\in A$, *то справедливо неравенство:*

$$\iint_A f(x,y)dxdy \le \iint_A g(x,y)dxdy .$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим интегральные суммы функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ для произвольного разбиения области A:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i)S_i .$$

По условию свойства имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_i \le \sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i)S_i .$$

Перейдем к пределу при $\lambda \to 0$. Пределы левой и правой интегральных сумм существуют и будут связаны между собой тем же знаком неравенства (если $\varphi(x) \le \psi(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \le \lim\limits_{x\to a}\psi(x)$, при условии существования этих пределов). А это означает, что

$$\iint\limits_A f(x, y)dxdy \le \iint\limits_A g(x, y)dxdy .$$

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 5</u> (Оценка двойного интеграла). *Если интегрируемая в области A функция удовлетворяет неравенству $m \le f(x, y) \le M$, то справедливо неравенство:*

$$mS_A \le \iint\limits_A f(x, y)dxdy \le MS_A ,$$

где S_A - площадь плоской области A.

<u>Доказательство.</u> Докажем, например, правое неравенство. Для этого рассмотрим интегральную сумму функции. Так как $f(x, y) \le M$ для любых точек $P(x, y) \in A$, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_i \le \sum_{i=1}^{n} MS_i = M\sum_{i=1}^{n} S_i ,$$

но $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i = S_A$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_i \le M \cdot S_A .$$

Переходя к пределу в левой и правой частях неравенства при $\lambda \to 0$, получаем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_i = \iint\limits_A f(x, y)dxdy \le M \cdot S_A .$$

Левое неравенство доказывается аналогично:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_i \ge \sum_{i=1}^{n} mS_i = m \cdot S_A .$$

Переходя к пределу в левой и правой частях этого неравенства при $\lambda \to 0$, получаем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_A f(x, y)dxdy \ge m\cdot S_A.$$

Что и требовалось доказать.

<u>Свойство 6</u> (Теорема о среднем значении для двойного интеграла). *Пусть $f(x, y)$ - непрерывная в области A функция. Тогда найдется точка $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y})$ в области A такая, что*

$$\iint_A f(x, y)dxdy = f(\bar{x}, \bar{y})\cdot S_A.$$

<u>Доказательство.</u> Используя свойство 5 двойного интеграла, запишем неравенства для его оценки:

$$m\cdot S_A \le \iint_A f(x, y)dxdy \le M\cdot S_A$$

и поделим все части этого неравенства на положительное число S_A

$$m \le \frac{\iint_A f(x, y)dxdy}{S_A} \le M.$$

Обозначим

$$\frac{\iint_A f(x, y)dxdy}{S_A} = \mu,$$

то есть $m \le \mu \le M$. Тогда по известной теореме Больцано-Коши ([1], п.171, стр.365) непрерывная функция $f(x, y)$, принимающая наименьшее m и наибольшее M значения, должна принять и каждое промежуточное значение, в частности значение μ, то есть существует точка $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y})$ области A, для которой выполнено равенство:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \mu,$$

а это значит, что

$$\frac{\iint_A f(x, y)dxdy}{S_A} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Другими словами,

$$\iint_A f(x, y)dxdy = f(\bar{x}, \bar{y})\cdot S_A,$$

где $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$.

Свойство доказано.

Замечание. Свойства 2 и 3 справедливы для любого конечного числа слагаемых. Доказательство этого факта можно провести методом математической индукции.

§1.3. Вычисление двойного интеграла

Определение 3.4. ***Область****, ограниченная кусочно-непрерывной границей называется* ***правильной в направлении оси*** *Oy, если любая прямая, параллельная оси Oy и проходящая через внутреннюю точку области****,*** *пересекает эту границу в двух точках.*

Например, область ограничена слева ординатой $x = a$, справа - ординатой $x = b$, снизу - непрерывной кривой $y = \varphi(x)$, сверху - непрерывной кривой $y = \psi(x)$, при этом $\varphi(x) \le \psi(x)$, $a < b$ (рис.68).

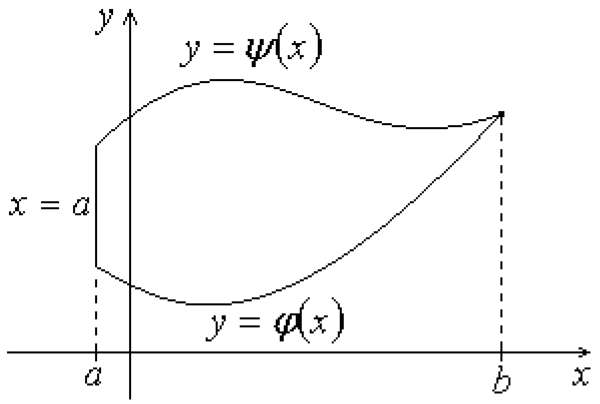


рис.68

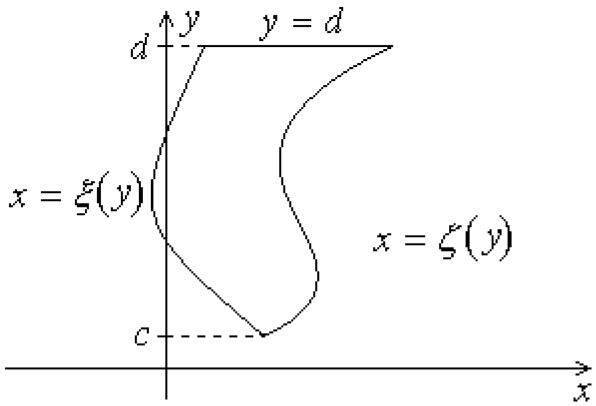


рис.69

Аналогично определяется ***область правильная в направлении оси*** Ox.

Определение 3.5. ***Область*** *ограниченная кусочно-непрерывной границей называется* ***правильной в направлении оси*** *Ox, если любая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через внутреннюю точку области****,*** *пересекает эту границу в двух точках.*

Например, область ограничена снизу прямой $y = c$, сверху прямой $y = d$, слева – непрерывной кривой с уравнением $x = \xi(y)$, а справа – непрерывной кривой $x = \zeta(y)$, при этом $\xi(y) \le \zeta(y)$ для всех $y \in [c, d]$ (рис.69).

<u>Определение 3.6.</u> *Область, правильная как в направлении оси Ox, так и в направлении оси Oy, называется* ***правильной областью*** *(рис.70).*

На рис.70 область A является правильной.

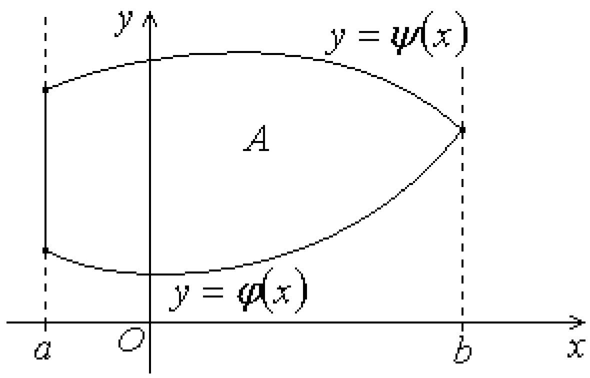


Рис.70

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в правильной области A. Рассмотрим выражение

$$I_A = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx, \tag{3.1.4}$$

то есть сначала интегрируют функцию $f(x,y)$ по переменной y, считая x постоянной величиной, в пределах от $y = \varphi(x)$ до $y = \psi(x)$:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

В результате вычислений получается непрерывная функция, которая зависит только от переменной x. Затем эту функцию интегрируют по x в пределах от a до b. Выражение (3.1.4) называют ***повторным интегралом.***

Равенство (3.1.4) можно записать в виде:

$$I_A = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{3.1.4*}$$

Рассмотрим пример вычисления повторного интеграла.

Пример 3.1.1. Вычислить повторный интеграл: $I_A = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx.$

Решение. Вычислим сначала интеграл, стоящий в скобках, считая переменную x постоянной величиной:

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)dy = x^2 \int_0^{x^2} dy + \int_0^{x^2} y^2 dy = x^2 y\Big|_0^{x^2} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

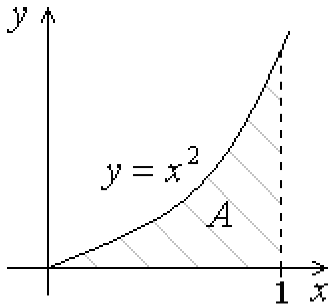


Рис.71

Интегрируя полученную функцию $\Phi(x)$ в пределах от 0 до 1, получаем:

$$I_A = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 + \frac{x^7}{3\cdot 7}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}$$

.

Здесь область A ограничивалась линиями: $y = 0$; $y = x^2$; $x = 1$ (рис.71).

Может случиться, что область A такова, что одна из функций $y = \varphi(x)$ или $y = \psi(x)$ не может быть задана единым аналитическим выражением на всем отрезке $[a,b]$. Пусть, например,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in [a,c] \\ \varphi_2(x) & x \in [c,b] \end{cases},$$

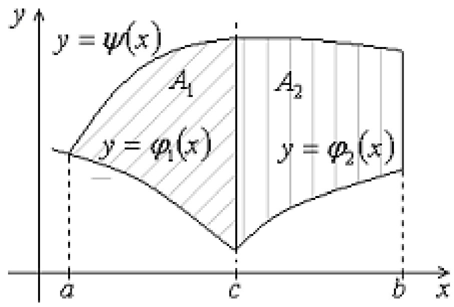


Рис.72

где $c \in (a,b)$. Такая область изображена на рис.72.

Тогда

$$I_A = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \left| \begin{matrix} \textit{по свойству аддитивности} \\ \textit{определенного интеграла} \end{matrix} \right| = \int_a^c dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy +$$

$$+ \int_c^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \left| \begin{matrix} \textit{в силу задания} \\ \textit{функции } \varphi(x) \end{matrix} \right| = \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy =$$

$$= I_{A_1} + I_{A_2}.$$

§1.4. Свойства повторных интегралов

Свойство 1. *Если правильную область A разбить на две области A_1 и A_2 прямой, параллельной оси Ох или оси Оу (рис.73,74), то*

$$I_A = I_{A_1} + I_{A_2}.$$

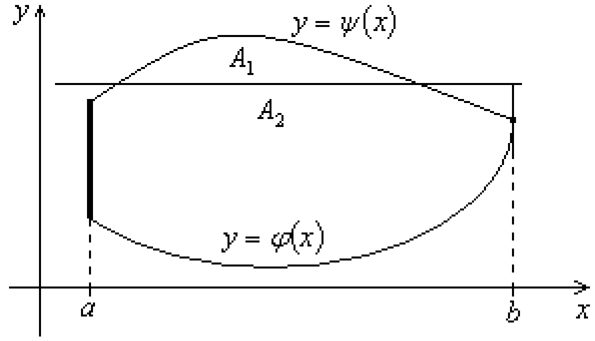


Рис.73

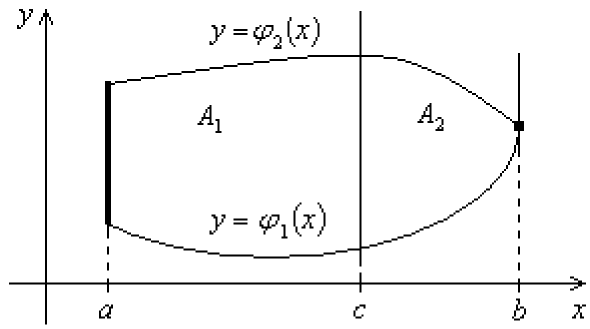


Рис.74

Доказательство. а) Пусть прямая $x = c$ $(a < c < b)$ разбивает область A на две правильные области A_1 и A_2 (рис.74). Тогда

$$I_A = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^c \Phi(x)dx + \int_c^b \Phi(x)dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = I_{A_1} + I_{A_2}.$$

б) Пусть прямая $y = h$ разбивает область A на две правильные области A_1 и A_2 так, как изображено на рис.75. Обозначим через M_1 и M_2 точки пересечения прямой $y = h$ с границей области A. Абсциссы этих точек обозначим через a_1 и b_1.

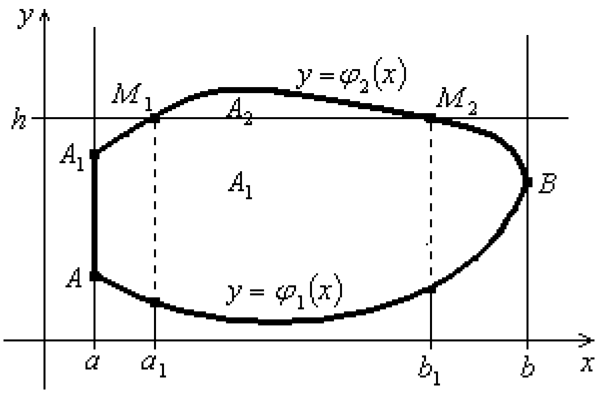


Рис.75

Область A_1 ограничена непрерывными линиями:

1) $y = \varphi_1(x)$;

2) кривой $A_1M_1M_2B$, уравнение которой запишем в виде:

$$y = \varphi_1^*(x) = \begin{cases} \varphi_2(x), & a \le x \le a_1 \\ h, & a_1 < x \le b_1 \\ \varphi_2(x), & b_1 < x \le b \end{cases}$$

;

3) прямыми $x = a$; $x = b$.

Область A_2 ограничена линиями:

1) $y = \varphi_1^*(x)$ при $x \in [a,b]$

2) $y = \varphi_2(x)$.

Тогда

$$I_A = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \left| \begin{matrix} \textit{из свойства аддитивности для} \\ \textit{внутреннего интеграла} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \left| \begin{matrix} \textit{из свойства линейности} \\ \textit{внешнего интеграла} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Последний интеграл разобьем на три интеграла, используя свойство аддитивности определенного интеграла:

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^{a_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx + \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx +$$

$$+\int_{b_1}^{b}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Так как $\varphi_1^*(x)=\varphi_2(x)$ на отрезке $[a,a_1]$ и на отрезке $[b,b_1]$, то первый и третий интегралы равны нулю. Поэтому

$$I_A = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy\right)dx + \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = I_{A_1}+I_{A_2}.$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство будет аналогично при любом положении секущей прямой M_1M_2.

<u>Следствие.</u> Каждую из полученных областей A_1 и A_2 можно разбить прямой, параллельной оси Oy или оси Ox на правильные области и к ним применить свойство 1.

