Повторяющиеся испытания

Многократное повторение экспериментов:

- Демография (исследование фактов рождения и смерти)
- Управление производством (контроль качества продукции)
- Страховой бизнес (страховые выплаты)
- Финансовая область (акции, ценные бумаги)
- Социология (опросы и тестирование)

Интерес представляет исход не каждого отдельного испытания, а общее число появлений события А в результате определенного числа испытаний.

Повторяющиеся события

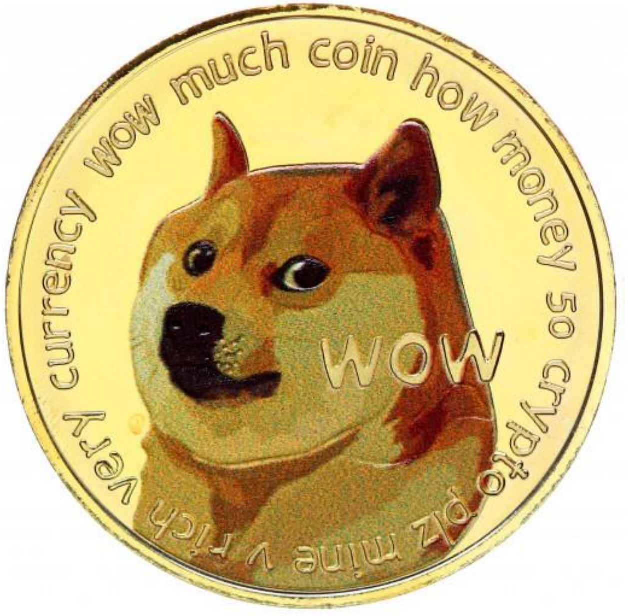
Наиболее простой пример повторяющегося события

Симметричную монету бросают 10 раз.

Какова вероятность, что герб выпадет ровно 4 раза?

S = { ггггPPPPPP, гггPгPPPPP, гггPPгPPPP…}

Ω = { гггггггггг, гггггггггP, ггггггггPг, … }



- Вероятность выпадение герба – 0.5
- Результаты одного подбрасывания не зависят друг от друга

Схема Бернулли

- Последовательность независимых испытаний с двумя исходами (успехом и неудачей) и постоянной вероятностью успеха p в каждом испытании называется **схемой Бернулли**.

- Такой тип испытаний впервые исследован Якобом Бернулли

Якоб Бернулли

Повторяющиеся события

Пусть A_i – выпадение герба в i-том испытании.

Совокупность испытаний образует последовательность $n=10$ независимых испытаний.

- Вероятность выпадение герба: $P(A_i) = p = 0.5$
- Результаты одного подбрасывания не зависят друг от друга

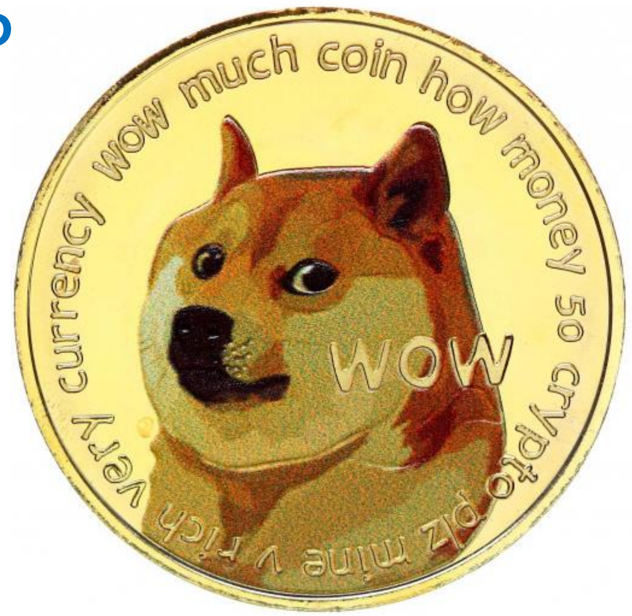


Схема Бернулли

Испытания Бернулли

1. Испытания независимы (вероятность появления любого исхода в каждом опыте не зависит от результатов других испытаний)
2. Число испытаний известно и равно n
3. Вероятность успеха в каждом испытании одинакова и равна p
4. Вероятность неудачи в каждом испытании одинакова и равна $q = 1 - p$

$0 \le p, q \le 1$

Повторяющиеся события

Наиболее простой пример схемы Бернулли

Последовательные бросания правильной симметричной монеты. Назовем успехом выпадение герба, тогда **p = q = 0.5**.

