Федеральное агентство связи

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»

**О.Е.Дмитриева, Т.С.Мурзина,
Л.А.Подмогаева, В.К.Трофимов**

Сборник задач по математическому анализу 2 семестр

Учебное пособие

**Новосибирск
2011**

УДК 517(075.8)
Доцент О.Е.Дмитриева, доцент Т.С.Мурзина, доцент Л.А.Подмогаева, профессор В.К.Трофимов. Сборник задач по математическому анализу. 2 семестр. Учебное пособие/СибГУТИ.- Новосибирск, 2011г.- 92 стр.

Учебное пособие содержит задачи по курсу математического анализа по программе 2 семестра технических вузов. Материал разбит на отдельные занятия, в каждом из которых кратко представлена теория по изучаемой теме, даны примеры решения некоторых задач. Даны задания для аудиторной и для домашней работы. В некоторых занятиях приведены дополнительные задания. Все задания подобраны в соответствии с разработками кафедры высшей математики СибГУТИ. Большинство задач взяты из задачников Г.Н.Бермана и А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича.

Учебное пособие может быть использовано в качестве задачника по курсу математического анализа для технических специальностей втузов.

Кафедра высшей математики
Ил.-21, список литературы – 5 назв.

Для направления 210400

Рецензенты: Г.Г.Черных,
Г.С.Хакимзянов

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ в качестве учебного пособия.

Занятие 1
Простейшие приемы интегрирования. Непосредственное интегрирование.

Понятие неопределенного интеграла

Определение*. Если функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на интервале* (a,b) *и* $F(x)$ *её первообразная, т.е.* $F'(x) = f(x)$*, при* $x \in (a,b)$ *то*

$$\int f(x)dx = F(x)+C,\ x \in (a,b)$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)+C$
2. $\int f'(x)dx = f(x)+C$
3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx,\ \ \alpha \neq 0$
4. $\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Таблица простейших интегралов:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C \quad (x \neq 0)$

3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0, a \neq 1)$;

$\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm 1}\right|+C$

12. $\int shx dx = chx + C$

13. $\int chx dx = shx + C$

14. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

Основные методы интегрирования

а) Метод введения нового аргумента (подведение под знак дифференциала). Метод основан на правиле вычисления дифференциала, а именно если $u = \varphi(x)$ *непрерывная дифференцируемая функция, то* $du = \varphi'(x)dx$.

В частности имеют место равенства $x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$, $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, ...

Из сказанного выше вытекает: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то* $\int f(u)du = F(u) + C$

Пример 1.1 $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}dx = \left|\frac{1}{\sin^2 x}dx = -(\operatorname{ctg} x)' dx = -d(\operatorname{ctg} x)\right| =$

$= -\int \operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x) = \left\langle \int u du \right\rangle = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C.$

Пример 1.2 $\int \frac{xdx}{x^4+5} = \left|xdx = \frac{1}{2}(x^2)' dx = \frac{1}{2}d(x^2)\right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+5} =$

$= \left\langle \int \frac{du}{u^2+5} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

б) Метод разложения.

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *то* $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Пример 1.3 $\int \frac{1-3\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - 3\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx =$

$= \left|\cos x dx = (\sin x)' dx = d(\sin x)\right| = -\operatorname{ctg} x - 3\int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} = \left\langle \int u^{-2}du \right\rangle =$

$= -\operatorname{ctg} x - 3\cdot\frac{\sin^{-1} x}{-1} + C = -\operatorname{ctg} x + \frac{3}{\sin x} + C.$

в) Метод подстановки.

Если $f(x)$ *– непрерывна, то, полагая* $x = \varphi(t)$, *где* $\varphi(t)$ *непрерывна вместе со своей производной* $\varphi'(t)$, *получим* $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример 1.4 $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{4-9^x}} = \left|\begin{array}{l} 3^x = t, \quad d(3^x) = dt \\ \text{тогда } 3^x \ln 3 dx = dt, \quad 3^x dx = \frac{dt}{\ln 3} \end{array}\right| =$

$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{\ln 3}\cdot\arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{\ln 3}\cdot\arcsin\frac{3^x}{2} + C.$

Пример 1.5 $\int \frac{x+1}{\sqrt{2+x}}dx = \left|\begin{array}{l} 2+x = z, \quad x = z-2 \\ d(2+x) = dz, \quad dx = dz \end{array}\right| = \int \frac{z-2+1}{\sqrt{z}}dz = \int \frac{z}{\sqrt{z}}dz +$

$+ \int \frac{-1}{\sqrt{z}}dz = \int z^{\frac{1}{2}}dz - \int z^{-\frac{1}{2}}dz = = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3/2} - \frac{z^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3} - 2\sqrt{2+x} + C.$

Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

1.1) $\int \sqrt{mx}dx$; **1.2)** $\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx$; **1.3)** $\int 2^x e^x dx$; **1.4)** $\int \frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$; **1.5)** $\int \frac{1}{x^2+4}dx$; **1.6)** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

Используя подведение под знак дифференциала, найти следующие интегралы:

1.7) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+1}}$; **1.8)** $\int \frac{\sin ax}{\cos^3 ax}dx$; **1.9)** $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2}dx$; **1.10)** $\int \mathrm{ctg}4xdx$; **1.11)** $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+1)}$; **1.12)** $\int \frac{dx}{4x^2+7}$; **1.13)** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$.

Интегралы на различные приемы непосредственного интегрирования:

1.14) $\int \frac{x}{x+4}dx$; **1.15)** $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$; **1.16)** $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; **1.17)** $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$; **1.18)** $\int \frac{dx}{x(x-1)}$; **(**указание: $\frac{1}{x^2-x}=\frac{(1-x)+x}{x^2-x}$**)**; **1.19)** $\int \frac{xdx}{3x^2+1}$;

1.20) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$ **1.21)** $\int \sqrt{3+x}dx$;**1.22)** $\int chxshxdx$;.**1.23)** $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 3x}$;

1.24) $\int x\cdot 5^{-x^2}dx$; **1.25)** $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}}dx$; **1.26)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; **1.27)** $\int \frac{x^3}{x^8+1}dx$ **1.28)** $\int \frac{x^2-2x}{x^2-4}dx$; **1.29)** $\int \frac{dx}{2^x+1}$; **1.30)** $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}dx$; **1.31)** $\int \frac{dx}{x^2-6x}$.

Домашнее задание.

1.32) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$; **1.33)** $\int \frac{x^3+2}{x}dx$; **1.34)** $\int (2x+3\cos x)dx$; **1.35)** $\int \mathrm{tg}^2 xdx$; **1.36)** $\int \frac{dx}{5+x^2}$; **1.37)** $\int \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}dx$; **1.38)** $\int (x+a)(x+b)dx$;

1.39) $\int \frac{3+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; **1.40)** $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

1.41) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; **1.42)** $\int \frac{\sec^2 x}{a-b\,\mathrm{tg}\,x}dx$; **1.43)** $\int \mathrm{ctg}xdx$; **1.44)** $\int \cos(ax+b)dx$;

1.45) $\int \sin\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Применяя различные приемы, найти неопределенные интегралы:

1.46) $\int \frac{x-1}{(x+2)^2}dx$ **(**указание: $\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)-3}{(x+2)^2}$**)**; **1.47)** $\int \frac{x^2}{3+x^2}dx$; **1.48)** $\int \frac{x}{(3-x)^7}dx$.

Занятие 2
Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям. *Если* u *и* v *- некоторые дифференцируемые функции от* x*, то формула интегрирования по частям следует из формулы дифференциала произведения, которая имеет вид* $d(uv)=udv+vdu$*. Отсюда* $udv=d(uv)-vdu$*. Интегрируя последнее равенство, получаем требуемую формулу*

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Пример 2.1 $\int (x^2+3)\cdot\cos 3x dx=\left|\begin{matrix}\textit{полагаем}\ U=x^2+3;\quad dV=\cos 3x dx,\\ \textit{тогда}\ \ dU=2xdx;\\ V=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=$

$$=(x^2+3)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2xdx=\frac{1}{3}(x^2+3)\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\int x\sin 3xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{полагаем}\ U=x;\quad dV=\sin 3xdx,\\ \textit{тогда}\ \ dU=dx;\quad V=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}(x^2+3)\cdot\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx\right)=\frac{1}{3}(x^2+3)\cdot\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$$

Пример 2.2 $\int x^4\ln xdx=\left|\begin{matrix}\textit{полагаем}\ U=\ln x;\ \ dV=x^4dx,\\ \textit{тогда}\ \ dU=\frac{1}{x}dx;\ \ V=\int x^4dx=\frac{x^5}{5}\end{matrix}\right|=\ln x\cdot\frac{x^5}{5}-$

$$-\int\frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{5}\int x^4dx=\ln x\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5}+C=\frac{x^5\cdot\ln x}{5}-\frac{x^5}{25}+C$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

2.1) $\int\arccos xdx$**; 2.2)** $\int x\cos xdx$**; 2.3)** $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$**; 2.4)** $\int x^2\sin xdx$**; 2.5)** $\int x^3e^xdx$**; 2.6)*** $\int x^3e^{-x^2}dx$ **(**положить $u=x^2$, $dv=xe^{-x^2}dx$**); 2.7)** $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$**; 2.8)** $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$**; 2.9)** $\int e^{\arccos x}dx$**; 2.10)** $\int x^3\ln xdx$**; 2.11)** $\int(x^2-2x+3)\cos xdx$**; 2.12)** $\int\cos(\ln x)dx$**.**

Вычислить интегралы:

2.13) $\int\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^4 x}dx$; **2.14)** $\int\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}dx$**.**

Домашнее задание.

2.15) $\int x\ln x dx$; **2.16)** $\int (x^2-x+1)\ln x dx$; **2.17)** $\int x\,\mathrm{arctg}\, x dx$; **2.18)** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$; **2.19)** $\int x3^x dx$; **2.20)** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Занятие 3
Интегрирование рациональных функций

Простейшие дроби и их интегрирование

Простейшими называют следующие ниже четыре типа дробей

а) $\frac{A}{x-\alpha}$ – *простейшая дробь первого типа*

б) $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $(k=2,3,\ldots)$ – *простейшая дробь второго типа*

в) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$ – *простейшая дробь третьего типа*

г) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $(k=2,3,\ldots)$ – *простейшая дробь четвертого типа*

Интегрирование этих дробей осуществляется следующим образом:
Для дробей первого и второго типов очевидно

а) $\int \frac{Adx}{x-\alpha} = A\ln|x-\alpha| + C$

б) $\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C$

Для дробей 3 и 4 типов преобразуем знаменатель, выделяя полный квадрат.

$$x^2+px+q = \left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right) + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + m^2,$$

где $m^2 = q-\frac{p^2}{4} > 0$. *Учитывая эти преобразования имеем для дроби третьего типа:*

в) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right) - \frac{Ap}{2} + B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + m^2} d\left(x+\frac{p}{2}\right) =$$

$$= A\int \frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right] + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{m} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{m}$$

Аналогично для дроби четвертого типа получаем:

$$\int \frac{(Ax+B)}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right]^k}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right)^k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right]^k}$$

Интеграл вида $\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right]^k}$ *– это интеграл от дроби первого типа. Таким образом интеграл от дроби четвертого типа будет вычислен, если научимся вычислять интеграл вида* $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+m^2)^k}$. *Интеграл указанного типа вычисляется по рекуррентной формуле. При* $k=1$ *– интеграл табличный; при* $k \geq 2$ *имеет место равенство*

$$I_k = \frac{x}{2(k-1)m^2(x^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)m^2} I_{k-1}$$

Интегрирование произвольной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}$ *с действительными коэффициентами в общем случае производится следующим образом.*

Если $m \geq n$, *т.е. исходная дробь* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *неправильная, то следует предварительно выделить в этой дроби целую часть, т.е. представить её в виде*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \qquad (3.1)$$

где $M_{m-n}(x)$ *и* $R_r(x)$ *- многочлены степеней* $m-n \geq 0$ *и* r *соответственно, причём* $r < n$, *т.е. дробь* $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ *правильная.*

Выделение целой части в дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *производится делением числителя на знаменатель “уголком”.*

Как показывает формула (3.1), операция выделения целой части сводит интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Для того чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m<n$, *следует предварительно разложить её в сумму простейших дробей.*

. Это разложение осуществляется следующим образом. Пусть знаменатель $Q_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ *имеет действительные корни* a_1, …, a_l *кратностей* s_1, …, s_l *и комплексно – сопряженные пары корней* $\beta_1,\overline{\beta}_1,\ldots,\beta_k,\overline{\beta}_k$ *кратностей* t_1, … , t_k *соответственно* $(s_1+\ldots+s_l+2t_1+\ldots+2t_k=n)$, *т.е. справедливо разложение*

$$Q_n(x)=a_n(x-\alpha_1)^{s_1}\ldots(x-\alpha_i)^{s_i}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t_1}\ldots\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{t_k},$$

где $\quad x^2+p_vx+q_v=(x-\beta_v)\left(x-\overline{\beta}_v\right),\ v=1,\ldots,k.$

Тогда разложение дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *в сумму простейших имеет вид:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\ldots+\frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l}+\ldots+\frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{s_l}}+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\ldots+\frac{B_{t_1}^{(1)}x+C_{t_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t_1}}+\ldots+\frac{B_1^{(k)}x+C_1^{(k)}}{x^2+p_kx+q_k}+\ldots+\frac{B_{t_k}^{(k)}x+C_{t_k}^{(k)}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{t_k}} \qquad (3.2)$$

Коэффициенты $A_i^{(j)},B_i^{(j)}$ *и* $C_i^{(j)}$ *в этом разложении определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях* x *у многочлена* $P_m(x)$ *и многочлена, который получается в числителе правой части (3.2) после приведения её к общему знаменателю (метод неопределенных коэффициентов). Можно также определять эти коэффициенты, полагая в равенстве (3.2) или ему эквивалентном* x *равным подходяще подобранным числам (в первую очередь значениям действительных корней знаменателя* $Q_n(x)$*).*

Пример 3.1. *Вычислить:* $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2-2x-3\right)}$.

Решение. Подынтегральная функция $\dfrac{1}{(x+1)\left(x^2-2x-3\right)}$ *является правильной дробью. Разложим знаменатель дроби на простые множители. Корнями квадратного многочлена являются* $x_1=-1$ *и* $x_2=3$, *тогда*

$$\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x-3\right)}=\frac{1}{(x+1)(x+1)(x-3)}=\frac{1}{(x+1)^2(x-3)}.$$

Теперь можно представить дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами: $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x-3}$.

Приведем к общему знаменателю выражение из правой части:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)}.$$

Получили две дроби, знаменатели которых равны, значит, числители также должны быть равны: $1=A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2$

Найдем числовые значения A, B, C, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x *из левой и правой частей равенства, для этого в правой части раскроем скобки и сгруппируем слагаемые.*

$$1 = x^2(A + C) + x(-2A + B + 2C) - 3A - 3B + C$$

Теперь можем составить систему:

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = -2A + B + 2C \\ 1 = -3A - 3B + C \end{cases} \text{ Решение системы: } \begin{cases} C = 1/16 \\ B = -1/4 \\ A = -1/16 \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-3)} = \dfrac{-1/16}{x+1} + \dfrac{-1/4}{(x+1)^2} + \dfrac{1/16}{x-3}$.

Значит, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-2x-3)} = \int\left(-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{x-3}\right)dx =$

$$= -\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{16}\int\frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{16}\int\frac{d(x+1)}{x+1} - \frac{1}{4}\int(x+1)^{-2}d(x+1) +$$

$$+\frac{1}{16}\int\frac{d(x-3)}{x-3} = -\frac{1}{16}\ln|x+1| + \frac{1}{4\cdot(x+1)} + \frac{1}{16}\ln|x-3| + C.$$

Пример 3.2 *Вычислить:* $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3-2}{x^3+2x}dx.$

Решение. Подынтегральная функция является неправильной дробью, поэтому выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^4 - 3x^3 - 2 & x^3 + 2x \\ & x^4 + 2x^2 & \overline{x - 3} \\ \hline - & -3x^3 - 2x^2 - 2 & \\ & -3x^3 - 6x & \\ \hline & -2x^2 + 6x - 2 & \end{array}$$

Значит, $\dfrac{x^4-3x^3-2}{x^3+2x} = x - 3 + \dfrac{-2x^2+6x-2}{x^3+2x} = x - 3 - 2\cdot\dfrac{x^2-3x+1}{x^3+2x}$.

Новую дробь, которая теперь является правильной, можем разложить на простейшие дроби: $\dfrac{x^2-3x+1}{x^3+2x} = \dfrac{x^2-3x+1}{x(x^2+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2}$;

$\dfrac{x^2-3x+1}{x(x^2+2)} = \dfrac{A(x^2+2)+(Bx+C)\cdot x}{x(x^2+2)}$; $x^2 - 3x + 1 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx$

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ -3 = C \\ 1 = 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -3 \\ A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}.$$

Таким образом, $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3-2}{x^3+2x}dx = \int\left(x - 3 - 2\left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2\cdot x - 3}{x^2+2}\right)\right)dx = \int xdx - 3\int dx -$

$$\int\frac{dx}{x} - 2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{x-6}{x^2+2}dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \ln|x| - \int\frac{xdx}{x^2+2} + 6\int\frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2} - 3x - \ln|x| -$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2\right)}{x^2+2}+\frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{2}-3x-\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{6}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$$

Найти интегралы:

3.1) $\int\frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$**;** **3.2)** $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$**;** **3.3)** $\int\frac{dx}{x(x^2+2)}$**;** **3.4)** $\int\frac{dx}{x^3+8}$**;** **3.5)** $\int\frac{x^4+1}{x^4-1}dx$**.**

Домашнее задание.

3.6) $\int\frac{dx}{(x-3)(x+4)}$**;** **3.7)** $\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$**;** **3.8)** $\int\frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}dx$**.**

Занятие 4
Интегрирование тригонометрических функций

1. *Интегралы вида* $\int\sin^m x\cos^n x dx$*:*

а) Если хотя бы одно из чисел m *или* n *– нечётное положительное число, то отделяя от нечётной степени один сомножитель и выражая оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, используя основное тригонометрическое тождество (* $\sin^2 x+\cos^2 x=1$*), приходим к табличному интегралу.*

Например: $m=2p+1,\ p>0,$ *целое, то*

$$\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx\ =\ \int\sin^{2p}x\cdot\cos^n x\cdot\sin x dx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^p\cdot\cos^n x d\cos x.$$

б). Если m *и* n *– четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:*

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

в). Если $m+n=-2k,\ k\in N$*, то есть* $m+n$ *- целое нечетное отрицательное число, то рекомендуются подстановки* $t=tgx$ *или* $t=ctgx$.

