Проверочная на лекции

1. Разделите распределения на 2 группы:

А – дискретные

В – непрерывные

1 – Бернулли

2 – равномерное

3 – Пуассона

4 – биномиальное

5 – геометрическое

6 – нормальное

7 – гипергеометрическое

8 – показательное

Проверочная на лекции

2. Сопоставьте формулы и названия распределений

A

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$$

B

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

C

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

1 – Бернулли

2 – равномерное

3 – Пуассона

4 – биномиальное

5 – геометрическое

6 – нормальное

7 – гипергеометрическое

8 – показательное

Проверочная на лекции

3. Сопоставьте формулы и названия распределений

A $p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$

B $p_k = P\{\xi = k\} = pq^k$

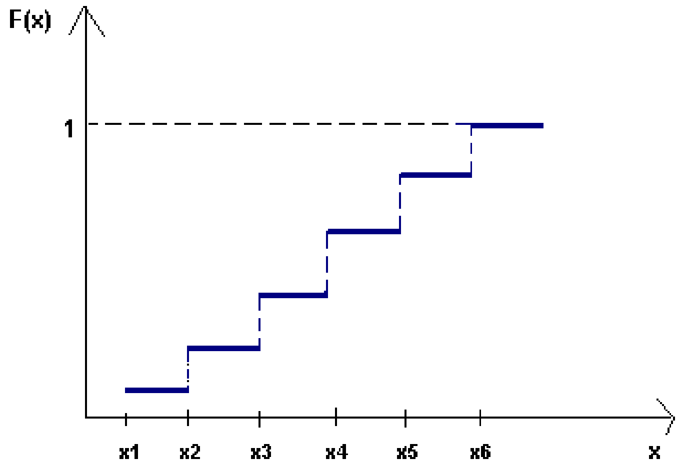
C $p_k = P\{\xi = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

D $p_m = P\{\xi = m\} = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

1 – Бернулли
2 – равномерное
3 – Пуассона
4 – биномиальное
5 – геометрическое
6 – нормальное
7 – гипергеометрическое
8 – показательное

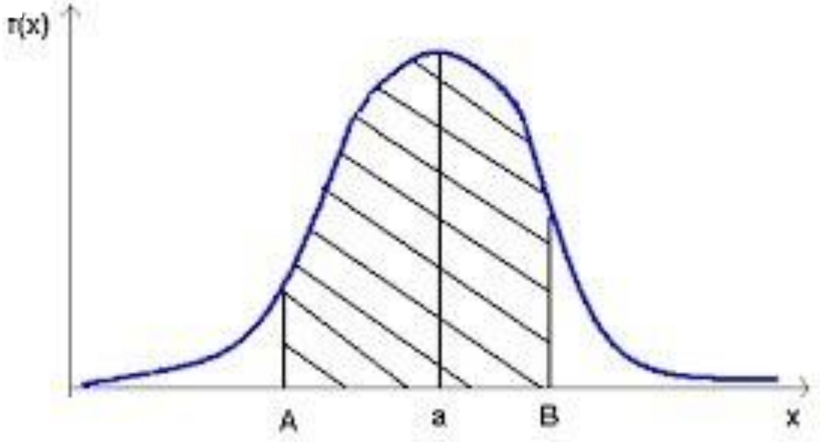
Проверочная на лекции

4. Подпишите название графика и какой случайной величине он соответствует (непрерывной или дискретной)



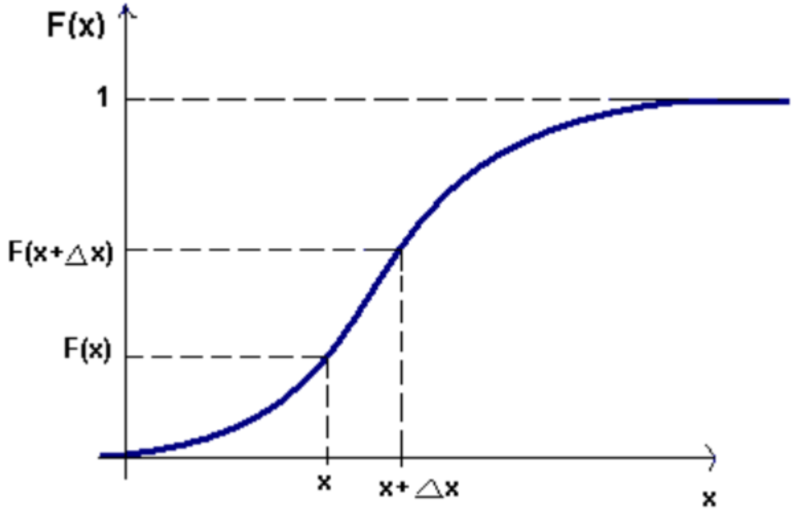
A

Функция распределения дискретной сл. в.



B

Плотность распределения непрерывной сл. в.

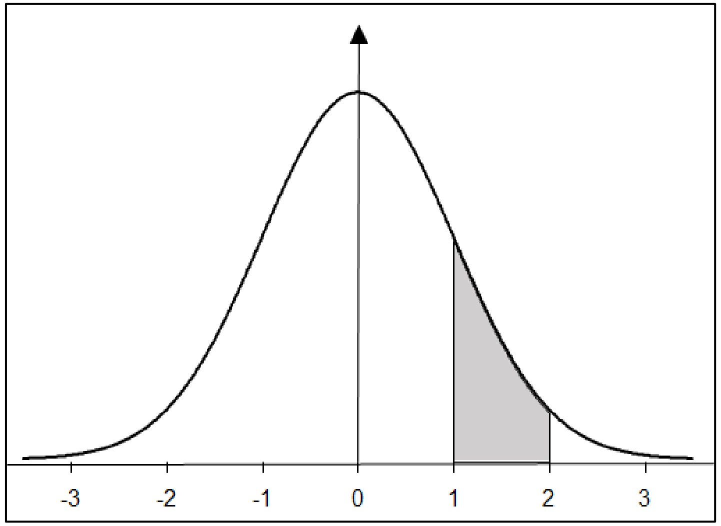


C

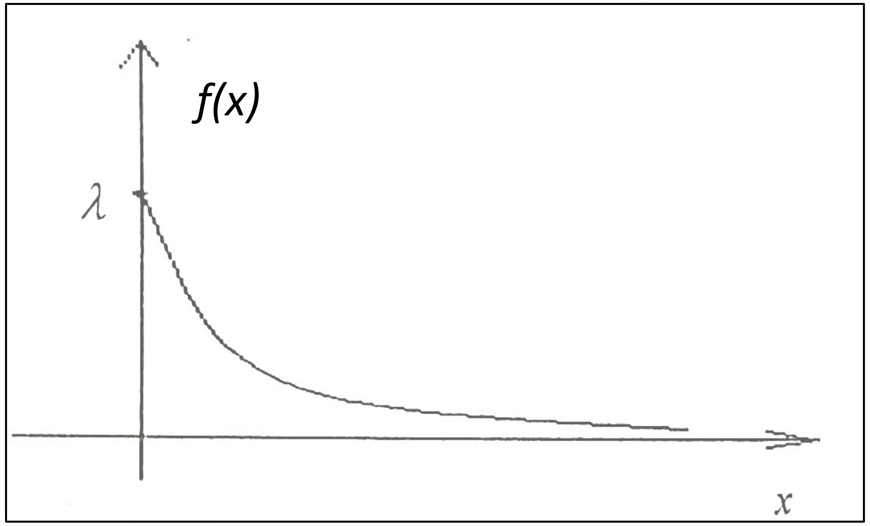
Функция распределения непрерывной сл. в.