Если монета не симметрична,
то последовательные бросания
по-прежнему независимы,
а значит используется схема Бернулли,
где *вероятность успеха p*
может быть произвольной.

Схема Бернулли

Пример схемы Бернулли

Из урны, содержащей a белых и b красных шаров, наудачу извлекают шар. Фиксируют цвет вынутого шара, а затем возвращают в урну; затем производят следующее излечение, запоминание цвета и возврат шара в урну и т.д. Испытание производится **n** раз.

Пусть «успех» - извлечение белого шара. Тогда **p = a / (a + b).**

Результаты последовательных испытаний **независимы**, и поэтому они образуют схему Бернулли.

Схема Бернулли

Если извлеченные шары в урну не возвращаются,
то последовательность таких испытаний **не является** схемой Бернулли.

Вероятность «успеха» в текущем испытании **зависит** от результатов предыдущих.

Например, вероятность успеха
в k испытаниях, где k > a равна нулю
(все белые шары извлечены).

Схема Бернулли

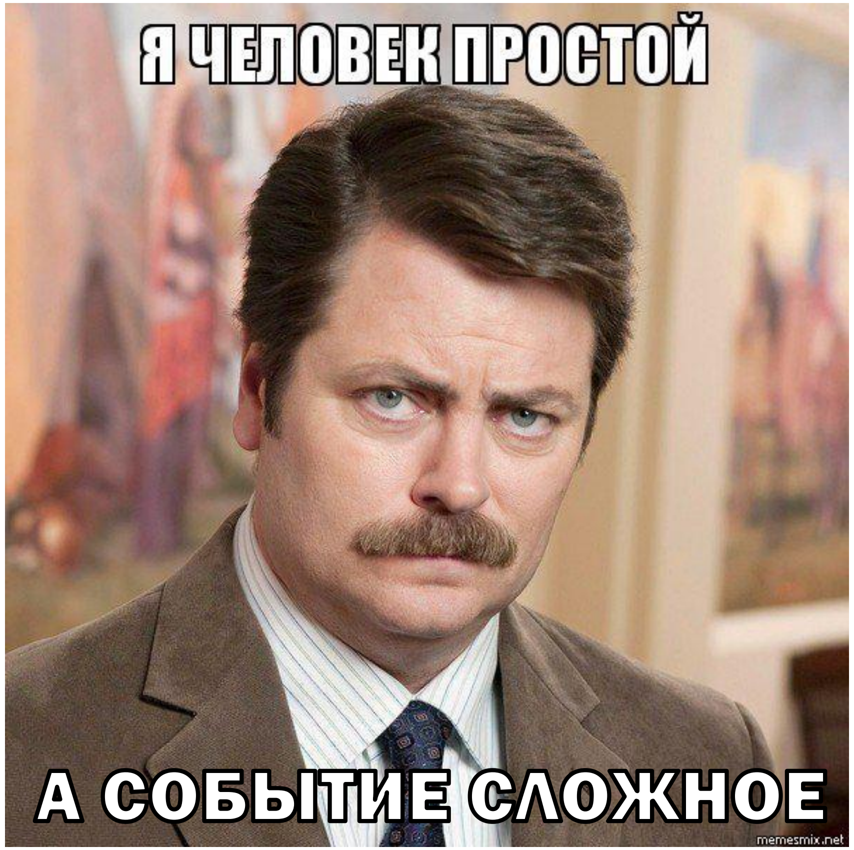
Схема Бернулли широко используется
для **контроля качества продукции**

Пример:

На заводе производятся шайбы, причем их дальнейшее использование требует определенного качества. Шайбы на массовом производстве могут быть разной толщины. При проверке они классифицируются на годные и негодные в зависимости от того, находится ли их толщина в указанных пределах.

