Пример 1:

В комплекте из 10 резисторов 4 бракованных. Какова вероятность, что среди трех наудачу выбранных резисторов будут:

а) 2 исправных;

б) все исправные?

Пример 1:

В комплекте из 10 резисторов 4 бракованных. Какова вероятность, что среди трех наудачу выбранных резисторов будут:

а) 2 исправных;

б) все исправные?

Решение:

а) A – из 3-х выбранных резисторов 2 исправных (и 1 неисправный)

$P(A) = \frac{m_1}{n}$

$10 \xrightarrow{3}$

$n = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{\cancel{8}^{4} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 10}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 120$

6 испр $\xrightarrow{2}$ и 4 неиспр $\xrightarrow{1}$

$m_1 = C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{2!\,4!} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 6}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} = 60$

$P(A) = \frac{60}{120} = 0,5$

б) B – из 3-х выбранных резисторов 3 исправных

$P(B) = \frac{m_2}{n}$

6 испр $\xrightarrow{3}$ и 4 неиспр $\xrightarrow{0}$

$m_2 = C_6^3 \cdot C_4^0 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot 1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 20$

$P(B) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0,167$

Пример 2:

В лифт на первом этаже девятиэтажного дома зашли 4 человека, каждый из которых может выйти на любом этаже со второго по девятый. Какова вероятность, что все зашедшие в лифт люди выйдут:

а) на одном этаже;

б) на разных этажах?

Пример 2:

В лифт на первом этаже девятиэтажного дома зашли 4 человека, каждый из которых может выйти на любом этаже со второго по девятый. Какова вероятность, что все зашедшие в лифт люди выйдут:

а) на одном этаже;

б) на разных этажах?

Решение:

а) A – все люди выйдут на одном этаже

$P(A) = \frac{m_1}{n}$

$n = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$ $\quad m_1 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 8$ $\quad P(A) = \frac{8}{4096} \approx 0,002$

б) B – все люди выйдут на разных этажах

$P(B) = \frac{m_2}{n}$ $\quad m_2 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ $\quad P(B) = \frac{1680}{4096} \approx 0,41$

Пример 3:

Студент знает 20 из 30 вопросов. Зачет считается сданным, если он ответит не менее чем на 3 из 4 заданных вопросов. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет.

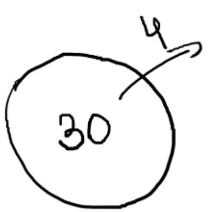
Пример 3:

Студент знает 20 из 30 вопросов. Зачет считается сданным, если он ответит не менее чем на 3 из 4 заданных вопросов. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет.

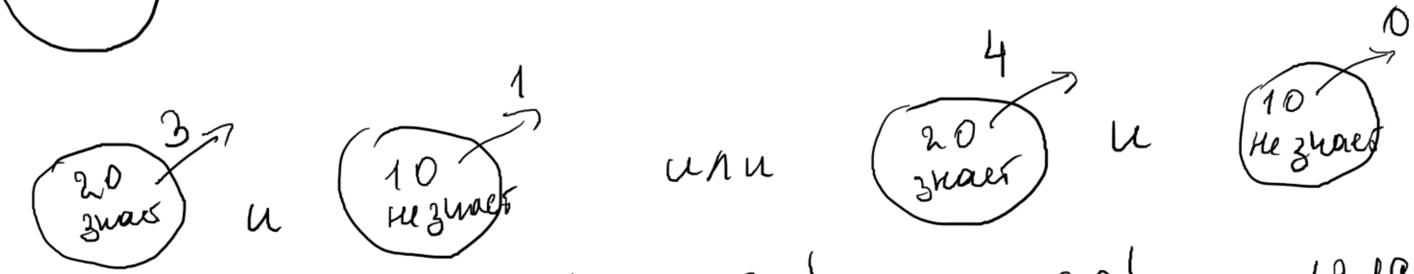
Решение:

А – студент сдаст зачёт (знает 3 и 1 не знает или знает 4 ответа на вопросы)

$P(A) = \frac{m}{n}$



$$n = C_{30}^{4} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{2\cdot 3\cdot 4} = 27405$$



$$m = C_{20}^{3}\cdot C_{10}^{1} + C_{20}^{4}\cdot C_{10}^{0} = \frac{20!}{3!\,17!}\cdot 10 + \frac{20!}{4!\,16!}\cdot 1 = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3}\cdot 10 + \frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3\cdot 4} = 16245$$

$$P(A) = \frac{16245}{27405} \approx 0{,}59$$


Физкультура
Философия
Теория вероятности

Условная вероятность

P(A) – вероятность наступления события A

Условная вероятность P(A|B) – вероятность наступления события A при условии, что в опыте произошло событие B

Примеры:
A – на небе тучи
B – пойдет дождь

P(A) = 0.8
P(B) = 0.5

P(B|A) = ?

