Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)

Т.В. Бернштейн, Д.А. Прокудин

Теория функций комплексной переменной

Учебное пособие

Новосибирск
2017

УДК 517.53

Бернштейн Т.В., Прокудин Д.А. Теория функций комплексной переменной. Учебное пособие. – Новосибирск: СибГУТИ, 2017, – 63 с.

Пособие содержит теоретические сведения по теории функций комплексной переменной, большое количество задач с решениями, а также упражнения для самостоятельной работы. В заключение приводятся контрольные задания. Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий при изучении математики в соответствии с государственными образовательными стандартами инженерных специальностей.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. А.Е. Мамонтов

Рекомендовано кафедрой высшей математики факультета ИВТ федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» для использования в учебном процессе для направлений 09.03.01 и 02.03.02. Протокол № 3 от 01 ноября 2017 г.

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ в качестве учебного пособия.

1. Комплексные числа. Линии и области в комплексной области

Напомним, что *комплексным числом* называется выражение вида $z = x + yi$, где x, y - действительные числа, i - символ, $i^2 = -1$.

Число x называется *действительной частью* числа z (обозначается $\operatorname{Re} z$), число y – *мнимой частью* z (обозначается $\operatorname{Im} z$).

Пусть даны два комплексных числа: $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$. Два комплексных числа z_1 и z_2 называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т. е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Операции *сложения* и *умножения* комплексных чисел определяются следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (y_1 x_2 + x_1 y_2)i.$$

Операция *деления* комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, т.е. *частным* двух комплексных чисел z_1, $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, такое что $z_2 \cdot z = z_1$:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - yi$ называется *сопряженным* числу $z = x + yi$. Произведение сопряженных чисел всегда вещественно: $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Часто на практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Если на плоскости введена декартова система координат *xOy*, то любое число $z = x + yi$ можно изобразить точкой $M(x, y)$ (см. Рис. 1).

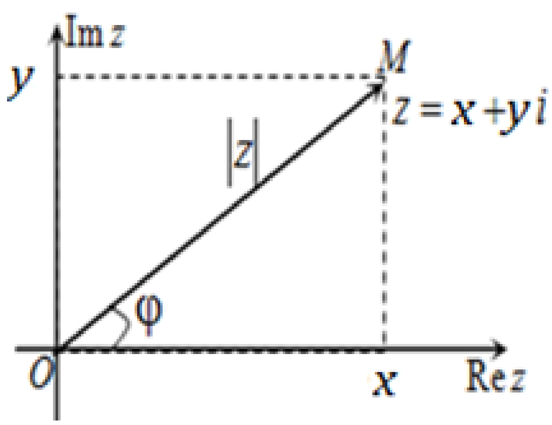

Рис. 1.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ось Ox – действительной осью (обозначается $\operatorname{Re} z$), Oy – мнимой осью (обозначается $\operatorname{Im} z$).

Число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + yi$ (обозначается $|z|$ или r). Геометрически $|z|$ – это расстояние от точки $M(x, y)$ комплексной плоскости, изображающей данное комплексное число до начала координат (см. Рис. 1).

Угол $\varphi = \arg z$ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$ между положительным направлением действительной оси и отрезком OM, где M – точка, изображающая комплексное число (см. Рис. 1), называется *главным значением аргумента* комплексного числа. Совокупность всех углов $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k,\ k \epsilon \mathbb{Z}$ называется *аргументом* числа z.

Главное значение аргумента определяется следующим образом:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ при } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ при } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ при } x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ при } x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ при } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Пара $|z|$ и $\arg z$ однозначно определяет положение точки комплексной плоскости, изображающей комплексное число.

Запись $z = x + yi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Запись $z = |z|e^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – формула Эйлера).

Если числа z, z_1, z_2 заданы в тригонометрической или показательной форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi},$$

$$z_1 = |z_1|(\cos\ \varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_1|e^{i\varphi_1},$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\ \ \varphi_2 + i\sin\ \varphi_2) = |z_2|e^{i\varphi_2},$$

то имеют место операции *умножения*:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

возведения в степень:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = |z|^n e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{Z} – \text{\textit{формула Муавра}};$$

извлечения корня (из ненулевого комплексного числа z):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{|\mathrm{z}|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},$$

$$k = 0,1, \dots, (n-1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Корень n - ой степени имеет n различных значений. Геометрически все значения $\sqrt[n]{z}$ лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и образуют правильный n-угольник.