Если режим работы неизменен, то естественно предположение о **постоянстве вероятности производства** годных деталей.

Схема Бернулли



Введем **сложное событие**:
в n испытаниях событие A_i наступит k раз
и не наступит n - k раз

Вероятность наступления A_i = p,
вероятность не наступления A_i = q = 1 - p

Задачу можно решить с помощью **формулы Бернулли**

Вывод формулы Бернулли

Одно сложное событие: в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит n - k раз

$$P(A) = \underbrace{P(A_i)*\ldots*P(A_i)}_{k\ \text{раз}}*\underbrace{P(\bar{A}_i)*\ldots*P(\bar{A}_i)}_{n-k\ \text{раз}} =$$

$$= p^k*q^{n-k}$$

(по теореме умножения вероятностей для независимых событий)

Вывод формулы Бернулли

Таких сложных событий А может быть C_n^k.

S = { ггггРРРРРР, гггРгРРРРР, гггРРгРРРР…}

Эти сложные события несовместны
(по формуле сложения вероятностей):

$$P_n(k) = \underbrace{P(A) + \ldots + P(A)}_{C_n^k \text{ событий}} = p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Формула Бернулли

p – вероятность успеха в одном испытании,
q – вероятность неудачи в одном испытании

Вероятность ровно k успехов в n независимых испытаниях определяется **формулой Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$ (k = 0, 1 … n; q = 1 – p)

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ (k = 0, 1 … n; q = 1 – p)}$$

Вероятности $P_n(k)$ называются **биномиальными**, так как они являются членами разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k)$$

Формула Бернулли

Симметричную монету бросают 10 раз.

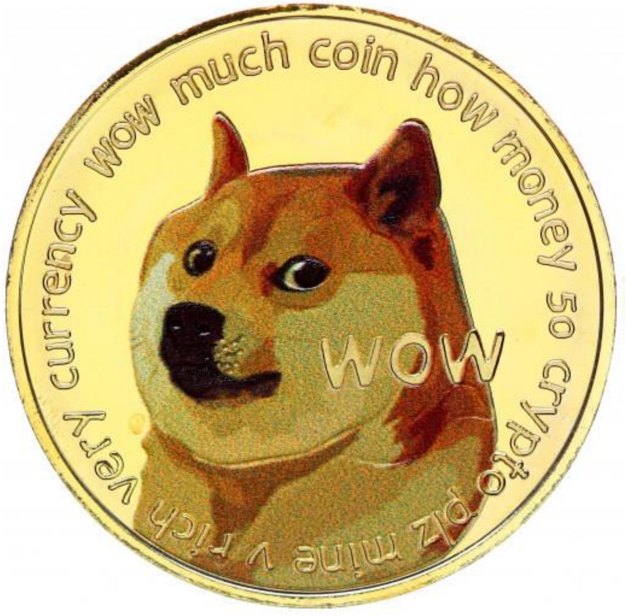
Какова вероятность, что герб выпадет ровно 4 раза?

n = 10, k = 4

p = 0.5

q = 1 – p = 0.5

$$P_{10}(4) = C_{10}^{4} * 0.5^{4} * 0.5^{6} = 0.205$$



Следствия формулы Бернулли

Следствие 1:

Сумма биномиальных вероятностей равна единице

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(n) = 1$$

Доказательство:

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k)$$

Следствия формулы Бернулли

Следствие 2:

Вероятность появления успеха не менее k1,
но не более k2 раз в n испытаниях находится по формуле:

$$P_n(k_1; k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \cdots + P_n(k_2)$$

Следствия формулы Бернулли

Доказательство:

Обозначим через v_n число успехов в n независимых испытаниях и введем события $A_{n,k} = \{v_n = k\}$, которые являются попарно несовместными для различных значений k.

$$P_n(k_1; k_2) = P\{k_1 \le v_n \le k_2\} = P\left\{\sum_{k=k_1}^{k_2} (v_n = k)\right\}$$

$$= P\left\{\sum_{k=k_1}^{k_2} A_{n,k}\right\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} P(A_{n,k}) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$$

Следствия формулы Бернулли

Пример:

Частица пролетает последовательно мимо шести счетчиков, каждый из которых независимо от остальных отмечает ее пролет с вероятностью $p = 0{,}8$.

