Занятие 9. **Двумерные дискретные случайные величины**

Изучаемый материал: матрица распределения двумерной дискретной случайной величины, получение одномерных распределений, корреляционный момент (ковариация), коэффициент корреляции.

9.1 - 9.3	9.4 – 9.6	9.7 – 9.9

9.1. Дан закон распределения двумерной дискретной случайной величины. Найти распределение каждой компоненты X и Y, их математические ожидания, средние квадратические отклонения и коэффициент корреляции.

x_i \ y_j	0	2	5
0	0,1	0,2	0,2
4	0,3	0,2	0

9.2. Задана матрица распределения двумерной случайной величины (X, Y). Вычислить коэффициент корреляции компонент r_{xy}.

x_i \ y_j	1	2	3
1	1/12	1/6	1/4
2	1/12	1/6	1/4

9.3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y:

x_i	1	3
p_i	0,4	0,6

y_j	2	4
p_j	0,2	0,8

Найти **а)** математическое ожидание и **б)** дисперсию суммы $X + Y$ двумя способами: 1) пользуясь свойством математического ожидания и дисперсии суммы; 2) составив закон распределения суммы.

9.4. В урне находятся 5 белых и 3 красных шара. Извлекают два шара (без возвращения). Исследовать двумерную случайную величину (X, Y), где X - число белых шаров, Y - число красных шаров. Вычислить числовые характеристики случайных величин X и Y и коэффициент корреляции r_{xy}.

Домашнее задание 9

9.5. Двумерная случайная величина имеет приведенное распределение. Найти распределение каждой компоненты X и Y, их математические ожидания, средние квадратические отклонения и коэффициент корреляции.

x_i \ y_j	2	4	6
3	1/18	1/12	1/36
5	1/9	1/6	1/18
7	1/6	1/4	1/12

9.6. Известна матрица распределения двумерной случайной величины (X, Y):

$x_i \backslash y_j$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти ряд распределения каждой случайной величины, их математические ожидания и средние квадратические отклонения, а также коэффициент корреляции r_{xy}.

9.7. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y:

x_i	1	4
p_i	0,6	0,4

y_j	0,5	2
p_j	0,8	0,2

Найти **а)** математическое ожидание и **б)** дисперсию суммы $X + Y$ двумя способами: 1) пользуясь свойством математического ожидания и дисперсии суммы; 2) составив закон распределения суммы.

9.8. Стрелок делает по мишени 4 выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Пусть X - количество попаданий в мишень, а Y - количество промахов. Составить матрицу распределения двумерной случайной величины (X,Y). Вычислить числовые характеристики случайных величин X и Y и коэффициент корреляции r_{xy}.

Дополнительное задание 9

9.9. Двумерная случайная величина (X,Y) задана матрицей распределения

$x_i \backslash y_j$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Найти ряд распределения каждой компоненты, их математические ожидания и средние квадратические отклонения, а также коэффициент корреляции r_{xy}.

9.10. Известна матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X, Y). Найти ряд распределения каждой компоненты X и Y, их математические ожидания и средние квадратические отклонения, а также коэффициент корреляции r_{xy}.

$x_i \backslash y_j$	10	20	30
50	0,15	0,30	0,15
100	0,10	0,05	0,25

9.11. Дан закон распределения двумерной дискретной случайной величины. Вычислить коэффициент корреляции.

$x_i \backslash y_j$	10	20	30
40	0,1	0,2	0,3
50	0,05	0,15	0,2

9.12. Задана матрица распределения двумерной случайной величины (X, Y):

$x_i \backslash j$	1	1,5	2
1	1/12	1/24	1/24
2	1/12	1/24	1/24
2,5	1/3	1/6	1/6

Найти распределение каждой компоненты X и Y, их математические ожидания, средние квадратические отклонения, а также коэффициент корреляции r_{xy}.

9.13. Распределение двумерной случайной величины (X, Y) задано матрицей:

$x_i \backslash y_j$	-2	-1	0	1
-1	1/16	1/8	3/16	1/16
0	1/8	3/16	1/16	0
1	0	1/16	0	1/8

Найти ряд распределения каждой компоненты X и Y, их математические ожидания и средние квадратические отклонения, а также коэффициент корреляции r_{xy}.

9.14. Две независимые случайные величины X и Y имеют законы распределения:

x_i	0	1	3
p_i	1/2	3/8	1/8

y_j	0	1
p_j	1/3	2/3

Найти **а)** математическое ожидание и **б)** среднее квадратическое отклонение суммы $X + Y$ двумя способами: 1) пользуясь свойством математического ожидания и дисперсии суммы; 2) составив закон распределения суммы.