Проверочная на лекции

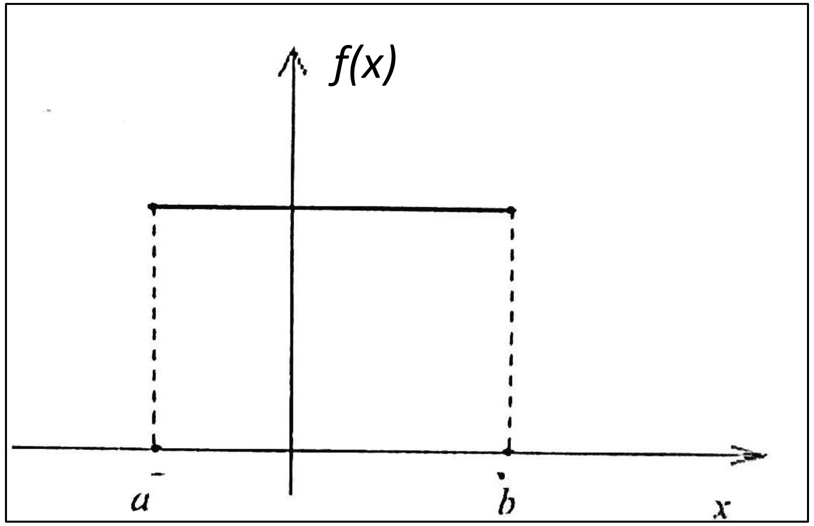
5. Сопоставьте график и вид распределения



A



B



C

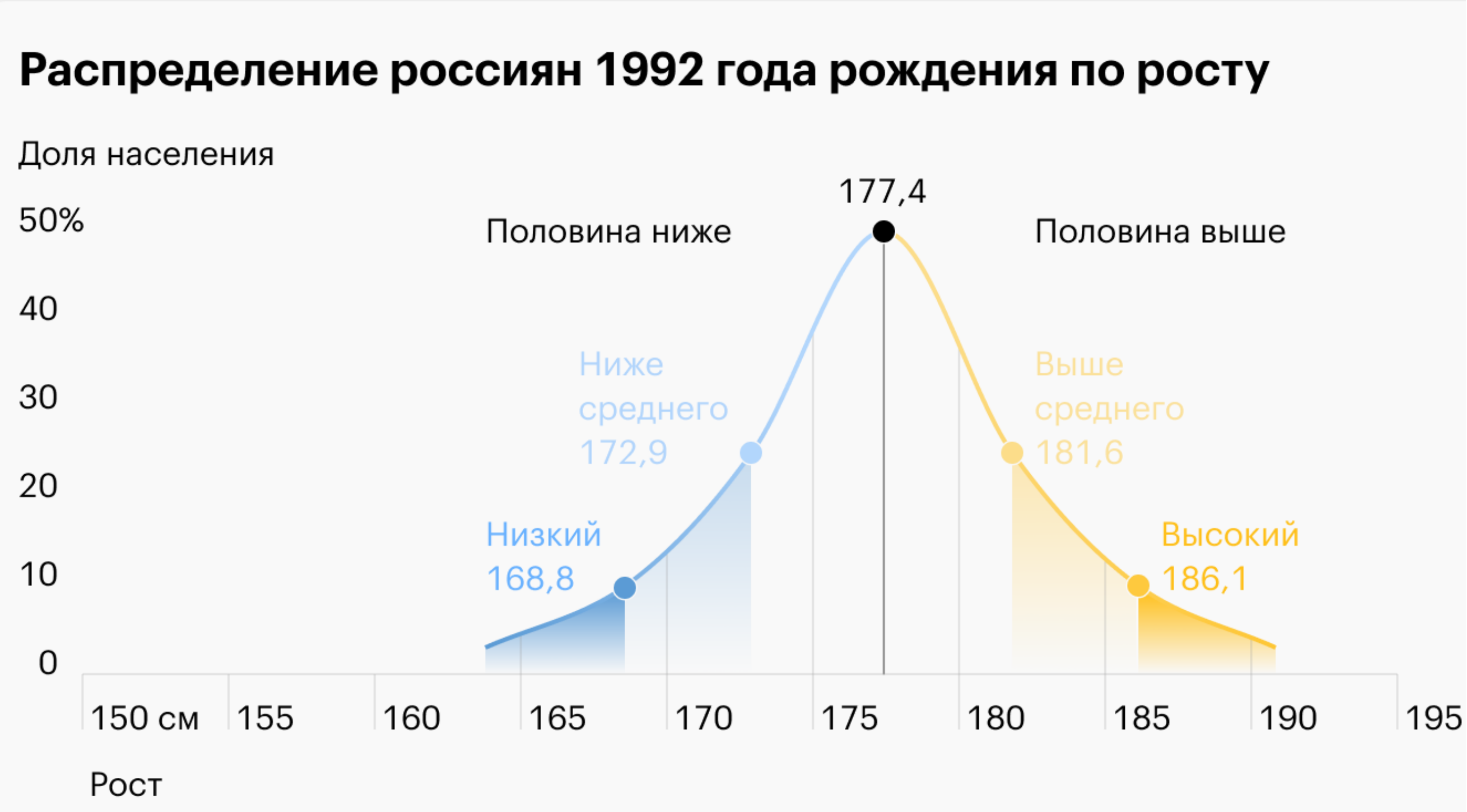
1 – равномерное

2 – показательное

3 – нормальное

Проверочная на лекции

6. Определите математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение по графику



$MX = 177.4$

$\sigma = 177.4 - 172.9 = 4.5$

$\sigma = 181.6 - 177.4 = 4.2$

Проверочная на лекции

7. Случайная величина имеет распределение *N(5,2)*.

Найдите мат. ожидание и дисперсию.

$$MX = 5$$

$$\sigma = 2$$

$$DX = \sigma^2 = 4$$

Многомерные случайные величины

Во многих ситуациях результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой совокупностью случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

которую называют **многомерной** (n-мерной) случайной величиной

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

При этом ξ_i называют i-той компонентой $\vec{\xi}$.

Многомерные случайные величины

Примеры многомерных случайных величин:

1. Успеваемость выпускника вуза характеризуется совокупностью n случайных величин: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – оценки по различным дисциплинам в приложении к диплому.

Многомерные случайные величины

Примеры многомерных случайных величин:

2. Погода в данной местности в определенное время суток может быть охарактеризована совокупностью случайных величин:
   ξ_1 – температура, ξ_2 –давление, ξ_3– влажность воздуха, ξ_4 – скорость ветра и т.д.