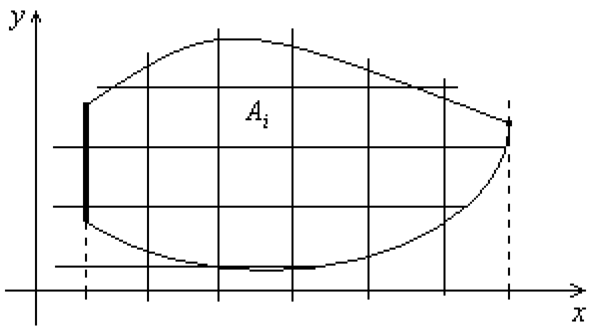


Рис.76

Таким образом, разбив область A прямыми, параллельными осям координат на любое конечное число правильных областей A_1, $A_2,\ldots,$ A_n (рис.76), можно обобщить свойство 1:

$$I_A = I_{A_1}+I_{A_2}+\ldots+I_{A_n}.$$

<u>Свойство 2</u> (Оценка повторного интеграла). *Пусть m и M - наименьшее и наибольшее значения непрерывной в области A функции $f(x,y)$, S_A - площадь области A. Тогда имеет место соотношение*

$$m\cdot S_A \le \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \le M\cdot S_A.$$

<u>Доказательство.</u> Оценим сверху внутренний интеграл:

$$\Phi(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \le \left|\begin{matrix}\text{так как } M\ge f(x,y)\\ \text{для любых } (x,y)\end{matrix}\right| \le \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} Mdy = M(\psi(x)-\varphi(x)).$$

Тогда получим

$$I_A=\int_a^b \Phi(x)dx \le \int_a^b M(\psi(x)-\varphi(x))dx = M\int_a^b (\psi(x)-\varphi(x))dx = M\cdot S_A .$$

Аналогично, оценим снизу внутренний интеграл:

$$\Phi(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \ge \left|\begin{matrix} \textit{так как } \ f(x,y)\ge m \\ \textit{для любых } \ (x,y)\end{matrix}\right| \ge \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} mdy = m(\psi(x)-\varphi(x)),$$

$$I_A=\int_a^b \Phi(x)dx \ge m\int_a^b (\psi(x)-\varphi(x))dx = m\cdot S_A .$$

Отсюда следует доказываемое:

$$m\cdot S_A \le I_A \le M\cdot S_A . \qquad (3.1.5)$$

***<u>Свойство 3</u>* (Теорема о среднем).** *Повторный интеграл от непрерывной в области A функции $f(x,y)$ по области A с площадью S_A равен произведению площади S_A на значение функции $f(x,y)$ в некоторой точке P области A, то есть:*

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = f(P)\cdot S_A , \qquad \textit{где } P\in A .$$

<u>Доказательство.</u> Из соотношения (3.1.5) получаем

$$m\le \frac{1}{S_A}\cdot I_A \le M .$$

Так как $f(x,y)$ непрерывная в области A функция, то она принимает все значения от наименьшего m до наибольшего M, а значит, в некоторой точке P области A достигнет значения $\frac{1}{S_A}\cdot I_A$. Другими словами

$$f(P)=\frac{1}{S_A}\cdot I_A ,$$

а отсюда следует

$$I_A=\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = f(P)\cdot S_A .$$

Что и требовалось доказать.

Сформулируем и докажем теорему для вычисления двойного интеграла через повторный.

<u>Теорема 3.2.</u> *Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области A (рис.70) равен повторному интегралу от этой функции по области A, то есть справедливо равенство:*

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (3.1.6)$$

Доказательство. Разобьем область A прямыми, параллельными осям координат, на n прямоугольных областей: ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. Их площади тоже обозначим ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. На основании свойства 1 повторного интеграла имеем:

$$I_A = I_{\Delta S_1} + I_{\Delta S_2} + \ldots + I_{\Delta S_n}.$$

Каждое слагаемое по теореме о среднем для повторного интеграла можно записать:

$$I_{\Delta S_i} = f(P_i)\cdot \Delta S_i,$$

где P_i - точка области ΔS_i.

Тогда получим сумму

$$I_A = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot \Delta S_i. \qquad (3.1.7)$$

Полученная сумма является интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по области A. По теореме о существовании двойного интеграла следует, что предел этой суммы при $n\to\infty$ и стремлении наибольшего диаметра λ площадок ΔS_i к нулю существует и равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$ по области A.

Величина I_A является повторным интегралом от $f(x,y)$ по области A, и он не зависит от n. Таким образом, переходя к пределу в равенстве (3.1.7), получим

$$I_A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot \Delta S_i = \iint\limits_A f(x,y)dxdy.$$

Что и требовалось доказать.

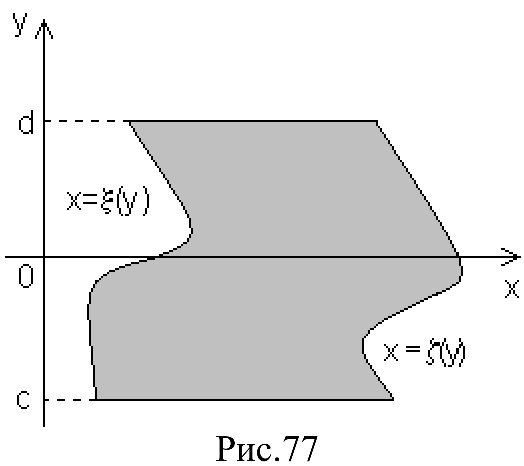


Рис.77

Рассмотрим теперь область интегрирования A такого вида: снизу A ограничена прямой $y=c$, сверху - прямой $y=d$, слева - кривой $x=\xi(y)$, справа - кривой $x=\varsigma(y)$ (рис.77).

В этом случае двойной интеграл сводят к повторному по следующей формуле:

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left\{\int\limits_{\xi(y)}^{\varsigma(y)} f(x,y)dx\right\}dy, \qquad (3.1.8)$$

то есть сначала вычисляют внутренний интеграл $\int\limits_{\xi(y)}^{\varsigma(y)} f(x,y)dx$ по переменной x, считая y постоянной величиной. А потом получившуюся функцию переменной y интегрируют по y в пределах от c до d.

Пример 3.1.2. Область A ограничена прямыми $y = x$, $y = x+1$, $x = 0$, $x = 1$. Вычислить $I = \iint\limits_A xydxdy$.

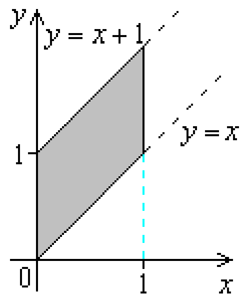


Рис.78

Решение. Область A снизу ограничена прямой $y = x = \varphi(x)$, сверху ограничена прямой $y = x+1 = \psi(x)$, кроме того $0 \le x \le 1$ (рис.78). Поэтому:

$$I = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_x^{x+1} xydy \right\} dx.$$

Вычисление внутреннего интеграла дает:

$$\int\limits_x^{x+1} xydy = x\int\limits_x^{x+1} ydy = \frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=x}^{y=x+1} = \frac{2x^2+x}{2}.$$

Отсюда

$$I = \int\limits_0^1 \frac{2x^2+x}{2}dx = \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_0^1 \frac{x}{2}dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{x^2}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Пример 3.1.3. Вычислить $\iint\limits_A (x^2 + xy)dS$, где область A ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$.

Решение. В данном случае вертикальные границы области «стянуты» в одну точку (рис.79). Нижняя граница области $y = x^2 = \varphi(x)$, верхняя граница области $y = 1 = \psi(x)$. Для того, чтобы понять, в каких пределах изменяется переменная x, найдем значения x, при которых парабола $y = x^2$ пересекает прямую $y = 1$:

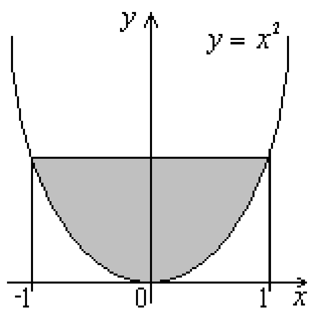


Рис.79

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -1.$$

То есть для области A имеем: $-1 \le x \le 1$.

Теперь применим формулу (3.1.4):

$$I = \int\limits_{-1}^1 \left\{ \int\limits_{x^2}^1 (x^2 + xy)dy \right\} dx.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{x^2}^{1}\left(x^2+xy\right)dy = x^2\int_{x^2}^{1}dy + x\int_{x^2}^{1}ydy = x^2(1-x^2)+x\left(\frac{1}{2}+\frac{x^4}{2}\right) = x^2 - x^4 + \frac{x}{2}+\frac{x^5}{2},$$

отсюда получаем:

$$I=\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^4+\frac{x}{2}+\frac{x^5}{2}\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^6}{12}\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{4}{15}.$$

Пример 3.1.4. Найти $\iint\limits_{A}(x+y)dS$, если область A ограничена линиями $y=x$, $y=0$, $x+y=2$.

Решение. На рис.80 видно, что верхняя граница области A состоит из двух прямолинейных отрезков:

$y=x$, $0\le x\le 1$, $y=2-x$, $1\le x\le 2$.

Поэтому непосредственно формулу (3.1.4) применить нельзя. Разобьем область A прямой $x=1$ на две части (см. рис.81 и рис.82) и воспользуемся свойством аддитивности двойных интегралов:

$$I=\iint\limits_{A}(x+y)dS=\iint\limits_{A_1}(x+y)dS+\iint\limits_{A_2}(x+y)dS.$$

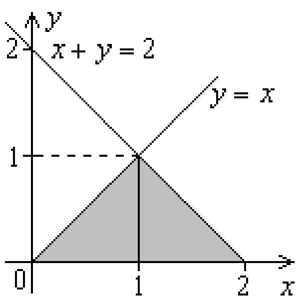


Рис.80

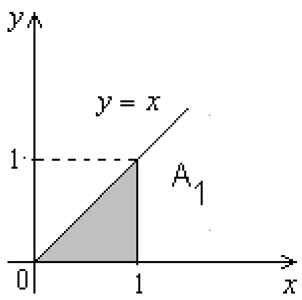


Рис.81

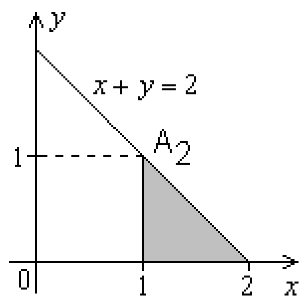


Рис.82

У области A_1 нижняя граница $y=0$, верхняя граница $y=x$, а $0\le x\le 1$. Вычислим сначала интеграл по области A_1:

$$I_1=\iint\limits_{A_1}(x+y)dS=\int_0^1\left\{\int_0^x(x+y)dy\right\}dx.$$

Так как

$$\int_0^x(x+y)dy = x\int_0^x dy+\int_0^x ydy = x^2+\frac{x^2}{2}=\frac{3x^2}{2},$$

то $\quad I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{3x^2}{2}dx=\frac{1}{2}.$

Вычислим теперь интеграл по области A_2:

$$I_2=\iint\limits_{A_2}(x+y)dS=\int\limits_1^2\left\{\int\limits_0^{2-x}(x+y)dy\right\}dx.$$

Так как

$$\int\limits_0^{2-x}(x+y)dy=x\int\limits_0^{2-x}dy+\int\limits_0^{2-x}ydy=2-\frac{x^2}{2},$$

поэтому

$$I_2=\int\limits_1^2\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{5}{6}.$$

Итак,

$$I=I_1+I_2=\frac{3}{6}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3}.$$

Этот же интеграл можно вычислить проще, если внешним поставить интеграл по переменной y:

$$I=\int\limits_0^1\left(\int\limits_y^{2-y}(x+y)dx\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{2-y}+yx\Big|_y^{2-y}\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{(2-y)^2}{2}-\frac{y^2}{2}+\right.$$

$$\left.+y(2-y)-y^2\right)dy=\int\limits_0^1\left(-2y^2+2\right)dy=-2\int\limits_0^1y^2dy+2\int\limits_0^1dy=-\frac{2}{3}y^3\Big|_0^1+2y\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

Пример 3.1.5. Найти $I=\iint\limits_A\sqrt[3]{x+y}dxdy$, если область A ограничена прямыми $x=y$, $x=y-1$, $y=0$, $y=1$.

Решение.

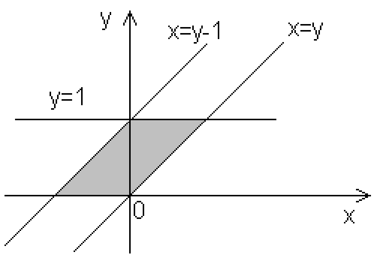


Рис.83

Область A изображена на рис.83. Левая граница области A: $x=y-1$, то есть $y-1=\xi(y)$; правая граница области A: $x=y$ или $y=\varsigma(y)$; при этом $0\le y\le1$, поэтому из (3.1.8) следует, что:

$$I=\int\limits_0^1\left\{\int\limits_{y-1}^{y}\sqrt[3]{x+y}dx\right\}dy,$$ но так как

$$\int\limits_{y-1}^{y}\sqrt[3]{x+y}dx=\int\limits_{y-1}^{y}(x+y)^{1/3}d(x+y)=\frac{3}{4}\left[(2y)^{4/3}-(2y-1)^{4/3}\right],$$

Поэтому

$$I=\frac{3}{4}\int\limits_0^1\left[(2y)^{4/3}-(2y-1)^{4/3}\right]dy=\frac{3}{4}\left(\int\limits_0^1(2y)^{4/3}dy-\int\limits_0^1(2y-1)^{4/3}dy\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 (2y)^{4/3}\,d(2y)-\frac{1}{2}\int_0^1 (2y-1)^{4/3}\,d(2y-1)\right)=\frac{3}{8}\left((2y)^{7/3}\cdot\frac{3}{7}-(2y-1)^{7/3}\cdot\frac{3}{7}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{9}{56}\left(2^{7/3}-1\right).$$

Замечание. Значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования. Поэтому для уменьшения объема вычислений следует, если возможно, выбирать такой порядок интегрирования, при котором нет надобности разбивать область интегрирования на части.

Для закрепления изученного материала предлагаем Вам решить следующие задачи **самостоятельно**.

Изменить порядок интегрирования в интеграле:

471. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)dy$.

472. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{9-x^2} f(x,y)dy$.

473. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

474. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

475. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy+\int\limits_2^{2\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy$.

Вычислить повторные (двукратные) интегралы:

476. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 \left(x^2+y^2\right)dx$.

477. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy$.

478. $\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_0^{y^2} (x+2y)dx$.

479. $\int\limits_1^3 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy$.

Вычислить двойные интегралы, по областям, ограниченным указанными линиями:

480. $\iint\limits_D xydxdy$, $D:\ y=0,\ y=1-x^2$.

481. $\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy$, $D:\ y=1,\ y=x,\ y=3x$.

482. $\iint\limits_D \left(x^2+2xy\right)dxdy$, $D:\ y=0,\ y=1,\ y=x,\ y=x-1$.

483. $\iint\limits_D x^3dxdy$, $D:\ x=0,\ y=x,\ y=2-x^2$.

484. $\iint\limits_D dxdy$, $D:\ y=x,\ y=\frac{x}{4},\ x+2y=6$.

485. $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$, $D: y=x,\ y=9x,\ y=\frac{1}{x}$.

486. $\iint\limits_D \frac{x^3}{y}dxdy$, $D:\ y=4,\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{4}$.

487. $\iint\limits_D ydxdy$, $D:\ x=0,\ y=0,\ y=\sqrt{9-x^2}$.

§ 1.5. Замена переменных в двойном интеграле
Переход к полярным координатам в двойном интеграле

1.5.1. *Переход от декартовых координат к новым переменным*

Пусть в плоскости Oxy дана область D, ограниченная линией L. Предположим, что координаты x и y являются функциями новых переменных u и v:

$$x=\varphi(u,v);\quad y=\psi(u,v), \tag{3.1.9}$$

причем функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ взаимно однозначны, непрерывны и имеют непрерывные частные производные в некоторой области D'.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Ouv (рис. 84).