Условная вероятность

P(A) – вероятность наступления события A

Условная вероятность P(A|B) – вероятность наступления события A при условии, что в опыте произошло событие B

Примеры:
A – выпадение четного числа очков на кубике при одном бросании
B – выпадение нечетного числа очков
P(B|A) = ?

C – выпадение 6 очков на кубике при одном бросании
D – выпадение четного числа очков
P(D|C) = ?

Условная вероятность

P(A) – вероятность наступления события A

Условная вероятность P(A|B) – вероятность наступления события A при условии, что в опыте произошло событие B

Примеры:

A – выпадение четного числа очков на кубике при одном бросании

B – выпадение нечетного числа очков

P(B|A) = 0, события A и B несовместны

C – выпадение 6 очков на кубике при одном бросании

D – выпадение четного числа очков

P(D|C) = 1

Условная вероятность

Примеры:
A – выпадение четного числа очков на кубике при одном бросании
B – выпадение нечетного числа очков на кубике при одном бросании
C – выпадение более 3 очков

*A = {2, **4, 6**}*
*B = {1, 3, **5**}*

P(C) = 1/2

P(C|A) = 2/3
P(C|B) = 1/3

Условная вероятность

$$P(B|A) = \frac{N(AB)}{N(A)} = \frac{N(AB)/N}{N(A)/N} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

N(AB) – число исходов, благоприятствующих совместному осуществлению A и B,
N(A) - число исходов, благоприятствующих осуществлению A

Условной вероятностью события B при условии A называется отношение вероятности совместного появления событий A и B к вероятности события A:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

Условная вероятность. Свойства

При фиксированном событии $A \subset F$, $P(B|A)$ является функцией события $A \subset F$. $P(B|A)$ удовлетворяет всем аксиомам вероятности А1–А3, следовательно, является вероятностью.

1) $P(B|A) \geq 0$ – следует из определения условной вероятности;

2) $P(\Omega \mid A) = 1$, так как $P(\Omega \mid A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Условная вероятность. Свойства

3) Пусть $\{\mathrm{B_n}\}$ – последовательность попарно несовместных событий. Тогда

$$P(\sum B_n \mid A) = \frac{P((\cup B_n\ ) \ \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\cup(B_n \cap A))}{P(A)} = \sum \frac{P(B_n \cap A))}{P(A)} = \sum P(B_n|A)$$

Условная вероятность. Свойства

- $P\,(\,B\,|\,A) = 1,$ если $A \subseteq B;$
- $P\,(\,B\,|\,A\,) = 0,$ если A и B несовместны;
- $P\,(\,A\,|\,A) = P\,(\,\bar{A}\,|\,\bar{A}\,) = 1;$
- $P\,(\,\bar{A}\,|\,A) = P\,(\,A\,|\,\bar{A}\,) = 0.$

Условная вероятность. Свойства

Пример: *При трехкратном подбрасывании монеты выпало два герба – событие А. Определить условную вероятность того, что при втором подбрасывании монеты выпал герб – событие В.*

Всего при 3 подбрасываниях $N = 2^3 = 8$ *элементарных исходов*

Ω *= { ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР }*

A = { ГГР, ГРГ, РГГ }; $N(A) = 3$;

AB = { ГГР, РГГ }; $N(AB) = 2$

$P(AB) = N(AB) / N = 2/8 = 1/4$; $P(A) = N(A) / N = 3/8$;

$$\boldsymbol{P(B|A) = P(AB) / P(A) = 2/3;}$$

Формула умножения вероятностей

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

$$P(AB) = P(A) * P(B|A) = P(B) * P(A|B)$$

Формула умножения вероятностей (для конечного числа событий)

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * \cdots * P(A_n|A_1\, A_2 \dots A_{n-1})$$

Формула умножения вероятностей

Пример:

Имеется 6 карточек, на которых написаны 3 буквы «а», 2 буквы «н», и одна буква «с». Карточки перетасовываются и последовательно кладутся в ряд. Найти вероятность того, что получится слово «ананас».

A = { получилось слово «ананас» };

A_1= { первая буква «а» }; A_2= { вторая буква «н» }

A_3= { третья буква «а» }; A_4= { четвертая буква «н» }

A_5= { пятая буква «а» }; A_6= { шестая буква «с» }

Формула умножения вероятностей

Пример:

Имеется 6 карточек, на которых написаны 3 буквы «а», 2 буквы «н», и одна буква «с». Карточки перетасовываются и последовательно кладутся в ряд. Найти вероятность того, что получится слово «ананас».