2. *Интегралы видов* $\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\ \int\cos\alpha x\cdot\sin\beta x dx,\ \int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx.$

Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

3. *Интегралы вида:* $\int R(\sin x,\cos x)dx,$

где $R(u,v)$ *– рациональная функция двух переменных, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента* t *подстановкой* $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$. *При этом используются формулы*

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 4.1 *Вычислить интеграл* $\int\frac{\cos x+\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx.$

Будем вычислять интеграл с помощью подстановки $t=\sin x$.

$$\int\frac{\cos x+\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx=\left|\begin{matrix}t=\sin x; \quad dt=\cos x dx\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cos x dx}{\sin^2 x+\sin^4 x}=$$

$$=\int\frac{1+1-t^2}{t^2+t^4}dt=\int\frac{2-t^2}{t^2+t^4}dt=I$$

Разложим подынтегральную функцию получившегося интеграла на простейшие дроби: $\frac{2-t^2}{t^2+t^4}=\frac{2-t^2}{t^2\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$

$$2-t^2=At\left(1+t^2\right)+B\left(1+t^2\right)+(Ct+D)\cdot t^2$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t *слева и справа от знака равенства, получаем систему для нахождения значений A, B, C, D:*

$$\begin{cases}A+C=0\\ B+D=-1\\ A=0\\ B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=2\\ C=-A\\ D=-1-B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=2\\ C=0\\ D=-3\end{cases}.$$

Значит, $\frac{2-t^2}{t^2+t^4}=\frac{2}{t^2}+\frac{-3}{1+t^2}.$

Тогда

$$I=\int\left(\frac{2}{t^2}-\frac{3}{1+t^2}\right)dt=2\int t^{-2}dt-3\int\frac{dt}{1+t^2}=2\cdot\frac{t^{-1}}{-1}-3\mathrm{arctg}\,t+C=$$

$$=-\frac{2}{\sin x}-3\mathrm{arctg}(\sin x)+C.$$

Пример 4.2 $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}=\left|\begin{matrix}t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}; \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$

$$=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=\int \frac{2dt\cdot\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)\cdot 2t\left(t^2-4t+3\right)}=\int \frac{\left(1+t^2\right)dt}{t\left(t^2-4t+3\right)}=I.$$

Для вычисления интеграла разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{t-1}$$

$$1+t^2=A(t-3)(t-1)+B\cdot t(t-1)+C\cdot t(t-3)$$

Так как в правой части получились только линейные множители, то найти коэффициенты A, B, C удобно, взяв в качестве значений t корни знаменателя:

$$t=3\Rightarrow \quad 1+9=0+B\cdot 6+0\Rightarrow \quad B=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};$$

$$t=1\Rightarrow \quad 1+1=0+0+C\cdot(-2)\Rightarrow \quad C=\frac{2}{-2}=-1;$$

$$t=0\Rightarrow \quad 1=A\cdot 3+0+0\Rightarrow \quad A=\frac{1}{3}.$$

Значит, $\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1/3}{t}+\frac{5/3}{t-3}+\frac{-1}{t-1}.$

Продолжим вычисление интеграла:

$$I=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t}dt+\frac{5}{3}\int\frac{1}{t-3}dt-\int\frac{1}{t-1}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

Вычислить интегралы:

4.1) $\int\sin^2 x\cos x dx$; **4.2)** $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$; **4.3)** $\int\cos^3\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}dx$; **4.4)** $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$; **4.5)** $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$; **4.6)** $\int\sin 10x\sin 15x dx$; **4.7)** $\int\frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; **4.8)** $\int\cos^6\frac{x}{2}dx$; **4.9)** $\int\operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Домашнее задание

4.10) $\int\sin^3 x dx$; **4.11)** $\int\cos^7 x dx$; **4.12)** $\int\sin^4 x\cos^2 x dx$; **4.13)** $\int\frac{dx}{\sin^6 x}$; **4.14)** $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$; **4.15)** $\int\operatorname{tg}^3 x dx$; **4.16)** $\int\sin 3x\cos 5x dx$; **4.17)** $\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$; **4.18)** $\int\frac{dx}{3\cos x+2}$.

Занятие 5
Интегрирование иррациональных функций

а) Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$*, где* $R(x, y, z, \ldots)$ *– рациональная функция своих аргументов,* m_1, n_1, m_2, $n_2, \ldots$, *– целые числа, вычисляются с помощью подстановки* $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$*, где* s *– общий знаменатель дробей* $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

Пример 5.1 $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx = \left| \begin{matrix} x^1, \ x^{\frac{2}{3}}, \ x^{\frac{1}{6}}, \ x^{\frac{1}{3}} \ \Rightarrow \ m = 6 \\ x = t^6; \ t = \sqrt[6]{x}; \ dx = 6t^5dt \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{t^6 + \left(t^6\right)^{\frac{2}{3}} + t}{t^6\left(1 + \left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}\right)} \cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1+t^2)} \cdot t^5dt = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1+t^2}dt = 6\int \frac{t^5 + t^3}{1+t^2}dt +$$

$$+ 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^3\left(t^2+1\right)}{1+t^2}dt + 6\,\mathrm{arctg}\,t = 6 \cdot \frac{t^4}{4} + 6\,\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{x}\right)^4 + + 6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

б) ***Вычисление интегралов вида*** $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ *производится с помощью тригонометрических подстановок следующим образом. Выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене и последующей заменой переменной* $u = x + \frac{b}{2a}$ *исходный интеграл приводится к интегралу одного из следующих трёх типов:*

1) $\int R\left(u, \sqrt{l^2 - u^2}\right)du$,

2) $\int R\left(u, \sqrt{l^2 + u^2}\right)du$,

3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2 - l^2}\right)du$.

Последние интегралы тригонометрической или гиперболической подстановкой соответственно

1) $u = l\sin t$

2) $u = l\,\mathrm{tg}\,t$

3) $u = l\sec t$ *приводятся к интегралам вида* $\int R(\sin t, \cos t)dt$

Пример 5.2 *Вычислить:* $\int \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx$.

Решение. Будем вычислять его с помощью подстановки $x = \frac{1}{\sin t}$.

$$\int \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx = \left| \begin{matrix} x = \frac{1}{\sin t}; \ t = \arcsin\frac{1}{x}; \\ dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \end{matrix} \right| = -\int \sqrt{\left(\frac{1}{\sin t}\right)^2 - 1} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt =$$

$$=-\int\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}\cos t=u;\ \sin^2 t=1-\cos^2 t=1-u^2;\\ -\sin tdt=du\end{matrix}\right|=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}\cdot\sin tdt=-\int\frac{u^2}{\left(1-u^2\right)^2}\cdot(-du)=$$

$$=\int\frac{u^2du}{\left(1-u^2\right)^2}=\left|\begin{matrix}\textit{интеграл вычисляется через}\\ \textit{разложение на простейшие дроби}\end{matrix}\right|=\int\frac{u^2du}{(1-u)^2(1+u)^2}=$$

$$=\int\left(\frac{A}{1-u}+\frac{B}{(1-u)^2}+\frac{C}{1+u}+\frac{D}{(1+u)^2}\right)du=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{1-u}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{(1-u)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{1+u}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{(1+u)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d(1-u)}{1-u}-\frac{1}{4}\int\frac{d(1-u)}{(1-u)^2}-$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(1+u)}{1+u}+\frac{1}{4}\int\frac{d(1+u)}{(1+u)^2}=\frac{1}{4}\ln|1-u|-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-u)^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{4}\ln|1+u|+\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+u)^{-2+1}}{-2+1}+$$

$$+C=\frac{1}{4}\ln|1-\cos t|+\frac{1}{4(1-\cos t)}-\frac{1}{4}|1+\cos t|-\frac{1}{4(1+\cos t)}+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cos t}{1-\cos t}+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}{1+\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}\right|+\frac{1}{2}x^2\cdot\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+C$$

Вычислить интегралы:

5.1) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$; **5.2)** $\int\frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)\left(1+\sqrt[3]{x+a}\right)}dx$; **5.3)** $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$; **5.4)** $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$.

Задачи на разные методы интегрирования:

5.5) $\int\frac{dx}{4+9x^2}$; **5.6)** $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; **5.7)** $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-9x^2}}$; **5.8)** $\int\frac{dx}{1+\sin x}$; **5.9)** $\int\cos^2 5xdx$;

5.10) $\int\cos^3 5xdx$; **5.11)** $\int x\cos 3xdx$; **5.12)** $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

Домашнее задание

5.13) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$; **5.14)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; **5.15)** $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3}$; **5.16)** $\int \frac{dx}{16-25x^2}$;

5.17) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+25x^2}}$; **5.18)** $\int \ln x dx$; **5.19)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; **5.20)** $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$.

Дополнительные задания.

5.21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; **5.22)** $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$; **5.23)** $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$.

Занятие 6
Вычисление определенного интеграла

Если функция $f(x)$ *определена на отрезке* $[a,b]$ *и* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ – *произвольное разбиение этого отрезка на* n *частей, то* ***интегральной суммой*** *функции* $f(x)$ *на* $[a,b]$ *называется сумма вида* $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$, *где* $x_{i-1} \le c_i \le x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. $i = 1,...,n$. *Геометрически* S_n *есть сумма площадей прямоугольников, имеющих основания* Δx_i *и высоты* $f(c_i)$.

Если определенная на отрезке $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм* S_n *при условии, что наибольшая из разностей* Δx_i *стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка* $[a,b]$ *на отрезки* $[x_{i-1};x_i]$, *ни от выбора точек* c_i *на этих отрезках, то функция* $f(x)$ *называется* ***интегрируемой*** *на отрезке* $[a,b]$, *а сам предел называется* ***определенным интегралом от функции*** $f(x)$ ***в пределах от*** a ***до*** b *и обозначается символом* $\int_a^b f(x)dx$. *Таким образом,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$$

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке*

Геометрически определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции* $y = f(x)$, *осью* Ox *и прямыми* $x = a$ *и* $x = b$, *причем площади, расположенные выше оси* Ox, *входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси* Ox, – *со знаком минус.*

Свойство 1. $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Свойство 2. $\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx$

Свойство 3. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

Свойство 4. Если функция $f(x)$ *интегрируема на* $[d_1;d_2]$ *и* $a,b,c\in[d_1;d_2]$, *то справедливо равенство* $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Свойство 5. $\int_a^a f(x)dx=0$.

Свойство 6. $\int_a^b dx=b-a$, *где* $a<b$.

Свойство 7. Если $f(x)\geq 0$ *на отрезке* $[a;b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

Свойство 8. Если $f(x)\leq g(x)$ *на* $[a;b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ *(* $a<b$ *).*

Свойство 9. ***(Оценка определенного интеграла).*** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, m *– наименьшее,* M *– наибольшее значения* $f(x)$ *на* $[a;b]$, *то* $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$.

Свойство 10. ***(Теорема о среднем значении).*** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то существует точка* $c\in(a,b)$, *такая, что*

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

Свойство 11. Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то для всех* $x\in[a,b]$ *функция* $\Phi(x)$, *определяемая равенством* $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, *дифференцируема и при этом справедливо равенство*

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x),$$

то есть производная от интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной в точке x.

Свойство 12. Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $F(x)$ *- какая-либо ее первообразная на* $[a,b]$, *тогда справедлива* ***формула Ньютона-Лейбница****:*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

1) Если четная функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[-a,a]$, *то* $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

2) Если нечетная функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[-a,a]$, *то* $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

Интегрирование периодических функций

Если функция $f(x)$ *периодична с периодом T, то* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)dx$

Замена переменной в определенном интеграле.

Если функция $x=\varphi(t)$ *и ее производная* $x'=\varphi'(t)$ *непрерывны при* $t\in[\alpha,\beta]$, *причем* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 6.1 *Вычислить* $\int\limits_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}}$.

Решение. Для вычисления интеграла сделаем подстановку $x=2\,\mathrm{tg}\,t$. *Тогда* $dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}$.

Если $x=2$, *то* $2=2\,\mathrm{tg}\,t$, *следовательно,* $t=\frac{\pi}{4}$. *Если* $x=2\sqrt{3}$, *то* $2\sqrt{3}=2\,\mathrm{tg}\,t$, *следовательно,* $t=\frac{\pi}{3}$.

$$\int\limits_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}} = \left|\begin{array}{l} x=2\,\mathrm{tg}\,t \\ dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}\end{array}\right| = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,t\cdot\sqrt{(2\,\mathrm{tg}\,t)^2+4}}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}\cdot\cos^2 t} = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\right| - \ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}\right|\right) =$$

$$= \left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4}} = \sqrt{2}-1\right| = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{3}} - \ln(\sqrt{2}-1)\right).$$

Интегрирование по частям.

Если функции $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *непрерывны вместе со своими производными* $u'(x)$, $v'(x)$ *на* $[a,b]$, *то*

$$\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$ *(формула интегрирования по частям)*

Пример 6.2 *Вычислить определенный интеграл:* $\int\limits_{1/3}^{4}\ln^2(3x)dx$.

Решение.
$$\int\limits_{1/3}^{4}\ln^2(3x)dx = \left|\begin{array}{l} U=\ln^2 3x;\ \ dV=dx \ \Rightarrow\ \ V=\int dx = x \\ dU=\left(\ln^2 3x\right)'dx = 2\ln 3x\cdot\dfrac{1}{3x}\cdot 3dx = \dfrac{2\ln 3x}{x}dx\end{array}\right| =$$

$$= \left(x\cdot\ln^2 3x\right)\Big|_{1/3}^{4} - \int\limits_{1/3}^{4} x\cdot\frac{2\ln 3x}{x}dx = 4\cdot\ln^2(3\cdot 4) - \frac{1}{3}\ln^2\left(3\cdot\frac{1}{3}\right) - 2\int\limits_{1/3}^{4}\ln 3x dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l} U=\ln 3x;\ \ dV=dx\ \ \Rightarrow\ \ V=\int dx=x \\ dU=(\ln 3x)'\,dx=\dfrac{1}{3x}\cdot 3dx=\dfrac{1}{x}dx \end{array}\right|=4\ln^2 12-\frac{1}{3}\ln^2 1-2\left(\left.(x\cdot\ln 3x)\right|_{1/3}^{4}-\right.$$

$$\left.-\int_{1/3}^{4} x\cdot\frac{1}{x}dx\right)=4\ln^2 12-2\left(4\cdot\ln(3\cdot 4)-\frac{1}{3}\ln\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)-\int_{1/3}^{4}dx\right)=4\ln^2 12-8\ln 12+$$

$$+\frac{2}{3\ln 1}+\left.2x\right|_{1/3}^{4}=4\ln^2 12-8\ln 12+2\left(4-\frac{1}{3}\right)=4\ln^2 12-8\ln 12+\frac{22}{3}.$$

I. Вычислить интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница

6.1) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ **6.2)** $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$**;** **6.3)** $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$**;** **6.4)** $\int_0^3 2^x dx$

;6.5) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$**;** **6.6)** $\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi$**;** **6.7)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$**;** **6.8)** $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}dx$**;**

6.9) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$**;** **6.10)** $\int_0^{\pi/2} \cos^3\alpha\, d\alpha$**;**

II. Замена переменной в определенном интеграле

6.11) $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$**;** **6.12)** $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$**;** **6.13)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$**;**

6.14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$**;** **6.15)** $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$**;**

III. Интегрирование по частям

6.16) $\int_0^1 xe^x dx$**;** **6.17)** $\int_0^1 x\,arctg\,x\,dx$**;**

Домашнее задание

6.18) $\int_1^2 e^x dx$ **6.19)** $\int_2^5 \frac{dx}{x}$ **6.20)** $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$ **6.21)** $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ **6.22)** $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$ **6.23)** $\int_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$ **6.24)** $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$ **6.25)** $\int_1^e x\ln x\,dx$

Занятие 7
Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами.

Если функция $f(x)$ *непрерывна при* $a \le x < +\infty$ *, то по определению*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (7.1)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (7.1), то ***несобственный интеграл*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***сходящимся****. Если же этот предел не существует или он бесконечен, то –* ***расходящимся.***

Аналогично определяется интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ *и интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \qquad (7.2)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами *сходится только в том случае, когда сходятся оба интеграла правой части (7.2). Если же хотя бы один интеграл из правой части (7.2) расходится, тогда интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.*

Пример 7.1 Вычислить: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b x^{-1/2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_2^b\right) =$

$= 2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-\sqrt{2}\right) = 2\lim_{b\to+\infty}\sqrt{b} - 2\sqrt{2} = \infty$. *Значит, интеграл расходится.*

Пример 7.2 Вычислить: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x}dx$.

Решение. Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x}dx = \int_{-\infty}^{c} e^{-5x}dx + \int_{c}^{+\infty} e^{-5x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c e^{-5x}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b e^{-5x}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\left.-\frac{1}{5}e^{-5x}\right|_a^c\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\left.-\frac{1}{5}e^{-5x}\right|_c^b\right) = -\frac{1}{5}\lim_{a\to-\infty}\left(e^{-5c}-e^{-5a}\right) -$$

$$-\frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-5b}-e^{-5c}\right) = -\frac{1}{5}e^{-5c} + \frac{1}{5}\lim_{a\to-\infty}e^{-5a} - \frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}e^{-5b} + \frac{1}{5}e^{-5c} = \infty.$$

Интеграл расходится.

Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

<u>Теорема 7.1</u> (Необходимый признак сходимости). Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, то тогда* $\lim_{b\to+\infty}\int_b^{+\infty} f(x)dx = 0$.

Приведем несколько достаточных признаков сходимости несобственных интегралов.

<u>Теорема 7.2</u> (Признак сравнения). Если на интервале $[a;+\infty)$ *непрерывные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *неотрицательны и связаны неравенством* $f(x) \le g(x)$ *во всех точках интервала, то из сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*, а из расходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

<u>Теорема 7.3</u> Несобственный интеграл вида $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(c > 0)$ *сходится при* $\alpha > 1$, *расходится при* $\alpha \le 1$.

<u>Теорема 7.4</u> (Предельный признак сравнения). Если на интервале $[a;+\infty)$ *для непрерывных положительных функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *существует предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ $(0 < k < \infty)$, *то интегралы* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *одновременно оба сходятся или оба расходятся.*

Пример 7.3. Исследовать сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5+2x+5}$.

Решение. Исследуем сходимость этого интеграла, используя признак сравнения. Так как для любого $x \in [1;+\infty)$ *справедлива оценка* $\frac{1}{x^5+2x+5} < \frac{1}{x^5}$, *то для сравнения выберем интеграл* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}dx$. *На основании теоремы 7.3 интеграл* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}dx$ *сходится (* $\alpha = 5,\ a = 1 > 0$*). Тогда по признаку сравнения* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5+2x+5}$ *также сходится.*

Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Если для функции $f(x)$ *интеграл* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится, то* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся****. А если интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, а интеграл* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *расходится, то* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***условно сходящимся.***

<u>Теорема 7.5</u> (Признак абсолютной сходимости). Если $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Несобственные интегралы от разрывных функций.

Несобственным интегралом *от функции* $f(x)$, *имеющей* ***разрыв II*** *рода в* ***граничной точке*** $x=b$ *интервала* $[a,b]$, *называется предел определенного интеграла* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, *то есть* $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. *(7.3)*

В случае если этот предел конечен, то говорят, что ***несобственный интеграл*** $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***сходится****. Если же этот предел не существует или бесконечен, то говорят, что* ***несобственный интеграл расходится****.*

Аналогично ***несобственным интегралом*** *от функции* $f(x)$, *имеющей* ***разрыв II рода в граничной точке*** $x=a$ *интервала* $[a,b]$, *называется предел определенного интеграла* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, *таким образом* $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ *(7.4)*

Несобственным интегралом от функции $f(x)$***, имеющей разрыв II рода во внутренней точке*** c ***отрезка интегрирования*** $[a,b]$, *называется сумма двух несобственных интегралов с разрывами в граничной точке:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx. \quad (7.5)$$

И ***сходится*** *он только тогда, когда оба интеграла из правой части сходятся.*

Пример 7.4. Вычислить: $\int\limits_0^1 \ln x dx$.

Решение. Область определения подынтегральной функции определяется из условия $x>0$ *, поэтому* $x=0$ *– граничная точка области определения. Точка* $x=0$ *является точкой разрыва II рода функции* $\ln x$. *Значит, мы имеем несобственный интеграл с разрывом в точке* $x=0$. *Вычислим этот интеграл.*

$$\int\limits_0^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx=\left|\begin{matrix} U=\ln x; \ dV=dx \\ dU=\dfrac{1}{x}dx; \ V=\int dx=x \end{matrix}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left(\ln x\cdot x\right)\Big|_\varepsilon^1-\int\limits_\varepsilon^1 x\cdot\frac{1}{x}dx\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1-\ln\varepsilon\cdot\varepsilon-x\Big|_\varepsilon^1\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\varepsilon\cdot\ln\varepsilon-1+\varepsilon\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\cdot\ln\varepsilon\right)-1+\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}-1=\left|\begin{matrix} \textit{правило} \\ \textit{Лопиталя} \end{matrix}\right|=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'}-1=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2}-1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}-1=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon-1=0-1=-1.$$ *Интеграл сходится и равен* -1.

Признаки сходимости несобственных интегралов от разрывных функций такие же, что и для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Сформулируем их только для одного случая.

<u>Теорема 7.6</u> Несобственный интеграл вида $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a>0)$ *сходится при* $0<\alpha<1$ *и расходится при* $\alpha \geq 1$.

<u>Теорема 7.7</u> ***(Предельный признак сравнения).*** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и положительны на интервале* $[a;b)$, *в точке* $x=b$ *имеют разрыв II рода. Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$, *то интегралы* $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *одновременно оба сходятся или оба расходятся.*

Пример 7.5. $\int_0^1 \frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}dx$.