Пример 1. Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Приведем число $\mathrm{z} = -1$ к тригонометрическому виду:

$$|-1| = 1,\ \arg(-1) = \pi, -1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Тогда $\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. При $k = 0$ $\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, при $k = 1$ $\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, при $k = 2$ $\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, при $k = 3$ $\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Все значения $\sqrt[4]{-1}$ лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат и образуют квадрат (см. Рис. 2).

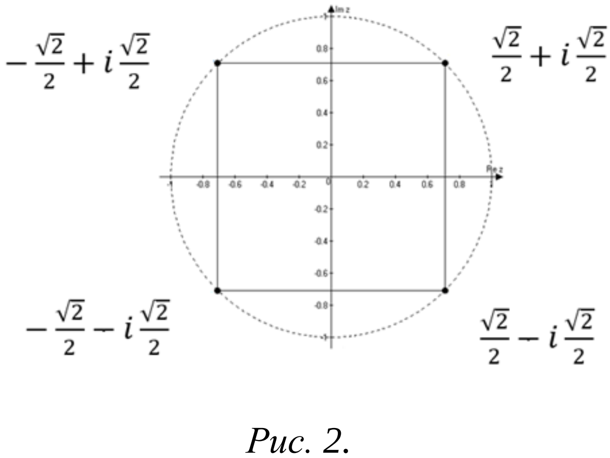

Рис. 2.

Пример 2. Какое множество точек на плоскости комплексного переменного z определяется условием $\operatorname{Im} z^{\mathbf{2}} > 2$?

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, следовательно, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию $2xy > 2$ или $xy > 1$. Это неравенство определяет множество точек в первой и третьей координатных четвертях, соответственно над и под гиперболой $xy = 1$ (см. Рис. 3).

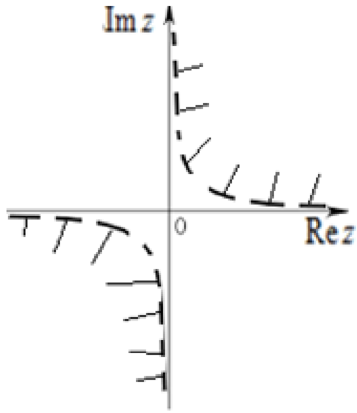

Рис. 3.

Упражнения

1.1. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах:

а) -2; б) $2i$; в) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; г) $-1 - \sqrt{3}i$; д) $5 + 3i$.

1.2. Вычислить:

а) $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^6$; б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

1.3. Определить все значения $\sqrt[3]{i}$.

Найти множества точек на плоскости комплексного переменного $z = x + yi$, которые определяются заданными условиями, сделать чертеж:

1.4. $|z| = 2$; $|z| > 2$; $|z| < 2$.

1.5. $|z - 2| = 1$; $|z - 2| > 1$; $|z - 2| < 1$.

1.6. $|z - i| = 2$; $|z - i| > 2$; $|z - i| < 2$.

1.7. $1 < |z + 2| \leq 2$.

1.8. $|z - i| = |z + 2|$.

1.9. $\operatorname{Re} z \geq 0$.

1.10. $0 \leq \operatorname{Im} z < 1$.

1.11. $|\operatorname{Im} z| \leq 2$.

1.12. $0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.

1.13. $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$.

1.14. $\overline{z} = z$.

Задания для самостоятельного решения

1.15. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах:

а) $2 + 2\sqrt{3}i$; б) $-7 - i$.

1.16. Вычислить:

а) $(2 - 2i)^7$; б) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{40}$.

1. 17. Определить все значения $\sqrt[4]{-i}$.

Найти множества точек на плоскости комплексного переменного $z = x + yi$, которые определяются заданными условиями, сделать чертеж:

1.18. $1 < |z - i| < 2$.

1.19. $0 < |z - i| \leq 2$.

1.20. $2 < |z - i| < +\infty$.

1.21. $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$.

1.22. $\operatorname{Im}(iz) < 1$.

1.23. $\operatorname{Re} \frac{1}{z} > \frac{1}{4}$.

1.24. $\operatorname{Im} \frac{z+1}{z-i} = 0$.

2. Функции комплексной переменной. Основные элементарные функции

Говорят, что в области D определена *функция* $\omega = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений ω. Функция $\omega = f(z)$ осуществляет отображение точек области D комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости ω. Напомним, что *областью* комплексной плоскости называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности.