Случайные величины могут быть *дискретными* (пример 1), *непрерывными* (пример 2), *смешанными* (дискретно-непрерывными).

Многомерные случайные величины

Функцией распределения n-мерной случайной величины $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется

функция n аргументов $F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
выражающая вероятность совместного осуществления (пересечения) n событий $\{\xi_1 < x_1\}, \{\xi_2 < x_2\}, \dots, \{\xi_n < x_n\}$:

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}.$$

Многомерную функцию распределения называют **совместной** функцией распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Многомерные случайные величины

Функция распределения

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}$$

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\}.$$

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}$$

совместная функцией распределения сл. величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Многомерные случайные величины

Законы распределения:

- для n-мерных дискретных сл. в.:
  n-мерная таблица распределения;
- для n-мерных непрерывных сл. в.:
  плотность распределения вероятностей.

Для простоты изложения в дальнейшем будем рассматривать **двумерные** случайные величины.

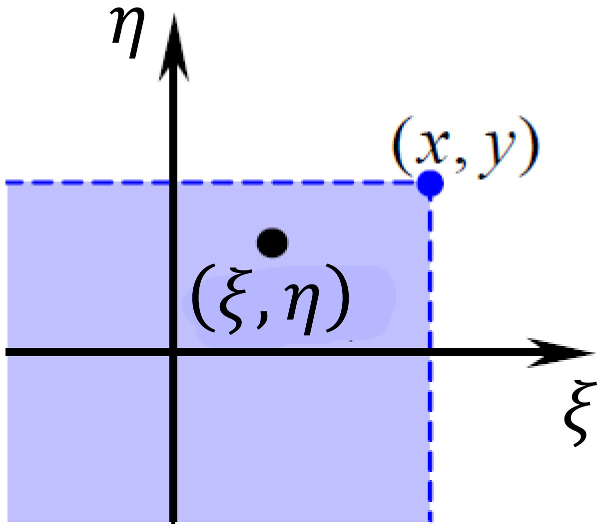
На общий случай все результаты легко переносятся.

Двумерные случайные величины

Совместная функция распределения совокупности сл. в. (ξ,η)

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = F(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$$

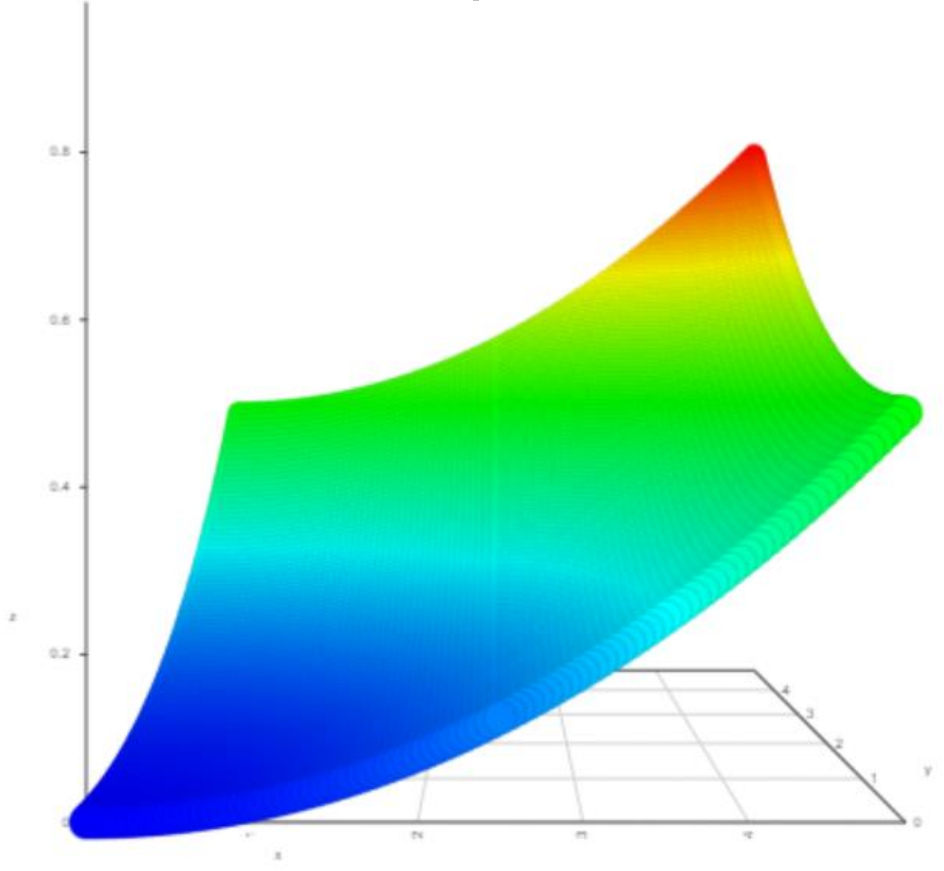
Геометрически $F(x,y)$ – вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в квадрант, расположенный левее и ниже точки(x,y).

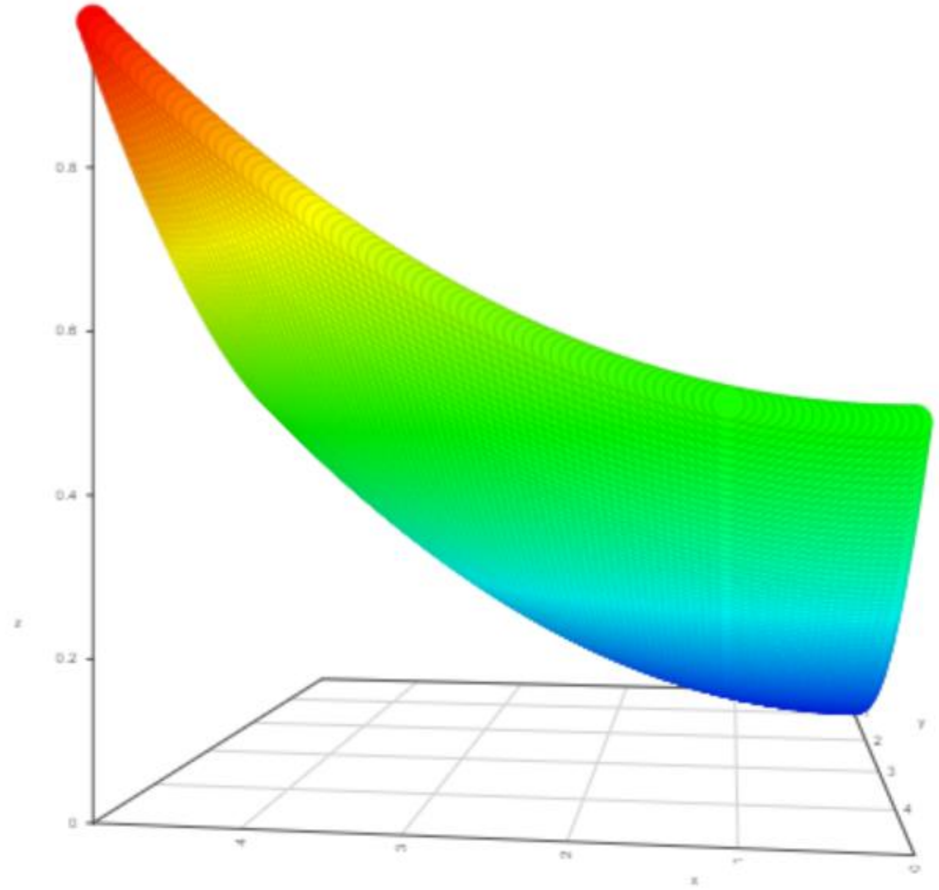


Двумерные случайные величины

Совместная функция распределения совокупности сл. в. (ξ, η)