Интеграл является несобственным, так как точка разрыва II рода подынтегральной функции $\frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}$ *лежит на отрезке интегрирования* $(x=0\in[0;1])$. *Исследуем сходимость этого ряда по признаку сравнения, для этого оценим подынтегральную функцию. Так как рассматриваем отрезок интегрирования* $[0;1]$, *то*

$$0\leq x\leq 1 \;\Rightarrow\; 0\leq x^2\leq 1 \;\Rightarrow\; 2\leq x^2+2\leq 3 \;\Rightarrow\; \ln 2\leq \ln(x^2+2)\leq \ln 3.$$

Значит, при $x\in[0;1]$ справедливо неравенство: $\frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}\leq\frac{\ln 3}{\sqrt{x}}$. Несобственный интеграл $\int_0^1\frac{\ln 3}{\sqrt{x}}dx=\ln 3\cdot\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$, подынтегральная функция которого так же, как и *первоначального интеграла, имеет разрыв II рода в точке* $x=0$, *сходится в силу теоремы 7.6. По признаку сравнения и интеграл* $\int_0^1 \frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x}}dx$ *сходится.*

I. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Вычислить несобственный интеграл с бесконечными пределами или установить его расходимость

7.1) $\int_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ **7.2)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$ **7.3)** $\int_0^\infty x\cos x dx$ **.**

7.4) Исследовать на сходимость несобственный интеграл с бесконечными пределами $\int_1^\infty\frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$.

II. Несобственные интегралы от разрывных функций

7.5) $\int_0^2\frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$ **7.6)** $\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$ **7.7)** $\int_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

7.8) Исследовать на сходимость несобственный интеграл от разрывной функции $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Домашнее задание

Вычислить несобственный интеграл с бесконечными пределами или установить его расходимость

7.9) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ **7.10)** $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$ **7.11)** $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}$ **.**

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

7.12) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$ **7.12′)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x(x+1)(x+2)}}$ **7.13)** $\int_1^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ **7.14)** $\int_0^{2} \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **7.15)** $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$**.**

Занятие 8
Вычисление площадей плоских фигур.

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в явном виде.

Пусть на отрезке $[a;b]$ *заданы непрерывные функции* $y=f_1(x)$ *и* $y=f_2(x)$, *причем* $f_2(x)\geq f_1(x)$ *на* $[a;b]$. *Площадь фигуры, ограниченной графиками функций* $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ *и прямыми* $x=a$, $x=b$ *(площадь между кривыми) вычисляется по формуле* $S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$ *(8.1)*

Пусть фигура ограничена графиками непрерывных функций $x=g_1(y)$ *и* $x=g_2(y)$ *при* $y\in[c,d]$ *(рис.1), при этом* $g_2(y)\geq g_1(y)$, *тогда*

$$S=\int_c^d \left(g_2(y)-g_1(y)\right)dy. \qquad (8.2)$$

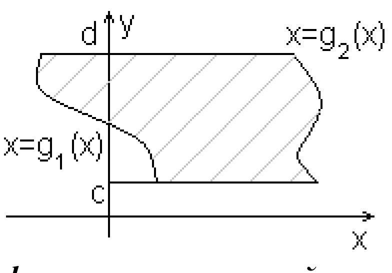


Рис.1

Вычисление площади фигуры ,ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде.

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ *вычисляется по формуле:* $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt$ (8.3)

Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах.

Пусть фигура ограничена двумя полярными кривыми $r_1 = r_1(\varphi)$, $r_2 = r_2(\varphi)$ *и двумя лучами* $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ *(рис.2). Площадь* S *этой фигуры вычисляется по формуле:*

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right) d\varphi \quad (8.4)$$

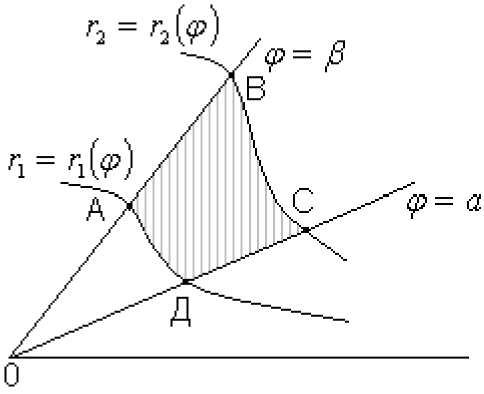


Рис.2

Пример 8.1 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой* $y = x^3$ *и прямыми* $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.

Решение.

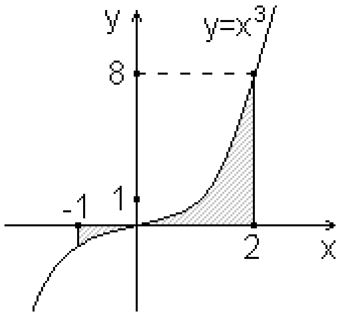


Рис.3

Нарисуем фигуру (рис.3). Чтобы найти площадь этой фигуры, необходимо ее разбить на две части, так как при $x \in [0;2]$ *кривая* $y = x^3$ *лежит выше оси* Ox *с уравнением* $y = 0$, *а при* $x \in [-1;0]$ *кривая* $y = x^3$ *лежит ниже оси* Ox. *Площадь заданной фигуры будем вычислять следующим образом:*

$$S = S_{[-1;0]} + S_{[0;2]} = \int\limits_{-1}^{0}(0 - x^3)dx + \int\limits_{0}^{2}(x^3 - 0)dx = -\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0} +$$

$$+\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2} = -\frac{1}{4}\cdot\left(0 - (-1)^4\right) + \frac{1}{4}\left(2^4 - 0\right) = -\frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot 16 = \frac{17}{4}.$$

Пример 8.2 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями* $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2 - x}$, $y = 0$.

Решение. *Нарисуем фигуру (рис.4).*

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \quad (y \ge 0)$ – *верхняя ветвь параболы* $y^2 = x$; $y = \sqrt{2 - x} \Rightarrow y^2 = 2 - x$ $(y \ge 0)$ – *верхняя ветвь параболы* $y^2 = 2 - x$.

Можно вычислить площадь этой фигуры с помощью формулы (8.1), но тогда придется разбить

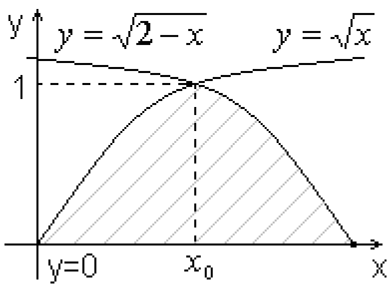


Рис.4

фигуру на две части и считать два интеграла, так как надо будет подставлять в формулу $y = \sqrt{2-x}$ *при* $x \in [0; x_0]$ *и* $y = \sqrt{x}$ *при* $x \in [x_0; 2]$. *Но можно рассмотреть эту фигуру относительно оси* Oy *и вычислить ее площадь по формуле (8.2).*

Найдем точку пересечения графиков, решив систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt{2-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Найдем $g_2(y)$ *и* $g_1(y)$:

$$y = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; y^2 = x \;\Rightarrow\; g_1(y) = y^2;$$

$$y = \sqrt{2-x} \;\Rightarrow\; y^2 = 2 - x \;\Rightarrow\; x = 2 - y^2 \;\Rightarrow\; g_2(y) = 2 - y^2.$$

Вычислим площадь по формуле (8.2):

$$S = \int_0^1 \left(2 - y^2 - y^2\right)dy = \int_0^1 2dy - \int_0^1 2y^2 dy = 2y\Big|_0^1 - 2\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Пример 8.3 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями* $r = \cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$.

Решение. *Нарисуем фигуру. При* $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ *значения* $r < 0$, *поэтому точек кривой в этой области нет.*

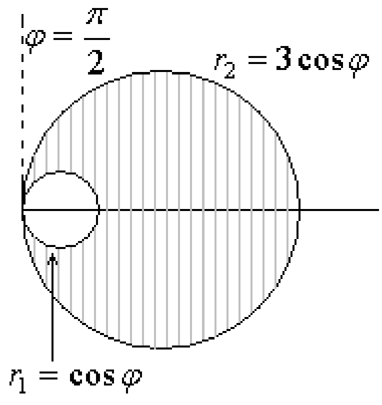


Рис.5

По формуле (8.4) вычислим площадь полученной фигуры (рис.5). Фигура симметрична относительно полярной оси, поэтому вычислим площадь верхней половины фигуры и удвоим ее.

$$S = 2S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left((3\cos\varphi)^2 - (\cos\varphi)^2\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 8\cdot\cos^2\varphi\cdot d\varphi = 8\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi +$$

$$+ 4\int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{\pi/2} + 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi d(2\varphi) = 4\cdot\frac{\pi}{2} + 2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi + 2(\sin\pi - \sin 0) = 2\pi.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной указанными кривыми:

8.1) $y = 4x \quad x^2 = 4y$

8.2) $y = 3 + 2x - x^2 \quad y = 0$ **8.3)** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в точке $x = e$ и осью Ox.

8.4) Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x = a\cos^3 t \ ; \ y = a\sin^3 t$$

8.5) Найти площадь одного лепестка кривой $r = a\sin 2\varphi$

8.6) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\sin 5\varphi$.

8.7) Найти площадь фигуры, ограниченной двумя витками логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$, начиная с $\varphi = 0$

Домашнее задание

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

8.8) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0$. **8.9)** $y = x^2 + 4x$, $y = x^2 + 2$, $x = 0$.

8.10) Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox.

8.11) Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \sin\varphi)$.

Занятие 9
Поверхности второго порядка.

Некоторые виды поверхностей второго порядка приведены в таблице в конце сборника задач.

Определить вид поверхности и сделать чертёж:

9.1) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

9.2) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

9.3) $x^2 - 2y + 1 = 0$

9.4) $z = x^2$

9.5) $x^2 = y^2 + z^2$

9.6) $x^2 = y^2 - z^2 - 4$

9.7) $x = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$

9.8) $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$

Построить тело, ограниченное поверхностями

9.9) $z = 0$; $z = 1$; $y = 2x$; $y = 6 - x$; $z = x^2 + y^2$

9.10) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $2x + 3y - 12 = 0$; $z = \dfrac{y^2}{2}$.

Домашнее задание.

Построить:

9.11) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ **9.12)** $x^2 - y^2 = 4$ **9.13)** $x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$

9.14) $z = x^2 + y^2 - 1$.

Построить тело, ограниченное поверхностями

9.15) $x = 4$; $y = 4$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $z = x^2 + y^2 + 1$

9.16) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = ax$

Занятие 10
Повторный интеграл.

Определение двойного интеграла и его свойства.

Пусть функция $f(x, y)$ *определена и непрерывна на замкнутой ограниченной области A плоскости Oxy. Разделим область A с помощью сети кривых линий на части* $A_1, A_2, ..., A_n$ *с площадями* $S_1, S_2, ..., S_n$ *и диаметрами* $d_1, d_2, ..., d_n$. *И пусть* λ *– наибольшее из чисел* $d_1, d_2, ..., d_n$, *то есть* $\lambda = \max(d_1, ..., d_n)$. *Выберем в каждой из областей* $A_1, A_2, ..., A_n$ *по точке* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ *и вычислим значения* $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$, ..., $f(x_n, y_n)$.

Выражение $V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot S_k$ *называется* ***интегральной суммой для функции*** $f(x, y)$ ***по области A.***

<u>Определение</u> *Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм* V_n *при* $\lambda \to 0$ *(при этом* $n \to \infty$*), который не зависит ни от способа разбиения области A на части* $A_1, A_2, ..., A_n$, *ни от выбора точек* $P_k(x_k, y_k)$ *внутри* A_k, $k = 1, ..., n$, *то этот предел называется* ***двойным интегралом от функции*** $f(x, y)$ ***по области*** A *и обозначается одним из символов:*

$$\iint_A f(x, y) dS \qquad \text{или} \qquad \iint_A f(x, y) dxdy,$$ *при этом функция* $f(x, y)$ *называется* ***интегрируемой*** *в области A.*

Здесь область A *называется* ***областью интегрирования***, $f(x, y)$ *–* ***подынтегральной функцией***, *а* $f(x, y)dS$, $f(x, y)dxdy$ *–* ***подынтегральным выражением***.

Всякая непрерывная в области A *функция* $f(x, y)$ *интегрируема.*

<u>Свойство 1</u>. Двойной интеграл от функции $f(x, y) = 1$ *по области* A *равен площади этой области, то есть* $\iint_A dxdy = S_A$.

*<u>Свойство **2**</u> (Линейность двойного интеграла). Если* $f(x, y)$, $g(x, y)$ *– интегрируемые в области A функции,* c *и* k *– постоянные величины, тогда справедливо равенство*

$$\iint_A (cf(x, y) + kg(x, y))dxdy = c\iint_A f(x, y)dxdy + k\iint_A g(x, y)dxdy.$$

<u>Свойство 3</u> (Аддитивность двойного интеграла). Если $f(x,y)$ интегрируемая в области A функция, а область A разделена на две области A' и A'', не имеющие общих внутренних точек, тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_A f(x,y)dS = \iint\limits_{A'} f(x,y)dS + \iint\limits_{A''} f(x,y)dS.$$

<u>Свойство 4</u> Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области A, причем $f(x,y) \le g(x,y)$ для всех $(x,y) \in A$, то справедливо неравенство:

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy \le \iint\limits_A g(x,y)dxdy.$$

<u>Свойство 5</u> (Оценка двойного интеграла). Если интегрируемая в области A функция удовлетворяет неравенству $m \le f(x,y) \le M$, то справедливо неравенство:

$$mS_A \le \iint\limits_A f(x,y)dxdy \le MS_A,$$

где S_A – площадь плоской области A.

<u>Свойство 6</u> (Теорема о среднем значении для двойного интеграла). Пусть $f(x,y)$ – непрерывная в области A функция. Тогда найдется точка $\overline{P}(\bar{x},\bar{y})$ в области A такая, что

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = f(\bar{x},\bar{y}) \cdot S_A.$$

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов следующим способом. Пусть область A (рис.6) ограничена кривыми $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $x=a$, $x=b$, причем всюду на $[a,b]$ функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ непрерывны и $\varphi(x) \le \psi(x)$. Тогда $\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x–параметр), а полученный результат интегрируется по x.

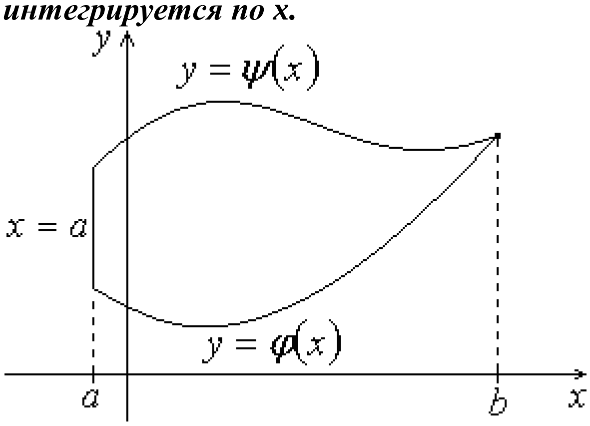


рис.6

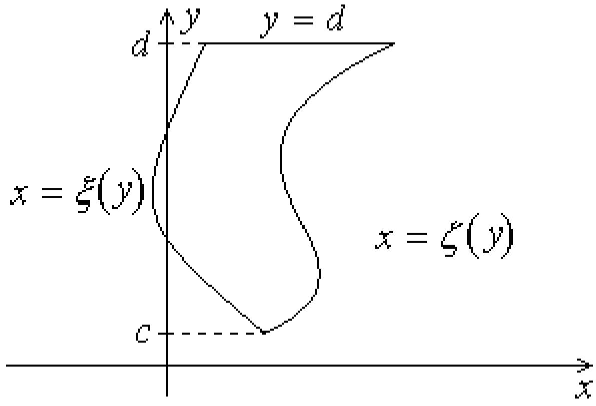


рис.7

Аналогично, если область A ограничена кривыми $x=\xi(y)$, $x=\zeta(y)$, $y=c$, $y=d$, причем всюду на $[c,d]$ функции $\xi(y)$, $\zeta(y)$ непрерывны и $\xi(y) \le \zeta(y)$ (рис.7), то $\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_{\xi(y)}^{\varsigma(y)} f(x,y)dx \right\} dy$, то есть сначала вычисляют внутренний интеграл

$\int\limits_{\xi(y)}^{\varsigma(y)} f(x,y)dx$ *по переменной* x, *считая* y *постоянной величиной. А потом получившуюся функцию переменной* y *интегрируют по* y *в пределах от* c *до* d.

Выражения вида

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b (\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx \text{ и } \int\limits_c^d dy \int\limits_{\xi(y)}^{\varsigma(y)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d (\int\limits_{\xi(y)}^{\varsigma(y)} f(x,y)dx)dy$$

называют ***повторным интегралом.***

Рассмотрим пример вычисления повторного интеграла.

Пример 10.1 *Вычислить повторный интеграл:* $I_A = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x^2} (x^2+y^2)dy \right) dx.$

Решение. *Вычислим сначала интеграл, стоящий в скобках, считая переменную* x *постоянной величиной:*

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{x^2} (x^2+y^2)dy = x^2 \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_0^{x^2} y^2 dy = x^2 y\Big|_0^{x^2} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

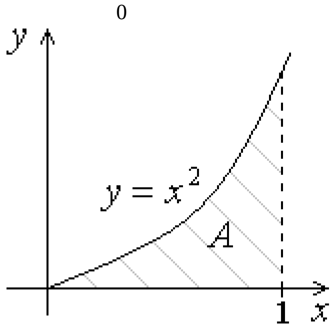


Рис.8

Интегрируя полученную функцию $\Phi(x)$ *в пределах от 0 до 1, получаем:*

$$I_A = \int\limits_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{x^7}{3\cdot 7}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

Здесь область A *ограничивалась линиями:* $y = 0$; $y = x^2$; $x = 1$ *(рис.8).*

Может случиться, что область A такова, что одна из функций $y = \varphi(x)$ *или* $y = \psi(x)$ *не может быть задана одним аналитическим выражением на всем отрезке* $[a,b]$. *Пусть, например,*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in [a,c] \\ \varphi_2(x) & x \in [c,b] \end{cases},$$

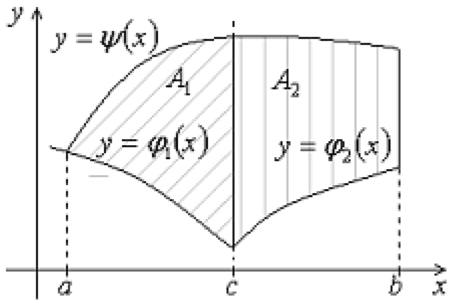


Рис.9

где $c \in (a,b)$. *Такая область изображена на рис.9.*

Тогда $I_A = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = I_{A_1} + I_{A_2}$ *(Свойство аддитивности повторного интеграла).*

Пример 10.2 *Найти* $\iint\limits_A (x+y)dS$, *если область A ограничена линиями* $y = x$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Решение. *На рис.10 видно, что верхняя граница области A состоит из двух прямолинейных отрезков:* $y = x$, $0 \le x \le 1$, $y = 2 - x$, $1 \le x \le 2$.

Разобьем область A прямой $x=1$ на две части (см. рис.11 и рис.12) и воспользуемся свойством аддитивности двойных интегралов:

$$I=\iint_A (x+y)dS=\iint_{A_1}(x+y)dS+\iint_{A_2}(x+y)dS.$$

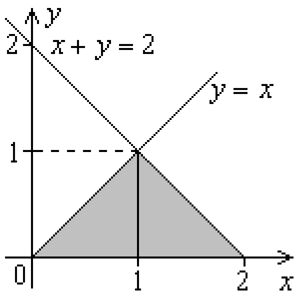


Рис.10

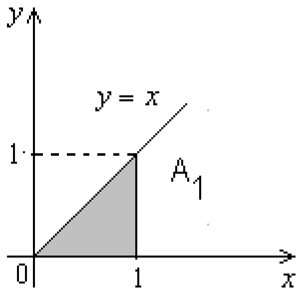


Рис.11

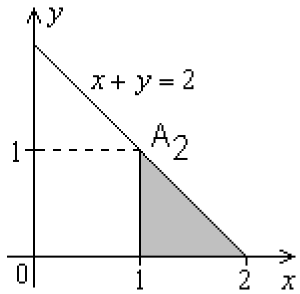


Рис.12

У области A_1 нижняя граница $y=0$, верхняя граница $y=x$, а $0\le x\le 1$.