На основании сказанного следует, что каждой точке $P(x,y)$ на плоскости Oxy (рис.85) однозначно соответствует точка $P'(u,v)$ на плоскости Ouv с координатами u, v, которые определяются из формул (3.1.9). Если в плоскости Oxy точка опишет замкнутую линию L, ограничивающую область D, то в плоскости Ouv соответствующая точка опишет замкнутую линию L', ограничивающую некоторую область D', при этом каждой точке D'

соответствует точка области D, то есть формулы (3.1.9) взаимно однозначно отображают область D на область D'.

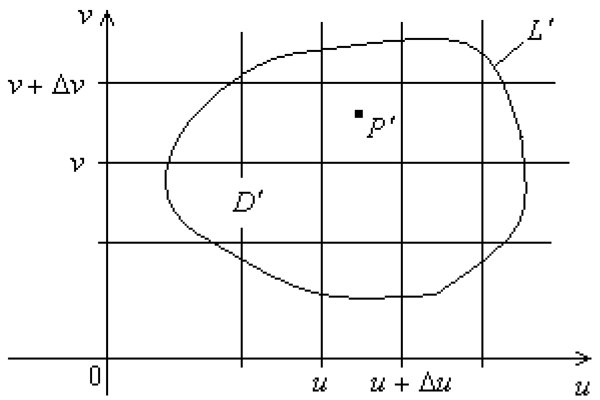


Рис.84

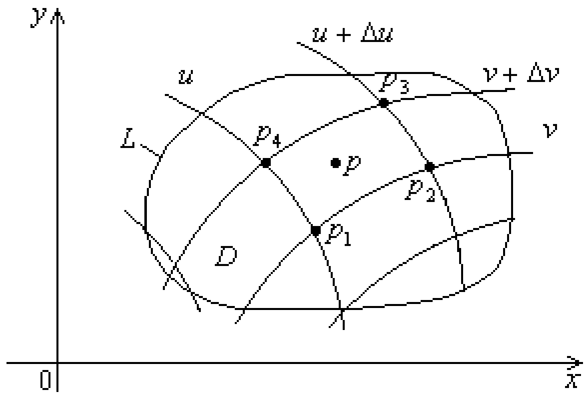


Рис.85

Рассмотрим в области D' линию $u = const$. По формулам (3.1.9) в области D плоскости Oxy ей будет соответствовать некоторая кривая. Также каждой прямой $v = const$ плоскости Ouv будет соответствовать некоторая линия в плоскости Oxy. Разобьем область D' прямыми $u = const$ и $v = const$ на прямоугольные площадки (при этом площадки не прямоугольные, то есть задевающие границу области D', мы не будем принимать в расчет, из-за их сравнительной малости). Соответствующими кривыми линиями область D разобьется на криволинейные четырехугольники (рис. 85).

Рассмотрим в плоскости Ouv прямоугольную площадку $\Delta s'$, ограниченную прямыми $u = const$, $u + \Delta u = const$, $v = const$, $v + \Delta v = const$ и соответствующую ей криволинейную площадку Δs в плоскости Oxy. Площади этих площадок тоже обозначим соответственно через $\Delta s'$ и Δs. Очевидно, что $\Delta s' = \Delta u \Delta v$. Вычислим площадь Δs криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ в плоскости Oxy (см. рис. 85). Определим координаты его вершин:

$$P_1(\varphi(u,v),\psi(u,v)) = P_1(x_1, y_1),$$
$$P_2(\varphi(u+\Delta u,v),\psi(u+\Delta u,v)) = P_2(x_2, y_2),$$
$$P_3(\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),\psi(u+\Delta u,v+\Delta v)) = P_3(x_3, y_3),$$
$$P_4(\varphi(u,v+\Delta v),\psi(u,v+\Delta v)) = P_4(x_4, y_4).$$

При вычислении площади криволинейного четырехугольника Δs будем считать линии P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 попарно параллельными прямыми, то есть четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ можно рассматривать как параллелограмм, площадь которого равна удвоенной площади треугольника $P_1P_2P_3$ и находится по формуле из аналитической геометрии:

$$\Delta s \approx 2\left|\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{matrix}\right\|\right| = \left\|\begin{matrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{matrix}\right\|.$$

Применим формулу Тейлора ([1], п.195, стр.416) к функциям $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$:

$$x_2 = \varphi(u+\Delta u, v) = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \mathrm{O}\left((\Delta u)^2\right),$$

$$y_2 = \psi(u+\Delta u, v) = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \mathrm{O}\left((\Delta u)^2\right),$$

$$x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v) = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v + \mathrm{O}\left((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2\right),$$

$$y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v) = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v + \mathrm{O}\left((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2\right).$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с бесконечно малыми Δu, Δv для площади Δs, получим выражение:

$$\Delta s \approx \left|(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)\right| \approx \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right\| \cdot \Delta u \cdot \Delta v = |J| \cdot \Delta u \cdot \Delta v, \qquad \text{где } J = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right\|.$$

Определитель J называют ***якобианом*** (по имени немецкого математика Якоби) ***перехода от декартовых координат*** x ***и*** y ***к новым координатам*** u ***и*** v. Таким образом, $\Delta s \approx |J|\Delta s'$. Чем меньше будут размеры площадок Δs и $\Delta s'$, тем это равенство будет точнее, и $|J| = \lim\limits_{diam\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}$.

Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x,y)$. Каждому значению функции $z = f(x,y)$ в области D соответствует то же самое значение $z = F(u,v)$ в области D', где $F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$.

Рассмотрим интегральные суммы от функции z по области D. Очевидно, что имеет место следующее равенство:

$$\sum f(x,y)\Delta s = \sum F(u,v)\Delta s \approx \sum F(u,v) \cdot |J| \cdot \Delta s'.$$

Интегральная сумма, стоящая справа, распространена на область D'.

Переходя к пределу при условии, что наибольший диаметр площадок $\Delta s' \to 0$, получим равенство:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} F(u,v)|J|dudv. \qquad (3.1.10)$$

Эта формула преобразования координат в двойном интеграле дает возможность свести вычисление двойного интеграла по области D к вычислению двойного интеграла по области D', что может упростить его вычисление.

1.5.2. ***Переход от декартовых координат к полярным в двойном интеграле***

Рассмотрим переход от декартовых координат к полярным в двойном интеграле. Полярные координаты (r,φ) любой точки связаны с ее декартовыми координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \tag{3.1.11}$$

В этом случае $u=\varphi$; $v=r$. Вычислим Якобиан перехода от декартовых координат x и y к полярным φ и r:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r.$$

Следовательно, $|J| = r$.

Таким образом, на основании (3.1.10) имеет место следующая формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \tag{3.1.12}$$

Здесь (r,φ) - полярные координаты точек области D. Пределы изменения переменных r и φ устанавливаются непосредственно по области D.

Для вычисления двойного интеграла удобно перейти от декартовых координат к полярным если:

а) подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$;

б) областью интегрирования служит круг $x^2+y^2 \le R^2$, или кольцо $R_1^2 \le x^2+y^2 \le R_2^2$, или часть круга или кольца.

Пример 3.1.6. Вычислить интеграл, перейдя к полярным координатам, $I = \iint\limits_A (x+y)dxdy$, где область *A* ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, причем $y \ge 0$, $x \ge 0$.

Решение. Область *A* изображена на рис.86. Используя (3.1.12) получим:

$$I = \iint\limits_A (r\cos\varphi + r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Запишем теперь I в виде повторного интеграла. Непосредственно из рис. 86 видно, что в области *A* полярный угол φ меняется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, это и будут пределы внешнего интеграла. Нижняя криволинейная граница области A имеет полярное уравнение $r=1$, а верхняя $r=2$, поэтому получаем:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_1^2 r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)dr\right\}d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(\cos\varphi+\sin\varphi)\int\limits_1^2 r^2dr\right\}d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{7}{3}\right\}d\varphi=\frac{7}{3}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\right)=\frac{14}{3}$$

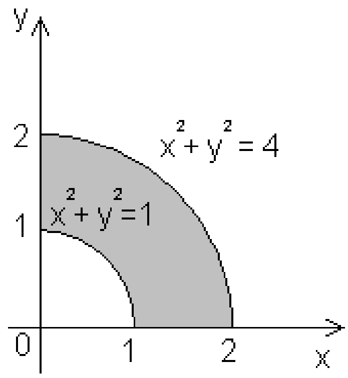


Рис.86

Для закрепления материала параграфа предлагаем Вам решить следующие задачи **самостоятельно**.

Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:

488. Область D - круг $x^2+y^2\le 9$.

489. Область D - полукруг $x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0$.

490. Область D - круговой сектор $x^2+y^2\le 4$, $y\ge x$, $y\le x\sqrt{3}$, $x\ge 0$.

491. Область D - круговое кольцо $x^2+y^2\ge 4$, $x^2+y^2\le 25$.

492. Область D - круг $(x-1)^2+y^2\le 1$.

Вычислить, переходя к полярным координатам, двойные интегралы по указанным областям

493. $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$; D - I четверть круга $x^2+y^2\le 4$.

494. $\iint\limits_D ydxdy$; D - круговой сектор $x^2+y^2\le 36$, $-6\le x\le 0$, $0\le y\le 6$.

495. $\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; D - круговое кольцо $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 4$.

496. $\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$; D - круг $x^2+y^2\le 4x$.

497. $\iint\limits_D (x+1)dxdy$ D- $x^2+(y-3)^2 \le 9$.

498. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$; D- круговой сектор $x^2+y^2 \le 1$, $y \le \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $y \le x\sqrt{3}$, $x \ge 0$.

499. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2+2}$, D ограничена кривой $y=-\sqrt{49-x^2}$ и осью Ox.

500. $\iint\limits_D \left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dxdy$, D- круг $x^2+y^2 \le \pi^2$.

501. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, D- $x^2+y^2 \ge 2$, $x^2+y^2 \le 3$, $y \le -x$, $y \ge x$.

502. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 dxdy$, D- ограничена одним витком спирали $r=2\varphi$ и полярной осью.

§ 1.6. Геометрические приложения двойных интегралов

На основании свойства 1 двойного интеграла формула

$$S=\iint\limits_A dS \tag{3.1.13}$$

сводит нахождение площади произвольной плоской фигуры к вычислению некоторого двойного интеграла. В полярных координатах $dS=rd\varphi dr$, поэтому формула (3.1.13) принимает вид:

$$S=\iint\limits_A r\,d\varphi\ dr. \tag{3.1.14}$$

Пусть тело *D* снизу ограничено плоскостью $z=0$, сверху поверхностью $z=f(x,y)\ge 0$ и с боков – цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур фигуры *A*. Известно, что объем тела *D* вычисляется по формуле:

$$V=\iint\limits_A f(x,y)dxdy. \tag{3.1.15}$$

Если тело имеет более сложную форму, то его разбивают на части, имеющие форму, описанную выше, и используют свойство аддитивности двойного интеграла.

Пример 3.1.7. Вычислить объем тела, ограниченный поверхностями

$$z=2-x-y,\ y=x^2,\ y=x,\ z=0.$$

Решение. Поверхность $y = x^2$ - это параболический цилиндр, его образующая параллельна оси Oz, направляющей служит парабола $y = x^2$ (рис.87).
Плоскость $z = 2 - x - y$ отсекает на осях координат отрезки длины 2 (рис.88).
Плоскость $y = x$ проходит через ось Oz и пересекает плоскость $z = 0$ по прямой $y = x$ (рис.89).

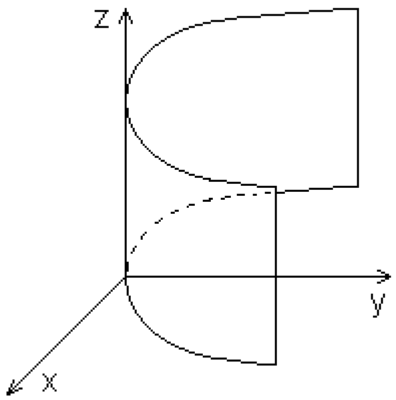


Рис.87

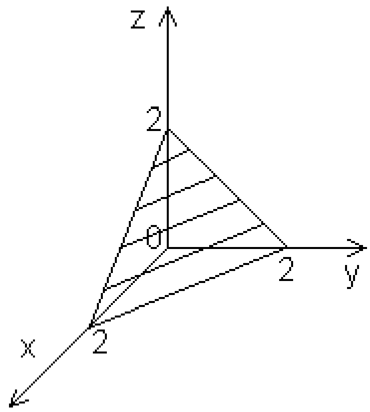


Рис.88

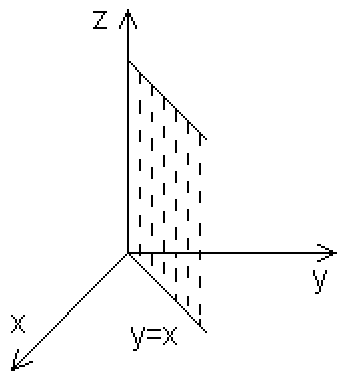


Рис.89

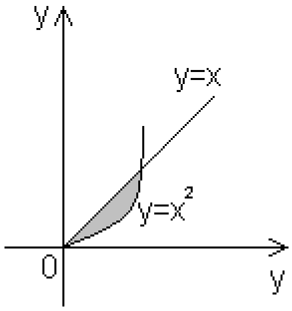


Рис.90

Итак, описанное в условии задачи тело сверху ограниченно плоскостью $z = 2 - x - y$, снизу плоскостью $z = 0$, с боков – поверхностью цилиндра $y = x^2$ и плоскостью $y = x$. Основанием этого тела является фигура A, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$ (рис.90). Поэтому:

$$V = \iint\limits_A (2 - x - y)dxdy = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_{x^2}^{x} (2 - x - y)dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int\limits_0^1 \left(2x - \frac{7x^2}{2} + x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{11}{60}.$$

Пример 3.1.8. Вычислить объем тела, ограниченного гиперболическим параболоидом $z = xy$ и плоскостями $x + y = a$, $z = 0$.

Решение. Данное тело сверху ограниченно параболоидом $z = xy$, снизу – плоскостью $z = 0$, спереди – плоскостью $x + y = a$. Эта плоскость параллельна оси Oz и пересекает плоскость $z = 0$ по прямой $x + y = a$. Поскольку прямые $x = 0$, $y = 0$, плоскости $z = 0$ принадлежат параболоиду $z = xy$ ($0 = xy$, если $x = 0$ или $y = 0$), то основанием тела является треугольник AOB (рис.91). Поэтому:

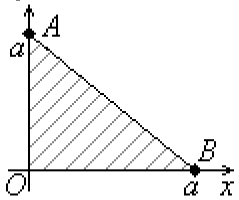


Рис. 91

$$V = \iint_{AOB} xydxdy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} xydxdy = \int_0^a xdx \int_0^{a-x} ydy = \int_0^a x\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{a-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \left(a(a-x)^2 - a(a-x)^3\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^4}{24}.$$

Пример 3.1.9. Найти объем тела V, ограниченного снизу плоскостью $z = 0$, по бокам плоскостями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, а сверху поверхностью $z = x^2 + y^2$.