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$$





Двумерные случайные величины

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$$

Свойства функции распределения:

1. Функция распределения заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1, x \in R$$

2. Функция не убывает по каждому аргументу в отдельности:

если $x_1 < x_2$, то $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$,

если $y_1 < y_2$, то $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$

Двумерные случайные величины

3. Функция распределения непрерывна слева по каждому аргументу:

$$F(x_0 - 0, y) = \lim_{x \to x_0,\, x < x_0} F(x, y) = F(x_0, y)$$

$$F(x, y_0 - 0) = \lim_{y \to y_0,\, y < y_0} F(x, y) = F(x, y_0)$$

Двумерные случайные величины

4. Функция распределения удовлетворяет следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$$

Двумерные случайные величины

5. Знаая функцию $F(x,y)$ можно найти функции распределения $F(x)$ и $F(x)$ ее составляющих ξ и η:

$$F(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = F(x,+\infty)$$

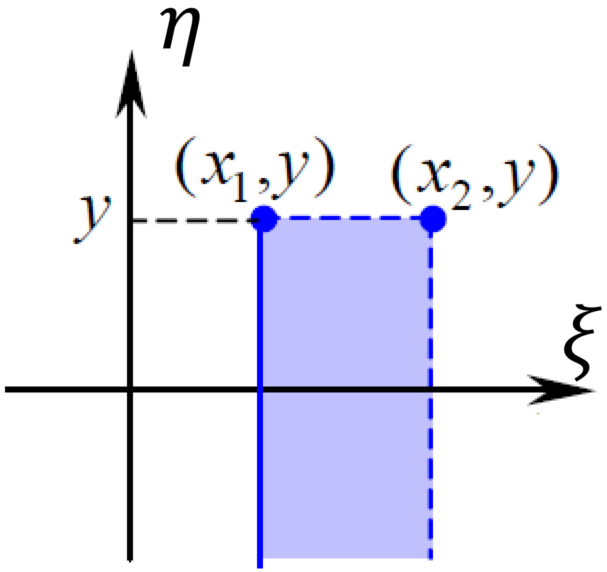
$$F(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F(+\infty,y)$$

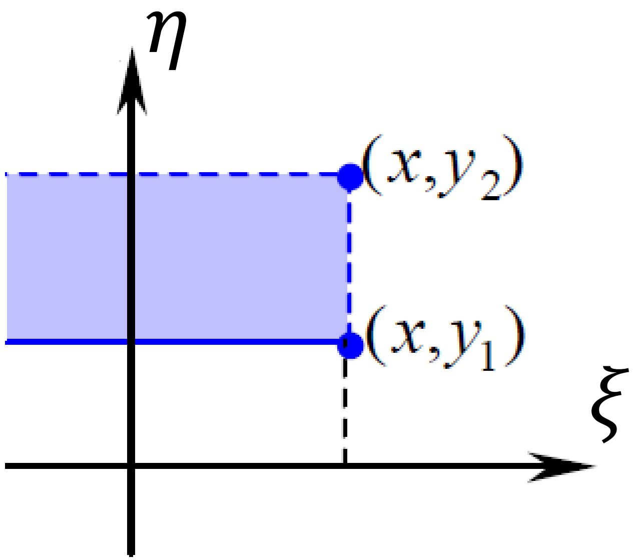
Двумерные случайные величины

6. Вероятность попадания случайной точки в полуполосу находится по формулам:

$$P\{x_1 \le \xi < x_2, \eta < y\} = F(x_2, y) - F(x_1, y)$$

$$P\{\xi < x, y_1 \le \eta < y_2\} = F(x, y_2) - F(x, y_1)$$



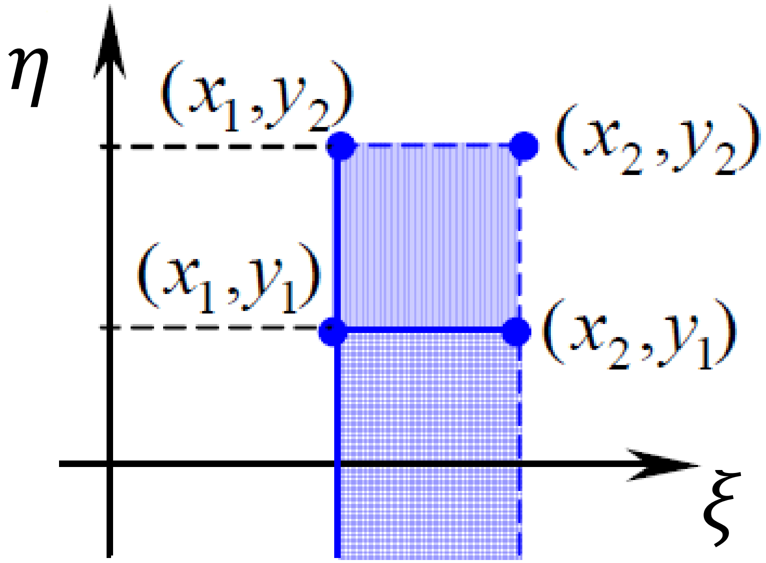


Двумерные случайные величины

7. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник находится по формуле:

$$P\{x_1 \le \xi < x_2, y_1 \le \eta < y_2\} =$$

$$= \left(F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)\right) - \left(F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)\right)$$



Двумерные дискретные случайные величины

Пусть ξ, η – одномерные *дискретные* сл. в., причем:
ξ может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$,
η может принимать значения $y_1, y_2, \dots, y_n \dots$

Тогда случайная величина (ξ, η) – двумерная сл. в. с множеством возможных значений $\left(x_i, y_{\mathrm{j}}\right), i = 1,2, \dots, j = 1,2, \dots$ (множество значений сл. в. – конечно или счётно).

Пусть $P\left(x_i, y_j\right) = P\left(\xi = x_i, \eta = y_j\right) = p_{ij}$

Двумерные дискретные случайные величины

Закон распределения двумерной *дискретной* сл. в. – двумерная таблица, в которой перечислены все возможные значения (x_i, y_j) и соответствующие им вероятности.