Вычислим сначала интеграл по области A_1: $I_1=\iint_{A_1}(x+y)dS=\int_0^1\left\{\int_0^x (x+y)dy\right\}dx.$

Так как $\int_0^x (x+y)dy=x\int_0^x dy+\int_0^x ydy=x^2+\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{3x^2}{2}$, *то* $I_1=\int_0^1\dfrac{3x^2}{2}dx=\dfrac{1}{2}.$

Вычислим теперь интеграл по области A_2: $I_2=\iint_{A_2}(x+y)dS=\int_1^2\left\{\int_0^{2-x}(x+y)dy\right\}dx.$

Так как $\int_0^{2-x}(x+y)dy=x\int_0^{2-x}dy+\int_0^{2-x}ydy=2-\dfrac{x^2}{2}$, *поэтому* $I_2=\int_1^2\left(2-\dfrac{x^2}{2}\right)dx=\dfrac{5}{6}.$

Итак, $I=I_1+I_2=\dfrac{3}{6}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4}{3}.$

Этот же интеграл можно вычислить проще, если внешним поставить интеграл по переменной y:

$$I=\int_0^1\left(\int_y^{2-y}(x+y)dx\right)dy=\int_0^1\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_y^{2-y}+\left.yx\right|_y^{2-y}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{(2-y)^2}{2}-\frac{y^2}{2}+\right.$$

$$\left.+y(2-y)-y^2\right)dy=\int_0^1\left(-2y^2+2\right)dy=-2\int_0^1 y^2dy+2\int_0^1 dy=-\frac{2}{3}\left.y^3\right|_0^1+\left.2y\right|_0^1=\frac{4}{3}.$$

Пусть тело D снизу ограничено плоскостью $z=0$, сверху поверхностью $z=f(x,y)\ge 0$ и с боков – цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур фигуры A. Известно, что объем тела D вычисляется по формуле:

$$V=\iint_A f(x,y)dxdy. \qquad (10.1)$$

Если тело имеет более сложную форму, то его разбивают на части, имеющие форму, описанную выше, и используют свойство аддитивности двойного интеграла.

Пример 10.3 *Вычислить объем тела, ограниченный поверхностями*

$$z=2-x-y,\ y=x^2,\ y=x,\ z=0.$$

Решение. Поверхность $y = x^2$ *– это параболический цилиндр, его образующая параллельна оси* Oz*, направляющей служит парабола* $y = x^2$ *(рис.13).*
Плоскость $z = 2 - x - y$ *отсекает на осях координат отрезки длины 2 (рис.14).*
Плоскость $y = x$ *проходит через ось* Oz *и пересекает плоскость* $z = 0$ *по прямой* $y = x$ *(рис.15).*

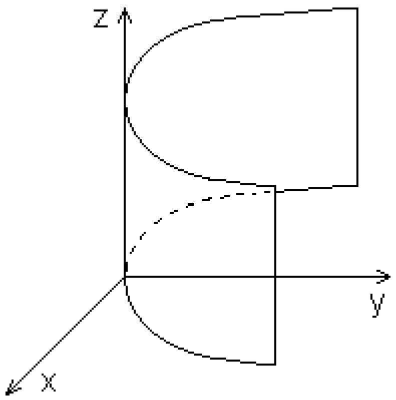


Рис.13

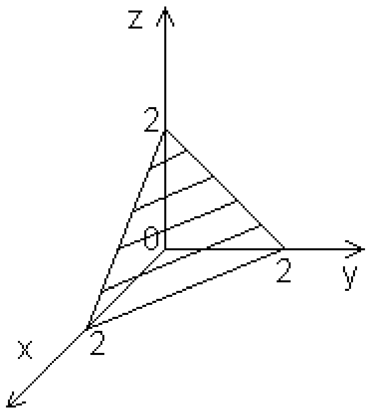


Рис.14

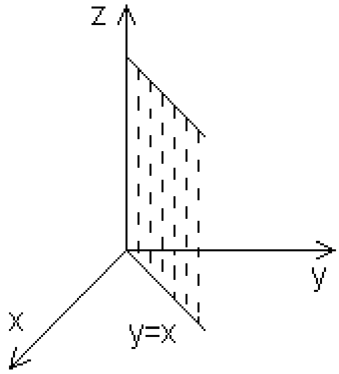


Рис.15

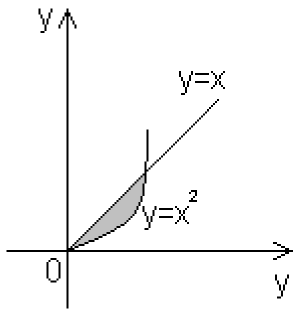


Рис.16

Итак, описанное в условии задачи тело сверху ограниченно плоскостью $z = 2 - x - y$*, снизу плоскостью* $z = 0$*, с боков – поверхностью цилиндра* $y = x^2$ *и плоскостью* $y = x$*. Основанием этого тела является фигура A, ограниченная параболой* $y = x^2$ *и прямой* $y = x$ *(рис.16).*
Поэтому:

$$V = \iint_A (2 - x - y)dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} (2 - x - y)dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{7x^2}{2} + x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{11}{60}.$$

Вычислить повторный интеграл:

10.1) $\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x + 2y)^2}$

Для данных повторных интегралов построить область интегрирования:

10.2) $\int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x, y)dy$ **10.3)** $\int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx$

Для указанных областей записать два варианта повторного интеграла

10.4) D – прямоугольник с вершинами $(1,2); (5,2); (5,4); (1,4)$

10.5) D: $x^2 + y^2 = 2a^2$; $x^2 = ay$ $(a > 0; y \geq 0)$.

10.6) D – область, ограниченная кривыми $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, y=0, (a>0, y>0).

Расставить пределы в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ при данных областях интегрирования D:

10.7) параллелограмм со сторонами $x=3$; $x=5$; $3x-2y+1=0$; $3x-2y+4=0$.

10.8) $x+y\le 1,\quad x-y\le 1,\quad x\ge 0$; **10.9)** $x^2\le y;\quad y\le 4-x^2$;

10.10) $(x-2)^2+(y-3)^2\le 4$;

10.11) треугольник со сторонами $y=x$**;** $y=2x$ и $x+y=6$**.**

Домашнее задание

10.12) Вычислить: $\int\limits_0^2 dx\int\limits_2^{x\sqrt{3}}\dfrac{xdy}{x^2+y^2}$

Для данных повторных интегралов построить область интегрирования:

10.13) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2}f(x,y)dy$ **10.14)** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$

Для указанных областей записать два варианта повторного интеграла

10.15) D – параллелограмм $y=x;\ y=x-3;\ y=2;\ y=4$

10.16) D: $x^2+y^2=2ax$; $y^2=ax$; $y=0$ $(a>0; y\ge 0)$.

Занятие 11

Изменение порядка интегрирования. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Вычисление объема

Изменить порядок интегрирования:

11.1) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$ **11.2)** $\int\limits_0^r dx\int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}}f(x,y)dy$**.**

11.3) Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного повторного интеграла: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}f(x,y)dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)dy$

Вычислить интегралы:

11.4) $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, $D: y=x;\ x+y=2a;\ x=0$

11.5) $\iint\limits_D xydxdy$, D: $x+y=2;\ x^2+y^2=2y;\ x\ge 0,\ y\le 1$.

11.6) $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, $D: y=x^2;\ y=\sqrt{x}$

11.7) $\iint\limits_D (4-y)dxdy$, где область D ограничена кривыми $x^2=4y$, $y=1$, $x=0$,($x \geq 0$).

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

11.8) Плоскостями $z=0$, $y=0$, $3x+2y=6$, $3x+2y=12$ и $x+y+z=6$.

11.9) $z=x^2+y^2, \quad z=0, \quad y=1, \quad y=2x, \quad y=6-x$

11.10) Координатными плоскостями, плоскостью $2x+3y-12=0$ и цилиндром $z=y^2/2$.

Домашнее задание

Изменить порядок интегрирования:

11.11) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{(x+2)}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{(x+2)}{2}} f(x,y)dy$ **11.12)** $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

11.13) $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)dy$ **11.14)** $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)dx$

Вычислить интегралы:

11.15) $\iint\limits_D \sqrt{xy-y^2}dxdy$, D – трапеция с вершинами $A(1,1)$; $B(5,1)$; $C(10,2)$; $D(2,2)$

11.16) $\iint\limits_D ydxdy$, D – треугольник с вершинами $O(0,0)$; $A(1,1)$; $B(0,1)$.

11.17) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, $D: y=e^x; x=0; y=2$.

11.18) $\iint\limits_D x^2ydxdy$, где область D лежит в первой четверти, ограничена осями координат и дугой эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $(0 \leq t \leq \pi/2)$.

Занятие 12
Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Имеет место следующая формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \qquad (12.1)$$

Здесь (r,φ) – полярные координаты точек области D. Пределы изменения переменных r и φ устанавливаются непосредственно по области D.

Пример 12.1 *Вычислить интеграл, перейдя к полярным координатам*
$I=\iint\limits_A (x+y)dxdy$*, где область А ограничена линиями* $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$,
$y=0$*, причем* $y\ge 0$, $x\ge 0$.

Решение. Область А изображена на рис.17. Используя (12.1) получим:
$I=\iint\limits_A (r\cos\varphi+r\sin\varphi)rdrd\varphi$.

Запишем теперь I *в виде повторного интеграла. Непосредственно из рис. 17 видно, что в области А полярный угол* φ *меняется от* 0 *до* $\frac{\pi}{2}$*, это и будут пределы внешнего интеграла. Нижняя криволинейная граница области А имеет полярное уравнение* $r=1$*, а верхняя* $r=2$*, поэтому получаем:*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_1^2 r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)dr\right\}d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(\cos\varphi+\sin\varphi)\int_1^2 r^2dr\right\}d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{7}{3}\right\}d\varphi=\frac{7}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\right)=\frac{14}{3}$$

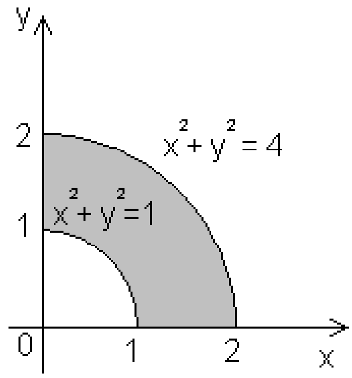


Рис.17

Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к полярным координатам и расставить пределы интегрирования.

12.1) D – круг $x^2+y^2\le R^2$

12.2) D – круг $x^2+y^2\le ax$

12.3) D – круг $x^2+y^2\le by$

12.4) D – область, ограниченная окружностями $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ и прямыми $y=x$ и $y=2x$.

12.5) D – область, ограниченная прямыми $y=x$, $y=0$ и $x=1$.

12.6) D – внутренняя часть правой петли лемнискаты Бернулли $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

Расставить пределы интегрирования в полярных координатах:

12.7) $\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$ **12.8)** $\int_{\frac{R}{2}}^{2R} dy\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx$

Вычислить в полярных координатах:

12.9) $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx$

12.10) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – часть круга радиуса a с центром в точке $O(0,0)$, лежащая в первой четверти.

12.11) Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы: $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где область D ограничена лепестком лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(x \geq 0)$

12.12) Найти объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=2x$, плоскостями $2x-z=0$ и $4x-z=0$.

Домашнее задание

Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

12.13) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy$.

12.14) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, где D ограничена кривыми: $x^2+y^2=ax$; $x^2+y^2=2ax$; $y=0$; $y>0$.

12.15) $\iint\limits_D dxdy$, где $D: x^2=ay;\ x^2+y^2=2a^2;\ y=0;\ x\geq 0;\ y\geq 0$

Занятие 13
Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Тройным интегралом от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по ограниченной замкнутой пространственной области T называется предел последовательности соответствующих интегральных сумм

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot V_k$$

при стремлении к нулю наибольшего из диаметров $d_1, d_2, ..., d_n$ элементарных областей $T_1, T_2, ..., T_n$, если этот предел не зависит ни от способа разбиения области T на элементарные подобласти $T_1, T_2, ..., T_n$, ни от выбора промежуточных точек $P_k(x_k, y_k, z_k) \in T_k$:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)V_i \qquad (13.1)$$

Здесь V_i обозначает объем элементарной области T_i.

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов. Заметим, что тройной интеграл по области T из единичной функции равен объему этой области.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов или к *вычислению трех однократных интегралов. Если, например, область T ограничена снизу поверхностью* $z=z_1(x,y)$ *, сверху поверхностью* $z=z_2(x,y)$ $\left(z_1(x,y)\le z_2(x,y)\right)$ *и с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью, параллельной плоскости Oxy, является область A, то тройной интеграл (13.1) вычисляется по формуле*

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\iint_A\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy. \qquad (13.2)$$

Записывая двойной интеграл по области A через повторный, получаем

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx=$$

$$=\int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy \qquad (13.3)$$

Пример 13.1 *Вычислить интеграл* $\iiint_T \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ *по области, ограниченной плоскостями* $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Решение. Эта область ограничена сверху и снизу плоскостями $z=1-x-y$ *и* $z=0$ *и проектируется на плоскость* Oxy *в правильную область A, представляющую собой треугольник, ограниченный прямыми линиями* $x=0$, $y=0$, $y=1-x$.

Поэтому трехкратный интеграл вычисляется следующим образом:

$$I=\iint_A\left(\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}dz\right)dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}dz\right]dy\right\}dx=$$

$$=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left[\left.\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right|_0^{1-x-y}\right]dy\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left[(1+1)^{-2}-(x+y+1)^{-2}\right]dy\right\}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left.\left\{\frac{1}{4}y-\frac{(x+y+1)^{-1}}{-1}\right\}\right|_0^{1-x}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\frac{1-x}{4}+(x+1-x+1)^{-1}-(x+1)^{-1}\right\}dx=-\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{1-x}{4}dx+\frac{1}{2}\int_0^1dx-\int_0^1\frac{dx}{x+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_0^1+\frac{1}{2}x\Big|_0^1-\ln|x+1|\Big|_0^1\right)=\frac{1}{16}(0-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln 2=$$

$$=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}.$$

При переходе в тройном интеграле к криволинейным координатам, в частности к цилиндрическим или к сферическим координатам, вычисление его происходит по формулам:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{T_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz \qquad \textbf{(13.4)}$$

или

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{T_1} f(\rho\cos\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta \qquad (13.5)$$

Пример 13.2 *Вычислить объем тела T, ограниченного сферой* $x^2+y^2+z^2=4$ *и параболоидом* $3z=x^2+y^2$.

Решение. Справедливо равенство:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz\,.$$

Сначала найдем проекцию тела T на плоскость $z=0$. *Для этого достаточно найти проекцию линии пересечения сферы и параболоида на плоскость* $z=0$. *Из системы уравнений* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ 3z=x^2+y^2 \end{cases}$ *исключим переменную z. Получим квадратное уравнение относительно* x^2+y^2. *Его корнями являются:* $x^2+y^2=-12$, $x^2+y^2=3$. *То есть уравнение проекции:* $x^2+y^2=3$.

Итак, проекция тела T на плоскость $z=0$ *это круг* $x^2+y^2\le 3$, *который является областью A. Перейдем к цилиндрическим координатам. Снизу тело ограничено поверхностью* $3z=x^2+y^2$, *то есть* $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ *или* $z=\dfrac{r^2}{3}$. *Сверху тело ограничено поверхностью* $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, *то есть* $z=\sqrt{4-r^2}$. *Поэтому:*

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\iiint\limits_T rdrd\varphi dz=\iint\limits_A\left\{\int\limits_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} rdz\right\}d\varphi dr=\iint\limits_A r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2\right)drd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2\right)dr=\frac{19}{12}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{19\pi}{6}.$$

Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$

13.1) T – тетраэдр, ограниченный плоскостями: $2x+3y+4z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

13.2) T: $y^2+2z^2=4x$; $x=2$

Вычислить в декартовых координатах:

13.3) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2-y^2}} z\ dz$

13.4) $\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz$, где T – тетраэдр, ограниченный плоскостями: $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

13.5) Вычислить интеграл , перейдя к цилиндрическим координатам:

$$\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int\limits_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h}\sqrt{x^2+y^2}dz$$

13.6) Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ к цилиндрическим координатам и расставить пределы интегрирования, где Ω – область, ограниченная цилиндром $x^2+y^2=2x$, плоскостью $z=0$ и параболоидом $z=x^2+y^2$.

13.7) Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{\sqrt{z+x^2+y^2}}$ с помощью перехода к цилиндрическим координатам, где Ω – цилиндр $x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

Домашнее задание

Вычислить:

13.8) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} ydy \int\limits_{a-x}^{2(a-x)} dz$ **13.9)** $\iiint\limits_T xyzdxdydz$, $T:\ y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy,\ z=0$

13.10) Вычислить в цилиндрических координатах: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$.

Занятие 14
Числовые ряды. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Рядом называется формально составленная сумма бесконечного числа слагаемых :

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *называются первым, вторым, третьим и т.д. членами ряда. Член ряда* a_n*, записанный как функция порядкового номера* n*:* $a_n = f(n)$*, называется общим членом ряда.*

Сумма первых n *членов ряда:* $S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ *называется частной или частичной суммой этого ряда.*

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$*, то он называется суммой ряда, а ряд в этом случае называется сходящимся. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ *или не существует, то ряд называется расходящимся.*

Необходимый признак сходимости ряда*. Если ряд сходится, то при* $n \to \infty$ *общий член ряда стремится к нулю, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$*, то ряд расходится.*

Пример. Написать формулу общего члена ряда $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{6}{13}+\frac{8}{17}+\ldots$ *и найти* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Числители дробей – чётные числа, задаваемые формулой $2n$. *Знаменатели являются членами арифметической прогрессии с первым членом, равным 5, и разностью 4, и по формуле общего члена арифметической прогрессии равны* $1+4n$, *в итоге* $a_n=\dfrac{2n}{4n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{4n+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$ *- это означает расходимость ряда.*

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Ряд, все члены которого неотрицательны $(a_n\ge 0)$ *называется знакоположительным. Для знакоположительных рядов справедливы следующие достаточные признаки сходимости.*

1.Признак Даламбера*. Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$*.Тогда при* $l<1$ *ряд сходится, при* $l>1$ *- расходится, при* $l=1$ *требуется дополнительное исследование.*

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+1}{3n^2}$.

Решение. Здесь $a_n=\dfrac{2^n+1}{3n^2}$, $a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}+1}{3(n+1)^2}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^{n+1}+1)3n^2}{3(n+1)^2(2^n+1)}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)}=2$, *т.к.* $l>1$, *ряд расходится.*

2.Радикальный признак Коши*. Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, *тогда при* $l<1$ *ряд сходится, при* $l>1$ *расходится, при* $l=1$ *требуется дополнительное исследование*

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Решение. $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\dfrac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\dfrac{1}{n}=0$, $l<1$, *ряд сходится.*

3.Интегральный признак Коши*. Если* $f(x)$ *при* $x\ge 1$ *– непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, *где* $a_n=f(n)$, *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Пример. *Исследовать сходимость обобщённого гармонического ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$.

Решение. Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$, *где* $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$.

При $p \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^p}dx = \lim_{a\to\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^a = \frac{1}{1-p}\lim_{a\to\infty}\left(a^{1-p}-1\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, \text{если } p>1\\ \infty, \text{ если } p<1.\end{cases}$$

При $p=1$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty}\left(\ln a - \ln 1\right) = \infty.$

Объединяя полученные результаты, получаем:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p>1$ *и расходится при* $p \le 1$.

4.Первый признак сравнения*. Пусть даны два ряда*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

и

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ..., \qquad (2)$$

удовлетворяющих условию $a_n \le b_n$ $(n = 1,2,3,...)$*. Тогда, если сходится ряд с большими членами (2), то ряд с меньшими членами (1) тоже сходится. Если расходится ряд с меньшими членами (1), то и ряд с большими членами (2) расходится.*

Пример. *Исследовать сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$.

Решение. Так как $0 < 3n-2 < 3n$*, то* $a_n = \frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n} = b_n$*, ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *расходится (по интегральному признаку Коши), то и данный ряд тоже расходится.*

Следует отметить, что в качестве вспомогательного ряда для сравнения чаще всего подбирают обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *, либо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} bq^n$*, являющийся суммой геометрической прогрессии, сходящийся при* $|q|<1$ *и расходящийся при* $|q| \ge 1$.

5.Второй (предельный) признак сравнения*. Если для рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *существует конечный положительный предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$*, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Пример. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+1}$.