Частица считается зарегистрированной (событие A), если она отмечена не менее чем двумя счетчиками.

Вычислить P(A).

Следствия формулы Бернулли

В серии из шести испытаний событие А произойдет, если успех появляется в каждой последовательности не менее двух раз (два и более).

$$P_n(2;6) = P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$$

$$C_6^2 p^2 q^4 + C_6^3 p^3 q^3 + C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 =$$

$$1 - P(\overline{A}) = 1 - (P_6(0) + P_6(1)) =$$

$$= 1 - (C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5) =$$

$$= 1 - ((0.2)^6 + 6 * 0.8 * (0.2)^5) = 1 - 0.0016 = 0.9984$$

Следствия формулы Бернулли

Следствие 3:

Вероятность появления хотя бы одного успеха в серии из n независимых испытаний находится по формуле:

$$P\{v_n \geq 1\} = P_n(1;n) = 1 - q^n$$

Доказательство:

В предыдущей формуле заменим k1 на единицу и k2 на n:

$$P_n(1;n) = \sum_{k=1}^{n} P_n(k) = 1 - P_n(0) = 1 - C_0^n p^0 q^n = 1 - q^n$$

Следствия формулы Бернулли

Пример

Во всем объеме продукции станка-автомата в среднем 90% - высшего сорта. Из продукции, произведенной на данном станке за смену, для проверки качества случайным образом выбирают 5 изделий. Определить вероятность того, что среди отобранных изделий будет:

а) три изделия высшего сорта;

б) не менее трех изделий высшего сорта;

в) по крайней мере, одно изделие высшего сорта.

Следствия формулы Бернулли

A – проверяемое изделие высшего сорта

n = 5

p = P(A) = 0.9, вероятность одинакова для всех испытаний

q = 1 – p = 0.1

а) три изделия высшего сорта;

$$\boldsymbol{P_5(3)} = C_5^3 p^3 q^2 = 10 * (0.9)^3 * (0.1)^2 = 0.0729$$

б) не менее трех изделий высшего сорта;

$$\boldsymbol{P_n(3;5)} = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q^1 {}_{+} C_5^5 p^5 q^0 = 0.99144$$

в) по крайней мере, одно изделие высшего сорта.

$$P\{v_n \geq 1\} = \boldsymbol{P_n(1;n)} = 1 - q^5 = 1 - (0.1)^5 = 0.99999$$

Следствия формулы Бернулли

Следствие 4:

Количество n независимых испытаний,
которые нужно произвести для того,
чтобы с вероятностью, не меньшей γ (0 < γ < 1),
можно было ожидать появления хотя бы одного успеха,
находится по формуле

$$n \geq \frac{log_a(1-\gamma)}{log_a(1-p)},$$

где $a > 1$ –произвольное
основание логарифма

Следствия формулы Бернулли

Доказательство:

$$P\{v_n \geq 1\} = P_n(1; n) = 1 - q^n > \gamma$$

$$1 - q^n > \gamma \Rightarrow (1 - \gamma) > (1 - p)^n \Rightarrow$$

$$log_{1-p}(1 - \gamma) \leq log_{1-p}(1 - p)^n, \text{т. к. } 1 - p < 1$$

$$\mathrm{n} \geq log_{1-p}(1 - \gamma)$$

$n \geq \frac{log_a(1-\gamma)}{log_a(1-p)}$, где $a > 1$ – произвольное основание логарифма

Следствия формулы Бернулли

Пример

Во всем объеме продукции станка-автомата в среднем 90% - высшего сорта. Из продукции, произведенной на данном станке за смену, для проверки качества случайным образом выбирают 5 изделий. Определить вероятность того, что среди отобранных изделий будет:

Сколько изделий необходимо проверить, чтобы вероятность обнаружения среди них хотя быть одного изделия высшего сорта была более 0.99 ?