	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y_2}$	…	$\mathbf{y_n}$
$\mathbf{x_1}$	p_{11}	p_{12}		p_{1n}
$\mathbf{x_2}$	p_{21}	p_{22}		p_{2n}
…				
$\mathbf{x_n}$	p_{n1}	p_{n1}		p_{nn}

Двумерные дискретные случайные величины

	y_1	y_2	…	y_n	p_{i*}
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{2j}$
…					…
x_n	p_{n1}	p_{n1}		p_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} p_{nj}$
p_{*j}	$\sum_{i=1}^{n} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} p_{in}$	

Частные (маргинальные) законы распределения компонент двум. сл. в.:

$$p_{i*} = P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \qquad p_{*j} = P\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

Двумерные дискретные случайные величины

	y_1	y_2	…	y_n	p_{i*}
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{2j}$
…					…
x_n	p_{n1}	p_{n1}		p_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} p_{nj}$
p_{*j}	$\sum_{i=1}^{n} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} p_{in}$	**1**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_{i*} = \sum_{j=1}^{n} p_{*j} = 1$$

Двумерные дискретные случайные величины

Пример:

Производится подбрасывание двух игральных костей.
Пусть ξ – количество очков на первом кубике, η – на втором.

	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	…	$\boldsymbol{y_n}$	$\boldsymbol{p_{i*}}$
$\boldsymbol{x_1}$	p_{11}	p_{12}		p_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{1j}$
$\boldsymbol{x_2}$	p_{21}	p_{22}		p_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{2j}$
…					…
$\boldsymbol{x_n}$	p_{n1}	p_{n1}		p_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} p_{nj}$
$\boldsymbol{p_{*j}}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} p_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} p_{in}$	$\mathbf{1}$

Двумерные дискретные случайные величины

Пример:

В продукции завода брак вследствие дефекта А составляет 10%, а вследствие дефекта В - 20%.

Вероятность того, что изделие обладает обеими дефектами сразу – 5%.

Пусть X - индикатор дефекта А, а Y - индикатор дефекта В.

Составить матрицу распределения двумерной случайной величины (X, Y).

Найти одномерные ряды распределений составляющих X и У.

Двумерные дискретные случайные величины

Решение:

P(A) = 0.1

P(B) = 0.2

P(A*B) = 0.05

X - индикатор дефекта A

Y - индикатор дефекта B.

Двумерные дискретные случайные величины

Решение:

P(A) = 0.1

P(B) = 0.2

P(A*B) = 0.05

X \ Y	**0**	**1**	p_{i*}
0	0.75	0.15	
1	0.05	0.05	
p_{*j}			

$P(\overline{A}*B) = P(B) – P(A*B) = 0.2 – 0.05 = 0.15$

$P(\overline{B}*A) = P(A) – P(A*B) = 0.1 – 0.05 = 0.05$

$P(\overline{A}*\overline{B}) = 1 – (P(A) + P(B) – P(A*B)) = 1 – (0.1 + 0.2 – 0.05) = 0.75$

Двумерные дискретные случайные величины

Совместный закон распределения величины (X, Y)

X \ Y	0	1	p_{i*}
0	0.75	0.15	*0.9*
1	0.05	0.05	*0.1*
p_{*j}	*0.8*	*0.2*	***1***

Частные законы распределения величин X и Y

x_i	0	1	Σ
p_i	*0.9*	*0.1*	***1***

y_j	0	1	Σ
p_j	*0.8*	*0.2*	***1***

Двумерные непрерывные случайные величины

Пусть (ξ,η) – непрерывная двумерная сл. в., а $F_{\xi,\eta}(x,y)$ – функция распределения этой сл. в.

$F_{\xi,\eta}(x,y)$ непрерывна и дважды дифференцируема (всюду, за исключением возможно конечного числа кривых).

Законом распределения двумерной *непрерывной* сл. в. является двумерная или совместная плотность распределения вероятностей:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{d^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{dxdy}$$

График функции $f_{\xi,\eta}(x,y)$ называют *поверхностью* распределения двумерной сл. в.

Двумерные непрерывные случайные величины

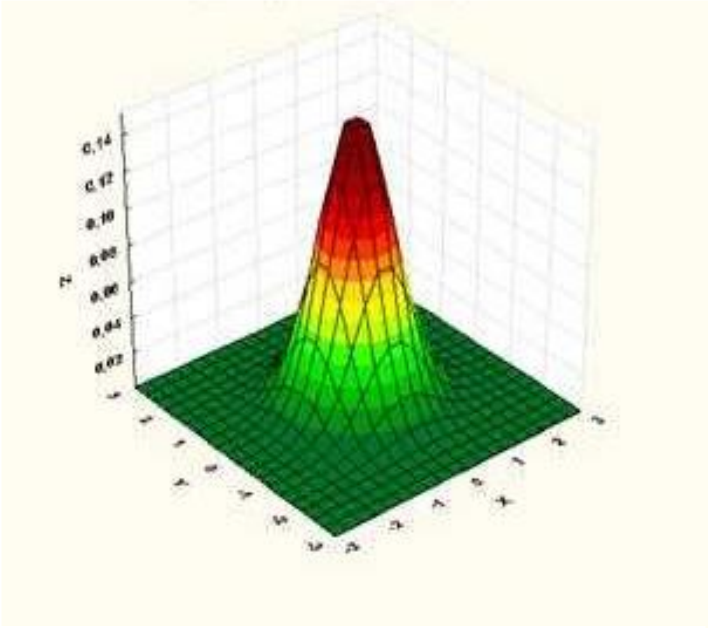
Законом распределения двумерной непрерывной сл. в. является двумерная или совместная плотность распределения вероятностей:

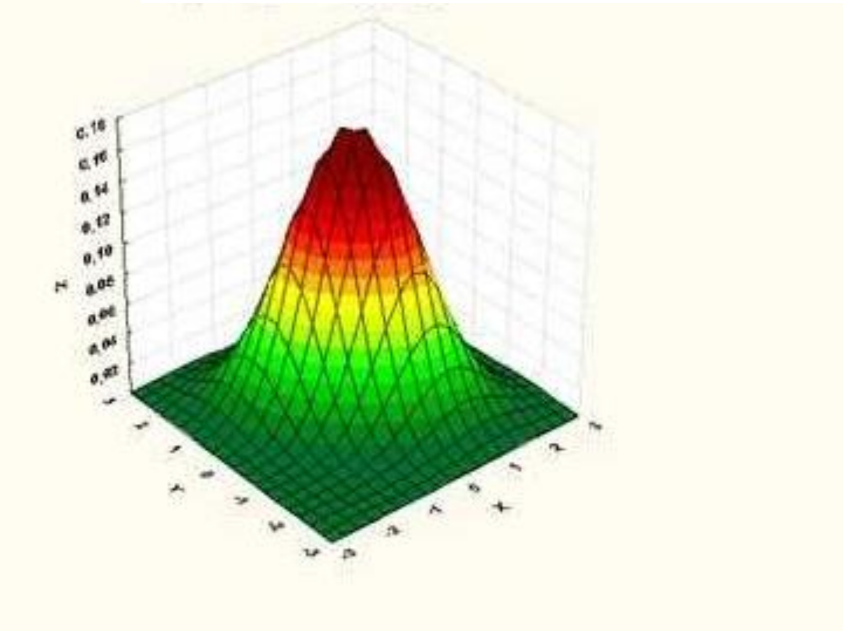
$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{d^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{dxdy}$$