Условие $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c,\ 0<c<\infty$*, равносильно тому, что* a_n *и* b_n *– бесконечно малые одного порядка или, что то же самое,* $a_n \approx b_n$ *Используя свойства отношения* *эквивалентности, получим* $a_n = \dfrac{3n+1}{n^3+1} = \dfrac{n(3+\frac{1}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n^3})} \approx \dfrac{3}{n^2} = 3b_n$. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *сходится. По признаку сравнения данный ряд тоже сходится.*

Записать общий член ряда, найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

14.1. а) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}+\ldots$; б) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{6}{27}+\dfrac{8}{81}+\ldots$; в) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\ldots$.

Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

14.2. $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)!}+\ldots$; **14.3.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}+\ldots$;

14.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$; **14.5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{2^n n}$; **14.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$; **14.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{3^n}$.

Исследовать ряды на сходимость, применяя радикальный признак Коши:

14.8 $\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$; **14.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+2}\right)^n$.

Домашнее задание

Исследовать ряды на сходимость:

14.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$; **14.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2+5}$; **14.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}$; **14.13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$;

14.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; **14.15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$; **14.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$; **14.17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Занятие 15
Признаки сходимости знакоположительных рядов (продолжение). Знакопеременные ряды.

Знакопеременные ряды.

Ряд, содержащий бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов, называется знакопеременным. Частный случай знакопеременного ряда - знакочередующийся ряд, знаки членов которого чередуются. Необходимый признак сходимости этих рядов остается прежним.

Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, *составленный из модулей членов знакопеременного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, *сходится, то и исходный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *тоже сходится.*

В этом случае знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *называется абсолютно сходящимся.*

Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится, а ряд из модулей* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *расходится, то данный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *называется условно сходящимся.*

Достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд* $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, *где все* a_n – *положительные числа, сходится, если абсолютные величины* a_n *его членов убывают, а общий член стремится к нулю, т.е. если выполнены условия:*

1) $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$,

2). $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

Сумма S *такого ряда удовлетворяет неравенству* $|S|<a_1$.

Пример. *Исследовать сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\ldots$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$, *составленный из модулей членов данного ряда, расходится (по интегральному признаку Коши), но исходный ряд являетсязнакочередующимся, и для него выполнены условия 1 и 2 признака Лейбница:*

1) $\frac{1}{3n+2}>\frac{1}{3n+5}$ *при всех значениях n и 2)* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2}=0$. *Следовательно, данный ряд сходится условно.*

При исследовании сходимости рядов бывает полезна **формула Стирлинга :**

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Исследовать знакоположительные ряды на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

15.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$; **15.2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; **15.3** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; **15.4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Исследовать знакоположительные ряды на сходимость, применяя признак сравнения:

15.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-3}$; **15.6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$; **15.7** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Исследовать ряды на сходимость, применяя предельный признак сравнения:

15.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3-1}$; **15.9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{3n^3+5n}$; **15.10.** $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^3\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Выяснить, какие из рядов сходятся абсолютно, какие условно и какие расходятся:

15.11. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$; **15.12** $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3-\ldots$;

15.13. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots$; **15.14.** $\frac{1}{2\cdot 1!}-\frac{2^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{3^3}{2^3\cdot 3!}-\frac{4^4}{2^4\cdot 4!}+\ldots$;

15.15. $\frac{\sin\alpha}{1\sqrt{1}}+\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}}+\frac{\sin 3\alpha}{3\sqrt{3}}+\ldots$.

Домашнее задание

Исследовать ряды на сходимость:

15.16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; **15.17.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; **15.18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$;

15.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$; **15.20.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$; **15.21.** $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; **15.22.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{(\ln 3)^n}$.

Занятие 16
Степенные ряды.

Ряд, все члены которого являются функциями некоторой переменной называется функциональным: $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\ldots\varphi_n(x)+\ldots$.

Совокупность значений переменной x, *при которых функции* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_n(x), ...$ *определены и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *сходится, называют областью сходимости функционального ряда.*

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

или

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (2)$$

называется степенным.

Ряд (1) всегда сходится в точке $x = 0$, *ряд (2) сходится в точке* $x = x_0$.

***Теорема Абеля**.1) Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится в каждой точке* x, *для которой* $|x| < |x_0|$.*2) Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *расходится при некотором значении* $x = x_1$, *то он расходится при всех значениях* x, *для которых* $|x| > |x_1|$.

Из этой теоремы следует, что интервалом сходимости степенного ряда (1) является интервал $(-R, R)$, *симметричный относительно точки* $x = 0$ *.Число* R *называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал* $(-R, R)$*– интервалом сходимости.*

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится только в одной точке* $x = 0$, *то считают* $R = 0$, *а если на всей числовой прямой, то* $R = \infty$.
Отметим, что на границах интервала сходимости, т.е. в точках $\pm R$, *ряды могут как сходиться, так и расходиться.*

Точку $x = 0$ *называют центром сходимости ряда (1). Аналогично, для ряда (2) центром сходимости называют точку* $x = x_0$, *а интервалом сходимости будет интервал* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *, в граничных точках этого интервала также требуется проверка сходимости. Каждая из граничных точек интервала сходимости может принадлежать или не принадлежать области сходимости.*

***Пример.** Найти область сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2 + 1}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2n^2 + 1}$, *составленный из модулей членов данного ряда. При* $x = 0$ *этот ряд сходится. Если* $x \neq 0$, *то все члены ряда – положительные числа, и* *можно применить признак Даламбера:* $a_n = \dfrac{|x|^n}{2n^2+1}$, $a_{n+1} = \dfrac{|x|^{n+1}}{2(n+1)^2+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|(2n^2+1)}{2(n+1)^2+1} = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2+1)}{2(n+1)^2+1} = |x|$. *По признаку Даламбера ряд сходится, если* $|x|<1$*, т.е.* $-1<x<1$*, и расходится, если* $|x|>1$*, т.е.* $x>1$ *либо* $x<-1$. *Интервал* $(-1,1)$ *является интервалом сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^n}{2n^2+1}$*, а значит, и данного ряда. Исследуем ряд на сходимость на концах интервала: при* $x=1$ *получаем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2+1}$*, по признаку сравнения* $a_n = \dfrac{1}{2n^2+1} \approx \dfrac{1}{2n^2} = b_n$*, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ *сходится, следовательно, сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2+1}$*; при* $x=-1$ *получаем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n^2+1}$*, который сходится абсолютно (что легко проверяется). Таким образом, областью сходимости ряда является отрезок* $[-1,1]$.

Найти область сходимости степенных рядов

16.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(x-2)^n}{n}$; **16.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{nx^n}{3n-1}$; **16.3** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{n+1}(x-3)^n}{(2n+1)3^n}$;

16.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n x^n$; **16.5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n+1}(x-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$; **16.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$; **16.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+2)^{2n}}{n}$.

Домашнее задание

Найти область сходимости степенных рядов:

16. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$ **16.9** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n2^n\sqrt{2n+1}}$; **16.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$;

16.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(x+1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$; **16.12** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$.

Занятие 17
Ряды Тейлора и Маклорена.

Ряд Тейлора.

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<r$*, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

где $R_n(x)$*– остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.*

Ряд Тейлора, в котором $x_0=0$*, называют иногда рядом Маклорена.*

Ряды Маклорена некоторых функций:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ -1<x\le 1;$$

$$\text{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\ -1\le x\le 1;$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

В последнем разложении если $\alpha\ge 0$*, то интервал сходимости :* $-1\le x\le 1$*; если* $-1<\alpha<0$*, то интервал сходимости:* $-1<x\le 1$*; если* $\alpha\le -1$*, то интервал сходимости :* $-1<x<1$.

Пример. *Разложить функцию* $\ln x$ *в ряд по степеням* $x-1$.
Найдём значения функции и её производных при x=1:

$f(x)=\ln x$	$f(1)=0$
$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(1)=1$

$f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}$	$f''(1)=-1$
$f'''(x)=\dfrac{(-1)(-2)}{x^3}$	$f'''(1)=2$
...	...
$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

Подставляя в формулу ряда Тейлора, получаем разложение

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots.$$

Эту задачу можно было решить и другим способом: в разложении

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\dots$ *(* $-1<x\le 1$ *) заменим* x *на* $x-1$*;*

получим $\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}-\dfrac{(x-1)^4}{4}+\dots$ *(* $0<x\le 2$ *).*

Разложить в ряд Тейлора непосредственно:

17.1. $f(x)=e^{\frac{x}{3}}$ по степеням $(x-3)$, найти область сходимости ряда;

17.2. $f(x)=3^x$ по степеням x;

17.3. $f(x)=2x^3-4x^2+3x-2$, $x_0=1$.

Найти ряды Маклорена с использованием основных разложений:

17.4. $f(x)=x^3e^{-x}$; **17.5.** $f(x)=x\ln(1+x)$ **;** **17.6.** $f(x)=\ln(10+x)$;

17.7. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **; 17.8.** $f(x)=\sqrt{4+x}$ **; 17.9.** $f(x)=\sin^2 x$ **.**

17.10. Вычислить $\sqrt{e}$, взяв четыре члена разложения. Оценить погрешность.

17.11. Вычислить $\ln 1,02$ с точностью до 0,001.

17.12. Вычислить $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

Домашнее задание

Разложить в ряд Тейлора непосредственно:

17.13. $f(x)=2^{-2x}$ по степеням x**; 17.14.** $f(x)=\ln(x)$ по степеням $x-1$ **.**

Разложить в ряд Тейлора с использованием основных разложений:

17.15. $f(x)=e^{-x^3}$ **; 17.16.** $f(x)=\cos^2 x$; **17.17.** $f(x)=x\sin 3x$ **;**

17.18. $f(x)=x^3\ln(1-x)$ **; 17.19.** $f(x)=\sqrt[3]{27-x}$ **.**

Используя соответствующие разложения, вычислить значения функций с точностью до 10^{-4}:

17.20. $\frac{1}{e}$; **17.21.** $\cos 1$ **.**

Вычислить интегралы с точностью до 10^{-4}:

17.22. $\int\limits_0^{0,8} \frac{dx}{1+x^5}$ **;17.23.** $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$; **17.24.** $\int\limits_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$ **.**

Занятие 18
Ряды Фурье.

Рядом Фурье, или тригонометрическим рядом, называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с действительными коэффициентами a_0, a_n, b_n

***Теорема Дирихле**. Если периодическая функция* $f(x)$ *с периодом* 2π*, заданная на интервале* $(-\pi,\pi)$ *и ограниченная на отрезке* $[-\pi,\pi]$*, удовлетворяет на этом интервале двум условиям: 1)* $f(x)$ *либо непрерывна на* $(-\pi,\pi)$*, либо имеет на* $(-\pi,\pi)$ *конечное число точек разрыва первого рода; 2)* $f(x)$ *– кусочно-монотонная, т.е. отрезок* $[-\pi,\pi]$*можно разбить на конечное число отрезков, в каждом из которых* $f(x)$ *строго монотонна либо постоянна, то такая функция может быть представлена тригонометрическим рядом (рядом Фурье) :* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$,

где коэффициенты a_0, a_n, b_n*, называемые коэффициентами Эйлера-Фурье, вычисляются по формулам:*

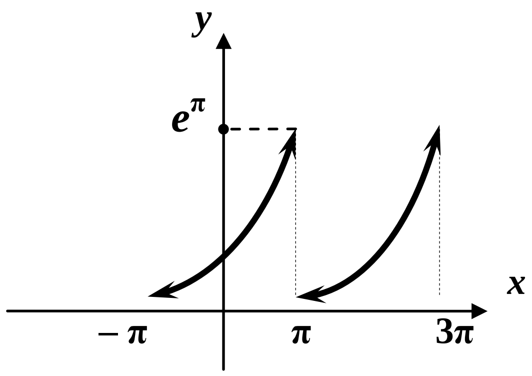
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \dots.\ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Сумма $S(x)$ *приведённого ряда Фурье равна значению функции* $f(x)$ *во всех точках непрерывности* $f(x)$*. В каждой точке разрыва* x_0 *.функции* $f(x)$ *сумма ряда будет равна полусумме значений функции на разрыве:* $S(x) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Приведённые в этой теореме условия 1 и 2 называют условиями Дирихле.

При вычислении коэффициентов Эйлера-Фурье часто используют формулу тригонометрии $\cos \pi n = (-1)^n$ *для* $\forall\, n \in N$ *и обозначения гиперболических функций: гиперболического синуса* $\operatorname{s}hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *и гиперболического косинуса* $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Пример. *Разложить в ряд Фурье функцию* $f\left(x\right)=e^{x},\ x\in\left(-\pi,\pi\right),T=2\pi$



.

Решение. Функция $f\left(x\right)$ *удовлетворяет условиям Дирихле, значит, разложение возможно,*

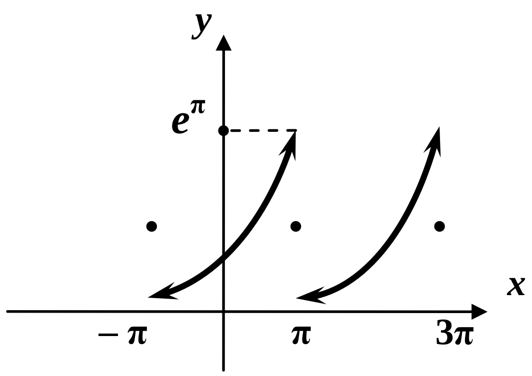
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}dx=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi},\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}\cos nxdx=\frac{(-1)^{n}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi\left(1+n^{2}\right)},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}\sin nxdx=\frac{(-1)^{n+1}n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi\left(1+n^{2}\right)}.$$

Тогда разложение функции имеет вид

$$e^{x}=\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{2}+\frac{\sin x}{2}+\frac{\cos 2x}{5}-\frac{2\sin 2x}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n}\cos nx}{\left(1+n^{2}\right)}+\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{\left(1+n^{2}\right)}+\ldots\right)$$

График суммы полученного ряда



Разложение чётных и нечётных функций (неполные ряды Фурье).

Разложение чётной функции содержит только члены с косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=0\quad\forall n=\overline{1,\infty}.$$

Разложение нечётной функции содержит только члены с синусами:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ a_0=a_n=0\quad\forall n=\overline{1,\infty}.$$

Разложение функции, заданной на интервале $(-l,l)$ и периодической с периодом $T=2l$.

Ряд Фурье в этом случае имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l},\ \text{где}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\ \ \forall n=\overline{1,\infty}.$$

Разложение функций, заданных в произвольном промежутке.

1) Пусть $f(x)$ задана только в промежутке $(0,l)$ (непериодическая; l – произвольное положительное число) и удовлетворяет в этом интервале условиям Дирихле. Продолжим функцию на смежный интервал $(-l,0)$ – это можно сделать бесконечным числом способов; чётное или нечётное продолжение – простейшие из них. Вводя новую функцию $\varphi(x)$, совпадающую с исходной на интервале $(0,l)$, с её продолжением – на интервале $(-l,0)$, и считая, что $\varphi(x)$ – периодическая с периодом $T=2l$, разложим $\varphi(x)$ в ряд Фурье. В интервале $(0,l)$ этот ряд будет иметь суммой $f(x)$ – это и будет искомое разложение.

2) Пусть непериодическая функция $f(x)$ задана на интервале (a,b) и удовлетворяет в этом интервале условиям Дирихле. Сделаем линейное преобразование аргумента $x=t+a$, тогда функция $F(t)=f(t+a)$ задана на интервале $(0,b-a)$. Далее выполняются все действия, описанные в пункте 1), и получается разложение исходной функции на интервале (a,b).

Ряды Фурье в комплексной форме.

Если в записи ряда Фурье периодической с периодом 2π функции $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ преобразовать тригонометрические функции по *формулам Эйлера* $\cos nx = \dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin nx = \dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$, *то ряд Фурье может быть преобразован к виду*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$, $n\in Z$. ($c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$, $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$) - *такой ряд называют рядом Фурье в комплексной форме.*

Если функция $f(x)$ *с произвольным периодом* $T=2l$ *задана на интервале* $(-l,l)$, *то комплексная форма ряда Фурье имеет вид:*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}},\ \text{где}\ c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{-i\pi nx}{l}}dx,\ n\in Z.$$

Члены ряда $c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}}$ *называют гармониками, модули коэффициентов* $|c_n|$ *– комплексными амплитудами гармоник, числа* $\dfrac{\pi n}{l} = \omega_n$ *– волновыми числами функции* $f(x)$. *Совокупность амплитуд* $\{|c_n|, n\in Z\}$ *называется амплитудным спектром. Графически спектр изображается в виде вертикальных отрезков длиной* $|c_n|$, *расположенных в точках* $x_n = \dfrac{\pi n}{l}$ *числовой оси.*

Пример. *Записать в комплексной форме ряд Фурье функции* $y=|x|$, $x\in(-\pi,\pi)$, $T=2\pi$.

Решение. Найдём коэффициенты c_n ($n\neq 0$):

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}-xe^{-inx}dx + \int\limits_{0}^{\pi}xe^{-inx}dx\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ni}\int\limits_{0}^{\pi}xe^{nxi}d(nxi) - \frac{1}{ni}\int\limits_{0}^{\pi}xe^{-nxi}d(-nxi)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ni}\int\limits_{0}^{\pi}x\,de^{nxi} - \frac{1}{ni}\int\limits_{0}^{\pi}xde^{-nxi}\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi ni}\left(xe^{nxi}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_{0}^{\pi}e^{nxi}dx - xe^{-nxi}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_{0}^{\pi}e^{-nxi}dx\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi ni}\left(\pi(e^{n\pi i}-e^{-n\pi i})-\frac{1}{ni}(e^{n\pi i}+e^{-n\pi i}-2)\right)=\left|\begin{matrix} e^{n\pi i}=\cos n\pi+i\sin n\pi=\cos n\pi=(-1)^n \\ e^{-n\pi i}=\cos(-n\pi)+i\sin(-n\pi)=(-1)^n\end{matrix}\right|=$$

$$\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)\ ,$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2}.$$

Получили ряд в комплексной форме:

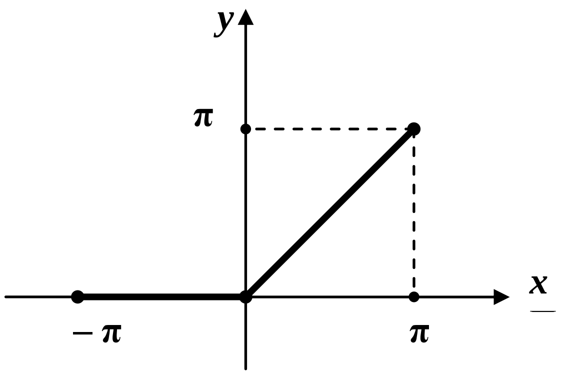
$$|x|=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-1\right)e^{nxi}=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{(2k+1))xi}\ .$$

Амплитудный спектр: $|c_n|=|c_{2k+1}|=\dfrac{2}{\pi(2k+1)^2}\ ,\quad |c_{2k}|=0\,.$

18.1. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ если-\pi<x\le 0\\ 2,\ если\ 0<x<\pi\end{cases},\quad f(x+2\pi)=f(x)\ .$$

18.2. Функция задана графически (периодическая с периодом T=2π):



Получить её разложение в ряд Фурье.

18.3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\dfrac{|x|}{2},\ -\pi<x\le\pi\ ,\quad f(x+2\pi)=f(x).$

Положив $x=0$, найти сумму соответствующего числового ряда.

18.4. Разложить в ряд Фурье функцию

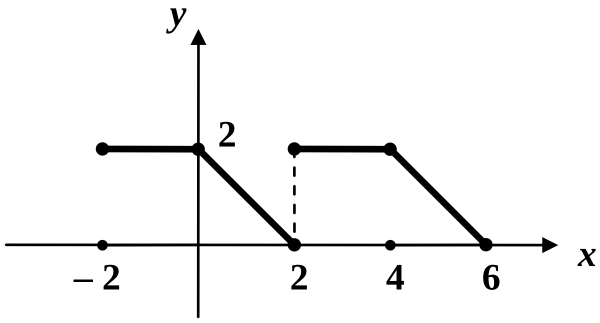
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1+x}{3},\ x\in(-1,0)\\ \dfrac{1-x}{3},\ x\in(0,1)\end{cases},\quad T=2\,.$$

Домашнее задание

18.5. Разложить функцию в ряд Фурье :

$$f(x)=\begin{cases}-3, x\in(-2,0)\\ 3, x\in(0,2)\end{cases},\ f(x+4)=f(x).$$

18.6. Разложить функцию в ряд Фурье :



Суммы каких рядов можно получить при $x=0$ и при $x=\dfrac{\pi}{2}$?