Следствия формулы Бернулли

$\gamma = 0.99, \mathrm{p} = 0.9$

$$n > \frac{log_a(1-\gamma)}{log_a(1-p)}$$

$$n > \frac{log_a(1-0.99)}{log_a(1-0.9)}$$

$$n > \frac{log_{10}(0.01)}{log_{10}(0.1)} = \frac{lg(0.01)}{lg(0.1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\boldsymbol{n = 3}$$

Необходимо проверить, по крайней мере, три изделия для обнаружения среди них хотя бы одного изделия высокого сорта с вероятностью 0.99

Наивероятнейшее событие

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная вероятность $P_n(k_0)$, называется наивероятнейшим числом появления события А.

Число определяется неравенствами

$$np - q \le \mathbf{k_0} \le np + p$$

а) если число np - q – дробное, то существует одно наивероятнейшее число $\mathbf{k_0}$;

б) если число np - q – целое, то существует два наивероятнейших числа: $\mathbf{k_0}$ и $\mathbf{k_0 + 1}$;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $\mathbf{k_0 = np}$;

Наивероятнейшее событие

Пример

Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0.9.

Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Наивероятнейшее событие

Пример

n = 15, p = 0.9, q = 0.1

$$np - q \le \mathbf{k_0} \le np + p$$

$$15*0.9 - 0.1 \le \mathbf{k_0} \le 15*0.9 + 0.9$$

$$13.5 \le \mathbf{k_0} \le 14.4$$

K_0 = 14 – целое число, причем единственное, заключенное между 13.5 и 14.4.

Наивероятнейшее число элементов, прошедших испытание, равно 14

Наивероятнейшее событие

Пример

Товаровед осматривает 24 образца товаров.

Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0.6.

Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

Наивероятнейшее событие

Пример

$n = 24, p = 0.6, q = 0.4$

$$np - q \le \mathbf{k_0} \le np + p$$

$$24*0.6 - 0.4 \le \mathbf{k_0} \le 24*0.6 + 0.6$$

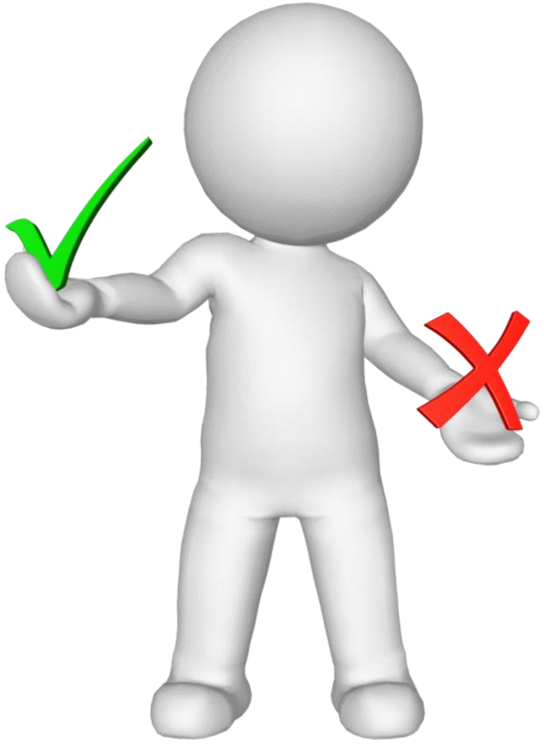
$$14 \le \mathbf{k_0} \le 15$$

Так как np – q – целое число,
то наивероятнейших чисел исходов два: **14 и 15.**

Наивероятнейшее событие

Пример

Чему равна вероятность p наступления событий в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?