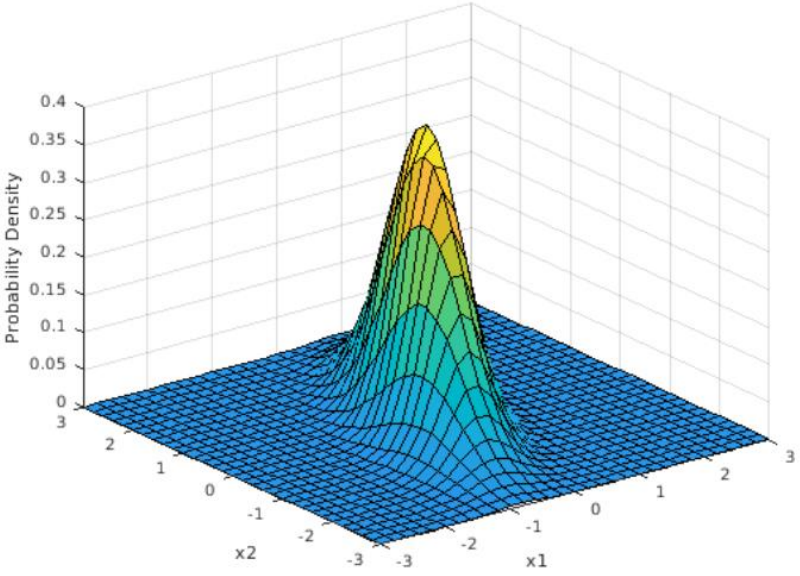
Функция распределения двумерной сл. в. может быть найдена по формуле:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dy\,dx$$

Двумерные непрерывные случайные величины







Двумерные непрерывные случайные величины

Частные (маргинальные) плотности распределения компонент двум. сл. в.:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Функция распределения компонент двум. сл. в.:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\,dy$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx\,dy$$

Двумерные непрерывные случайные величины

Пример:

Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y; & x, y \in D \\ 0; & x, y \notin D \end{cases}, \text{ где}$$

$$D = [\, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \,]$$

Найти частные (маргинальные) законы распределения и функцию распределения *F(x)*.

Двумерные непрерывные случайные величины

Пример: Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y; & x,y \in D \\ 0; & x,y \notin D \end{cases}, \quad \text{где } D = [\,0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\,]$$

Найдем частные (маргинальные) законы распределения:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = x + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 (x+y)dx = y + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = y + \frac{1}{2}$$

Двумерные непрерывные случайные величины

Пример: Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y; & x, y \in D \\ 0; & x, y \notin D \end{cases}, \qquad \text{где } D = [\,0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\,]$$

Найдем функцию распределения.

$$\boldsymbol{F(x,y)} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,ds\,dt = \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} (t+s)\,ds\,dt = \int_{0}^{x} \left(t + \frac{s^2}{2} \Big|_0^{y} \right) dt =$$

$$= \int_{0}^{x} \left(s + \frac{y^2}{2} \right) ds = \frac{s^2}{2} \Big|_0^{x} + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \boldsymbol{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

Совместная плотность распределения

Свойства плотности распределения $\boldsymbol{f}(x, y)$

1. Плотность распределения является неотрицательной функцией:

$$f(x, y) \geq 0 \text{ для всех } x \in R$$

2. Выполняется условия нормирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx\, dy = 1$$

Совместная плотность распределения

3. Пусть A – произвольная квадрируемая плоская область. Тогда Вероятность попадания двумерной сл. в. в заданную область A может быть найдена по формуле:

$$P\{(\xi,\eta) \in A\} = \iint\limits_A f(x,y)dxdy$$

Геометрический смысл:

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в плоскую область A численно равна объему цилиндрического тела с основанием A и ограниченного функцией $f(x,y)$.

Независимые двумерные случайные величины

Случайные величины ξ, η **независимы**,
если совместный закон распределения совокупности этих сл. в. представим в виде *произведения законов распределения* каждой из компонент этой совокупности.

Дискретные сл. в. ξ, η независимы, если для всех i, j = 1, 2, …

$$p_{ij} = p_{i*} * p_{*j}, \qquad \text{т. е. } P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}P\{\eta = y_j\}$$

Непрерывные сл. в. ξ, η независимы, если для всех x, y ∈ R

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$$

Независимые двумерные случайные величины

Совместный и частные законы распределения величин (X, Y) и X, Y

X \ Y	0	1	p_{i*}
0	0.75	0.15	*0.9*
1	0.05	0.05	*0.1*
p_{*j}	*0.8*	*0.2*	***1***

x_i	0	1	Σ
p_i	*0.9*	*0.1*	***1***

y_j	0	1	Σ
p_j	*0.8*	*0.2*	***1***

Являются ли величины независимыми?

Независимые двумерные случайные величины

Совместный и частные законы распределения величин (X, Y) и X, Y

X \ Y	0	1	p_{i*}
0	0.75	0.15	*0.9*
1	0.05	0.05	*0.1*
p_{*j}	*0.8*	*0.2*	***1***

x_i	0	1	Σ
p_i	*0.9*	*0.1*	***1***

y_j	0	1	Σ
p_j	*0.8*	*0.2*	***1***

P{X = 0, Y = 0} = **0.75**

P{X = 0} = 0.9   P{Y = 0} = 0.8

P{X = 0} * P{Y = 0} = **0.72** != 0.75, а значит, **величины зависимы**

Независимые двумерные случайные величины

Совместный и частные законы распределения величин (X, Y) и X, Y

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y; & x, y \in D \\ 0; & x, y \notin D \end{cases}, \quad \text{где } D = [\,0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\,]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \qquad f(y) = y + \frac{1}{2}$$

Являются ли величины независимыми?

Независимые двумерные случайные величины

Совместный и частные законы распределения величин (X, Y) и X, Y

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y; & x,y \in D \\ 0; & x,y \notin D \end{cases}, \quad \text{где } D = [\,0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\,]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \qquad f(y) = y + \frac{1}{2}$$

$$f(x) * f(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) * \left(y + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{xy + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \neq f(x,y)}$$

Величины зависимы

Двумерные случайные величины

Основные **числовые характеристики** двумерной сл. в. (ξ, η):

- математические ожидания $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$;
- дисперсии $\mathrm{D}\xi$ и $\mathrm{D}\eta$;
- ковариация $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$;
- коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Математическое ожидание двумерных сл. в.

Мат. ожидание дискретных двумерных случайных величин

Если (ξ, η) – дискретная случайная величина, то

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i * P\{\xi = x_i\} = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i * \left(\sum_{j=1}^{m(\infty)} p_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} x_i * p_{ij}$$

$$M\eta = \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j * P\{\eta = y_j\} = \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j * \left(\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j * p_{ij}$$

Математическое ожидание двумерных сл. в.