Занятие 19
Неполные ряды Фурье.
Ряды Фурье в комплексной форме

19.1. Задана непериодическая функция $f(x)=3x,\ 0<x<2$.
Разложить её в ряд Фурье а) по косинусам; б) по синусам.

19.2. Задана функция $f(x)=2\pi-x,\ 0<x<2\pi;\ f(x+2\pi)=f(x)$.

Найти ряд Фурье, построить график его суммы $S(x)$. Записать ряд Фурье в комплексной форме.

19.3. Задана функция $f(x)=e^{-x},\ -\pi<x<\pi;\ f(x+2\pi)=f(x)$. Построить графики $f(x),\ S(x)$. Записать ряд Фурье в комплексной форме. Найти амплитудный спектр.

Домашнее задание

19.4. Задана функция $f(x)=x,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Разложить её в ряд Фурье а) по косинусам; б) по синусам.

19.5. Задана функция $f(x)=e^{2x},\ -\pi<x<\pi;\ f(x+2\pi)=f(x)$. Построить графики $f(x),\ S(x)$. Записать ряд Фурье в комплексной форме. Найти амплитудный спектр.

Занятие 20.
Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Основные понятия.

Уравнение, связывающее независимую переменную x, *искомую функцию* $y(x)$ *и её производную* $y'(x)$ *называется обыкновенным дифференциальным уравнением 1 порядка. В общем виде оно может быть записано*

$$y'(x) = f(x, y) \qquad (1)$$

или

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2).$$

Частным решением таких уравнений на интервале (a, b) *называется любая функция* $y = \varphi(x)$ *(или в неявном виде* $\Phi(x, y) = 0$*), которая будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество. Функция* $y = \varphi(x, C)$ *называется общим решением уравнения (1) или (2), если при любом допустимом значении константы* C *оно является частным решением этого уравнения и любое частное решение может быть представлено в виде* $y = \varphi(x, C_0)$ *при некотором значении* C_0 *параметра* C.

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, *определяющее общее решение как неявную функцию, называется общим интегралом дифференциального уравнения. Графики соответствующих кривых называются интегральными кривыми уравнений (1) или (2).*

Процесс отыскания решений дифференциального уравнения часто называют интегрированием уравнения. Когда решается конкретная задача (физическая, техническая и т.п.), приводящая к дифференциальному уравнению, то чаще всего на искомую функцию налагаются некоторые дополнительные условия. Такие условия называют начальными условиями, а конкретное решение уравнения, удовлетворяющее заданному условию, есть частное решение этого уравнения.

Задача отыскания решений уравнений, удовлетворяющих начальному условию, называется ещё задачей Коши. Для уравнения 1-го порядка задача Коши ставится так: найти частное решение уравнения вида (1) (или (2)), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, *здесь* (x_0, y_0)- *координаты точки, через которую проходит соответствующая интегральная кривая.*

Уравнения с разделяющимися переменными.

Пусть в уравнении $y' = f(x, y)$ *функция* $f(x, y)$ *- правая часть уравнения - может быть представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:* $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ *(или в уравнении* $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ *функции* $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$ *также могут быть представлены в виде произведений функций:* $M(x, y) = M_1(x) \cdot M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x) \cdot N_2(y)$*).*

С помощью деления в первом случае на $f_2(y)$, *во втором - на* $N_1(x)\cdot M_2(y)$ *эти уравнения приводятся, соответственно, к виду:*

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx \quad \text{или} \quad \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=-\frac{M_1(x)}{N_1(y)}dx.$$

Интегрируя левые части этих уравнений по y, *а правые – по* x, *получаем общее решение.*

Пример 1. *Решить уравнение:* $y'=\dfrac{ctgy}{x}$.

Решение: разделяем переменные и интегрируем: $\dfrac{dy}{ctgy}=\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{\sin y}{\cos y}dy=\int\dfrac{dx}{x}$,

$-\ln|\cos y|=\ln|x|+C_1$. *Константу* C_1 *можно выбрать в виде* $C_1=\ln C_2$, *тогда общее решение перепишем* $\ln\left|\dfrac{1}{\cos y}\right|=\ln|C_2x|$ *или* $\dfrac{1}{\cos y}=C_2x$.

Пример 2. *Решить задачу Коши:* $\begin{cases} dy-2\sqrt{y}\ln xdx=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

Решение. Разделяем переменные: $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=\ln xdx$,

$$\sqrt{y}=\int\ln xdx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C.$$

Общее решение: $\sqrt{y}=x\ln x-x+C$.

Найдем частное решение поставленной задачи Коши: подставим начальное условие в полученное решение и найдем соответствующее значение константы C: $0=0-1+C$, $C=1$.

Частное решение поставленной задачи Коши: $\sqrt{y}=x\ln x-x+1$.

Однородные уравнения.

Дифференциальное уравнение 1 порядка называется однородным, если его можно привести к виду $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Такое уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными с помощью введения новой неизвестной функции $è=\dfrac{y}{x}$.

Действительно, при этом $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$, *подстановка в уравнение дает:* $u'\cdot x+u=f(u)$ *- это уравнение с разделяющимися переменными.*

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

20.1. $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$; **20.2.** $y'=e^{x+y}$; **20.3.** $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$;
20.4. $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$; **20.5**. $(1+x^2)dy+y\sqrt{1+x^2}dx-xydx=0$.

Решить задачу Коши: **20.6.** $y'tgx = y;\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Решить однородные дифференциальные уравнения:

20.7. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$; **20.8**. $x\left(y' + e^{\frac{y}{x}}\right) = y$; **20.9**. $(x-y)dx + xdy = 0$;

20.10. $y^2dx + x^2dy = xydy$; **20.11** $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

Решить задачу Коши:

20.12. $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0;\quad y(1) = 1.$

Решить уравнения, сводящиеся к однородным :

20.13. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$;

20.14. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$;

20.15. $(y + 2)dx - (2x + y - 4)dy = 0$.

Домашнее задание.

Решить дифференциальные уравнения:

20.16. $y' + \frac{x\sin x}{y\cos y} = 0$; **20.17**. $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$;

20.18. $2e^x tgydx + (1 + e^x)\frac{dy}{\cos^2 y} = 0$.

Решить задачу Коши:

20.19. $(xy^2 + x)dy + (x^2y - y)dx = 0;\quad y(1) = 1.$

Решить дифференциальные уравнения:

20.20. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$; **20.21.** $y' = \frac{x - y}{x + y}$.

Решить задачу Коши:

20.22. $xy' = y\ln\frac{y}{x};\quad y(1) = 1.$

21.12. $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$.

Домашнее задание.

Решить дифференциальные уравнения:

21.13. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,

21.14. $y' + 2y = e^{3x}$,

20.15. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$.

Решить задачу Коши:

21.16. $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

Решить дифференциальное уравнение:

21.17. $y' + y = y^2 e^x$.

Решить уравнение, предварительно убедившись, что оно является уравнением в полных дифференциалах:

21.18. $\left(y + \dfrac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \dfrac{3}{y^2}\right)dy = 0$.

Занятие 22.
Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами: однородные (без правой части) и неоднородные (с правой частью).

Решение однородных уравнений.

Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка имеют вид: $y'' + py' + qy = 0$, *где* $p, q \in R$ *- заданные коэффициенты,* $y(x)$ *- неизвестная функция.*

Общее решение этого уравнения в соответствии с теорией содержит две константы и имеет вид: $y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, *где* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *- два частных линейно независимых решения исходного уравнения.*

Задача Коши (начальная задача) ставится так: найти решение уравнения, удовлетворяющее двум начальным условиям :

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

, где y_0, y_1 *– заданные постоянные.*

Будем искать решение этого уравнения в виде $y = e^{kx}$ *,где* $k \in R$ *– неизвестные числа. Подстановка функции* e^{kx} *в исходное уравнение приводит к так называемому характеристическому уравнению:*

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Решая его, найдем числа k_1 *и* k_2 *и, соответственно, частные решения исходного уравнения* $e^{k_1 x}$ *и* $e^{k_2 x}$.

При решении характеристического уравнения возможны следующие случаи :

1) дискриминант характеристического уравнения положителен:

$D = \dfrac{p^2}{4} - q > 0$, *характеристическое уравнение имеет два разных действительных корня* $k_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$, *исходное дифференциальное уравнение имеет два линейно независимых решения* $e^{k_1 x}$ *и* $e^{k_2 x}$, *его общее решение имеет вид* $y_{общ.однород} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) $D=\dfrac{p^2}{4}-q=0$*, характеристическое уравнение имеет два совпадающих корня* $k_1=k_2=-\dfrac{p}{2}$*; общее решение в этом случае имеет вид:*

$y_{общ.однород}=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}$*;*

3) $D=\dfrac{p^2}{4}-q<0$*, характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня* $k_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm i\sqrt{|D|}=\alpha\pm i\beta$*; в соответствии с теорией общее решение, не содержащее комплексных чисел, может быть записано в виде*

$$y_{общ.однород}=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

Примеры.

1. *Проинтегрировать уравнение* $y''-5y'+6y=0$*. Решить задачу Коши:*

$$\begin{cases} y''-5y'+6y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-1 \end{cases}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2-5k+6=0$ *,его корни -* $k_1=3$*,* $k_2=2$*, общее решение уравнения имеет вид:*

$$y_{общ.однород}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x} \qquad (*).$$

Для нахождения частного решения поставленной задачи Коши подставим в полученное равенство (∗) значения $x=0$*,* $y=2$*:* $C_1+C_2=2$.

Продифференцируем равенство (∗): $y'=3C_1e^{3x}+2C_2e^{2x}$ *и подставим в это равенство значения* $x=0$*,* $y=-1$*:* $3C_1+2C_2=-1$.

Теперь для нахождения значений констант C_1 *и* C_2 *есть система двух уравнений:*

$\begin{cases} C_1+C_2=2 \\ 3C_1+2C_2=-1 \end{cases}$*, решение этой системы* $C_1=-5$*,* $C_2=7$.

Частное решение поставленной задачи Коши: $y(x)=-5e^{3x}+7e^{2x}$

2. *Проинтегрировать уравнение:* $y''-2y'+y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$*,* $D=0$*, единственное значение корня* $k=1$*. Общее решение исходного уравнения:*

$y(x,C_1,C_2)=C_1e^x+C_2xe^x$.

3. *Проинтегрировать уравнение:* $y''-4y'+13y=0$.

Решение. Находим корни характеристического уравнения $k^2-4k+13=0$*,* $k_{1,2}=2\pm 3i$*. Общее решение запишется так:*

$y(x,C_1,C_2)=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$.

Решение неоднородных уравнений с правой частью специального вида.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = \varphi(x),$$

где $p, q \in R$ *- заданные коэффициенты,* $\varphi(x) \neq 0$ *- правая часть уравнения- заданная функция.*

Общее решение этого неоднородного уравнения $y_{о.н.}$ *имеет вид суммы решения* $y_{о.о.}$ *соответствующего однородного уравнения* $y'' + py' + qy = 0$ *и какого-нибудь частного решения исходного неоднородного уравнения* $y_*(x)$*:*

$$y_{о.н.}(x, C_1, C_2) = y_{о.о.}(x, C_1, C_2) + y_*(x)$$

Опишем нахождение частного решения $y_*(x)$ *в тех случаях, когда правая часть уравнения имеет специальный вид.*

***1**. Пусть правая часть имеет вид произведения заданного многочлена* n*-ой степени* $P_n(x)$ *и заданной экспоненциальной функции* e^{bx} *:* $\varphi(x) = P_n(x) \cdot e^{bx}$.

При этом возможны такие случаи:

а) число b *- не корень характеристического уравнения; частное решение* $y_*(x)$ *ищется в виде* $y_*(x) = Q_n(x)e^{bx}$ *(здесь и далее в пунктах б), в)* $Q_n(x)$ *- многочлен той же* $n-$*ой степени, что и* $P_n(x)$*, но с неизвестными коэффициентами) ;*

б) число b *- однократный корень характеристического уравнения ; частное решение ищется в виде* $y_*(x) = xQ_n(x)e^{bx}$*;*

в) число b *- двукратный корень характеристического уравнения; частное решение ищется в виде* $y_*(x) = x^2 Q_n(x)e^{bx}$ *;*

***2**. Пусть правая часть имеет вид суммы*

$\varphi(x) = P(x) \cdot e^{ax}\cos bx + Q(x) \cdot e^{ax}\sin bx$*, где* $P(x)$*,* $Q(x)$ *- заданные многочлены произвольных степеней,* a *,* b *- заданные действительные числа.*

Составим вспомогательное комплексное число $a + bi$ *(* a *,* b *- числа из функции* $\varphi(x)$*).*

Возможны случаи:

а) число $a + bi$ *- не корень характеристического уравнения; частное решение* y_* *ищется в виде* $y_*(x) = U(x)e^{ax} \cdot \cos bx + V(x)e^{ax} \cdot \sin bx$*, здесь и в пункте 2б)* $U(x)$*,* $V(x)$ *- многочлены с неизвестными коэффициентами одинаковой степени, равной наивысшей степени многочленов* $P(x)$ *и* $Q(x)$*;*

б) число $a + bi$ *- корень характеристического уравнения;*

частное решение ищется в виде $y_*(x) = x\left(U(x)e^{ax} \cdot \cos bx + V(x)e^{ax} \cdot \sin bx\right)$*;*

***3**. Пусть правая часть имеет вид суммы*

$\varphi(x) = A\cos bx + B\sin bx$*, где* $b, A, B \in R$ *- заданные числа. Эта правая часть - частный случай правой части пункта 2 при* $a = 0$ *и многочленах* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *- нулевого порядка (заданные числа).*

Составим вспомогательное комплексное число bi *.*

Возможны случаи:

а) число bi *- не корень характеристического уравнения; частное решение*

ищется в виде $y_*(x) = A_0\cos bx + A_1\sin bx$, $A_0, A_1 \in R$ *- неизвестные числа;*
б) число bi *- корень характеристического уравнения;*
частное решение ищется в виде $y_*(x) = x(A_0\cos bx + A_1\sin bx)$*;*

Пример 1. *Найти общее решение уравнения* $y'' + 4y' = x^2$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k = 0$ *для однородного дифференциального уравнения имеет 2 различных корня* $k_1 = 0$, $k_2 = -4$. *Общее решение соответствующего однородного уравнения*

$$y_{общ.однород} = C_1e^{0x} + C_2e^{-4x} = C_1 + C_2e^{-4x}$$

Учитывая, что $b = 0$ *- однократный корень характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде :*

$$y_*(x) = x\cdot\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Подставляя y_* *в заданное уравнение, получаем тождество*

$12Ax^2 + (8B + 6A)x + (2B + 4C) \equiv x^2$, *откуда*

$12A = 1$, $8B + 6A = 0$, $2B + 4C = 0$, *следовательно,*

$A = \dfrac{1}{12}$, $B = -\dfrac{1}{16}$, $C = \dfrac{1}{32}$ *и тогда* $y_*(x) = \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{1}{16}x^2 + \dfrac{1}{32}$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{общ.неоднород}(x, C_1, C_2) = C_1 + C_2e^{-4x} + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}.$$

Пример 2. *Найти общее решение линейного неоднородного уравнения* $y'' - 7y' + 12y = 3x\cos 2x.$

Решение. Сначала интегрируем однородное уравнение $y'' - 7y' + 12y = 0$*;*

Решение характеристического уравнения $k^2 - 7k + 12 = 0$ $k_1 = 3$, $k_2 = 4$*; общее решение однородного уравнения*

$$y_{общ.однород}(x, C_1, C_2) = C_1^{3x} + C_2e^{4x}$$

Частное решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_*(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$$

(учитываем, что вспомогательное число, соответствующее правой части исходного уравнения, имеет вид $2i$ *- оно не является корнем характеристического уравнения).*

Подставляя $y_*(x)$ *в исходное уравнение, получаем тождество*

$$(8A - 14C)x\cos 2x + (14A + 8C)x\sin 2x + (8B + 4C - 7A - 14D)\cos 2x +$$
$$+ (14B + 8D - 4A - 7C)\sin 2x \equiv 3x\cos 2x$$

Следуя логике метода неопределенных коэффициентов, уравниваем коэффициенты при функциях $x\cos 2x$, $x\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$ *в левой и правой частях тождества.*

Получается система линейных уравнений: $\begin{cases} 8A - 14C = 3 \\ 14A + 8C = 0 \\ -7A + 8B + 4C - 14D = 0 \\ -4A + 14B - 7C + 8D = 0 \end{cases}$

Её решение: $A=\dfrac{6}{65}$, $B=-\dfrac{21}{130^2}$, $C=-\dfrac{21}{130}$, $D=-\dfrac{1572}{130^2}$.

Искомое частное решение имеет вид

$$y_*(x)=\left(\frac{6}{65}x-\frac{21}{130^2}\right)\cos 2x+\left(-\frac{21}{130}x-\frac{1572}{130^2}\right)\sin 2x,$$

и тогда общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y_{общ.неоднород}(x,C_1,C_2)=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+$$
$$+\left(\frac{6}{65}x-\frac{21}{130^2}\right)\cos 2x+\left(-\frac{21}{130}x-\frac{1572}{130^2}\right)\sin 2x.$$

О нахождении частного решения дифференциального уравнения 2-го порядка с аддитивной правой частью.

Если правая часть линейного дифференциального уравнения 2-го порядка имеет вид суммы конечного числа n функций: $y''+py'+qy=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(x)$, *то частное решение* $y_*(x)$ *этого уравнения имеет вид суммы n функций* $y_{i*}(x)$: $y_*(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} y_{i*}(x)$, *где каждая функция* $y_{i*}(x)$ *является частным решением уравнения:* $y''+py'+qy=\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$.

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

22.1. $y''-2y'-2y=0$, **22.2.** $y''-6y'+9y=0$,

22.3. $4y''-8y'+5y=0$, **22.4.** $y''+5y=0$.

Решить задачу Коши:

22.5. $y''-5y'+4y=0 \quad y(0)=y'(0)=1$,

22.6. $4y''+4y'+y=0 \quad y(0)=2, \quad y'(0)=0$.

Найти общие решения неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

22.7. $2y''+y'-y=2e^x$, **22.8.** $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$,

22.9. $y''-7y'+6y=\sin x$, **22.10.** $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$.

Домашнее задание.

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

22.11. $y''-8y'+15y=0$,

22.12. $4y''+4y'+y=0$,

22.13. $4y''+9y=0$.

Решить задачу Коши:

22.14. $y''-2y'+y=0 \quad y(2)=1, \quad y'(2)=-2$.

Найти общее решение неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

22.15. $y'' - y = e^{-x}$,

22.16. $y'' - 2y' + 2y = 2x$,

22.17. $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$.

Занятие 23.
Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (продолжение).

Найти общие решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

23.1. $y'' + y = 4x\cos x$, **23.2.** $y'' + 4y = \cos^2 x$.

Для следующих неоднородных уравнений записать вид их частных решений с неопределенными коэффициентами, не находя числовых значений коэффициентов:

23.3. $y'' - 7y' = (x-1)^2$,

23.4. $y'' + 2y' + 5y = e^x((x+1)\cos 2x + 3\sin 2x)$.

Найти общие решения уравнений 2-го порядка:

23.5. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\sin x$; 4) $2x^3 - 30$; 5) $2e^x \cos\dfrac{x}{2}$;

6) $x - e^{-2x} + 1$; 7) $e^x(3-4x)$; 8) $3x + 5\sin 2x$; 9) $2e^x - e^{-2x}$;

23.6. $2y'' + 5y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) $29\cos x$; 2) $\cos^2 x$; 3) $29x\sin x$; 4) $100xe^{-x}\cos x$.

Решить задачу Коши:

23.7 $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = y'(-\pi) = 1$.

Домашнее задание.

23.8. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) 1; 2) e^{-x}; 3) $3e^{2x}$; 4) $2(\sin 2x + x)$; 5) $\sin x \cdot \cos 2x$; 6) $8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$.

Решить задачу Коши:

23.9. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$ $y'(0) = 2$.

Занятие 24
Преобразование Лапласа.

Оригиналом называется комплексная функция $f(t)$ *действительного аргумента* t *, удовлетворяющая условиям:*

а) $f(t)=0$ *при* $t<0$,

б) при $t\geq 0$ $f(t)$ *на каждом конечном промежутке непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода,*

в) существуют числа M > 0 и $s_0\geq 0$ *такие, что для всех* t $|f(t)|<Me^{s_0 t}$.