Наивероятнейшее событие

Пример

$n = 49,\ k_0 = 30$

$$n\mathbf{p} - q \le k_0 \le n\mathbf{p} + \mathbf{p}$$

$$49\mathbf{p} - (1 - \mathbf{p}) \le 30 \le 49\mathbf{p} + \mathbf{p}$$

$50\mathbf{p} - 1 \le 30$

$\mathbf{p \le 0.62}$

$50\mathbf{p} \geq 30$

$\mathbf{p \geq 0.6}$

Искомая вероятность: $\mathbf{0.6 \le p \le 0.62}$

Схема Бернулли

Пример

На факультете на считывается 1825 студентов.

Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для 4 студентов факультета?

Схема Бернулли

Пример

На факультете на считывается 1825 студентов.
Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для 4 студентов факультета?

А – день рождения 1 сентября

$$\mathrm{P}(A) = P_{1825}(4) = C_{1825}^{4} p^{4} q^{1821}$$

Такое выражение технически очень сложно вычислить.
В схеме Бернулли при больших n (обычно при n > 40) используют **приближенные (асимптотические) формулы**.

Формула Пуассона

Формула Пуассона используется:

- При решении задач, связанных с редкими событиями, например, рождением близнецов, опечаткой в книге, достижением человеком 100-летнего возраста и т.д.
- **Большое** числом испытаний **n**
- **Малая** вероятность успеха **p** в каждом отдельном опыте

  - В случае, когда $np < 10$, при этом обычно $p < 0,01$

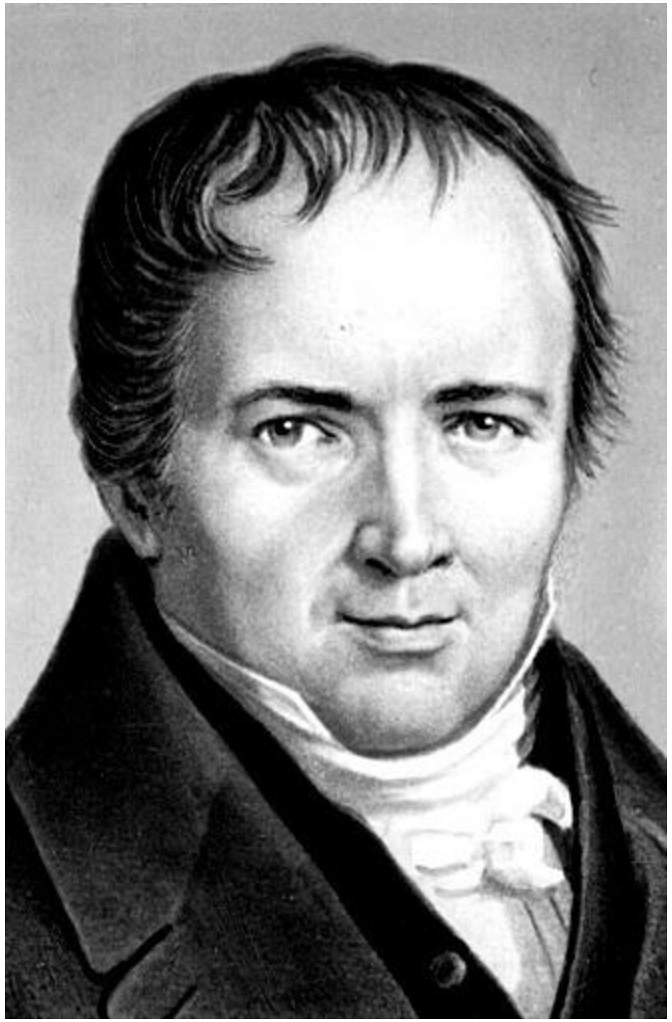
Формула Пуассона

Предельная теорема Пуассона

Если число испытаний в схеме Бернулли *n велико*, вероятность успеха в одном испытании *p мала* и *мало* также число $\boldsymbol{\lambda = np}$, тогда

$$P_n(m) = P(n, m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n$$



Симеон Дени Пуассон

Вывод формулы Пуассона

$$P_n(m) \ = C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1) * \cdots * (n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m}$$

$$= \left| \lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \right| =$$

$$= \frac{n(n-1) * \cdots * (n-m+1)}{m!} \frac{\lambda^m}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