9.15. Независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределений:

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

y_j	3	4	5
p_j	0,5	0,3	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию суммы этих случайных величин двумя способами: 1) используя правило сложения математических ожиданий и дисперсий; 2) составив предварительно матрицу распределения суммы случайных величин.

Ответы к занятию 9

9.1. $m_x = 2$; $\sigma_x = 2$; $m_y = 1{,}8$; $\sigma_y = 1{,}83$; $r_{xy} = -0{,}55$.

9.2. $r_{xy} = 0$. **9.3.** **а)** 5,8; **б)** 1,6. **9.4.** $r_{xy} = -1$.

9.5. $m_x = 5{,}67$; $\sigma_x = 1{,}49$; $m_y = 3{,}67$; $\sigma_y = 1{,}37$; $r_{xy} = 0$.

9.6. $m_x = 1{,}64$; $m_y = 1{,}89$; $\sigma_x = 0{,}48$; $\sigma_y = 0{,}87$; $r_{xy} = 0{,}0967$.

9.7. **а)** 3; **б)** 2,52. **9.8.** -1.

9.9. $m_x = 0{,}7$; $m_y = 0{,}6$; $\sigma_x = 0{,}458$; $\sigma_y = 0{,}490$; $r_{xy} = 0$.

9.10. $m_x = 70$; $m_y = 21{,}5$; $\sigma_x = 24{,}5$; $\sigma_y = 7{,}92$; $r_{xy} = 0{,}23$. **9.11.** 0,028.

9.12. $m_x = 13/6$; $\sigma_x = \sqrt{11}/6$; $r_{xy} = 0$.

9.13. $m_x = -1/4$; $m_y = -3/4$; $\sigma_x = 0{,}75$; $\sigma_y = 0{,}866$; $r_{xy} = 0{,}096$.

9.14. **а)** $M(X + Y) = 1{,}42$; **б)** $\sigma(X + Y) = 1{,}08$.

9.15. $M(X + Y) = 5{,}5$; $D(X + Y) = 0{,}77$.

Занятие 10. **Двумерные непрерывные случайные величины**

Изучаемый материал: распределение двумерной непрерывной случайной величины, получение одномерных распределений и условных распределений, вероятность попадания в область, корреляционный момент (ковариация), коэффициент корреляции.

10.1 – 10.4	10.5 – 10.8	10.9 – 10.19

10.1. Известна плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y): $f(x,y) = \begin{cases} a\cos x\cos y, & (x;\ y)\in D \\ 0, & (x;\ y)\notin D \end{cases}$, D: $0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2$. Найти плотность распределения и функцию распределения компонент.

10.2. Двумерная случайная величина имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{10\pi}, & \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}\le 1 \\ 0, & \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}>1 \end{cases}$$

. Найти плотности распределения компонент X и Y.

10.3. Двумерная случайная величина распределена равномерно в области $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ a>0,\ b>0$. Найти: **а)** плотность распределения $f(x,y)$; **б)** коэффициент корреляции r_{xy}; **в)** дисперсию случайной величины $X+Y$.

10.4. Плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид: $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\sin(x+y),\ 0\le x, y\le \dfrac{\pi}{2}$; $f(x,y)=0,\ x\notin[0, \dfrac{\pi}{2}]$ или $y\notin[0, \dfrac{\pi}{2}]$. Найти функцию распределения $F(x,y)$ и числовые характеристики m_x, m_y, D_x, D_y, σ_x, σ_y, K_{xy}, r_{xy}.

Домашнее задание 10

10.5. Двумерная случайная величина задана плотностью $f(x,y)$. Найти функцию распределения и плотность распределения компонент.

$f(x,y) = \begin{cases} c\sin x\cos y, & x\in D \\ 0, & x\notin D \end{cases}$,

D: $0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2$

10.6. Двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена внутри эллипса $9x^2+16y^2=144$, вне эллипса $f(x,y)=0$. Найти плотности распределения компонент X и Y.

10.7. Двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в круге с радиусом 10 см и с центром в начале координат. Вычислить коэффициент корреляции.

10.8. Задана плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y): $f(x,y) = \begin{cases} axy, & x\in D \\ 0, & x\notin D \end{cases}$, D: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1$. Найти коэффициент a, математические ожидания и средние квадратические отклонения компонент, а также коэффициент корреляции r_{xy}.

Дополнительное задание 10

10.9. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

D: $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$

Найти: **а)** математические ожидания; **б)** средние квадратические отклонения компонент; **в)** вероятность попадания случайной величины (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми: $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \pi/6$, $y = \pi/3$.

10.10. Двумерная случайная величина распределена равномерно в части круга с радиусом 10 и с центром в начале координат, которая находится в первой четверти. Найти математические ожидания компонент.

10.11. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в круге радиуса r с центром в начале координат. Доказать, что случайные величины X и Y зависимы, но не коррелированны.