Простейшим оригиналом является функция Хевисайда $h(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t\geq 0\\ 0 \text{ при } t<0\end{cases}$.

Если $f(t)$ *удовлетворяет условиям б) и в), но не удовлетворяет условию а), то в качестве оригинала рассматривают функцию* $f(t)\cdot h(t)$.

Изображением оригинала f(t) называется функция $F(p)$ *комплексного переменного* $p=s+i\sigma$, *определяемая равенством* $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$.

Функцию $F(p)$ **называют также преобразованием Лапласа от функции** $f(t)$ **и обозначают** $F(p)=L\{f(t)\}$ **или** $f(t)\leftrightarrow F(p)$**. В литературе встречаются и другие обозначения отношения оригинал-изображение.**

Теорема. **Изображение** $F(p)$ **оригинала** $f(t)$ **в полуплоскости Re p >** s_0 **существует и является аналитической функцией.**

Пример . **Найти изображение функции Хевисайда.**

Решение. $L\{h(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt}dt=-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty=\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-pt}}{p}\right)=\frac{1}{p}$ **при условии** $\operatorname{Re}p>0$.

Свойства преобразования Лапласа.

1) Теорема линейности:. если $f_1(t)\leftrightarrow F_1(p)$ *и* $f_2(t)\leftrightarrow F_2(p)$, *то при любых значениях комплексных постоянных* c_1 *и* c_2

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\leftrightarrow c_1F_1(p)+c_2F_2(p).$$

2) Теорема подобия: если $f(t)\leftrightarrow F(t)$ *и* $a>0$, *то* $f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$.

3) Теорема смещения:. если $f(t)\leftrightarrow F(p)$, *то при любом комплексном* α

$$e^{-\alpha t}f(t)\leftrightarrow F(p+\alpha).$$

4) Теорема запаздывания: если $f(t)\leftrightarrow F(p)$ *и число* $\tau>0$, *то*

$$f(t-\tau)\leftrightarrow e^{-\tau p}F(p).$$

5) Дифференцирование оригинала: если функция $f(t)$ *и её производные являются оригиналами и* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *то*

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

6) Дифференцирование изображения: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *то* $F'(p) \leftrightarrow -tf(t).$

7) Интегрирование оригинала: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *то* $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \dfrac{F(p)}{p}$.

8) Интегрирование изображения: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$ *и интеграл* $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ *является сходящимся, то* $\dfrac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int\limits_p^\infty F(z)dz$.

вёрткой функций $f(t)$ *и* $g(t)$ *действительной переменной* t *называется функция, обозначаемая* $f(t) * g(t)$ *и определяемая равенством* $f(t) * g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. *Свёртка функций обладает свойством:* $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

9) Теорема о свёртке: если $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$ *и* $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, *то* $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(p)F_2(p)$.

Таблица оригиналов и их изображений

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	9.	$t\cdot \sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$	10.	$t\cdot \cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
3.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	11.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
4.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-a}$	12.	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
5.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	13.	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
6.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	14.	$e^{\alpha t}\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
7.	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	15.	$e^{\alpha t}\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p-a}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
8.	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$			

Здесь и далее под оригиналом $f(t)$ *подразумевается* $f(t)\cdot h(t)$.

Пример 1. *Найти изображение оригинала* $f(t)=5-4t^2+2\cos 3t$.

Решение. По таблице находим: $1\leftrightarrow\frac{1}{p}, t^2\leftrightarrow\frac{2!}{p^3}, \cos 3t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+3^2}$. *В силу линейности получаем* $5-4t^2+2\cos 3t\leftrightarrow\frac{5}{p}-\frac{8}{p^3}+\frac{2p}{p^2+9}$.

Пример 2. *Найти изображение оригинала* $f(t)=\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t\leftrightarrow\frac{1}{p^2+1}$, *по правилу интегрирования изображения имеем:*

$$\frac{\sin t}{t}\leftrightarrow\int_p^\infty\frac{dz}{z^2+1}=arctgz\Big|_p^\infty=\lim_{z\to\infty}\left(arctgz-arctgp\right)=\frac{\pi}{2}-arctgp=arcctgp.$$

Пример 3. *Найти изображение функции* $f(t)=\int_0^t\tau e^{i\tau}d\tau$.

Решение. Так как $te^{it} \leftrightarrow \dfrac{1}{(p-i)^2}$, *по правилу интегрирования оригинала получаем* $\int\limits_0^t \tau e^{i\tau} d\tau \leftrightarrow \dfrac{1}{p(p-i)^2}$

Для восстановления оригинала по его изображению оригинал представляют в виде суммы элементарных дробей видов, имеющихся в таблице, и затем используют свойство линейности, либо представляют изображение в виде произведения дробей, после чего применяется теорема о свертке.

Пример 4. *Восстановить оригинал по его изображению:*

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1)(p^2+1)}.$$

Решение. Представим изображение в виде суммы простейших дробей $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)(p^2+1)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{Cp+D}{p^2+1}$. *Приводя правую часть равенства к общему знаменателю и приравнивая числители обеих дробей, получаем равенство*

$1 = A(p+1)(p^2+1) + Bp(p^2+1) + (Cp+D)p(p+1)$. *Подставляя в это равенство значения* $p=0,\ p=-1,\ p=1$ *и сравнивая коэффициенты при* p^3, *получаем систему*

$$\begin{cases} A=1, \\ -2B=1, \\ 4A+2B+2(C+D)=1, \\ A+B+C=0. \end{cases}$$

Решая её, находим

$$A=1,\ B=-\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2},\ D=-\frac{1}{2},$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}.$$

Следовательно, $f(t) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-t} - \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{2}\sin t$.

Пример 5. *Найти оригинал, если его изображение* $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

Решение. По теореме о свёртке $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)}\cdot\dfrac{1}{(p^2+1)}$ *является изображением свёртки функций*

$$\sin t * \sin t = \int\limits_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t (\cos(2\tau - t) - \cos t)d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\left(2\tau-t\right)-t\cos t\right)\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$$

Найти изображения оригиналов, используя определение:

24.1 $f\left(t\right)=t$; **24.2** $f\left(t\right)=e^{2t}$.

Найти изображения оригиналов, используя таблицу изображений и свойство линейности:

24.3 $f\left(t\right)=5-3t^4+t\cos 3t$; **24.4** $f\left(t\right)=e^{3t}+3^{t-1}$**;**

24.5 $f\left(t\right)=\cos^2 2t$; **24.6** $f\left(t\right)=\cos 4t\cdot\sin 2t$;

24.7 $f\left(t\right)=t\sin 2t-te^{t+1}$; **24.8** $f\left(t\right)=\sin^3 t$.

Найти изображения оригиналов, используя теорему смещения:

24.9 $f\left(t\right)=te^{-t}\sin 3t$; **24.10** $f\left(t\right)=e^{2t}\sin^2 3t$.

Найти изображения оригиналов, используя теорему о дифференцировании изображения:

24.11 $f\left(t\right)=t^2\sin 3t$; **24.12** $f\left(t\right)=t^3e^t\cos 2t$.

Найти изображения оригиналов, используя теорему об интегрировании изображения:

24.13. $f\left(t\right)=\dfrac{1-\cos t}{t}$; **24.14.** $f\left(t\right)=\dfrac{e^{2t}-1}{t}$.

Не вычисляя интегралы, найти изображения следующих функций:

24.15. $\int\limits_0^t \tau\sin\tau d\tau$; **24.16**. $\int\limits_0^t \tau^2e^{\tau}d\tau$.

Найти оригиналы следующих изображений:

24.17. $F\left(p\right)=\dfrac{p+2}{p^3}$**;** **24.18.** $F\left(p\right)=\dfrac{2p+1}{p^2-p}$**;**

24.19. $F\left(p\right)=\dfrac{2-p}{\left(p-1\right)^2}$**;** **24.20.** $F\left(p\right)=\dfrac{6p^2-p-6}{p^3-p^2-6p}$**;**

24.21. $F\left(p\right)=\dfrac{p^3+p^2-1}{p^4-p^3}$**;** **24.22.** $F\left(p\right)=\dfrac{\left(p+1\right)^2}{\left(p^2+1\right)^2}$**.**

Домашнее задание.

Найти изображения оригиналов:

24.23. $f(t)=t-5e^{-\frac{t}{2}}$; **24.24**. $f(t)=2\sin t-\cos t.$; **24.25**. $f(t)=t+\frac{1}{2}e^{-t}.$;

24.26. $f(t)=e^{-t}\cos 2t$; **24.27**. $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$; **24.28**. $f\left(t\right)=\cos^4 t$;

24.29. $f(t)=t^2\cos t$; **24.30**. $f(t)=\int\limits_0^t\sin\tau d\tau$; **24.31**. $f\left(t\right)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

По данным изображениям найти оригиналы:

24.32. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$; **24.33**. $F(p)=\dfrac{5p^2-3p+1}{p^3-5p^2+6p}$;

24.34. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$; **24.35**. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$

Занятие 25.
Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операторным методом.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $a_0x''+a_1x'+a_2x=f(t)$. *Требуется найти решение этого уравнения* $x(t)$, *удовлетворяющее начальным условиям* $x(0)=x_1,\ x'(0)=x_2$. *Пусть* $f(t)$– *оригинал,* $f(t)\leftrightarrow F(p)$. *Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. Если* $x(t)\leftrightarrow X(p)$, *то* $x'(t)\leftrightarrow pX(p)-x(0)$, $x''(t)\leftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)$, *и в силу линейности изображения получаем:*

$$a_0\left(p^2X(p)-px(0)-x'(0)\right)+a_1\left(pX(p)-x(0)\right)+a_2X(p)=F(p).$$

Это уравнение называется операторным уравнением. Оно является линейным относительно изображения $X(p)$. *Решая его, находим* $X(p)$, *а затем восстанавливаем оригинал* $x(t)$.

Пример. Найти частное решение уравнения $x''(t)-2x'(t)+x(t)=4$, *удовлетворяющее начальным условиям:* $x(0)=4,\ x'(0)=2$.

Решение. Пусть частное решение $x(t)$ *имеет изображение* $X(p)$. *Тогда* $x'(t)\leftrightarrow pX(p)-4,\quad x''(t)\leftrightarrow p^2X(p)-4p-2$. *Операторное уравнение имеет вид:* $p^2X(p)-4p-2-2(pX(p)-4)+X(p)=\dfrac{4}{p}$, *или*

$$(p^2-2p+1)X(p)=4p-6+\frac{4}{p}.$$

Отсюда находим: $X(p)=\dfrac{2(2p^2-3p+2)}{p(p^2-2p+1)}=\dfrac{2(2p^2-3p+2)}{p(p-1)^2}$. *Раскладывая полученную дробь на простейшие, получаем* $X(p)=\dfrac{2}{(p-1)^2}+\dfrac{4}{p}$, *ему соответствует оригинал* $x(t)=2te^t+4$.

Аналогично решаются системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

25.1. $x'' + 4x' - 5x = 0, \quad x(0) = 3, x'(0) = -3.$

25.2. $x'' - 4x' + 4x = 4t, \quad x(0) = 4, x'(0) = 7.$

25.3. $x'' - 3x' + 10x = 9\sin t - 3\cos t, \quad x(0) = 4, x'(0) = 7.$

25.4. $x''' - x'' = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

25.5. $\begin{cases} x' = 3y - x \\ y' = x + y + e^t \end{cases}, \ x(0) = 1, \ y(0) = 1.$

25.6. $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1.$

Домашнее задание.

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

25.7. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

25.8. $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0;$

25.9. $x''' + 2x'' - 3x' = 4e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Решить системы дифференциальных уравнений:

25.10. $\begin{cases} x' + x - y = 2, \\ y' + x + y = 2t, \end{cases}, \ x(0) = 0, \ y(0) = -1.$

25.11. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1.$

Ответы к заданиям.

Ответы к занятию 1

1.1. $\frac{2}{3}x\sqrt{mx}+C$ **1.2.** $2\sqrt{ax}+2x+\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$ **1.3.** $\frac{2^x e^x}{\ln 2+1}+C$ **1.4.** $-2\,\mathrm{ctg}\,x-x+C$
1.5. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$ **1.6.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$ **1.7.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}+C$ **1.8.** $\frac{1}{2a\cos^2 ax}+C$ **1.9.** $\frac{1}{7-e^x}+C$ **1.10.** $\frac{1}{4}\ln|\sin 4x|+C$ **1.11.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}(x^2+1)+C$ **1.12.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x}{\sqrt{7}}+C$
1.13. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{2}+C$ **1.14.** $x-\ln|x+4|+C$ **1.15.** $x+\ln(x^2+1)+C$ **1.16.** $x-2\,\mathrm{arctg}\,x+C$ **1.17.** $\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}\,x+C$ **1.18.** $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$ **1.19.** $\frac{1}{6}\ln(3x^2+1)+C$ **1.20.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+C$ **1.21.** $\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}+C$ **1.22.** $\frac{\mathrm{ch}^2 x}{2}+C$
1.23. $-\frac{1}{3}\mathrm{cth}3x+C$ **1.24.** $-\frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2}+C$ **1.25.** $-\frac{1}{a}\mathrm{arctg}(e^{-ax})+C$ **1.26.** $\frac{1}{3}\arcsin 3x+C$ **1.27.** $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,x^4+C$ **1.28.** $x-\ln|x+2|+C$ **1.29.** $x-\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln(2^x+1)+C$ **1.30.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$

1.31. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C$ **1.32.** $\frac{n}{n-1}x^{\frac{n}{n-1}}+C$ **1.33.** $\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$ **1.34.** $x^2+3\sin x+C$
1.35. $-x+\mathrm{tg}\,x+C$ **1.36.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathit{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$ **1.37.** $-\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}+C$ **1.38.** $\frac{x^3}{3}+(a+b)\frac{x^2}{2}+abx+C$ **1.39.** $x+3\,\mathrm{tg}\,x+C$ **1.40.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+C$ 1 **1.41.** $-\frac{1}{\ln x}+C$ **1.42.** $-\frac{1}{b}\ln|a-b\,\mathrm{tg}\,x|+C$ **1.43.** $\ln|\sin x|+C$ **1.44.** $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
1.45. $-2\cos\sqrt{x}+C$ **1.46.** $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$ **1.47.** $x-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{x}{\sqrt{3}})+C$ **1.48.** $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C$

Ответы к занятию 2

2.1. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$ **2.2.** $2\sqrt{ax}+2x+\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$ **2.3.** $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\ln x-\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{4}+C$ **2.4.** $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$ **2.5.** $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$ **2.6.** $-\frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2}+C$ **2.7.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$ **2.8.** $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$ 2.9. $\frac{(x-\sqrt{1-x^2})e^{\arccos x}}{2}+C$ **2.10.** $\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$ **2.11.** $(x^2-2x+1)\sin x+2(x-1)\cos x+C$ **2.12.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$ **2.13.** $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$ **2.14.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|2-3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$ **2.15.** $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$ **2.16.** $(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$ **2.17.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$ **2.18.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$ **2.19.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$ **2.20.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$

Ответы к занятию 3

3.1. $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$ **3.2.** $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$ **3.3.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$ **3.4.** $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$ **3.5.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$ **3.6.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$ **3.7.** $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$ **3.8.** $-\frac{1}{2(x^2-5x+4)^2}+C$

Ответы к занятию 4

4.1. $\frac{\sin^3 x}{3}+C$ **4.2.** $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$ **4.3.** $-\frac{3}{4}\cos^4\frac{x}{3}+C$ **4.4.** $\frac{tg^5 x}{5}+\frac{tg^3 x}{3}+C$

4.5. $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$ **4.6.** $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}+C$ **4.7.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$

4.8. $\frac{5x}{16}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{3}{32}\sin 2x-\frac{\sin^3 x}{24}+C$ **4.9.** $\operatorname{tg}x-x+C$ **4.10.** $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$ **4.11.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$ **4.12.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{32}+C$ **4.13.** $\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C$ **4.14.** $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$ **4.15.** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$ **4.16.** $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$ **4.17.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$ **4.18.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-tg\frac{x}{2}}\right|+C$

Ответы к занятию 5

5.1. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$ **5.2.** $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+a}-6\ln\sqrt[6]{x+a}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+a}\right|+C$ **5.3.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$ **5.4.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

5.5. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$ **5.6.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$ **5.7.** $-\frac{1}{9}\sqrt{4-9x^2}+C$ **5.8.** $-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+C$

5.9. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 10x}{20}+C$ **5.10.** $\frac{\sin 5x}{5}-\frac{\sin^3 5x}{15}+C$ **5.11.** $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+C$ **5.12.** $-\arcsin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C$ **5.13.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$ **5.14.** $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$ **5.15.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$

5.16. $\frac{1}{40}\ln\left|\frac{4+5x}{4-5x}\right|+C$ **5.17.** $\frac{1}{5}\ln\left|5x+\sqrt{25x^2+16}\right|+C$ **5.18.** $x(\ln x-1)+C$ **5.19.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$ **5.20.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+2\,\mathrm{arctg}\left(x+1\right)+C$,

5.21. $-\ln\left|2\sqrt{x^2-3x+2}-2x+3\right|+C$; **5.22** $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$;

5.23 $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{9}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+10})+C$.

Ответы к занятию 6

6.1. $\frac{9}{2}$; **6.2.** $\frac{45}{4}$; **6.3.** 1; **6.4.** $\frac{7}{\ln 2}$; **6.5.** $\frac{\ln 3}{2}$; **6.6.** $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$; **6.7.** $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; **6.8.** $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$; **6.9.** $\sin 1$; **6.10.** $\frac{2}{3}$; **6.11.** $\frac{2}{3}\left(3-\ln\frac{5}{2}\right)$; **6.12.** $\ln\frac{3}{2}$; **6.13.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; **6.14.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; **6.15.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; **6.16.** 1; **6.17.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; **6.18.** e^2-e; **6.19.** $\ln\frac{5}{2}$; **6.20.** $\frac{\pi}{12}$; **6.21.** $\frac{1}{4}arctg\,\frac{4}{7}$; **6.22.** $\frac{11}{2}+7\ln 2$; **6.23.** $-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}$; **6.24.** $\frac{1}{6}$; **6.25.** $\frac{e^2+1}{4}$;

Ответы к занятию 7

7.1. Расходится; **7.2.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; **7.3.** Расходится; **7.4.** Сходится; **7.5.** $\frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{3}+1\right)$; **7.6.** π; **7.7.** $\frac{\pi}{3}$; **7.8.** Сходится; **7.9.** $\frac{1}{2}$; **7.10.** Расходится; **7.11.** $\frac{1}{3}$; **7.12.** Сходится; **7.13.** Расходится; **7.14.** $\frac{16}{3}$; **7.15.** $2\sqrt{2}$;

Ответы к занятию 8

8.1. $\frac{80}{3}$; **8.2.** $\frac{32}{3}$; **8.3.** $\frac{e}{2}-1$; **8.4.** $\frac{3\pi a^2}{8}$; **8.5.** $\frac{\pi a^2}{8}$; **8.6.** $\frac{\pi a^2}{4}$; **8.7.** $\frac{\left(e^{4\pi}-1\right)^2}{4}$; **8.8.** e^2; **8.9.** $\frac{1}{2}$; **8.10.** 12π; **8.11.** $\frac{3\pi a^2}{2}$.

Ответы к занятию 9

9.1.Круговой цилиндр; **9.2**.Круговой цилиндр; **9.3**.Параболический цилиндр; **9.4**.Параболический цилиндр; **9.5**.Конус вращения; **9.6**.Конус вращения; **9.7**.Эллиптический параболоид; **9.8.** Сфера; **9.11**. Круговой цилиндр; **9.12**. Гиперболический цилиндр; **9.13**. Эллипсоид; **9.14**. Параболоид.