Мат. ожидание непрерывных двумерных случайных величин

Если (ξ, η) – непрерывная случайная величина, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x, y) dx\, dy$$

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y * f(x, y) dx\, dy$$

Mξ и Mη существуют, если интегралы сходятся абсолютно.
В противном случае говорят, что сл. в. не имеет мат. ожидания.

Математическое ожидание двумерных сл. в.

Математические ожидания $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ – характеристики положения значений сл. в. на плоскости.

Они являются координатами **центра рассеивания значений** двумерной сл. в.

Математические ожидания $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание одной случайной величины.

Дисперсия двумерных случайных величин

Дисперсия дискретных двумерных случайных величин

Если (ξ, η) – дискретная случайная величина, то

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} (x_i - M\xi)^2 * p_{ij}$$

$$D\eta = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} \left(y_j - M\eta\right)^2 * p_{ij}$$

Дисперсия двумерных случайных величин

Дисперсия непрерывных двумерных случайных величин:

Если (ξ, η) – непрерывная случайная величина, то

$$\mathrm{D\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M\xi})^2 * f(x, y) dx\, dy$$

$$\mathrm{D\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mathrm{M\eta})^2 * f(x, y) dx\, dy$$

Дисперсия двумерных случайных величин

Дисперсии $\mathrm{D}\xi$ и $\mathrm{D}\eta$ характеризуют **рассеивание значений двумерной** сл. в. вдоль осей Ox и Oy соответственно.

Дисперсии $\mathrm{D}\xi$ и $\mathrm{D}\eta$ обладают теми же свойствами, что и дисперсия одной случайной величины.

Справедливой остается формула

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2$$

Двумерные случайные величины

Совместный и частные законы распределения величин (X, Y) и X, Y

X \ Y	**0**	**1**	p_{i*}
0	0.75	0.15	*0.9*
1	0.05	0.05	*0.1*
p_{*j}	*0.8*	*0.2*	***1***

x_i	**0**	**1**	**Σ**
p_i	*0.9*	*0.1*	***1***

y_j	**0**	**1**	**Σ**
p_j	*0.8*	*0.2*	***1***

Найти мат. ожидание и дисперсию двумерной дискретной сл. в.

Двумерные случайные величины

Совместный закон распределения величины (X, Y)

X \ Y	**0**	**1**	$\boldsymbol{p_{i*}}$
0	0.75	0.15	*0.9*
1	0.05	0.05	*0.1*
$\boldsymbol{p_{*j}}$	*0.8*	*0.2*	***1***

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i * P\{\xi = x_i\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i * p_{ij}$$

$$\boldsymbol{MX} = 0 * 0.9 + 1 * 0.1 = \mathbf{0.1} = (0 * 0.75 + 1 * 0.05) + (0 * 0.15 + 1 * 0.05)$$

$$\boldsymbol{MY} = 0 * 0.8 + 1 * 0.2 = \mathbf{0.2} = (0 * 0.75 + 1 * 0.15) + (0 * 0.05 + 1 * 0.05)$$

Двумерные случайные величины

$$\mathbf{D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2}$$

$$MX^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 * P\{\xi = x_i\}$$

$$MX^2 = 0^2 * 0.9 + 1^2 * 0.1 = 0.1$$

$$MY^2 = 0^2 * 0.8 + 1^2 * 0.2 = 0.2$$

$$\boldsymbol{DX} = MX^2 - (MX)^2 = 0.1 - 0.01 = \mathbf{0.09} \qquad \sigma_x = 0.3$$

$$\boldsymbol{DY} = MY^2 - (MY)^2 = 0.2 - 0.04 = \mathbf{0.16} \qquad \sigma_y = 0.4$$

Двумерные случайные величины

Совместный и частные законы распределения величин (X, Y) и X, Y

$$f(x) = \begin{cases} x + y; & x, y \in D \\ 0; & x, y \notin D \end{cases}, \quad \text{где } D = [\, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \,]$$

Найти мат. ожидание и дисперсию двумерной непрерывной сл. в.

Двумерные случайные величины

Совместный и частные законы распределения величин (X, Y) и X, Y

$$f(x) = \begin{cases} x + y; & x, y \in D \\ 0; & x, y \notin D \end{cases}, \quad \text{где } D = [\ 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\ ]$$

$$\boldsymbol{MX} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x, y)dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 x * (x + y)dx\,dy = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}$$

$$\boldsymbol{MY} = \int_0^1\int_0^1 y * (x + y)dx\,dy = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}$$

Двумерные случайные величины

$$\mathbf{D\xi = M\left(\xi^2\right) - (M\xi)^2}$$

$$MX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f(x,y)dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 x^2 * (x+y)dx\,dy = \frac{5}{12} = MY^2$$

$$\boldsymbol{DX} = MX^2 - (MX)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144} = \boldsymbol{DY}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0.28$$

Ковариация случайных величин

Пусть ξ, η – случайные величины,
имеющие математические ожидания $M\xi, \quad M\eta$ соответственно.

Ковариацией (корреляционным моментом) сл. в. ξ и η называется математическое ожидание произведения их отклонений:

$$cov(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi) * (\eta - M\eta)]$$

Ковариация случайных величин

$$cov(\xi,\eta) = M[(\xi - M\xi) * (\eta - M\eta)]$$

- По свойствам мат. ожидания

$$\boldsymbol{cov(\xi,\eta) = M(\xi * \eta) - M\xi * M\eta}$$

- Если $\xi = \eta$

$$cov(\xi,\xi) = M(\xi * \xi) - M\xi * M\xi = D\xi$$

- Кроме того,

$$\boldsymbol{cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)}$$

- Отсюда, дисперсия суммы двух сл. в.:

$$\boldsymbol{D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2 * cov(\xi,\eta)}$$

Ковариация случайных величин

Пусть ξ, η – независимые случайные величины.

Тогда $\xi - M\xi, \eta - M\eta$ – тоже независимы.

Тогда,

$$cov(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi) * (\eta - M\eta)] =$$
$$M(\xi - M\xi)] * M(\eta - M\eta) = 0$$

$\mathbf{cov}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$ – **необходимое условие независимости сл. в. ξ и η**

Однако это условие не является достаточным,
т.к. существуют зависимые ξ и η, для которых $cov(\xi, \eta) = 0$.

Ковариация случайных величин

В общем случае справедливы утверждения:

1) Если $cov(\xi, \eta) \neq 0$, то ξ и η – зависимые сл. в.

2) Если $cov(\xi, \eta) = 0$,
то о характере связи ξ и η ничего сказать нельзя

Ковариация – числовая характеристика *взаимосвязи* случайных величин.

Коэффициент корреляции случайных величин

Недостаток ковариации – ее размерность равна произведению размерностей отклонений СВ от своих математических ожиданий (т.е. произведению размерностей СВ). Для устранения этого недостатка вводят безразмерную величину – коэффициент корреляции.