Решение.

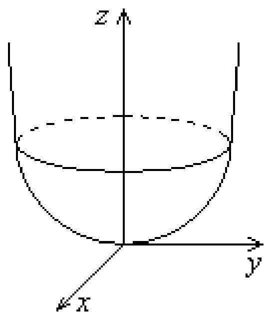


Рис.92

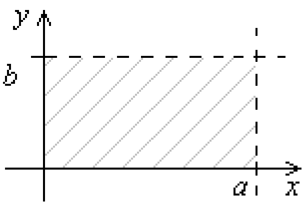


Рис.93

Составим себе представление о форме тела V. Поверхность $z = x^2 + y^2$ – это параболоид (рис.92), плоскость $x = 0$ - это координатная плоскость zOy, плоскость $x = a$ параллельна плоскости $x = 0$ и пересекает плоскость $z = 0$ по прямой $x = a$. Плоскость $y = 0$ - координатная плоскость xOz, а плоскость $y = b$ ей параллельна и пересекает плоскость $z = 0$ по прямой $y = b$. Поэтому в основании тела V лежит прямоугольник $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ (рис. 93).

По формуле (3.1.15) вычислим объем:

$$V = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^b dy \int_0^a \left(x^2 + y^2\right)dx =$$

$$= \int_0^b \left(\frac{a^3}{6} + \frac{ay^2}{2}\right)dy = \frac{ab\left(a^2 + b^2\right)}{6}.$$

Для закрепления материала параграфа предлагаем Вам решить следующие задачи **самостоятельно**.

Найти площади плоских областей, ограниченных заданными линиями

503. $y = 0$, $y = 4$, $y = -x$, $y = \dfrac{x-1}{2}$.

504. $y^2 = -x$, $x = -4$.

505. $y = x^2$, $x + y = 6$.

506. $y = \ln x$, $y = x - 1$, $y = -1$.

507. $y = \dfrac{x}{4}$, $y = 2x$, $x + 3y - 7 = 0$.

508. $r = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

509. $r = 4(1 + \cos\varphi)$, $r\cos\varphi = 3$ (справа от прямой).

510. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 25$, $y = x\sqrt{3}$, $x \ge 0$.

511. $x^2 + y^2 = 2y$, $y = x$, $x \geq 0$.

512. $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями с помощью двойного интеграла:

513. $3x + 2y + z - 6 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

514. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

515. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

516. $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$, $z = 0$.

517. $z = 1 - x^2 - 4y^2$, $z = 0$.

518. $z = x^2 - y^2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

519. $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + z^2 = 9$.

520. $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5x$, $z = 0$.

521. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

522. $2z = 2 + x^2 + y^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.

Глава 2. *Тройные интегралы*

§ 2.1. Задача о вычислении массы тела

Пусть дано некоторое тело T, заполненное массами, и в каждой его точке $M(x,y,z)$ известна плотность распределения этих масс $\rho=\rho(M)=\rho(x,y,z)$. Требуется определить всю массу m тела. Для решения этой задачи разложим тело T на ряд частей $T_1,T_2,...,T_n$ с объемами $V_1,V_2,...,V_n$ и выберем в пределах каждой из них по точке $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Примем приближенно, что в пределах части T_i плотность постоянна и равна как раз плотности $\rho(x_i,y_i,z_i)$ в выбранной точке. Тогда масса m_i, $i=1,...n$, этой части приближенно выразится следующим образом

$$m_i \approx \rho(x_i,y_i,z_i)V_i,$$

а масса всего тела будет

$$m \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)V_i .$$

Если диаметры всех частей $T_1,T_2,...,T_n$ стремятся к нулю, то в пределе это равенство становится точным, так что

$$m=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)V_i ,$$

где λ - наибольший из диаметров, и задача решена.

Такие пределы называются ***тройными интегралами*** и обозначаются

$$\iiint\limits_T \rho(x,y,z)dV \quad \text{или} \quad \iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz .$$

Итак,

$$m=\iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz . \qquad (3.2.1)$$

§2.2. Определение тройного интеграла, условие его существования и свойства

Тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по некоторому телу T определяется по той же схеме, что и двойной интеграл по плоской области.

Тело T с помощью сети поверхностей разбивается на n «ячеек» $T_1,T_2,...,T_n$ с объемами $V_1,V_2,...,V_n$ и диаметрами $d_1,d_2,...,d_n$. Наибольший из диаметров d_k обозначается через λ. В каждой ячейке T_k произвольным образом выбирается точка $P_k(x_k,y_k,z_k)$, затем вычисляется значение функции в этой точке $f(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1,2,...,n$, и составляется интегральная сумма:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot V_k . \qquad (3.2.2)$$

<u>Определение 3.7</u> *Если интегральная сумма* (3.2.2) *имеет конечный предел при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех областей* $T_1, T_2, ..., T_n$ *(* $\lambda \to 0$*), который не зависит ни от способа разбиения* T *на части* $T_1, T_2, ..., T_n$*, ни от выбора точек* $P_k(x_k, y_k, z_k)$ *внутри* T_k*,* $k = 1,...,n$*, то этот предел называется* ***тройным интегралом от функции*** $f(x, y, z)$ ***по области T*** *и обозначается одним из символов:*

$$\iiint_T f(x, y, z) dV \quad \text{или} \quad \iiint_T f(x, y, z) dxdydz . \qquad (3.2.3)$$

При этом функция $f(x, y, z)$ *называется* ***интегрируемой.***

Конечный предел интегральных сумм может существовать только для ограниченных функций. Поэтому необходимым условием интегрируемости функции является ее ограниченность.

Класс интегрируемых функций включает в себя непрерывные в области T функции. Доказательство этой факта и рассмотрение более широкого класса интегрируемых функций проведено в [3], п. 643, стр. 310.

Свойства тройных интегралов достаточно перечислить, так как доказываются они аналогично изложенному в §1.2 главы 1 для двойных интегралов.

<u>Свойство 1.</u> Если $f(x, y, z) \equiv 1$ для любой точки $(x, y, z) \in T$, то

$$\iiint_T f(x, y, z) dxdydz = \text{объему тела } T .$$

Таким образом, объем тела T вычисляется по формуле:

$$V_T = \iiint_T dxdydz . \qquad (3.2.4)$$

<u>Свойство 2</u> (Линейность тройного интеграла). Если $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ - интегрируемые в области T функции, а c и k - постоянные величины, то справедливо равенство

$$\iiint_T (cf(x, y, z) + kg(x, y, z)) dxdydz = c\iiint_T f(x, y, z) dxdydz + k\iiint_T g(x, y, z) dxdydz$$

<u>Свойство 3</u> (Аддитивность тройного интеграла). Если $f(x, y, z)$ - интегрируемая в области T функция, а область T разделена на две не имеющие общих внутренних точек области T' и T'', то функция $f(x,y,z)$ будет интегрируема в каждой из областей T' и T'', причем будет справедливо равенство:

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{T''} f(x,y,z)dxdydz\,.$$

<u>Свойство 4.</u> Если $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ - интегрируемые в области T функции, связанные между собой неравенством $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ для любой точки $(x,y,z) \in T$, то

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_{T} g(x,y,z)dxdydz\,.$$

<u>Свойство 5</u> (Оценка тройного интеграла). Пусть m и M - наименьшее и наибольшее значения непрерывной в области T функции $f(x,y,z)$, тогда имеет место неравенство:

$$m \cdot V_T \le \iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz \le M \cdot V_T\,,$$

где V_T - объем тела T.

<u>Свойство 6</u> (Теорема о среднем). Если $f(x,y,z)$- непрерывная в области T функция, то найдется точка $\overline{P}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ внутри области T, в которой выполнено

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \cdot V_T\,,$$

при этом число $f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ называют ***средним значением функции*** $f(x,y,z)$ ***в области T***.

§ 2.3. Вычисление тройного интеграла

Предположим, что трехмерная (пространственная) область T, ограниченная замкнутой поверхностью S, обладает следующими свойствами:

1) всякая прямая, параллельная оси $0z$, проведенная через внутреннюю точку области T, пересекает поверхность S в двух точках;
2) вся область T проектируется на плоскость $0xy$ в правильную (двумерную) область A;
3) всякая часть области T, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей ($0xy$, $0yz$, $0xz$), также обладает свойствами 1) и 2).

Область T, обладающую указанными свойствами, будем называть ***правильной трехмерной областью***. Примеры правильной и неправильной областей приведены на рис.94 и рис.95. Неправильную область можно разбить на правильные. Поэтому в этом параграфе будем рассматривать только правильные области.

Пусть область T ограничена поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, $(z_1(x, y) \geq z_2(x, y))$,. и цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур области A (рис.94). Тогда область A является проекцией тела T на плоскость Oxy.

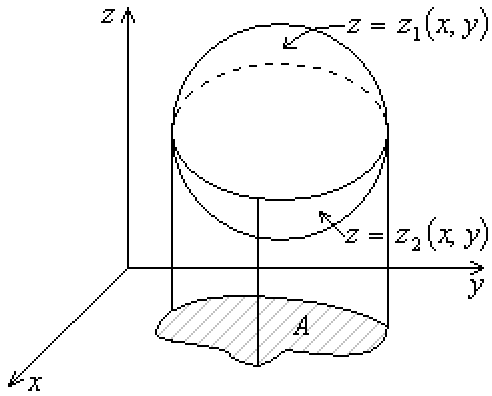


Рис. 94

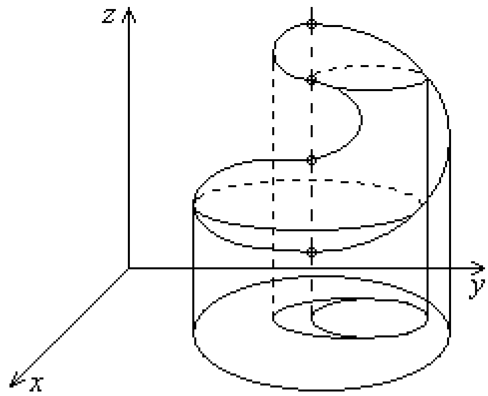


Рис.95

Введем понятие трехкратного (повторного) интеграла по области T от непрерывной в области T функции $f(x, y, z)$:

$$I_T = \iint_A \left(\int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy.$$

Заметим, что если двумерная область A такова, как на рис.65, то этот трехкратный интеграл запишется в виде:

$$I_T = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx.$$

Приведем пример вычисления повторного (трехкратного) интеграла.

Пример 3.2.1. Вычислить трехкратный интеграл от функции $f(x, y, z) = \dfrac{1}{(x + y + z + 1)^3}$ по области, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Решение. Эта область правильная (рис.96), она ограничена сверху и снизу плоскостями $z = 1 - x - y$ и $z = 0$ и проектируется на плоскость $0xy$ в правильную область A, представляющую собой треугольник, ограниченный прямыми линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (рис.97).

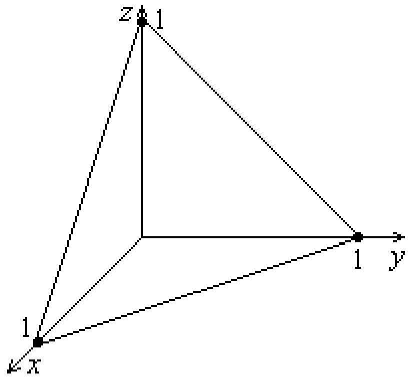


Рис.96

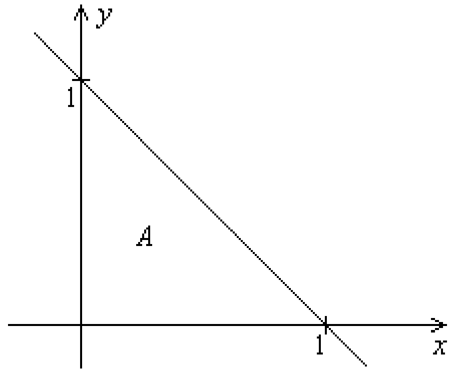


Рис.97

Поэтому трехкратный интеграл вычисляется следующим образом:

$$I = \iint\limits_A \left(\int\limits_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz \right) dxdy = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^{1-x} \left[\int\limits_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^{1-x} \left[\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2} \Bigg|_0^{1-x-y} \right] dy \right\} dx = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^{1-x} \left[(1+1)^{-2} - (x+y+1)^{-2} \right] dy \right\} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy \right\} dx = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left\{ \frac{1}{4} y - \frac{(x+y+1)^{-1}}{-1} \right\} \Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left\{ \frac{1-x}{4} + (x+1-x+1)^{-1} - (x+1)^{-1} \right\} dx = -\frac{1}{2} \left(\int\limits_0^1 \frac{1-x}{4} dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{x+1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \frac{(x-1)^2}{2} \Bigg|_0^1 + \frac{1}{2} x \Big|_0^1 - \ln|x+1| \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{16}(0-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln 2 =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.$$

Перечислим теперь некоторые свойства трехкратного интеграла. Доказательство этих свойств проводится совершенно так же, как и доказательство соответствующих свойств для двукратных интегралов.

Свойство 1. Если область T разделить на две области T' и T'' плоскостью, параллельной какой-либо из плоскостей координат, то трехкратный интеграл по области T равен сумме трехкратных интегралов по областям T' и T'':

$$I_T = I_{T'} + I_{T''}.$$

Следствие. При любом разбиении области T на конечное число областей T', T^2,..., T^n плоскостями, параллельными координатным плоскостям, имеет место равенство:

$$I_T = I_{T^1} + I_{T^2} + \ldots + I_{T^n}.$$

Свойство 2 ***(Об оценке трехкратного интеграла).*** Если m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области T, а V_T - объем данной области, то имеет место неравенство:

$$m \cdot V_T \le I_T \le M \cdot V_T,$$

где I_T - трехкратный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области T.

Свойство 3 ***(Теорема о среднем).*** Трехкратный интеграл I_T от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по области T равен произведению ее объема V_T на значение функции в некоторой точке P области T, то есть

$$I_T = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx = f(P) \cdot V_T.$$

Теперь сформулируем и докажем теорему о вычислении тройного интеграла.

Теорема 3.3. *Тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по правильной области T равен трехкратному интегралу по той же области, то есть*

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_A \left(\int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy. \qquad (3.2.5)$$

или

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \qquad (3.2.5^*)$$

Доказательство. Разобьем область T плоскостями, параллельными координатным плоскостям на n правильных областей: $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$. Объемы этих областей обозначим также Δv_i. Пусть $I_{\Delta v_i}$ - трехкратный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области Δv_i, $i = 1,\ldots n$. Тогда на основании следствия из свойства 1 трехкратных интегралов можем написать равенство:

$$I_T = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + \ldots + I_{\Delta v_n}.$$

Применяя теорему о среднем (свойство 3) для каждого интеграла, это равенство преобразуем

$$I_T = f(P_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + \ldots + f(P_n)\Delta v_n,$$

где P_i - некоторая точка области Δv_i.