Ответы к занятию 10

10.1. $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$; **10.2**. $y = x;\ y = x+3;\ x = 1;\ x = 2$; **10.3**. $x + y = 2;\ x = \sqrt{4-y^2};\ y = 0;\ y = 2$; **10.4**. $\int\limits_1^5 dx\int\limits_2^4 f(x,y)dy = \int\limits_2^4 dy\int\limits_1^5 f(x,y)dx$; **10.5**. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx + \int\limits_a^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)dx$; **10.6**. $\int\limits_a^a dx \int\limits_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$

$+\int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{(a-\sqrt{a^2-4y^2})/2} f(x,y)dx + \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{(a+\sqrt{a^2-4y^2})/2}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{a/2}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$; **10.7**. $\int\limits_3^5 dx \int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)dy$; **10.8**. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$; **10.9**. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$; **10.10**. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$; **10.11**. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{6-x} f(x,y)dy$; **10.12**. $\frac{\pi}{6} - \ln 2$;

10.13. $y = x^2;\ y = 2 - x^2;\ x = 1;\ x = -1$; **10.14**. $y = \sqrt{x};\ y = \sqrt{2-x^2};\ x = 0;\ x = 1$;

10.15. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)dy + \int\limits_4^5 dx\int\limits_2^4 f(x,y)dy + \int\limits_5^7 dx \int\limits_{x-3}^4 f(x,y)dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^{y+3} f(x,y)dx$; **10.16**. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} f(x,y)dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-a^2}} f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$.

Ответы к занятию 11

11.1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$; **11.2.** $\int\limits_0^r dy \int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)dx$; **11.3.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$; **11.4.** $\frac{4a^4}{3}$; **11.5.** $\frac{1}{4}$; 11.6. $\frac{9}{20}$; **11.7.** 68/15; **11.8.** 12; **11.9.** $78\frac{15}{32}$; **11.10.** 16; **11.11.** $\int\limits_0^{\frac{8}{3}} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x,y)dx$; **11.12.** $\int\limits_0^a dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)dx$; **11.13.** $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)dx$; **11.14.** $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,y)dy$; **11.15.** $\frac{112}{9}$; **11.16.** $\frac{1}{3}$; **11.17.** e; **11.18.** $a^3b^2/15$.

Ответы к занятию 12

12.1. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.2.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.3.** $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.4.** $\int\limits_{\pi/4}^{arctg2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.5.** $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.6.** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.7.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.8.** $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$; **12.9.** $\frac{2a^3}{9}$; **12.10.** $\frac{\pi a^3}{6}$; **12.11.** $\frac{2\sqrt{2}a^4}{15}$; **12.12.** 2π; **12.13.** $\frac{\pi(e^{a^2}-1)}{4}$; **12.14.** $\frac{45\pi a^4}{64}$; **12.15.** $\frac{a^2(3\pi-2)}{12}$.

Ответы к занятию 13

13.1. $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\frac{(12-2x)}{3}} dy \int\limits_0^{\frac{(12-2x-3y)}{4}} f\ (x,y,z)dz$; **13.2.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{(4x-y^2)}{2}}}^{\sqrt{\frac{(4x-y^2)}{2}}} f(x,y,z)dz$; **13.3.** $\frac{1}{12}$;

13.4. $\frac{a^4}{8}$; **13.5.** $\frac{4}{15}\pi ah$; **13.6.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz$; **13.7.** $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$; **13.8.** $\frac{a^4}{12}$; **13.9.** $\frac{1}{96}$; **13.10.** $\frac{19\pi}{24}$.

Ответы к занятию 14

14.1. а) $a_n = \frac{2n-1}{2n}$; 1. **14.2.** Сходится. **14.3.** Сходится. **14.4.** Сходится.
14.5. Сходится. **14.6.** Сходится. **14.7.** Сходится. **14.8.** Сходится.
14.9. Сходится. **14.10.** Сходится. **14.11.** Расходится. **14.12**. Сходится.
14.13. Расходится. **14.14.** Сходится. **14.15.** Сходится. **14.16.** Сходится.
14.17. Расходится.

Ответы к занятию 15

15.1. Расходится. **15.2.** Расходится. **15.3.** Сходится. **15.4.** Сходится.
15.5. Расходится. **15.6.** Расходится. **15.7.** Сходится. **15.8.** Сходится.
15.9. Расходится. **15.10.** Сходится. **15.11.** Сходится условно.
15.12. Сходится абсолютно. **15.13.** Сходится условно. **15.14.** Расходится.
15.15. Сходится абсолютно. **15.16.** Расходится. **15.17.** Расходится.
15.18. Сходится. **15.19.** Сходится условно. **15.20.** Сходится абсолютно.
15.21. Сходится условно. **15.22.** Сходится абсолютно.

Ответы к занятию 16

16.1. $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$; **16.2.** $(-1;1)$; **16.3.** $(1.5;4.5]$; **16.4.** $(-1;1)$; **16.5.** $(3.5;4.5]$;
16.6. $(-4;4)$; **6.7.** $[-3;-1]$; **16.8.** $[-1;3]$; **16.9.** $[-3,1]$;; **16.10.** $[-3;3)$;
16.11. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}-1;\frac{\sqrt{2}}{3}-1\right)$; **16.12.** $(-1;1)$.

Ответы к занятию 17

17.10. 1,65; $\delta = 0,01$**; 17.11.** 0,020; **17.12.** 0,764; **17. 20** 0,3689; **17.21.** 0,5403; **17.22.** 0,7563; **17.23.** 0,9461; **17.24.** 0,1981.

Ответы к занятию 18

18.1. $S(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$**;**

18.2. $S(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2}}{(2n+1)^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{2}$**;**

18.3. $S(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$**;**

18.6. $S(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$**.**

Ответы к занятию 19

19.1. $a)\, 3 - \frac{24}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}; \quad б)\, \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n x}{2}}{n}$**;**

19.3. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{sh\pi}{\pi}\cdot\frac{1-in}{1+n^2}e^{inx}, |c_n| = \frac{sh\pi}{\pi}\sqrt{1+n^2}$.

Ответы к занятию 20

20.1. $arctgy - \arcsin x = C$; **20.2.** $e^x + e^{-y} = C$; **20.3.** $arctgy + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = C$;

20.4. $y = C\sqrt{1+e^{2x}}$; **20.5.** $y = \frac{C\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$; **20.6.** $y = \sin x$;

20.7. $y = 2x\left(arctgCx + k\pi\right),\ k \in Z$; **20.8.** $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$;

20.9. $xe^{\frac{y}{x}} = C,\ x = 0$; **20.10**. $e^{\frac{y}{x}} = Cy,\ y = 0$; **20.11**
$\arcsin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2} - \ln|x| = C$;

20.12. $\ln|y| + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$; **20.13**. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$;

20.14. $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$; **20.15.** $x+y-1=C(y+2)^2$, $y=-2$;

20.16. $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=C$; **20.17**. $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $x=\pm 1$;

20.18. $(1+e^x)^2 tgy=C$; **20.19.** $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$; **20.20**. $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$;

20.21. $x^2-2xy-y^2=C$; **20.22**. $y=xe^{1-x}$.

Ответы к занятию 21

21.1. $y=\sin x+C\cos x$; **21.2.** $y=(x+C)(1+x^2)$; **21.3**. $y=x\ln x+\frac{C}{x}$;

21.4. $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$; **21.5**. $x=y\ln y+\frac{1}{y}$; **21.6.** $y=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^2\right)$,

$y=0$;

21.7. $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$, $y=0$; **21.8.** $x^2+xy+y^2=C$;

21.9. $x^3+3x^2y-2xy^2-y^3=C$; **21.10.** $y=\frac{1}{(x+C)\cos x}$; **21.11**.

$\ln|x|-\cos\frac{y}{x}=0$;

21.12. $x^2\cos^2 y+y^2=C$; **21.13.** $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$; **21.14.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$;

21.15. $y=(x+1)^2(e^x+C)$; **21.16**. $y=\sin x$; **21.17**. $y=\frac{1}{e^x(C-x)}$, $y=0$;

21.18. $xy-\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=C$.

Ответы к занятию 22

22.1. $y=C_1e^{(1-\sqrt{3})x}+C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$; **22.2.** $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$;

22.3. $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$; **22.4.** $y=C_1\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x$;

22.5. $y=e^x$; **22.6**. $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$; **22.7.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$;

22.8. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$;

22.9. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5}{74}\sin x+\frac{7}{74}\cos x$;

22.10. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x} + x e^{-2x}$;

22.11. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$; **22.12**. $y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2 x)$;

22.13. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$; **22.14**. $y = (7 - 3x)e^{x-2}$;

22.15. $y = C_1 e^x + \left(C_2 - \frac{x}{2}\right)e^{-x}$; **22.16**. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$;

22.17. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$.

Ответы к занятию 23

23.1. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(x \sin x + \cos x)$;

23.2. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}(1 + x \sin 2x)$;

23.5. $y_{\text{общ. неодн.}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y_*(x)$, где $y_*(x)$ равно:

1) $\frac{5}{3} e^{-x}$; 2) $3x e^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$; 4) $x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$;

5) $-\frac{8}{5} e^x \left(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right)$; 6) $\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^x(2x^2 + x)$;

8) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}(9 + 3\cos 2x - \sin 2x)$; 9) $-2x e^x - \frac{1}{12} e^{-2x}$;

23.6. 1) $5\sin x - 2\cos x$; 2) $\frac{1}{10}x + \frac{5}{164}\sin 2x - \frac{1}{41}\cos 2x$;

3) $\left(-5x - \frac{16}{29}\right)\cos x - \left(2x - \frac{185}{29}\right)\sin x$;

4) $\frac{1}{169} e^{-x}((650x + 2650)\sin x - (3250x - 400)\cos x)$;

23.7. $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$;

23.8. $y_{\text{общ. неодн.}} = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + y_*(x)$, где $y_*(x)$ равно:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{-x}$; 3) $\frac{3}{2}x^2 e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{169}\left(-\frac{5}{2}\sin 3x + 6\cos 3x\right)$; 6) $2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x} + \cos 2x$;

23.9. $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$.

Ответы к занятию 24

24.13 $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; **24.14** $\ln\left|\dfrac{p}{p-2}\right|$;

24.22. $\dfrac{1}{p-2}$; **24.23**. $\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{10}{1+2p}$; **24.24**. $\dfrac{2}{p^2+1}-\dfrac{p}{p^2+1}$;

24.25. $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p+1}$; **24.26**. $\dfrac{p+1}{(p+1)^2+4}$; **24.27**.

$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{(p+4)^2+25}+\dfrac{1}{(p+4)^2+1}\right)$;

24.28. $\dfrac{p^4+16p^2+24}{p\left(p^2+4\right)\left(p^2+16\right)}$; **24.29**. $\dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$; **24.30**. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$;

24.31. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$; **24.32**. $\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$; **24.33**. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{37}{3}e^{3t}-\dfrac{15}{2}e^{2t}$.;

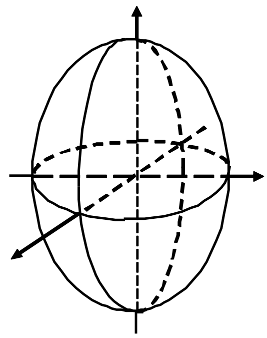
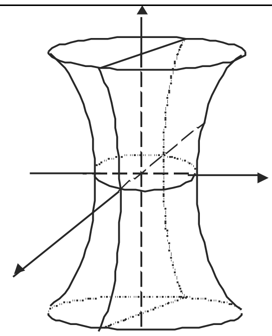
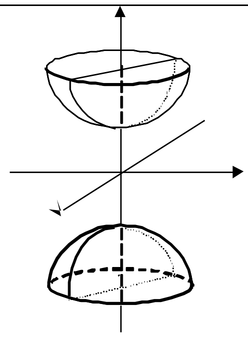
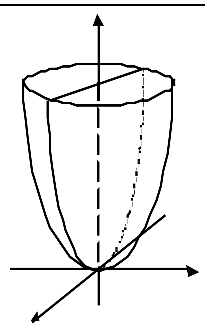
24.34. $-\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t$; **24.35**. $e^{-t}\left(1-t^2\right)$.

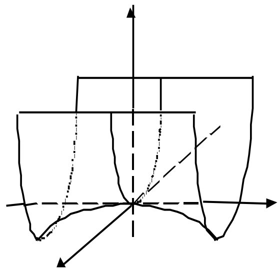
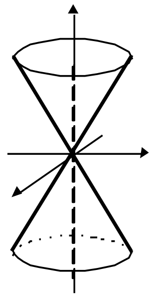
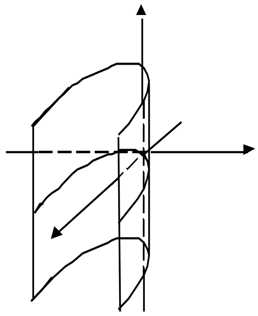
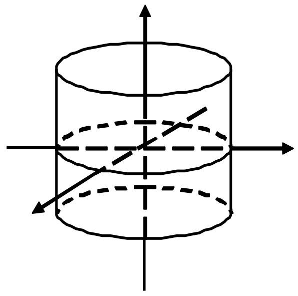
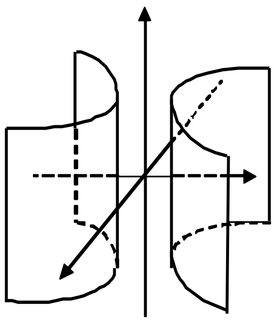
Ответы к занятию 25

25.5. $x(t)=\dfrac{1}{4}e^{-2t}+\dfrac{7}{4}e^{2t}-e^{t}$**,** $y(t)=-\dfrac{1}{12}e^{-2t}+\dfrac{7}{4}e^{2t}-\dfrac{2}{3}e^{t}$**;**

25.6. $x(t)=2-e^{-t}, y(t)=2-e^{-t}, z(t)=2e^{-t}$**.**

Таблица **Поверхности второго порядка**

Каноническое уравнение	Наименование	Параметры	Чертеж
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	эллипсоид	a,b,c - полуоси	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	однополостный гиперболоид	a,b - действитель-ные полуоси, c - мнимая полуось	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	двуполостный гиперболоид	c -действитель-ная полуось, a,b - мнимые полуоси	
$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	эллиптический параболоид	a,b - полуоси	

$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	гиперболический параболоид	a,b- полуоси	
$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	конус второго порядка	a,b- полуоси	
$y^2=2px$	параболический цилиндр	p - параметр	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллиптический цилиндр	a,b- полуоси	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гиперболический цилиндр	a,b- полуоси	

Индивидуальные задания
по математическому анализу
1 курс 2 семестр

Задание 1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}\,dx$; $\int x^2 \cos 3x\,dx$; $\int \frac{4}{x^4-1}\,dx$; $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}+1}\,dx$

2)
$\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $\int x^3 \ln x\,dx$; $\int \frac{1}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

3)
$\int \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x+3}}{\cos^2 x}\,dx$; $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; $\int \frac{12}{x^3+8}\,dx$; $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$

4)
$\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$; $\int \frac{8x^2}{x^4-16}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x(2\ln x+3)}$; $\int x^2 \cos x\,dx$; $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}\,dx$; $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$

6)
$\int \frac{e^x dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$; $\int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$; $\int \frac{x^2 dx}{x^4+5x^2+4}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$

7)
$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$; $\int x3^x\,dx$; $\int \frac{3x-7}{x^3+4x^2+4x+16}\,dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

8)
$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$; $\int x\ln(x^2+1)\,dx$; $\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}\,dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

9)
$\int \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$; $\int \ln^2 x\,dx$; $\int \frac{2x-1}{x(x^2+16)}\,dx$; $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$

10)

$$\int\frac{\sqrt[3]{4-5\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx\,;\quad \int\operatorname{arctg}2x\,dx\,;\quad \int\frac{x^2+1}{x(x^2+4)}dx\,;\quad \int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x+1\right)}dx$$

<u>Задание 2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:</u>

1) $y=3x^2+1;\quad y=3x+7$

2) $y=x^3,\quad x=0,\quad y+x=2$

3) $y=x^2-4;\quad 7x-y-14=0$

4) $y=-x^2+3x\,,\quad y=3x-4$

5) $y=x^2-2x+1;\quad y=5x-9$

6) $y=x^2-2x+5;\quad y=3x+1$

7) $4x=y^2;\quad 4y=x^2$

8) $y=x^2-x\,,\quad y=2x$

9) $y=e^x\,,\quad y=e^{-x}\,,\quad y=2$

10) $y=x^2-x-2\,,\quad y=-x+7$

<u>Задание 3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями:</u>

1) $x+y+z=4,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

2) $x=20\sqrt{y}\,,\ x=5\sqrt{y}\,,\ z=0\,,\ y+z=0{,}5$

3) $z=3,\quad z=30,\quad x^2+y^2=2,\quad x=\sqrt{y},\quad x=0$

4) $z=x^2+y^2\,,\quad z=6-x^2-y^2$

5) $2z=4-x^2-y^2,\ z=0,\ x=0,\ y=0\left(x\ge 0,y\ge 0\right)$

6) $x+y=2\,,\quad z=2{,}4x\,,\quad y=0\,,\quad z=0$

7) $z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

8) $z=y^2\,,\quad 2x+3y=6\,,\quad x=0\,,\quad z=0$

9) $x^2=4y\,,\quad y+z=1\,,\quad z=0$

10) $z=4-x^2,\ 2x+y=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ \left(x\ge 0\right)$

Задание 4. Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n x^n$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+1\right)x^n}{3^n}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-2\right)^n}{n5^n}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}x^n$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(x-4\right)^n$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^n}{2^n}$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n+1}$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^n}{n^2}$

Задание 5. Разложить функцию, заданную на отрезке $\left[a;b\right]$, с периодом T в ряд Фурье:

1) $f(x)=2+\left|x\right|,\quad\left[-1;1\right],\ T=2$

2) $f(x)=\left|x\right|,\quad\left[-1;1\right],\ T=2$

3) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases},\ \left[-\pi;\pi\right]$

4) $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ \left[0;2\pi\right],\ T=2\pi$

5) $f(x)=\begin{cases}x+2\pi, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases},\ T=2\pi$

6) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}, T=\pi$

7) $f(x)=2-x, \quad [0;4], \quad T=4$

8) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}, & -3\le x\le 0 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}, & 0<x\le 3 \end{cases}, T=6$

9) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & -\pi\le x\le 0 \\ x, & 0<x\le\pi \end{cases}, T=2\pi$

10) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, \ (-\pi;\pi), T=2\pi$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$

2) $xy'+xe^{\frac{y}{x}}-y=0$

3) $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x$

4) $\left(1+e^x\right)y'=ye^x$

5) $y'=\dfrac{xy-y^2}{x^2-2xy}$

6) $y'=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$

7) $\left(x^2+2xy\right)dx+xy\,dy=0$

8) $x^2y'=y^2+xy$

9) $y\left(x-y\right)dx-x^2\,dy=0$

10) $x\sqrt{1+y^2}+y\,y'\sqrt{1+x^2}=0$

Задание 7. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию:

1) $x\,y'+y-e^x=0, \quad y(1)=-1$

2) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$

3) $x\,y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad y(1) = 0$

4) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

5) $x^2\,dy + \left(3 - 2x\,y\right)dx = 0\,, \quad y(2) = 1$

6) $y' + 2y = e^{3x}, \quad y(0) = 1$

7) $y' = 2y + e^x - x, \quad y(0) = \dfrac{1}{4}$

8) $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1, \quad y(1) = 1$

9) $x\left(y' - y\right) = e^x, \quad y(1) = 0$

10) $x\,y' - 3y = x^4 e^x\,, \quad y(2) = 4$

Задание 8. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' - 3y' + 2y = x\,e^{3x}$

2) $y'' - 2y' + y = 6\,x\,e^{-x}$

3) $y'' + y = \sin 2x$

4) $y'' + 7y' + 10y = 2xe^{3x}$

5) $y'' + 6y' + 9y = 5\sin x$

6) $y'' + 2y' + y = \cos x$

7) $y'' + 5y' + 6y = -5e^{-2x}$

8) $y'' + 2y' + y = \cos x$

9) $y'' - 2y' = xe^{3x}$

10) $y'' + 9y = 3\cos x$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ч 1.-М.: Наука,1968.-430с.

2.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ч 2.-М.: Наука,1968.-430с.

3.Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука,1985.- 384с.

4.Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича – М.: Наука,1986.-462с.

5.Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича – М.: Наука,1986.-366с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ольга Евгеньевна Дмитриева
Татьяна Степановна Мурзина
Людмила Александровна Подмогаева
Виктор Куприянович Трофимов

Сборник задач по математическому анализу. 2семестр.
Учебное пособие.

Редактор: Т.И. Шур
Корректор: Д.С. Шкитина

Подписано в печать
Формат бумаги 60x84/16,отпечатано на ризографе, шрифт № 10
Изд. л. 5,7 , заказ №   , тираж 1000. СибГУТИ
630120 Новосибирск, ул Кирова, 86