A = { получилось слово «ананас» };

A_1*= { первая буква «а» };* A_2*= { вторая буква «н» }*

A_3*= { третья буква «а» };* A_4*= { четвертая буква «н» }*

A_5*= { пятая буква «а» };* A_6*= { шестая буква «с» }*

$\mathbf{P(A)} = P(A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * A_5 * A_6) =$

$= P(A_1) * P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 A_2) * P(A_4|A_1 A_2 A_3) * P(A_5|A_1 A_2 A_3 A_4) * P(A_6|A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$

$= 3/6 * 2/5 * 2/4 * 1/3 * 2/5 * 1/2 * 1/1 = \mathbf{1/60} = 0{,}01667$

$P(A_1) = 3/6;$ $P(A_2|A_1) = 2/5;$ $P(A_3|A_1 A_2) = 2/4;$

$P(A_4|A_1 A_2 A_3) = 1/3;$ $P(A_5|A_1 A_2 A_3 A_4) = 1/2;$ $P(A_6|A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = 1/1$

Формула умножения вероятностей

Пример:

В коробке 12 электролампочек, среди которых 4 бракованные, неотличимые по виду от доброкачественных. Некто наугад берет лампочку, ввинчивает ее в патрон и включает ток. Бракованная лампочка сразу же перегорает, она выбрасывается и берется следующая. Действие повторяется до тех пор, пока не будет гореть лампочка. Найти вероятность того, что будет выброшено не более двух электролампочек (событие А).

Формула умножения вероятностей

Пример:
В коробке 12 электролампочек, среди которых 4 бракованные, неотличимые по виду от доброкачественных. Некто наугад берет лампочку, ввинчивает ее в патрон и включает ток. Бракованная лампочка сразу же перегорает, она выбрасывается и берется следующая. Действие повторяется до тех пор, пока не будет гореть лампочка. Найти вероятность того, что будет выброшено не более двух электролампочек (событие А).

A_i – *i-тая лампочка доброкачественная;*

$$A = A_1 + \bar{A}_1 * A_2 + \bar{A}_1 * \bar{A}_2 * A_3$$

$$\mathbf{P(A)} = P(A_1 + \bar{A}_1 * A_2 + \bar{A}_1 * \bar{A}_2 * A_3) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 * A_2) + P(\bar{A}_1 * \bar{A}_2 * A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(\bar{A}_1) * P(A_2|\bar{A}_1) + P(\bar{A}_1) * P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) * P(A_3|\bar{A}_1 * \bar{A}_2) =$$

$$= 8 / 12 + 4 / 12 * 8 / 11 + 4 / 12 * 3 / 11 * 8 / 10 = 54 / 55 \approx \mathbf{0,982}$$

Независимые события

События А и В называются **независимыми**, если

$$P(AB) = P(A) * P(B), \text{то есть } P(B|A) = P(B)$$

Формула умножения вероятностей (для конечного числа событий)

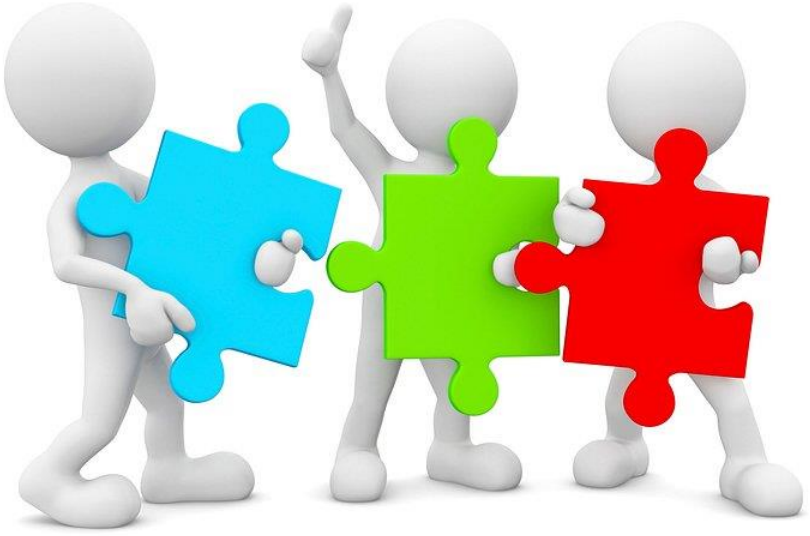
$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * \dots * P(A_n|A_1\, A_2 \dots A_{n-1})$$

Полная вероятность

Предположим, что в результате испытания событие А может произойти одновременно с одним из попарно независимых событий $H_1, H_2 \dots H_n$, составляющих полную группу.