Вывод формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = ???;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = ???;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = ???;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m} = ???;$$

Вывод формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \frac{\lambda^m}{m!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda};$$

Вывод формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-m+1)(n-m+2)*\cdots*n}{n^m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-m+1}{n}\right)\left(\frac{n-m+2}{n}\right)*\cdots*\left(\frac{n}{n}\right) = 1;$$

Вывод формулы Пуассона

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$$|\lambda = np|$$

Формула Пуассона

- Значения функции Пуассона для некоторых λ = np приводятся в таблицах
- Формулу Пуассона называют еще **формулой редких событий** из-за того, что вероятность *p* появления события в отдельном испытании значительно меньше 1.

Значення функцин Пуассона $P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

I

m \ λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Формула Пуассона

Пример

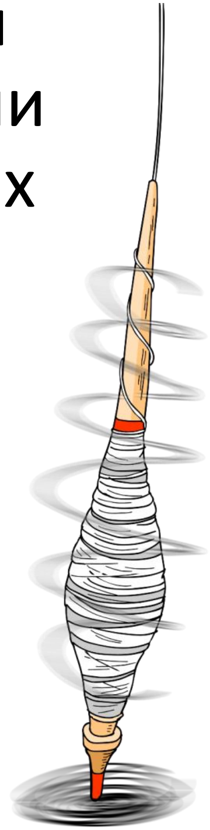
По каналу связи передано 100 символов. Вероятность искажения одного символа помехами p = 0,04. Найти вероятность того, что будет искажено 2 символа.

$$P_{100}(2) = \begin{bmatrix} n = 100 \\ p = 0.04 \\ \lambda = np = 4 \end{bmatrix} \approx \frac{4^2}{2!} e^{-4} \approx 0.1465$$

Формула Пуассона

Пример:

На прядильной фабрике работница обслуживает по несколько сотен веретен, каждое из которых прядет свой моток пряжи. При вращении веретена пряжа из-за ее неровности, неровности натяжения и других причин рвется в случайные моменты времени. Для производства важно знать, как часто могут происходить обрывы при тех или иных условиях работы (сорт пряжи, скорость веретен и т.д.)



Предположим, что работница обслуживает 800 веретен и вероятность обрыва в течение некоторого времени T равна 0.005.

1. Найти наивероятнейшее число обрывов пряжи в течение промежутка времени T и вероятность такого события
2. Какова вероятность того, что в течение времени T будет не более четырех обрывов?

Формула Пуассона

А – обрыв пряжи на веретене

События независимы, поэтому используется *схема Бернулли*

$n = 800$, $p = 0.005$

n велико, p мало, $np = 4$, поэтому можно использовать **формулу Пуассона**

1. Наивероятнейшее число обрывов пряжи

$np - q \le \mathbf{k_0} \le np + p$ => $4 - 0.995 \le \mathbf{k_0} \le 4 + 0.005$ => $\mathbf{k_0 = 4}$

Вероятность этих событий находится по формуле Пуассона

$$P_{800}(4) \approx \frac{4^4}{4!} e^{-4} \approx 0.1954$$

Значения функции Пуассона $P_\lambda(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

m \ λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Формула Пуассона

1. Наивероятнейшее число обрывов пряжи

np – q ≤ **k_0** ≤ np + p => 4 – 0.995 ≤ **k_0** ≤ 4 + 0.005 => **k_0 = 4**

Вероятность этих событий находится по формуле Пуассона

$$P_{800}(4) \approx \frac{4^4}{4!} e^{-4} \approx 0.1954$$

Но при этом $P_{800}(4) = P_{800}(3)$

$$P_{800}(3) = [\lambda = np = 4] \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} \approx 0.1954$$

Формула Пуассона

2. Число обрывов не более четырех

$$P_{800}(0;4) = P_{800}(0) + P_{800}(1) + P_{800}(2) + P_{800}(3) + P_{800}(4)$$

$$= [\lambda = np = 4] \approx$$

$$0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 + 0.1954 \approx 0.6289$$

m \ λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521