В правой части этого равенства стоит интегральная сумма функции $f(x,y,z)$ по телу T. По предположению функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области T и потому предел этой суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров Δv_i существует и равняется тройному интегралу от функции $f(x,y,z)$ по области T. Таким образом, переходя к пределу, получаем

$$I_T = \iiint\limits_T f(x,y,z)dV,$$

или, окончательно

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \iint\limits_A \left(\int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx,$$

где $z = z_2(x,y)$ и $z = z_1(x,y)$ - уравнения поверхностей, ограничивающих правильную область T снизу и сверху. Линии $x = a$, $x = b$, $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ ограничивают область A, являющуюся проекцией области T на плоскость $0xy$.

Теорема доказана.

Замечание. Аналогично тому, как это было в случае двойного интеграла, можно составить трехкратный интеграл с другим порядком переменных интегрирования, а значит, и с другими пределами интегрирования, если, конечно, это позволяет форма области интегрирования T.

Для закрепления материала параграфа предлагаем Вам решить следующие задачи **самостоятельно**.

Вычислить следующие трехкратные интегралы:

523. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^4 (x+y+z)dz$.

524. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^2 (z+4)dz$.

525. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyzdz$.

526. $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$.

Вычислить тройные интегралы по областям, ограниченным указанными поверхностями:

527. $\iiint\limits_G \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$; $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$.

528. $\iiint\limits_G ydxdydz$; $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1-y$.

529. $\iiint\limits_G xz^2 dxdydz$; $x = \sqrt{2y - y^2}$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 3$.

530. $\iiint\limits_G xyzdxdydz$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

531. $\iiint\limits_G z^2 dxdydz$; $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, $z = 6$.

532. $\iiint\limits_G \frac{1}{z} dxdydz$; $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 3$, $z = 6$.

§ 2.4. Замена переменных в тройном интеграле. Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле. Тройной интеграл в сферических координатах

Переходы от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим в тройном интеграле – это частные случаи общего преобразования координат в пространстве.

Пусть функции

$$x = \varphi(u, t, w)$$
$$y = \psi(u, t, w)$$
$$z = \chi(u, t, w)$$

взаимно однозначно отображают область V в декартовых координатах x, y, z на область V' в криволинейных координатах u, t, w. Пусть элемент объема Δv области V переходит в элемент $\Delta v'$ области V' и пусть $\lim\limits_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |J|$. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u, t, w), \psi(u, t, w), \chi(u, t, w)) |J| dudtdw.$$

Аналогично тому, как это имело место в двойном интеграле, J называется ***якобианом***. Подобно тому, как это делалось для двойных интегралов, можно доказать, что якобиан численно равен определителю третьего порядка:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Цилиндрическими координатами точки $M(x,y.z)$ называются числа r,φ,z, где r и φ - полярные координаты точки (x,y):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Удобно переходить к цилиндрическим координатам, если:
а) подынтегральная функция имеет вид:
$g(x^2+y^2,z)$;
б) проекцией тела T на плоскость $z=0$ является круг $x^2+y^2 \le R$ или кольцо $R_1^2 \le x^2+y^2 \le R_2^2$ или их часть.

Вычислим якобиан для перехода к цилиндрическим координатам:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial z} \\ \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам осуществляют по формуле:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz. \qquad (3.2.6)$$

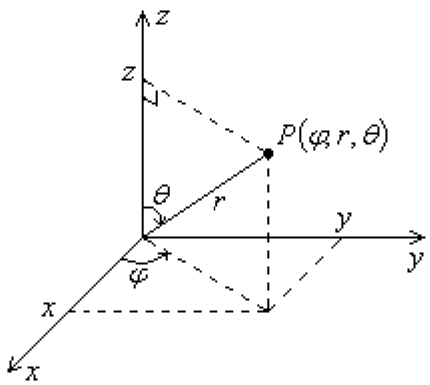


Рис.98

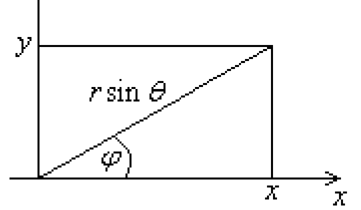


Рис.99

В ***сферических координатах*** положение точки P в пространстве определяется тремя числами: θ, r, φ, где r - расстояние точки от начала координат (радиус- вектор точки), φ - угол между проекцией радиус-вектора на плоскость Oxy и осью Ox, отсчитываемый от этой оси в положительном направлении (то есть против часовой стрелки), θ - угол между радиус-вектором и осью Oz (рис.98).

Формулы перехода от декартовых координат x,y,z к сферическим координатам (рис.98, 99) легко устанавливаются:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}.$$

Вычислим якобиан в случае перехода от декартовых координат к сферическим:

$$J=\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \textit{разложим} \\ \textit{по третей} \\ \textit{строке} \end{vmatrix}=$$

$$=-r\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}-\cos\theta\cdot\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \textit{вынесем множитель столбцов} \\ \textit{за знак определителя} \end{vmatrix}=-r^2\sin^3\theta\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}-$$

$$-r^2\cos^2\theta\sin\theta\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}=-r^2\sin^3\theta\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-r^2\cos^2\theta\sin\theta\cdot$$

$$\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=-r^2\sin\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=-r^2\sin\theta.$$

А значит,

$$|J|=r^2\sin\theta.$$

Заметим, что $0\le r<\infty$; $0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le\theta\le\pi$.

Переход в тройном интеграле к сферическим координатам осуществляется по формуле:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_T f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta. \qquad (3.2.7)$$

§ 2.5. Приложение тройных интегралов

Пример 3.2.2. Вычислить объем тела *T*, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $3z=x^2+y^2$.

Решение. В соответствии с формулой (3.2.4):

$$V=\iiint\limits_T dxdydz.$$

Сначала найдем проекцию тела *T* на плоскость $z=0$. Для этого достаточно найти проекцию линии пересечения сферы и параболоида на плоскость $z=0$ (рис.100).

Из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ 3z=x^2+y^2 \end{cases}$$

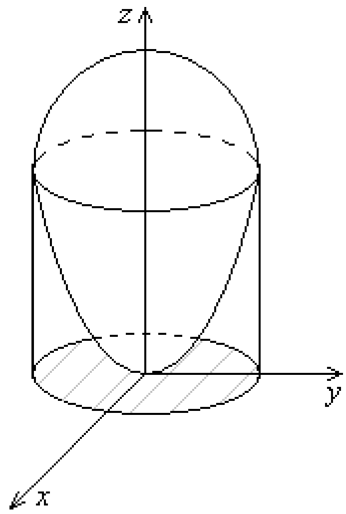


Рис.100

исключим переменную z:

$$x^2+y^2-4=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{9},$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2+9\left(x^2+y^2\right)-36=0.$$

Получим квадратное уравнение относительно x^2+y^2. Его корнями являются: $x^2+y^2=-12$, $x^2+y^2=3$. То есть уравнение проекции: $x^2+y^2=3$.

Итак, проекция тела T на плоскость $z=0$ это круг $x^2+y^2\le 3$, который является областью A. Перейдем к цилиндрическим координатам. Снизу тело ограничено поверхностью $3z=x^2+y^2$, то есть $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ или $z=\dfrac{r^2}{3}$. Сверху тело ограничено поверхностью $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, то есть $z=\sqrt{4-r^2}$. Поэтому:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\iiint\limits_T rdrd\varphi dz=\iint\limits_A\left\{\int\limits_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}rdz\right\}d\varphi dr=\iint\limits_A r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2\right)drd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2\right)dr=\frac{19}{12}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{19\pi}{6}.$$

Пример 3.2.3. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ и цилиндром $x^2+y^2=ax$ (задача Вивиани).

Решение. В соответствии с формулой (3.2.4):

$V=\iiint\limits_\Omega dxdydz$, где Ω - тело, ограниченное сферой и цилиндром.

Проекция этого тела на плоскость Oxy - это круг (рис.101), ограниченный окружностью с уравнением

$$x^2-ax+y^2=0,$$

другими словами,

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

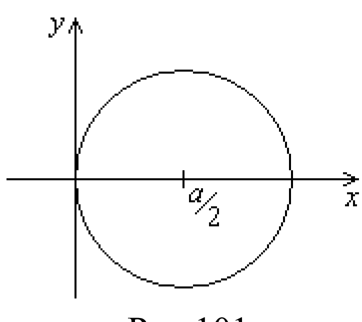


Рис.101

Снизу это тело ограничено нижней полусферой с уравнением $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, а сверху полусферой, записываемой уравнением $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Вычислим тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Круг, который является проекцией тела Ω на плоскость Oxy, ограничен окружностью $x^2 + y^2 = ax$.

Перепишем это уравнение в цилиндрических координатах:

$r^2 = a \cdot r\cos\varphi$,

сократив обе части уравнения на r, получим уравнение:

$r = a\cos\varphi.$

При этом $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\;\; 0 \le r \le a\cos\varphi,\;\; -\sqrt{a^2 - r^2} \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}$.

Вычислим объем:

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r\sqrt{a^2 - r^2}\,dr = \left| rdr = -\frac{1}{2} d\left(a^2 - r^2\right) \right| =$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \left(a^2 - r^2\right)^{1/2} d\left(a^2 - r^2\right) = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left(\left. \frac{\left(a^2 - r^2\right)^{3/2} \cdot 2}{3} \right|_0^{a\cos\varphi} \right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\left(a^2 - a^2\cos^2\varphi\right)^{3/2} - a^{2\cdot 3/2} \right) d\varphi = -\frac{2}{3}a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\left|\sin^3\varphi\right| - 1 \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}a^3 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\sin^3\varphi\right| d\varphi - \varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = -\frac{2}{3}a^3\left(\frac{4}{3} - \pi\right) = \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

При вычислении интеграла было использовано, что

$$\int \sin^3\varphi d\varphi = -\int \sin^2\varphi \cdot d(\cos\varphi) = -\int \left(1 - \cos^2\varphi\right) d\cos\varphi = -\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi$$

и $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\sin^3\varphi\right| d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi - \int_{-\pi/2}^{0} \sin^3\varphi d\varphi = \left. \left(\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\left(\frac{\cos^3\varphi}{3}-\cos\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\left(0-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Таким образом, $V=\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

Пример 3.2.4. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями, радиусы которых равны R_1 и R_2 $(R_2>R_1)$. Зная, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра сфер и на расстоянии равном 1 равна γ, найти всю массу тела.

Решение. Пусть k - коэффициент пропорциональности. Тогда плотность материала $f=k\cdot\frac{1}{r}$.

При условии $r=1$ плотность равна $f=\gamma$. Следовательно,

$\gamma=k\cdot 1\Rightarrow k=\gamma$,

то есть подынтегральная функция равна $\frac{\gamma}{r}$ и

$$m=\iiint\limits_T\frac{\gamma}{r}dxdydz.$$

Перейдем к сферическим координатам, θ,r,φ, при этом якобиан перехода равен $|J|=r^2\sin\theta$, пределы изменения для переменных:

$0\le\theta\le\pi,\ R_1\le r\le R_2,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$

Таким образом,

$$m=\int_0^{\pi}d\theta\int_{R_1}^{R_2}dr\int_0^{2\pi}\frac{\gamma}{r}\cdot r^2\sin\theta\cdot d\varphi=\gamma\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{R_1}^{R_2}rdr\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi\gamma\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\frac{r^2}{2}\Bigg|_{R_1}^{R_2}=$$

$$=-\pi\gamma\left(R_2^2-R_1^2\right)\cos\theta\Big|_0^{\pi}=-\pi\gamma\left(R_2^2-R_1^2\right)(-1-1)=2\pi\gamma\left(R_2^2-R_1^2\right).$$

Пример 3.2.5. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1,\ 2y+z=2$, если в каждой его точке (x,y,z) объемная плотность численно равна y.

Решение. В соответствии с физическим применением формулы (3.2.1):

$$m=\iiint\limits_T ydxdydz.$$

Тело T снизу ограничено плоскостью $z=1-y$, а сверху плоскостью $z=2-2y$. Обе плоскости пересекают координатную плоскость $z=0$ по прямой $y=1$. Цилиндр $x^2=2y$ пересекает плоскость $z=0$ по параболе

$x^2 = 2y$, поэтому проекция тела T на плоскость $z = 0$ - это область A, ограниченная линиями $x^2 = 2y$, $y = 1$.
Итак,

$$m = \iint_A \left\{ \int_{1-y}^{2-2y} y\,dz \right\} dxdy = \iint_A y(1-y)dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} \left(y - y^2\right)dx \right\} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y - y^2\right) \cdot 2\sqrt{2y}dy = \frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

Для закрепления изученного материала данной главы предлагаем Вам решить следующие примеры **самостоятельно**.

Вычислить интегралы с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам.

533. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^1 dz$.

534. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^2 z\sqrt{x^2 + y^2}dz$.

535. $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right)dz$.

536. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dz$.

537. $\iiint_T \left(x^2 + y^2\right)dxdydz$, где область Т определяется неравенствами: $z \ge 0$; $R_1^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R_2^2$.

538. $\iiint_T \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$, где Т – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

539. $\iiint_T \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$, где Т - цилиндр $x^2 + y^2 \le 1$, $-1 \le z \le 1$.

540. $\iiint_G \left(x^2 + y^2\right)dx\,dy\,dz$; G - область, ограниченная параболоидом $2z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 2$.

541. $\iiint_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; G - область, заключенная между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

542. $\iiint_G \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dx\,dy\,dz$; G - область, ограниченная сферой

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вычислить с помощью тройных интегралов объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

543. $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$, $x + 2z = 3$.

544. $y^2 = \dfrac{x}{2}$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

545. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $y = 0$, $z = \dfrac{x}{2}$, $z = x$.

546. $x^2 + y^2 = z + 1$, $z = 3$.

547. $x^2 + y^2 = 1$, $y + z = 2$.

ОТВЕТЫ

Раздел I.

§2.1

1. $\frac{7}{8}e\cdot\sqrt[7]{x^8}-\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}+C$. **2.** $-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+2\ln|x|-x^3+C$.

3. $2\sin x-3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\sqrt{5}\cdot\operatorname{tg}x+C$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x}{5}+C$. **5.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$.

6. $-\frac{1}{20}\ln\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right|+C$. **7.** $\frac{14}{23}\cdot\sqrt[14]{x^{23}}-\frac{7}{4}\cdot\sqrt[7]{x^8}+C$. **8.** $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

9. $3\ln|\sin x|-\frac{1}{x}+C$. **10.** $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+2\sqrt{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **11.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\arcsin\frac{x}{2}+C$.

12. $\frac{48^x}{\ln 48}+C$. **13.** $\frac{4}{\ln\frac{e}{3}}\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^x+\frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$. **14.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

15. $\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **16.** $\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **17.** $-\operatorname{ctg}x-6x+C$.

18. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x+C$. **19.** $\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

20. $\frac{x}{4}-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. **21.** $\frac{1}{3}x^3-4x+C$. **22.** $\frac{x^2}{2}+C$.

23. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **24.** $\frac{1}{7}\sqrt{x^7}-3\sqrt{x^5}+25\sqrt{x^3}-125\sqrt{x}+C$.

25. $\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+C$.