Пусть $z = x + yi$ и $\omega = u + iv$. Тогда зависимость $\omega = f(z)$ между комплексной функцией ω и комплексной переменной z примет следующий вид:

$$u + vi = f(x + yi).$$

Функцию $u(x, y)$ при этом называют *действительной частью,* а функцию $v(x, y)$ – *мнимой частью функции* $f(z)$ (обозначается $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ соответственно).

Пример 1. Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2 + i$.

Решение. Полагая $z = x + yi$, $\omega = u + iv$, получим

$$u + iv = (x + yi)^2 + i = x^2 + 2xyi - y^2 + i = (x^2 - y^2) + (2xy + 1)i.$$

Таким образом, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy + 1$.

Основные элементарные функции комплексной переменной

Определим основные элементарные функции переменной $z = x + yi$.

Дробно-рациональная функция:

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}.$$

Здесь m, n – неотрицательные целые числа, a_i, b_j – комплексные константы. В частности, дробно-рациональной функцией является *многочлен*:

$$\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Показательная функция $\omega = e^z$ определяется формулой

$$\omega = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Показательная функция обладает следующими свойствами:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

б) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, т. е. $\omega = e^z$ является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции комплексного аргумента определяются равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе практически все свойства тригонометрических функций действительного переменного.

Гиперболические функции определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sin z = -i \operatorname{sh}(iz), \quad \operatorname{sh} z = -i \sin(iz),$$

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz), \qquad \operatorname{ch} z = \cos(iz),$$

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th}(iz), \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg}(iz),$$

$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth}(iz), \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg}(iz).$$

Логарифмическая функция $\omega = \operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Логарифмическая функция является многозначной. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$; оно обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \cdot \operatorname{Ln} z, n \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Ln} z, n \in \mathbb{N}.$$

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции, обратные соответствующим тригонометрическим функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции с помощью соотношений:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{z + i}{z - i}.$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются при главных значениях соответствующих логарифмических функций.

Общая степенная функция $\omega = z^a$, где a – любое комплексное число, определяется равенством

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Эта функция многозначная, ее главное значение равно $e^{a \ln z}$.

Общая показательная функция $\omega = a^z$ ($a \neq 0$ – любое комплексное число) определяется равенством

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Главное значение этой многозначной функции $e^{z \ln a}$.

Пример 2. Найти значение модуля r и главное значение аргумента φ функции $\omega = \cos z$ в точке $z = \pi + i \ln 2$.

Решение. Найдем значение функции $\omega = \cos z$ в данной точке. Для этого используем формулу $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ и свойства показательной функции:

$$\cos z = \frac{e^{i(\pi+i\ln 2)} + e^{-i(\pi+ i\ln 2)}}{2} = \frac{e^{i\pi}\cdot e^{-\ln 2} + e^{-i\pi}\cdot e^{\ln 2}}{2} = \frac{e^{i\pi}\cdot \frac{1}{2} + e^{-i\pi}\cdot 2}{2}$$
$$= \frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}\cdot 4}{4} = \frac{5e^{i\pi}}{4} = -\frac{5}{4}.$$

Отсюда получим $r = \frac{5}{4}$ и $\varphi = \pi$.

Этот пример показывает, что функция $cosz$ может принимать значения, по модулю большие 1.

Пример 3. Решить уравнение $\sin\omega = 2$.

Решение. Задача сводится к нахождению значения $\omega = \mathrm{Arcsin}\, 2$.

Воспользуемся формулой

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\,\right).$$

Для $z = 2$ получим:

$$\omega = \mathrm{Arcsin}\, 2 = -i\,\mathrm{Ln}\left(2i + \sqrt{1-2^2}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(2i + \sqrt{-3}\right).$$

Учитывая тот факт, что $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, имеем

$$\omega = -i\,\mathrm{Ln}\left(\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right).$$

Так как

$$\arg\left(2+\sqrt{3}\right)i = \arg\left(2-\sqrt{3}\right)i = \frac{\pi}{2},$$
$$\left|\left(2+\sqrt{3}\right)i\right| = 2+\sqrt{3}\,,\ \ \left|\left(2-\sqrt{3}\right)i\right| = 2-\sqrt{3},$$

то

$$\mathrm{Ln}\left(2\pm\sqrt{3}\right)i = \ln\left(2\pm\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi k i, \qquad \text{где } k = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

следовательно,

$$\omega = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right), \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Упражнения

Найти действительную и мнимую части следующих функций:

2.1. $\omega = i - z^3$.

