

Занятие 7. Непрерывные одномерные случайные величины

Изучаемый материал: определение непрерывной случайной величины, плотность и функция распределения, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, вероятность попадания случайной величины в интервал.

7.1 – 7.6	7.7 – 7.12	7.13 – 7.25
-----------	------------	-------------

7.1. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить а) математическое ожидание, б) среднее квадратическое отклонение этой случайной величины, в) вероятность события $X \geq 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/4, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

7.2. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить: а) коэффициент a , б) математическое ожидание, в) среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax, & 0 < x \leq 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$

7.3. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) функцию распределения; б) математическое ожидание; в) среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x, & x \in [0; 5] \\ 0, & x \notin [0; 5] \end{cases}$$

7.4. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) коэффициент a , б) функцию распределения, в) математическое ожидание, г) среднее квадратическое отклонение, д) вероятность $p(X \geq 0,5)$.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$$

7.5. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$. Найти: а) коэффициент a , б) функцию распределения

этой случайной величины, в) вероятность $p(|X| \leq 1)$.

7.6. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) коэффициент a , б) функцию распределения, в) математическое ожидание, г) среднее квадратическое отклонение, д) $p(|X| \leq \pi/4)$.

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Домашнее задание 7

7.7. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить а) математическое ожидание, б) среднее квадратическое отклонение, в) вероятность того, что случайная величина примет значение $X < 2$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/4, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

7.8. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить: а) коэффициент a , б) математическое ожидание, в) среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

7.9. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) функцию распределения; б) математическое ожидание; в) среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x, & x \in [0; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$$

7.10. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) коэффициент, б) математическое ожидание, в) среднее квадратическое отклонение, г) вероятность события $X < 30$.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 20 \leq x \leq 40 \\ 0, & x \notin [20, 40] \end{cases}$$

7.11. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: ф) коэффициент a , б) функцию распределения, в) математическое ожидание, г) среднее квадратическое отклонение, д) вероятность попадания случайной величины в интервал $|x| < \sqrt{3}/3$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1+x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

7.12. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) коэффициент a , б) функцию распределения, в) математическое ожидание, г) среднее квадратическое отклонение, д) вероятность попадания случайной величины в интервал $X < \pi/4$.

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

Дополнительное задание 7

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: а) плотность распределения $f(x)$; б) математическое ожидание; в) среднее квадратическое отклонение; г) построить графики функции распределения и плотности распределения:

7.13.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

7.14.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \cos 2x, & \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

7.15.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \\ 1, & x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

7.16. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить: а) математическое ожидание, б) среднее квадратическое отклонение; в) вероятность того, что случайная величина примет значение $X < 3$.

7.17. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить: а) математическое ожидание; б) среднее квадратическое отклонение.

7.18. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить а) математическое ожидание, б) среднее квадратическое отклонение, в) вероятность того, что случайная величина примет значение $X < \pi/4$.

7.19. Данна функция распределения $F(x)$ случайной величины X . Вычислить: а) математическое ожидание, б) среднее квадратическое отклонение, в) вероятность того, что случайная величина примет значение $X < \pi/8$.

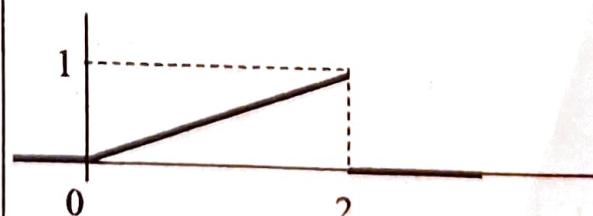
7.20. Случайная величина X распределена с плотностью, заданной графиком. Найти: а) математическое ожидание и б) среднее квадратическое отклонение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0,5x, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ 1, & x > \pi/4 \end{cases}$$



7.21. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) коэффициент a ; б) функцию распределения; в) математическое ожидание; г) среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x^2), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

7.22. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) коэффициент a ; б) функцию распределения; в) математическое ожидание; г) среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ax, & 0 \leq x < 6 \\ 0, & x \geq 6 \end{cases}$$

7.23. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) функцию распределения; б) математическое ожидание; в) среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/8, & 0 \leq x < 4 \\ 0, & x \geq 4 \end{cases}$$

7.24. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Найти: а) функцию распределения; б) математическое ожидание; в) среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

7.25. Данна функция распределения случайной величины $F(x)$, где $a > 0$.

При каких A и B функция распределения непрерывна? Найти плотность распределения случайной величины.

Чему

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a \\ A + B \arcsin \frac{x}{a}, & -a < x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

равна вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$?

Ответы к занятию 7

7.1. а) 1,333; б) 0,471; в) 0,75. 7.2. а) 0,05; б) 10; в) 5,774.

7.3. б) 3,333; в) 1,179. 7.4. а) 2; в) 2/3; г) 0,236; д) 0,75.

7.5. а) $1/\pi$; б) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$; в) 0,5. 7.6. а) 1/2; в) 0; г) 0,682; д) 0,707.

7.7. а) 2; б) 1,155; в) 0,5. 7.8. а) 1; б) 2/3; в) 0,236.

7.9. б) 1,333; в) 0,471. 7.10. а) 1/600; б) 31,11; в) 5,666; г) 0,417.

7.11. а) 0,637; в) 0; г) 0,523; д) 0,667.

7.12. а) 0,5; б) $(1 - \cos x)/2$; в) 1,57; г) 0,682; д) 0,146.

7.13. б) 1,583; в) 0,276. 7.14. б) 2,64; в) 0,187. 7.15. б) 0,255; в) 0,148.

7.16. а) 3; б) 0,577; в) 0,5. 7.17. а) 0; б) не существует.

7.18. а) 0,57; б) 0,374; в) 0,707. 7.19. а) 0,285; б) 0,187; в) 0,707.

7.20. а) 1,333; б) 0,471. 7.21. а) 0,75; в) 0; г) 0,447.

7.22. а) 1/18; в) 4; г) 1,414. 7.23. б) 2,667; в) 0,943. 7.24. б) 0,57; в) 0,374.

7.25. $A = 1/2$, $B = 1/\pi$; $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$, $|x| \leq a$; $P = 1/3$.