§2.2

26. $\frac{1}{7}e^{7x}+C$. **27.** $-\frac{1}{5}\ln|\sin(3-5x)|+C$. **28.** $\frac{1}{18}(3x+7)^6+C$.

29. $-\frac{5}{3}\cos\frac{3}{5}x+C$. **30.** $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **31.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(1+3x)+C$.

32. $-\frac{1}{94\cdot(x-7)^{94}}+C$. **33.** $\frac{1}{9}\ln\left|4+3x^3\right|+C$. **34.** $-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$.

35. $\frac{1}{8\cos^8 x}+C$. **36.** $\frac{2\cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3}+C$. **37.** $\ln\left|3x^2+7x+4\right|+C$.

38. $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+C$. **39.** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}+C$. **40.** $\sin\left(x^2+x-1\right)+C$.

41. $\ln|\ln x| + C$. **42.** $\frac{1}{6}\arcsin^6 x + C$. **43.** $\frac{3}{2}\ln|\operatorname{arctg} 2x| + C$.

44. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\operatorname{tg} x + 2)^4} + C$. **45.** $\frac{2}{3}\sqrt{\left(4 - e^{-x}\right)^3} + C$. **46.** $x - \frac{1}{4}e^{-4x} + C$.

47. $\ln|x| - \ln|4 + x| + C$. **48.** $\ln|4 + x| - \ln|3 - x| + C$. **49.** $.2\sqrt{\sin x} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

50. $\sqrt{1 + \ln^2 x} + C$.

§2.3.

51. $-\frac{1}{3}\ln|2 - 3x| + C$. **52.** $\frac{1}{3}\cdot\left(2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$. **53.** $\frac{3}{16}\cdot\sqrt[3]{(8x - 15)^2} + C$.

54. $\frac{1}{18}\operatorname{tg}\left(6x^3 - 1\right) + C$. **55.** $\frac{1}{13\ln 7}\left(7^x - 2\right)^{13} + C$. **56.** $\frac{1}{21}\cdot e^{3x^7 - 10} + C$.

57. $-\frac{1}{15}\operatorname{ctg}^5 3x + C$. **58.** $3\ln|\operatorname{arctg} x| + C$. **59.** $\frac{1}{\log_3 e}\cdot\ln|\log_3 x + 2| + C$.

60. $\frac{1}{2(1 - \sin x)^2} + C$. **61.** $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^{-x}}{3} + C$. **62.** $-\frac{1}{4\ln 5}\cdot 5^{-x^4} + C$.

63. $\frac{1}{\ln 6}\cdot\arcsin\frac{6^x}{3} + C$. **64.** $-\sin\frac{1}{x} + C$. **65.** $-\frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{\arccos 2x} + C$.

66. $-\ln\left|\cos\left(e^x\right)\right| + C$. **67.** $\frac{1}{2}\cos\left(2 - x^2\right) + C$.

68. $\frac{1}{4}\arcsin^4 x - 3\cdot\sqrt{1 - x^2} + C$ (*расписать на сумму двух интегралов*).

69. $\ln\left(x^2 + 25\right) + x - 5\operatorname{arctg}\frac{x}{5} + C$ (*расписать на сумму двух интегралов*).

70. $-\ln\left(1 + \cos^2 x\right) + C \quad \left(t = 1 + \cos^2 x\right)$.

71. $-\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7} + \ln(3x + 1)}{\sqrt{7} - \ln(3x + 1)}\right| + C \quad (t = \ln(3x + 1))$.

72. $\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}\right| + C \quad \left(t = \sqrt{1 - x^2}\right)$. **73.** $\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + C$.

74. $\frac{1}{4}(2x - 7) + \frac{7}{4}\ln|2x - 7| + C$. **75.** $-\frac{32}{9}\cdot\sqrt[8]{(3 - x)^9} + \frac{8}{17}\cdot\sqrt[8]{(3 - x)^{17}} + C$.

76. $\frac{4}{37}\cdot\left(\frac{x}{2} + 5\right)^{37} - \frac{5}{9}\cdot\left(\frac{x}{2} + 5\right)^{36} + C$.

77. $-100\ln|10 - x| + 20(10 - x) - \frac{1}{2}(10 - x)^2 + C$.

78. $-3\cdot\sqrt{\left(9 - x^2\right)^3} + \frac{1}{5}\sqrt{\left(9 - x^2\right)^5} + C$. **79.** $\ln|\ln(\ln x)| + C \quad (t = \ln(\ln x))$.

80. $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2+C \quad \left(t=\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right).$

§2.4

81. $\frac{1}{4}x\cdot\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C.$ **82.** $-\frac{3}{2}\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\cos\frac{2x}{3}+\frac{9}{4}\sin\frac{2x}{3}+C.$

83. $\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cdot\cos(2x+4)-\frac{1}{2}x\cdot\sin(2x+4)-\frac{1}{4}\cos(2x+4)+C.$

84. $x\cdot e^{x+10}-e^{x+10}+C.$ **85.** $\frac{3^{x^2-2}}{2\ln 3}\left(x^2-\frac{1}{\ln 3}\right)+C.$

86. $\frac{2}{3}\ln(x+1)\cdot\sqrt{(x+1)^3}-\frac{4}{9}\sqrt{(x+1)^3}+C.$

87. $\left(x^3-x^2+5x\right)\ln\sqrt{x}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}-\frac{5x}{2}+C.$

88. $x\cdot\log_3^2(5x)-\frac{2}{\ln 3}\left(x\cdot\log_3(5x)-\frac{x}{\ln 3}\right)+C.$

89. $x\cdot(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C.$

90. $\operatorname{arcctg}x\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$ **91.** $-\frac{2}{13}\cos 2x\cdot e^{3x}+\frac{3}{13}\sin 2x\cdot e^{3x}+C.$

92. $\frac{4}{5}\cdot x^{5/4}\cdot\log_5 x-\frac{16}{25\cdot\ln 5}\cdot x^{5/4}+C.$ **93.** $x\cdot\ln\left(4-x^2\right)-2x+2\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C.$

94. $x\cdot\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C.$ **95.** $2\sqrt{1+x}\cdot\arccos x-4\sqrt{1-x}+C.$

96. $\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+C.$

97. $-2\cdot\sqrt{2-x}\cdot\arcsin\frac{x}{2}+4\sqrt{2+x}+C \quad \left(U=\arcsin\frac{x}{2};\ dV=\frac{dx}{\sqrt{2-x}}\right).$

98. $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C \quad \left(U=x;\ dV=\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx\right).$

99. $x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}-\frac{\sqrt{4x-1}}{4}+C \quad \left(U=\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1};\ dV=dx\right).$

100. $\left(4-\cos^2 x\right)\cdot\ln(\cos x+2)+\frac{1}{2}(\cos x+2)^2-4\cos x+C \quad (t=\cos x+2).$

§2.5

101. $\frac{5}{24}\ln|3x+2|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+C.$ **102.** $\frac{3}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$

103. $3x+14\ln|x+2|-28\ln|x+3|+C.$ **104.** $\frac{1}{3}\ln|2x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$

105. $x+\frac{18}{5}\ln|x-4|+\frac{2}{5}\ln|x+1|+C.$ **106.** $\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+\frac{1}{8}\ln|x+2|+C.$

107. $\frac{x^2}{2}+\frac{25}{6}\ln|x-3|+\frac{35}{6}\ln|x+3|+C$.

108. $\frac{5}{27}\ln|x-3|-\frac{5}{54}\ln\left|x^2+3x+9\right|+\frac{1}{6\sqrt{6,75}}\operatorname{arctg}\frac{x+1,5}{\sqrt{6,75}}+C$.

109. $\frac{3}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2-x+2\right|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$.

110. $x+\frac{5}{6}\ln|x|-\frac{13}{10}\ln|x+2|+\frac{22}{15}\ln|x-3|+C$.

111. $\frac{14}{15}\ln|x+4|+\frac{2}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x-2|+C$.

112. $\frac{3}{4}\ln|x+3|-\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{3}{4}\ln|x+1|+C$.

113. $\frac{2}{17}\ln|4x-1|-\frac{1}{17}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{8}{17}\operatorname{arctg}x+C$.

114. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)-\frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

115. $\frac{1}{32}\ln|x-2|-\frac{1}{32}\ln|x+2|-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **116.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

§2.6

117. $\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2x+1\right)+C$. **118.** $\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}+2\operatorname{tg}x+C$.

119. $-\frac{1}{4(1-\cos 2x)^2}+C$. **120.** $\frac{\cos^3x}{3}+\cos x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C$.

121. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$. **122.** $\frac{1}{2}\ln|2\sin(x-1)+5|+C$. **123.** $-\frac{1}{4\sin 4x}-\frac{1}{4}\sin 4x+C$.

124. $\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}+C$. **125.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x+\operatorname{ctg}x-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x)+C$.

126. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C$. **127.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. **128.** $\frac{1}{9(3\operatorname{ctg}x+1)^3}+C$.

129. $\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin 5x}{\sqrt{3}}\right)+C$. **130.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C$.

131. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{5-\sin\frac{x}{2}}\right|+C$. **132.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{10}\cos^5 2x+C$.

133. $-\frac{3}{10}\ln|\operatorname{tg}x+3|+\frac{3}{20}\ln\left(\operatorname{tg}^2x+1\right)+\frac{1}{10}x+C$.

134. $-\frac{1}{3}\sin^3 x-\sin x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$. **135.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{10}+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-3}{\sqrt{10}-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+3}\right|+C$.

136. $\frac{1}{4\cos 4x}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}\right|+C$.

137. $\frac{\sin^3 x}{3}+C$. **138.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}\sin 10x+C$.

139. $-\frac{1}{12}\cdot\cos 6x+\frac{1}{8}\cos(-4x)+C$. **140.** $-\frac{3}{4}\cos^4\frac{x}{3}+C$.

141. $\frac{1}{8}\sin^4 2x-\frac{1}{12}\sin^6 2x+C$ или $-\frac{1}{8}\cos^4 2x+\frac{1}{12}\cos^6 2x+C$.

142. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **143.** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

144. $-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{9}\cos^3 6x-\frac{1}{30}\cos^5 6x+C$. **145.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

146. $\frac{1}{\cos^2 x}+C$. **147.** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 2x+C$.

148. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$. **149.** $\frac{2}{3\cos 3x}+\frac{1}{12}\cos 6x+C$.

150. $\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{3}+\frac{\sin^8 x}{8}+C$ или $-\frac{\cos^6 x}{6}+\frac{\cos^8 x}{8}+C$.

151. $\frac{5}{128}x-\frac{1}{128}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x-\frac{1}{1024}\sin 8x+C$. **152.** $-\mathrm{ctg}\,x-2x+C$.

153. $\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin 6x+C$. **154.** $-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{24}\sin^2 6x+C$.

155. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{3}{32}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin^3 x+C$.

156. $\frac{3}{128}x-\frac{1}{32}\sin x+\frac{1}{256}\sin 2x+C$.

§2.7

157. $5\left(\sqrt[10]{x}+1\right)^2-20\left(\sqrt[10]{x}+1\right)+C=5\sqrt[5]{x}-10\sqrt[10]{x}+C$.

158. $-3\sqrt[6]{1-2x}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt[6]{1-2x}}{1-\sqrt[6]{1-2x}}\right|+C$. **159.** $6\ln\sqrt[6]{x+1}-6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)+C$.

160. $6\left(\sqrt[6]{x}+2\right)-24\ln\left|\sqrt[6]{x}+2\right|-\frac{24}{\sqrt[6]{x}+2}+C$.

161. $\frac{45}{8}\sqrt[15]{x^8}-\frac{5}{2}\sqrt[15]{x^6}+\frac{15}{4}\sqrt[15]{x^4}-\frac{15}{2}\sqrt[15]{x^2}+\frac{15}{2}\ln\left(\sqrt[15]{x^2}+1\right)+C$.

162. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{6-x}{x-18}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3(6-x)}{x-18}}+C$.

163. $\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}+1\right|+\dfrac{1}{4}\ln\left(\left(\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)-$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}-1}{\sqrt{3}}+C$. **164.** $10\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+C$.

165. $-\ln\left|1-\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x-1}}\right|+\ln\left|1+\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x-1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x-1}}+C$.

166. $-\ln\left|\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}-1\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}+\dfrac{1}{2}\right)\right)+C$.

167. $\dfrac{1}{4}\ln\left|1+\sqrt{4x^2+4x+1}+2x\right|+C$. **168.** $\dfrac{8}{\left(\dfrac{x+3}{x-1}+1\right)^2}+C$.

169. $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{16+2x-x^2}-4}{x}+4\ln\left|\dfrac{\sqrt{16+2x-x^2}-4}{x}\right|-4\ln\left|1-\dfrac{4\sqrt{16+2x-x^2}-16}{x}\right|+C$

170. $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}{1-\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}\right|+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1+\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}{\sqrt{2}+1-\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}\right|+C$, при $x\le -2$;

$\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}{1-\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}\right|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}{\sqrt{2}-1-\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}\right|+C$, при $x>0$.

171. $\sqrt{x^2+x+1}-x+2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right|-\dfrac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right|+C$.

172. $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4+2x-x^2}-2}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4+2x-x^2}-2}{x}-1\right|+$

$+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3\sqrt{4+2x-x^2}-6}{x}+1\right|+C$.

173. $-\dfrac{1}{4}\ln\left|1-2\sqrt{4x^2+2x+1}-4x\right|+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2(4x^2+2x+1)}-2\sqrt{2}x\right)+C$.

174. $-\frac{3}{10}\ln\left(\frac{x+4}{2-x}+1\right)+\frac{4}{15}\ln\left|\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}-2\right|+\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}+1\right|+C$.

175. $-\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-x\right)^2}{2}+13\ln\left|\sqrt{x^2-2x+5}-x+1\right|+\frac{13}{\sqrt{x^2-2x+5}-x+1}+$

$+\frac{5}{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-x+1\right)^2}+C$. **176.** $-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{9-2x-3x^2}-3}{x}\right)^2+3\right)+$

$+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{9-2x-3x^2}-3}{x}-2\right|+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9-2x-3x^2}-3}{x}+1\right|+C$.

177. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-4}\right|+C$. **178.** $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C$.

179. $\ln|x+1|+C$. **180.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}\right|+C$. **181.** $\arcsin\frac{2x-1}{5}+C$.

182. $\sqrt{x^2+2x-8}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-8}\right|+C$. **183.** $\sqrt{x^2-6x+7}+C$.

184. $2\sqrt{-x^2+x+1}+\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

185. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-7x+13}+\frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{7}{2}+\sqrt{x^2-7x+13}\right|+C$.

186. $\frac{1}{4}\sqrt{8x^2+x+2}+\frac{55}{16\sqrt{2}}\ln\left|2x+\frac{1}{8}+\sqrt{4x^2+\frac{x}{2}+1}\right|+C$. **187.** $\frac{1}{9\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)}+C$.

188. $-\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\arcsin\frac{5}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **189.** $-\frac{1}{3\sin^3(\operatorname{arctg}x)}+C=-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C$.

190. $\frac{49}{8}\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}-\frac{49}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+C$. **191.** $4\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{x}\right)+4\arcsin\frac{4}{x}+C$.

192. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$. **193.** $-\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)-\arcsin\frac{x}{2}+C$.

194. $\frac{1}{1296}\left(\frac{1}{5}\left(\cos\left(\arcsin\frac{6}{x}\right)\right)^5+\frac{1}{3}\left(\cos\left(\arcsin\frac{6}{x}\right)\right)^3+\cos\left(\arcsin\frac{6}{x}\right)-\right.$

$\left.-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{6}{x}\right)}{1-\cos\left(\arcsin\frac{6}{x}\right)}\right|\right)+C$. **195.** $\frac{1}{36}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{6}\right)+C$.

196. $\frac{1}{33}\left(\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{11}}{x+4}\right)\right)^3+C$. **197.** $-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}+C$.

198. $\frac{4}{9\sqrt{4-3x^3}}+\frac{1}{9}\sqrt{4-3x^3}+C$. **199.** $2\cdot\sqrt[6]{\frac{x^3}{1-x^3}}+C$.

200. $\frac{1}{14}\cdot\sqrt[5]{(6+x^5)^{14}}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt[5]{(6+x^5)^9}+C$. **201.** $-\frac{12}{1715}\left(\frac{7+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{5/4}+C$.

202. $\frac{3}{52}\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt[4]{x}}\right)^{13}-\frac{9}{8}\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt[4]{x}}\right)^{10}+\frac{225}{28}\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt[4]{x}}\right)^{7}-\frac{375}{16}\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt[4]{x}}\right)^{4}+C$.

203. $12\sqrt[12]{x}-4\ln\left|\sqrt[12]{x}+1\right|+2\ln\left(\left(\sqrt[12]{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-4\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{3}}+C$.

204. $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\,\sqrt[4]{1+x^3}+\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[4]{1+x^3}-1\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[4]{1+x^3}+1\right|+C$.

205. $-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-8x^2}{x^2}}+\ln\left|\sqrt[3]{\frac{1-8x^2}{x^2}}+2\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{\frac{1-8x^2}{x^2}}-1\right)^2+3\right)+$

$+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{1-8x^2}{x^2}}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

206. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3+\sqrt{1-x^4}}{3-\sqrt{1-x^4}}\right|+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3+\sqrt{1-x^4}}-\frac{1}{3-\sqrt{1-x^4}}\right)+C$.

Раздел II.
§1.4

207. $\frac{1}{2}$. **208.** $\frac{1}{3}$, разбиение равномерное, c_i **-** в середине отрезка $[x_{i-1},x_i]$, использовать равенство: $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3},\ n\in N$.

209. 20, разбиение равномерное, $c_i=x_i$, использовать равенство:

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, представить $\int_1^3 x^3dx=\int_0^3 x^3dx-\int_0^1 x^3dx$.

210. $\frac{1}{4}$, разбиение равномерное, $c_i=\sqrt{x_{i-1}\cdot x_i}$, использовать преобразование:

$\dfrac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}\cdot x_i} = \dfrac{1}{x_{i-1}} - \dfrac{1}{x_i}$. **211.** 136. **212.** $e-1$, разбиение равномерное, c_i - в середине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. **214.** теорема 2.1, $\dfrac{7}{12}$. **215.** теорема 2.2, $25+e$.

218. $\sin x < \cos x$ при $0 \le x < \dfrac{\pi}{2} - 1$, на отрезке $\dfrac{\pi}{2} - 1 \le x \le 1$ функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ принимают равные значения в точках, симметричных относительно $x = \dfrac{\pi}{4}$. **219.** $-3 \le I \le 24$. **220.** $\dfrac{4}{5} \le I \le 4$. **221.** $\dfrac{9\pi}{14}\sin\dfrac{8\pi}{7} \le I \le \dfrac{9\pi}{14}$.

222. $-3 \le I \le 9$. **223.** $0 \le I \le 9$. **224.** $0 \le I \le 18$. **225.** $\dfrac{\pi}{2} \le I \le e\dfrac{\pi}{2}$.

226. $0 < I < 1$. **227.** $\int\limits_{0,25}^{0,75} \ln(1-x^2)dx \le 0, \quad 0 \le \int\limits_{0}^{\pi/6} \sin^{10} x\, dx$.

228. $\int\limits_{0}^{1/2} \sqrt[4]{1+x^2}\,dx \le \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}} \approx 0{,}53$; $\int\limits_{1,5}^{2} \sqrt{x}^{\,x^2}\, dx \ge \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1{,}5}^{\,2,25} \approx 0{,}79$.

§1.5

229. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{9}{7}$. **230.** $\dfrac{1}{e-1}\left(4\sqrt{3} - \dfrac{20}{3}\right)$. **231.** $\ln\dfrac{e^2}{e^2+1} - \ln\dfrac{1}{2}$.

232. $1 + 4(\ln 17 - \ln 16)$. **233.** $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$. **234.** $-\dfrac{1}{45}\left(\dfrac{1}{(e^9+3)^3} - \dfrac{1}{(e^{-6}+3)^3}\right)$.

235. $\min\Phi(x) = \Phi\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \int\limits_{0}^{-1/2} \dfrac{2t+1}{t^2+t+2}dt = \ln\dfrac{7}{8}$.

236. $\min\Phi(x)$ в точке $x=1$, $\max\Phi(x)$ в точке $x=-1$. **237.** $\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{112}{81}\right)$.

§2.1

240. $\dfrac{1}{3}(\ln 15 - \ln 7)$. **241.** 8. **242.** $\dfrac{\pi}{6}$. **243.** $\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{2}{13}$. **244.** $\dfrac{1}{3}(1-\cos 1)$.

245. $4\left(\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^2}\right)$. **246.** $\dfrac{1}{36\sqrt{7}}$. **247.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **248.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **249.** $\dfrac{3}{4}$. **250.** $-\dfrac{9}{2}$.

251. 0. **252.** $-\dfrac{5\pi^2}{288}$. **253.** $-\dfrac{4}{5}\left(\sqrt[4]{2^5} - 1\right)$. **254.** $\ln 2$. **255.** $\dfrac{45}{4}$. **256.** $-\dfrac{1}{3}$.

257. $\dfrac{1}{15}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{27}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{8}{5}\right)$. **258.** $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{6} - \arcsin\dfrac{1}{32}\right)$. **259.** $-\ln\dfrac{2}{3}$.

§2.2

260. $4-6\ln 3$. **261.** $-\frac{1}{3}$. **262.** $4\ln\frac{3}{2}-1$. **263.** $4-\frac{1}{2}\ln 3$. **264.** $\frac{5}{48}$ **265.** $\frac{16}{15}$.

266. $\frac{1}{24}\ln\frac{4}{7}-\frac{1}{12}\ln 2-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{24\sqrt{3}}$. **267.** $-\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$.

268. $\frac{1}{3}\left(7+\ln\frac{2}{9}\right)$. **269.** $-\frac{1}{2}\ln^2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{8}\ln^2 2$. **270.** $-\frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{4^4}-\frac{1}{3^4}\right)$.

271. $6-6\sqrt{8}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{8}}$. **272.** $2-\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-3}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}\right|\right)$.

273. $-6-\frac{3\sqrt{5}}{2}\ln\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$. **274.** $\frac{81\pi}{16}$. **275.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **276.** $\frac{1}{2}\ln\frac{16}{15}+\frac{5}{2}\ln\frac{3}{5}$.

277. $8+3\ln 3$. **278.** $\ln\frac{15}{16}-\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{15}}$. **279.** $\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}$. **280.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\pi^3}\left(\sqrt[4]{8}-1\right)$.

281. $\frac{2}{7}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{7}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{7}\right)\right)$. **282.** $-\frac{4}{15\sqrt{2}}+\frac{56}{15}$.

§2.3

283. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 6$. **284.** $-\frac{2}{49}e^{-1}$. **285.** $\frac{1}{16}\pi-\frac{1}{8}\ln 2$. **286.** $\frac{64}{5}\ln 4-\frac{124}{25}$.

287. $\frac{1}{25}(1-\pi)$. **288.** $3\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **289.** $\frac{1}{2}$. **290.** $3\ln 12-6-\sqrt{3}\ln 6+\sqrt{3}\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}$.

291. $\frac{2}{3}-\frac{35}{18}\cdot\ln 7$. **292.** $\frac{\pi}{2}-\ln 2$. **293.** $\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$. **294.** $-\frac{1}{4}\pi^2$. **295.** $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}$.

296. $\sqrt{8}\ln(3-\sqrt{8})+2$. **297.** $16e^2-8e$. **298.** $-10\pi^2-2$. **299.** $\frac{1}{27}e^3+\frac{5}{27}$.

300. $2e-5$. **301.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}-1$. **302.** $\pi^3-8\pi-\frac{3}{4}\pi^2-6$. **303.** $\frac{5}{26}e^{-\pi}+\frac{1}{26}e^{-\pi/2}$.

304. $\frac{1}{2}\pi^2-2$.

§2.4

305. 0. **306.** $\frac{1}{10}(\pi+1-2\ln 2)$. **307.** $\frac{1}{2}\ln 10$. **308.** $\frac{\pi}{18}\left(1-\frac{1}{2^9}\right)$.

309. 3. **310.** 0. **313.** $\sqrt{1-\cos 4x}=|\sin 2x|$; $f(x)=|\sin 2x|\cdot\cos^{10}4x$ имеет период $T=\frac{\pi}{2}$. **314.** $\frac{\pi^2}{4}$; доказательство провести с помощью подстановки $x=\pi-t$; при вычислении $f(\sin x)=\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}$.

§3.1 – §3.3

315. 0. **316.** $\frac{1}{2}$. **317.** результат не определен, интеграл расходится.

318. значение не существует, интеграл расходится. **319.** 1. **320.** $\frac{\pi^5}{80}$. **321.** $\frac{\pi}{8}$.

322. $-1+\ln 2$. **323.** $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. **324.** $\frac{1}{3e^6}$. **325.** ∞, интеграл расходится. **326.** $\frac{\pi}{8}$.

327. ∞, интеграл расходится. **328.** $\frac{\pi}{30}$. **329.** ∞, интеграл расходится. **330.** сходится.

331. расходится. **332.** расходится, для любых $y>0$ верно неравенство: $\ln y < y$.

333. сходится, $\int\limits_0^1 \sqrt{x}e^{-x^2}\,dx = const$, $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x^2}\,dx$ - сходится по признаку сравнения.

334. сходится. **335.** сходится. **336.** сходится. **337.** сходится. **338.** расходится. **339.** расходится. **340.** сходится. **341.** расходится. **342.** сходится. **343.** сходится. **344.** сходится. **345.** сходится.

§3.4 – §3.5

347. 6. **348.** $-\infty$, интеграл расходится. **349.** $-\infty$, интеграл расходится.

350. ∞, интеграл расходится. **351.** $\frac{\pi}{8}$. **352.** $\frac{228}{5}$. **353.** ∞, интеграл расходится.

354. Значение не определено, интеграл расходится. **355.** $-\frac{1}{2}\ln 3$.

356. ∞, интеграл расходится. **357.** Значение не определено, интеграл расходится.

358. Значение не определено, интеграл расходится. **359.** $-\frac{1}{4}$. **360.** 3π.

361. $6-\frac{9}{2}\ln 3$. **362.** Значение не определено, интеграл расходится.

363. Значение не определено, интеграл расходится. **364.** Значение не определено, интеграл расходится. **365.** расходится. **366.** сходится. **367.** расходится. **368.** сходится. **369.** сходится. **370.** расходится. **371.** сходится. **372.** расходится. **373.** расходится. **374.** расходится. **375.** сходится. **376.** расходится.

377. абсолютной сходимости нет. **378.** абсолютно сходится. **379.** абсолютно сходится.

§4.1 – §4.2

380. 39. **381.** $\frac{1}{2}$. **382.** $\frac{8}{3}$. **383.** 8. **384.** 4. **385.** $\frac{8}{27}$. **386.** $\frac{8}{27}$. **387.** 10.

388. 9. **389.** $\frac{16}{3}-3\ln 3$. **390.** $2-\frac{\pi}{2}$. **391.** $\frac{8}{3}$. **392.** $5-e$. **393.** 30.

394. $\pi^2-\pi$. **395.** $\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\ln 2$. **396.** $\pi+2-2\sqrt{2}$. **397.** $\frac{9}{2}-\frac{1}{\ln 2}$.

398. $5\ln 5-4\ln 4-2\ln 2$. **399.** $2{,}5$. **400.** $\frac{32\pi}{3}+24\sqrt{3}$. **401.** π.

402. $-\sqrt{6}\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. **403.** $\frac{32}{15}$.

404. $20\left(\sqrt{2}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right|\right)=20\sqrt{2}+20\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. **405.** $\frac{32}{15}$. **406.** $13{,}5$. **407.** $8\ln\sqrt{3}$.

408. $6\left(\frac{\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{\cos^2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+\frac{9}{2}\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)+\ln\frac{9\left(1+\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\right)^2}{4}$.

409. $-27+5\sqrt{65}-\frac{5}{8}(5-\sqrt{65})^2+\frac{1}{24}\left(5-\sqrt{65}\right)^3=\frac{65\sqrt{65}-449}{12}$. **410.** π.

411. 9π. **412.** 2. **413.** $\frac{2}{3}$. **414.** $\frac{3\pi}{2}$. **415.** $32\pi^3$. **416.** 5π. **417.** $\frac{13\pi}{2}$. **418.** 1.

419. $\frac{1}{8}\left(5\pi-\frac{9}{2}\sqrt{3}\right)$. **420.** $\frac{1}{4}-\frac{7\sqrt{2}}{12}+\frac{69\pi}{64}$. **421.** $1-\frac{\pi}{4}$. **422.** $\frac{9}{2}\pi+18$.

423. $8\pi-6\sqrt{3}$. **424.** 6π. **425.** $\frac{8}{5}\sqrt{3}$. **426.** $\frac{8}{15}$. **427.** $\frac{8}{15}$. **428.** $1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

429. $e-2$.

§4.3

430. $3\left(e^{2/3}-e^{-2/3}\right)$. **431.** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **432.** $\frac{4}{27}\left(\sqrt{43}^3-4\right)$. **433.** $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$.

434. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right|=\ln\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. **435.** $\frac{1}{2}(\sqrt{1+4e^8}-\sqrt{5})+\frac{1}{4}\ln\frac{(1-\sqrt{1+4e^8})(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{1+4e^8})(1-\sqrt{5})}$.

436. 2. **437.** $\ln\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{12}\right)=2\ln\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. **438.** $2\ln 3$. **439.** $8-4\sqrt{2}$. **440.** $\frac{\pi^2}{6}$.

441. 3. **442.** 48. **443.** 5π. **444.** $\sqrt{2}(\pi-1)$. **445.** $4\sqrt{3}$. **446.** 2π.

447. $\frac{\sqrt{10}}{3}(e^{6\pi+1}-e)$. **448.** $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(4\pi^2+4)^3}-\sqrt{(\pi^2+4)^3}\right)$. **449.** 16. **450.** $4\sqrt{3}$.

451. $8+2\pi$.

§4.4

452. $\frac{\pi}{5}$. **453.** $\frac{11}{28}\pi$. **454.** 4π. **455.** $\frac{38\pi}{3}$. **456.** $\frac{\pi^2}{2}$. **457.** $\frac{2048\pi}{105}$. **458.** $\frac{70\pi}{3}$.