2.2. $\omega = \frac{\bar{z}}{z}$.

2.3. $\omega = e^{-z}$.

2.4. $\omega = \sin z$.

Найти значение модуля r и главное значение аргумента φ функции в указанной точке:

2.5. $\omega = ze^z$, $z_0 = \pi i$.

Вычислить:

2.6. $e^{\frac{\pi}{4}i}$.

2.7. $\cos \pi i$.

2.8. $\mathrm{Ln}(-1 - i)$.

2.9. 1^i.

2.10. $i^{\frac{1}{i}}$.

2.11. $(-1)^{\sqrt{2}}$.

2.12. $\mathrm{Ln}\left(i^i\right)$.

2.13. $\mathrm{Arccos}\, i$.

Решить уравнение:

2.14. $4\cos z + 5 = 0$.

Задания для самостоятельного решения

Найти действительную и мнимую части следующих функций:

2.15. $\omega = 2z^2 + i\bar{z}$.

2.16. $\omega = \frac{\mathrm{z+i}}{i-\bar{z}}$.

2.17. $\omega = e^{1-z}$.

2.18. $\omega = \cos z$.

Найти значение модуля r и главное значение аргумента φ функции в указанной точке:

2.19. $\omega = \mathrm{sh}\,\mathrm{z}$, $z_0 = 1 + \frac{\pi}{2}i$.

Вычислить:

2.20. $\mathrm{Ln}(-1)$.

2.21. $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

2.22. $(-1)^i$.

Решить уравнение:

2.23. $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$.

3. Дифференцирование функций комплексной переменной. Условия Коши-Римана

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая и саму точку. Тогда предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

если он существует, называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z.

Если $z = x + yi$ и $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые *условиями Коши-Римана*.

Обратно, если в некоторой точке (x,y) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных x, y и кроме того, удовлетворяют условиям Коши-Римана, то функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в точке $z = x + yi$ как функция комплексной переменной z.

Функция $\omega = f(z)$ называется *аналитической в данной точке* z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции $f(z)$ имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Правила дифференцирования функций действительной переменной справедливы и для функций комплексной переменной, дифференцируемых в точке z.

Пример 1. Показать, что функция $\omega = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Решение. Поскольку $\omega = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, значит

$$u(x,y) = e^x \cos y, \; v(x,y) = e^x \sin y.$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ как функции действительных переменных x, y дифференцируемы в любой точке (x,y) (они имеют непрерывные частные производные любого порядка) и при этом удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, функция $\omega = e^z$ дифференцируема в любой точке комплексной плоскости, то есть, является аналитической на всей плоскости. Найдем производную функции $\omega = e^z$:

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

Функции $\omega = z^n$, $(n \in \mathbb{N})$, $\omega = \sin z$, $\omega = \cos z$, $\omega = \operatorname{sh} z$, $\omega = \operatorname{ch} z$ также дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости, а $\omega = \operatorname{tg} z$, $\omega = \operatorname{th} z$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости, кроме точек $\frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathrm{k}\right) i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ соответственно. Для функций $\omega = \operatorname{Ln} z$ и $\omega = z^a$ в окрестности любой точки $z \neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z функцией.

Пример 2. Установить, в каких точках дифференцируема функция $\omega = \overline{z}$, $\overline{z} = \mathrm{x} - \mathrm{y}i$.

Решение. В данном случае $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = -y$. Частные производные этих функций

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Условия Коши-Римана не выполняются ни в одной точке, следовательно, функция $\omega = \overline{z}$ не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости.

Пользуясь условиями Коши-Римана аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить, если известна ее действительная часть $u(x, y)$ или мнимая часть $v(x, y)$.

Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической в области D*, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Отметим, что если функция $f(z) = u + iv$ - аналитическая в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями.

Пример 3. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по ее заданной действительной части $u = x^2 + 2x - y^2$.