10.12. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами (0;0), (1;1), (–1;1), вне треугольника плотность распределения равна нулю. Найти плотности распределения компонент, их математические ожидания, средние квадратические отклонения и коэффициент корреляции r_{xy}.

10.13. Найти математические ожидания и средние квадратические отклонения компонент X и Y, а также коэффициент корреляции r_{xy} двумерной случайной величины (X, Y), заданной плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{при } x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}.$$

10.14. Найти коэффициент корреляции r_{xy}, если $2X + 3Y - 5 = 0$.

10.15. Функция распределения системы случайных величин X и Y определяется по формуле: $F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le \text{или } y \le 0 \\ (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x > 0 \text{ и } y > 0 \end{cases}$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $\{1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2\}$.

10.16. Плотность распределения системы двух случайных величин X и Y задана функцией $f(x,y) = \dfrac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти: **а)** коэффициент a;

б) функцию распределения двумерной случайной величины (X, Y);

в) вероятность попадания точки (X, Y) в квадрат $\{|x|<1,\ |y|<1\}$;

г) плотности распределения компонент.

10.17. Плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид: $f(x,y) = a(1-x^2)(1-y^2)$ при $-1 \le x, y \le 1$; $f(x,y) = 0$ при $|x| > 1$ или $|y| > 1$. Вычислить числовые характеристики компонент.

10.18. Плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид: $f(x,y) = axy\exp(-x^2 - y^2)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Найти: a, $f_1(x)$, $f_1(x/y)$.

10.19. Вероятность первого обнаружения самолета на круглом экране радиолокатора радиуса R является случайной величиной с плотностью распределения $f(x,y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$, где (x,y) - значения координат точки обнаружения. Найти: а) постоянную c; б) вероятность обнаружения цели в круге радиуса r ($r < R$) с центром, совпадающим с центром экрана.

Ответы к занятию 10

10.1. $f_1(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0; \pi/2] \\ 0, & x \notin [0; \pi/2] \end{cases}$, $F_1(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi/2] \\ 0, & x \le 0 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$.

10.2. $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{25\pi}\sqrt{25 - x^2}, & |x| \le 5 \\ 0, & |x| > 5 \end{cases}$, $f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4 - y^2}, & |y| \le 2 \\ 0, & |y| > 2 \end{cases}$.

10.3. **а)** $1/ab$; **б)** 0; **в)** $(a^2 + b^2)/12$.

10.4. $F(x,y) = \dfrac{1}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x + y)]$; $m_x = m_y = 0{,}785$;

$D_x = D_y = 0{,}186$; $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}43$; $K_{xy} = -0{,}046$; $r_{xy} = -0{,}247$.

10.5. $F_1(x) = 1 - \cos x$, $f_1(x) = \sin x$, $x \in [0; \pi/2]$; $F_2(y) = \sin y$, $f_2(y) = \cos y$, $y \in [0; \pi/2]$.

10.6. $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi}\sqrt{16 - x^2}, & |x| \le 4 \\ 0, & |x| > 4 \end{cases}$, $f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9 - y^2}, & |y| \le 3 \\ 0, & |y| > 3 \end{cases}$.

10.7. $r_{xy} = 0$. **10.8.** $a = 24$; $m_x = m_y = 0{,}4$; $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}2$; $K_{xy} = -2/75$; $r_{xy} = -2/3$.

10.9. **а)** $m_x = m_y = 0{,}57$; **б)** $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}37$; **в)** 0,26. **10.10.** 4,25.

10.12. $f_1(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \le x < 0 \\ 1 - x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x < 1, x > 1 \end{cases}$, $f_2(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \le y < 1 \\ 0, & y < 0, y > 1 \end{cases}$;

$m_x = 0$; $m_y = 2/3$; $\sigma_x = 0{,}408$; $\sigma_y = 0{,}236$; $r_{xy} = 0$. **10.13.** $m_x = m_y = 1$, $r_{xy} = 0$.

10.14. $r_{xy} = -1$. **10.15.** $(e^{-2} - e^{-6})(e^{-3} - e^{-6}) = e^{-5}(1 - e^{-3}) \cdot (1 - e^{-4}) = 0{,}0063$.

10.16. **а)** $a = \dfrac{1}{\pi^2}$; **б)** $F(x,y) = -2/3\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y + \dfrac{1}{2}\right)$; **в)** $\dfrac{1}{4}$;

г) $f_1(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$; $f_2(y) = \dfrac{1}{\pi(1 + y^2)}$. **10.17.** $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}45$.

10.18. $a = 4$, $f_1(x) = f_1(x/y) = 2x\exp(-x^2)$.

10.19. **а)** $c = \dfrac{3}{\pi R^3}$; **б)** $P = \dfrac{r^2}{R^3}(3R - 2r)$.