Тогда вероятность события А определяется **формулой полной вероятности:**

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) * P(A|H_k)$$



События $H_1, H_2 \dots H_n$ называются гипотезами и удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n} P(H_k) = 1$$

Полная вероятность

Пример: в кассе продается 70 билетов лотереи «Один из ста» и 30 билетов «Три из пятидесяти». Какова вероятность выиграть в лотерею, если купить только 1 билет?

A – выигрыш в лотерею

H_1 – купить билет лотереи «Один из ста»
H_2 – купить билет лотереи «Три из пятидесяти»

Полная вероятность

Пример: в кассе продается 70 билетов лотереи «Один из ста» и 30 билетов «Три из пятидесяти». Какова вероятность выиграть в лотерею, если купить только 1 билет?

A – выигрыш в лотерею

H_1 – купить билет лотереи «Один из ста»
H_2 – купить билет лотереи «Три из пятидесяти»

$P(H_1) = 70/100 = 0.7$

$P(H_2) = 30/100 = 0.3$

$P(A|H_1) = 1/100 = 0.01$

$P(A|H_2) = 3/50 = 0.06$

$$P(A) = P(H_1) * P(A|H_1) + P(H_2) * P(A|H_2) =$$
$$0.7 * 0.01 + 0.3 * 0.06 = 0.025$$

Полная вероятность

A – выигрыш в лотерею

H_1 – купить билет лотереи «Один из ста»
H_2 – купить билет лотереи «Три из пятидесяти»

$\left.\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}\right\}$ *гипотезы*

априорные (доопытные) вероятности

$P(H_1) = 70/100 = 0.7$

$P(H_2) = 30/100 = 0.3$

$P(A|H_1) = 1/100 = 0.01$

$P(A|H_2) = 3/50 = 0.06$

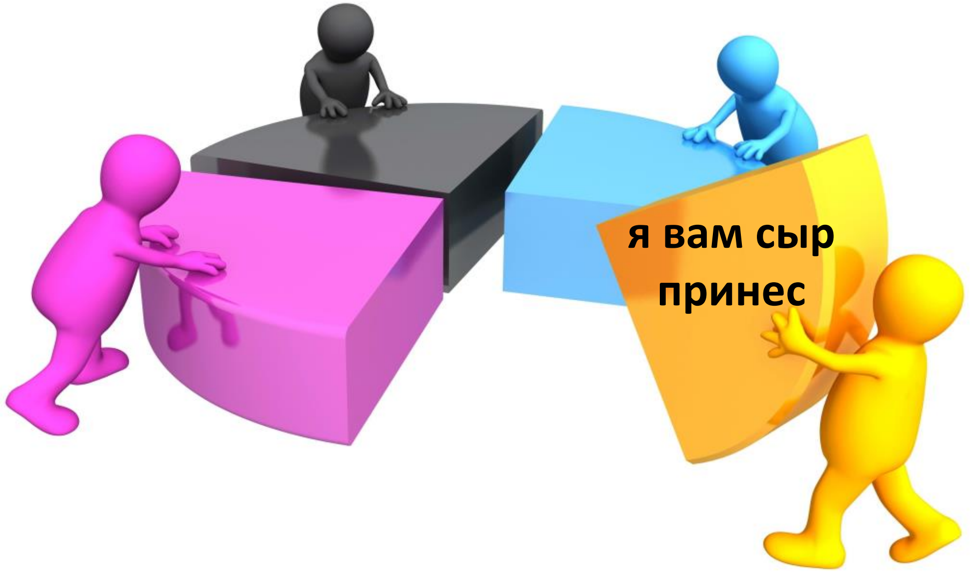
условные вероятности

$$P(A) = P(H_1) * P(A|H_1) + P(H_2) * P(A|H_2) =$$
$$0.7 * 0.01 + 0.3 * 0.06 = 0.025$$

Полная вероятность

Пример: Команда из четырех студентов сдает совместный проект. Зачет по проекту зависит от защиты, причем вызвать на защиту проекта могут любого студента из команды. Первый студент знает содержание проекта на 100 %, второй и третий – на 50%, а четвертый – на 2%. Какова вероятность, что проект будет сдан?

Полная вероятность



$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = 0.25$

$P(A|H_1) = 1$
$P(A|H_2) = 0.5$
$P(A|H_3) = 0.5$
$P(A|H_4) = 0.02$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = P(H_1) * P(A|H_1) + P(H_2) * P(A|H_2) +$$
$$+\ P(H_3) * P(A|H_3) + \ P(H_4) * P(A|H_4) =$$
$$0.25 * 1 + 0.25 * 0.5 + 0.25 * 0.5 + 0.25 * 0.02 = \mathbf{0.505}$$