459. $\frac{20\pi}{3}$. **460.** $\frac{256\pi}{35}$. **461.** $\frac{800\pi}{21}$. **462.** $\frac{96\pi}{2}$. **463.** $\frac{56\pi}{27}$. **464.** 48π.

465. $\frac{272\pi}{15}$. **466.** $\frac{9\pi}{4\ln 2}$. **467.** 24π. **468.** а)$\frac{48\pi}{5}$; б)$\frac{24\pi}{5}$. **469.** $2\pi(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)$.

470. $\frac{8\pi}{3}$.

Раздел III.

§1.3 – §1.4

471. $\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^4 f(x,y)dx$. **472.** $\int\limits_0^9 dy\int\limits_0^{\sqrt{9-y}} f(x,y)dx$.

473. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int\limits_0^y f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dy$. **474.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dy\int\limits_0^{y\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x,y)dx+\int\limits_{\sqrt{3}}^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dy$.

475. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx$. **476.** $\frac{10}{3}$. **477.** 0,9. **478.** 0,2. **479.** 16. **480.** 16. **481.** $\frac{8}{63}$.

482. $\frac{7}{3}$. **483.** $\frac{8}{15}$. **484.** 3. **485.** $\frac{52}{81}$. **486.** 30. **487.** 27.

§1.5

488. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$. **489.** $\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$.

490. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi\int\limits_0^2 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$. **491.** $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_2^5 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$.

492. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$. **493.** $\frac{32\pi}{3}$. **494.** 72. **495.** 2π. **496.** 24π.

497. $\frac{9\pi}{4}$. **498.** $\frac{\pi}{18}$. **499.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{51}{2}$. **500.** $2\pi^3$. **501.** $\frac{\pi}{4}\left(e^{-3}-e^{-2}\right)$. **502.** $\frac{2^{12}\pi^7}{21}$.

§1.6

503. 28. **504.** $\frac{32}{3}$. **505.** $\frac{125}{6}$. **506.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$. **507.** 3,5. **508.** $\frac{\pi}{6}$. **509.** $8\pi+9\sqrt{3}$.

510. 4π. **511.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **512.** 3π. **513.** 6. **514.** 6,4. **515.** 13,5. **516.** 3π. **517.** $\frac{\pi}{4}$.

518. $\frac{1}{6}$. **519.** 144. **520.** 90. **521.** $\frac{3\pi}{2}$. **522.** 3π.

§2.1 – §2.3

523. 108. **524.** $\frac{40}{3}$. **525.** $\frac{4}{3}$. **526.** $\frac{7}{192}$. **527.** $\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}$.

528. $\frac{1}{3}$. **529.** 30. **530.** $\frac{1}{720}$. **531.** 50π. **532.** $\pi\ln 2$.

§2.4 – §2.5

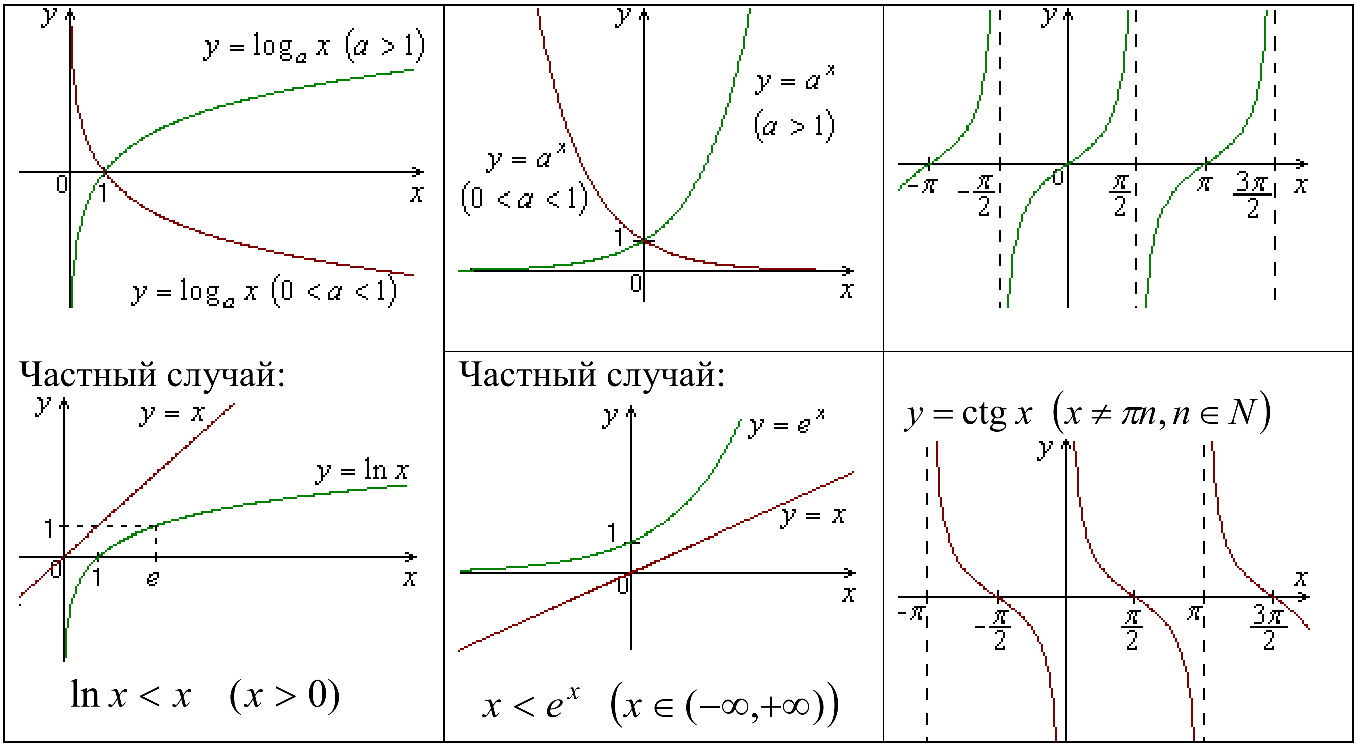
533. $\frac{\pi}{2}$. **534.** $\frac{32}{9}$. **535.** $\frac{4}{15}\pi R^5$. **536.** $\frac{\pi}{8}$. **537.** $\frac{4\pi}{15}\left(R_2^5-R_1^5\right)$. **538.** $\frac{2\pi}{3}$.

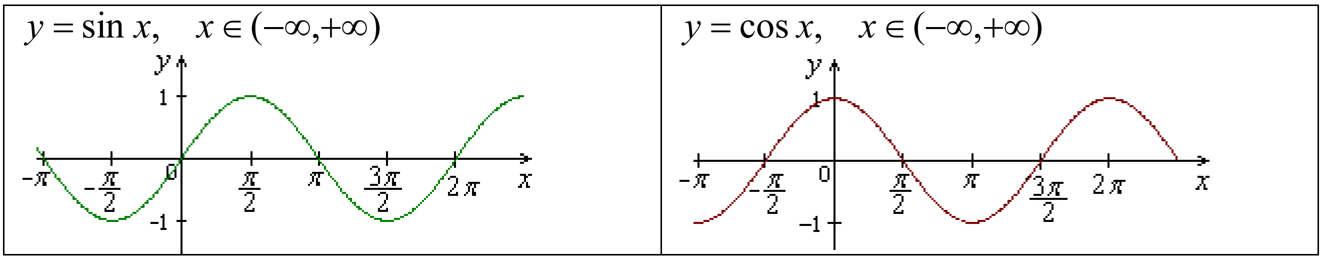
539. $\pi\left(3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right)$. **540.** $\frac{16\pi}{3}$. **541.** 24π. **542.** $\frac{243\left(2-\sqrt{2}\right)\pi}{5}$.

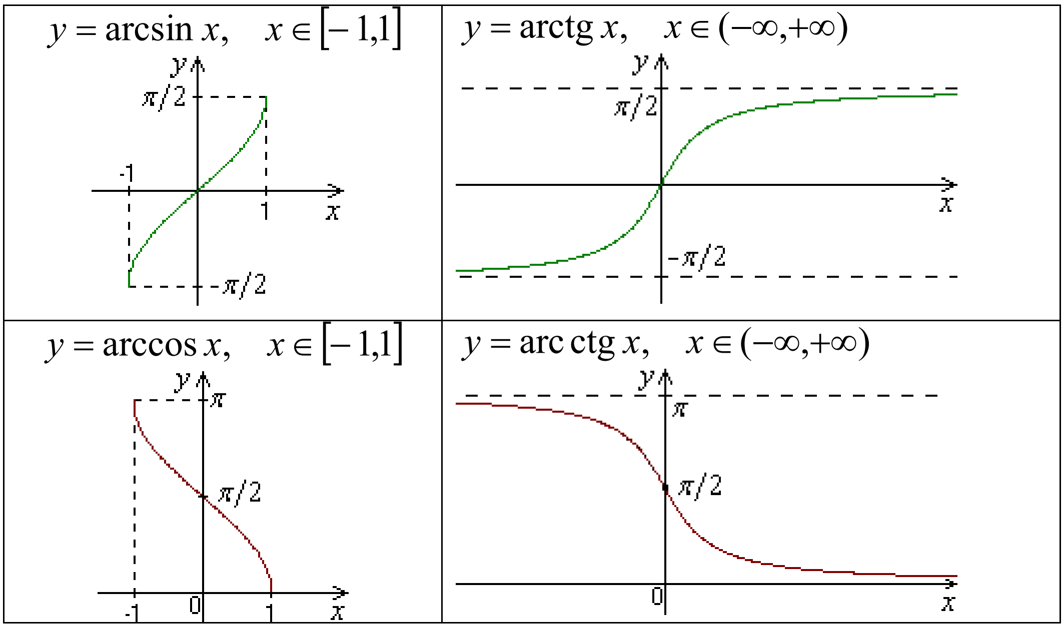
543. $4{,}5$. **544.** $3{,}4$. **545.** 4. **546.** 8π. **547.** 2π.

Приложение 1. Некоторые элементарные функции

		$y=\operatorname{tg} x\ \left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in N\right)$







$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

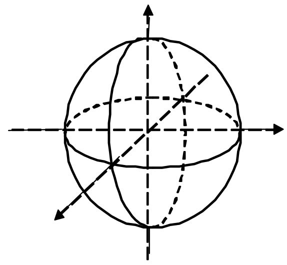
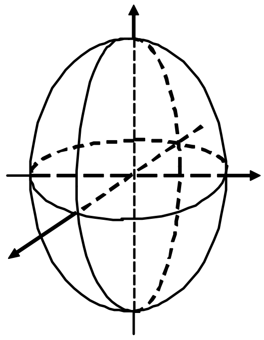
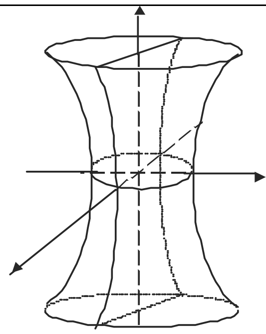
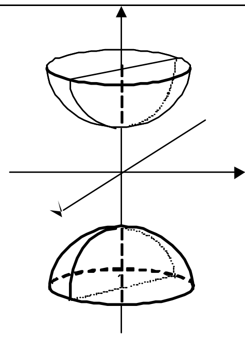
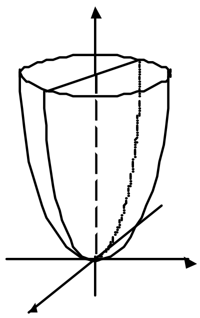
Приложение 2. Основные эквивалентности

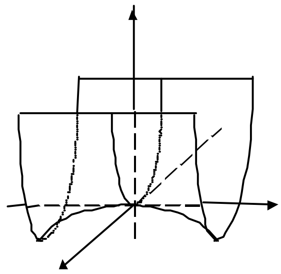
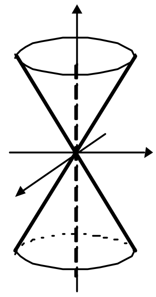
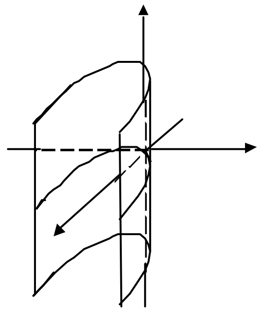
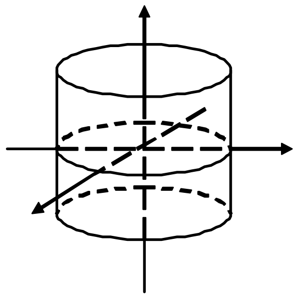
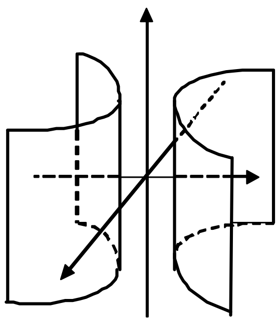
1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;	7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$;

2. $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$;	8. $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$;
3. $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$;	9. $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$ при $x \to 0$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$;	10. $(1+x)^k - 1 \sim kx$, $k > 0$ при $x \to 0$;
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$;	11. $\sqrt[k]{(1+x)} - 1 \sim \dfrac{x}{k}$, $k > 0$ при $x \to 0$;
6. $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$;	12. $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \sim a_n$ при $x \to \pm\infty$.

Приложение 3. Поверхности второго порядка

Каноническое уравнение	Наименование	Параметры	Чертеж

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	сфера	a – радиус	
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	эллипсоид	a, b, c - полуоси	
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	однополостный гиперболоид	a, b - действитель-ные полуоси, c - мнимая полуось	
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$	двуполостный гиперболоид	c -действитель-ная полуось, a, b - мнимые полуоси	
$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$	эллиптический параболоид	a, b - полуоси	

$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	гиперболический параболоид	a, b - полуоси	
$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	конус	a, b - полуоси	
$y^2=2px$	параболический цилиндр	p - параметр	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллиптический цилиндр	a, b - полуоси	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гиперболический цилиндр	a, b - полуоси	

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1. Москва, «Наука», 1969.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. Москва, «Наука», 1969.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3. Москва, «Наука», 1969.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.1. Москва, «Наука», 1985.

5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Москва, «Наука», 1978.

6. Хинчин А.Я. Краткий курс математического анализа. Москва, Госуд. издательство технико-теоретической литературы, 1955.

7. Трофимов В.К., Мурзина Т.С., Захарова Т.Э. Интегральное исчисление. Неопределенные интегралы. Новосибирск, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2006.

8. Трофимов В.К., Мурзина Т.С., Захарова Т.Э. Интегральное исчисление. Определенные интегралы. Новосибирск, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2006.

9. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. Москва, «Наука», 1988.

В.К.Трофимов
Т.С.Мурзина
Т.Э.Захарова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Переиздание

Учебное пособие

Редактор: В.И.Агульник
Корректор: И. Л. Гончарова

Подписано в печать 28.08.2013г.,
формат бумаги 60х84/16, отпечатано на ризографе, шрифт №10,
изд. л. 15,6, заказ № 66, тираж 100. СибГУТИ
630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86.