Коэффициент корреляции (линейный коэффициент корреляции, коэффициентом корреляции Пирсона):

$$\mathrm{r}(\xi, \eta) = r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

Коэффициент корреляции также является *числовой характеристикой взаимосвязи случайных величин.*

Коэффициент корреляции случайных величин

Коэффициент корреляции:

$$\mathrm{r}(\xi,\eta) = r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

- Случайные величины называются **коррелированными**, если $\mathrm{r}(\xi,\eta) \neq 0$
- Если $\mathrm{r}(\xi,\eta) = 0$, то случайные величины – **некоррелированные**.
- Если величины ξ, η независимы, то они некоррелированные.
- Зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными <u>(ничего сказать нельзя)</u>

Коэффициент корреляции случайных величин

Сл. величины	**Некоррелированные**	**Коррелированные**
Независимые	$\mathrm{r}(\xi, \eta) = 0$	Невозможно
Зависимые	$\mathrm{r}(\xi, \eta) = 0$	$\mathrm{r}(\xi, \eta) \neq 0$

Коэффициент корреляции случайных величин

Свойства **коэффициента корреляции**:

1. $|\mathrm{r}(\xi, \eta)| \leq 1$

2. $\mathrm{r}(\xi, \xi) = 1$

3. Если $\mathrm{r}(\xi, \eta) = 1$, то случайные величины ξ и η связаны *линейной зависимостью*,

   то есть $\eta = a * \xi + b$, где *a, b* – числа.

Двумерные случайные величины

X \ Y	0	1	p_{i*}
0	0.75	0.15	*0.9*
1	0.05	0.05	*0.1*
p_{*j}	*0.8*	*0.2*	***1***

MX = 0.1 σ_X = 0.3

MY = 0.2 σ_Y = 0.4

Найти ковариацию и коэффициент корреляции дискретных сл. в.

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i * y_j * p_{ij} = 0.05$$

$$\boldsymbol{cov(X,Y)} = M(XY) - MX * MY = 0.05 - 0.1 * 0.2 = \mathbf{0.03}$$

$$\boldsymbol{r(X,Y)} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0.03}{0.3 * 0.4} = \mathbf{0.25}$$

Двумерные случайные величины

$$f(x) = \begin{cases} x + y; & x, y \in D \\ 0; & x, y \notin D \end{cases},$$

где $D = [\, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \,]$

MX = MY = 7/12 $\sigma_X = \sigma_Y$ = 0.64

Найти ковариацию и коэффициент корреляции непрерывных сл. в.

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x * y * f(x,y)dx\,dy = 1/3$$

$$\boldsymbol{cov(X,Y)} = M(XY) - MX * MY = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} * \frac{7}{12} = \boldsymbol{-0.007}$$

$$\boldsymbol{r(X,Y)} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0.007}{0.28 * 0.28} = \boldsymbol{-0.089}$$

Контрольная по блоку 2

4 задания

Дискретные сл. в.:

1. Закон распределения, функция распределения F(x),
   мат. ожидание, дисперсия,
   вероятность хотя бы одного успеха

2. Закон распределения,
   функция распределения F(x),
   график F(x), вероятность попадания в диапазон

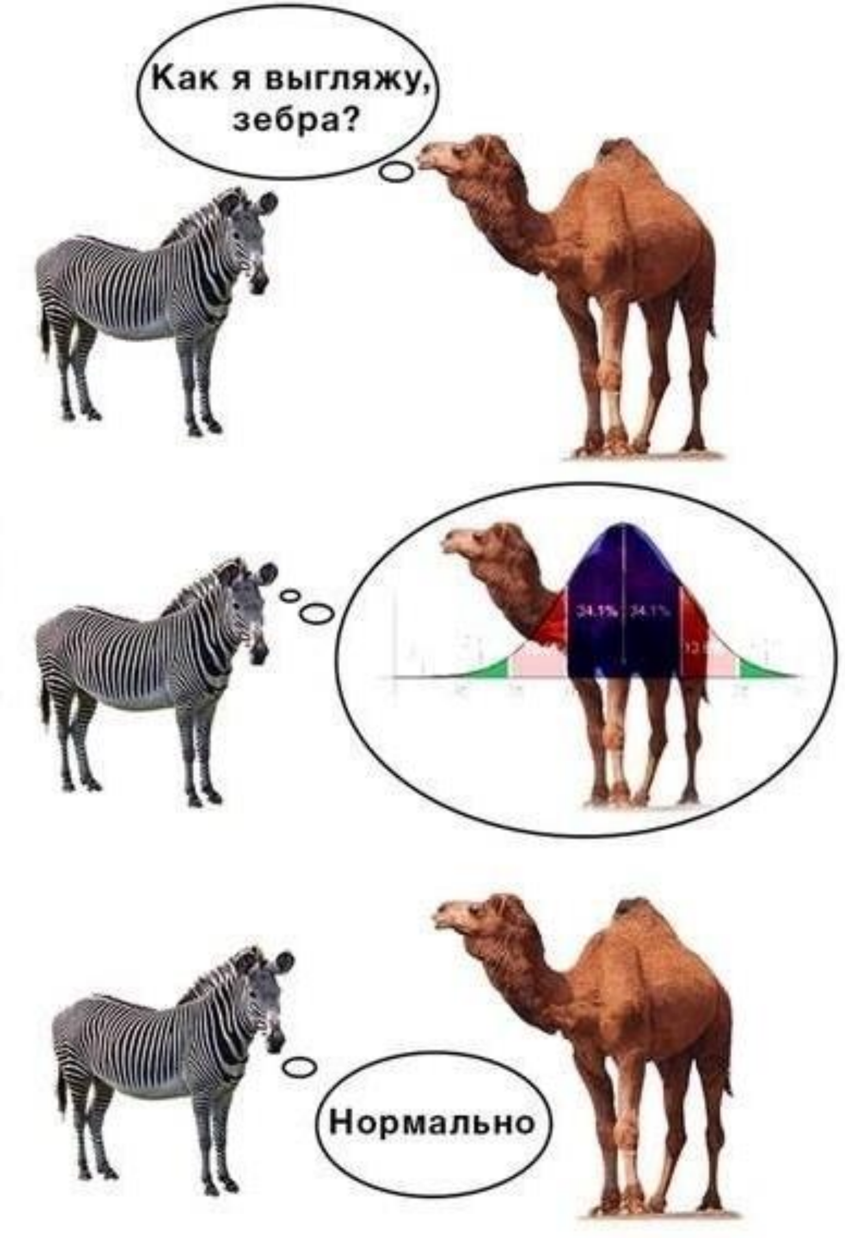
Контрольная по блоку 2

4 задания

Непрерывные сл. в.:

3. Константа в плотности, функция распределения F(x), мат. ожидание, дисперсия, вероятность попадания в диапазон

4. *Нормальное распределение*: формула, график, вероятность попадания в диапазон, наибольшее отклонение от мат. ожидания



Контрольная по блоку 2

4 задания

Дискретные сл. в.: *1 задание* - **5 баллов**, 2 задание – **3 балла**

Непрерывные сл. в.: 3 задание - **5 баллов**, 4 задание – **3 балла**

- ОБЯЗАТЕЛЬНО решение и ответ

Общая сумма: 16 баллов

Пороговый балл: 8 баллов