Решение. Заметим, что функция u является гармонической функцией:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Для определения мнимой части v воспользуемся условием Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 + 2x - y^2)'_x = 2x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Интегрируем по y:

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}y = \int (2x + 2)\mathrm{d}y = 2xy + 2y + C(x).$$

Для определения функции $C(x)$ воспользуемся вторым условием Коши-Римана. Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (2xy + 2y + C(x))'_x = 2y + C(x)' = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y,$$

то

$$2y + C(x)' = 2y,$$

отсюда

$$C(x)' = 0 \text{ и } C(x) = C,$$

где $C = const$. Функция v найдена:

$$v = 2xy + 2y + C.$$

Находим функцию $f(z) = u + iv$:

$$f(z) = u + iv = x^2 + 2x - y^2 + i(2xy + 2y + C) =$$

$$= (x^2 + i2xy - y^2) + (2x + i2y) + C = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + C =$$

$$= z^2 + z + C.$$

Упражнения

Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

3.1. $\omega = z \operatorname{Im} z$.

3.2. $\omega = ze^z$.

3.3. $\omega = |z|\overline{z}$.

Найти области аналитичности и производные функций:

3.4. $\omega = z^2 + z$.

3.5. $\omega = \sin 2z + i$.

3.6. $\omega = \operatorname{ctg} z$.

3.7. $\omega = \frac{z \cos z}{1+z^2}$.

Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

3.8. $u = x^3 - 3xy^2$, $f(i) = 0$.

3.9. $v = 2e^x \sin y$, $f(0) = 3$.

Задания для самостоятельного решения

Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

3.10. $\omega = |z| \operatorname{Re} \overline{z}$.

3.11. $\omega = e^{z^2}$.

Найти области аналитичности и производные функций:

3.12. $\omega = \frac{e^z+1}{e^z-1}$.

3.13. $\omega = \operatorname{ch} z$.

Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

3.14. $u = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y$, $f(1) = 2i$.

3.15. $v = y^2 - x^2 - 2$, $f(0) = 0$.

4. Интегрирование функций комплексной переменной. Интегральная формула Коши

Кривая C называется *гладкой*, если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную. Кривая называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких дуг.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D, а $\widehat{AB}$ – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D. Разобьем кривую $\widehat{AB}$ на n частей точками $A = z_0,\ z_1, z_2, \dots, z_n = B$. Выберем на каждой дуге $\widehat{z_{k-1}z_k}$ некоторую точку C_k.

Составим сумму

$$S_n = f(C_1)\Delta z_1 + f(C_2)\Delta z_2 + \dots + f(C_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k,$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1,2,\cdots.n$. Пусть δ – наибольшая из величин $|z_k|$. Если $\delta \to 0$, то $n \to \infty$ и сумма S_n стремится к определенному пределу. Этот предел называется интегралом функции $f(z)$ по кривой $\widehat{AB}$, т.е.

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k.$$

Если $z= x + iy$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексной переменной z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно,

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\widehat{AB}} u\,\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_{\widehat{AB}} v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

Интеграл $\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z$ обладает всеми свойствами криволинейного интеграла по координатам. Укажем следующие свойства:

а) *линейность*:

$$\int_{\widehat{AB}} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n)\mathrm{d}z =$$

$$= \alpha_1 \int_{\widehat{AB}} f_1\mathrm{d}z + \alpha_2 \int_{\widehat{AB}} f_2\mathrm{d}z + \dots + \alpha_n \int_{\widehat{AB}} f_n\mathrm{d}z,\ \textit{где}\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = const;$$

б) *аддитивность*:

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_{\widehat{AC}} f(z)\,\mathrm{dz} + \int_{\widehat{CB}} f(z)\,\mathrm{dz},$$

где C – точка, лежащая на кривой $\widehat{AB}$;

в) *зависимость от направления интегрирования*:

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{dz} = -\int_{\widehat{BA}} f(z)\,\mathrm{dz}.$$

Если функция $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае

$$\oint_{\hat{C}} f(z)\,\mathrm{dz} = 0,$$

где $\hat{C}$ – любая замкнутая кусочно-гладкая кривая в области D.

Если кривая $\widehat{AB}$ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t),$$

начальная точка A кривой соответствует значению параметра $t = t_0$, конечная точка B кривой соответствует значению параметра $t = t_1$, то

$$\int_{\hat{C}} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big) z'(t)\,dt,$$

где

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{\widehat{AB}} |z|^2 \operatorname{Re} z\,dz,$$

где $\widehat{AB}$ – отрезок прямой от точки $A = 1 + i$ до точки $B = 2 + 3i$.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда $|z|^2 = x^2 + y^2$. Составим параметрические уравнения прямой AB:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1}, \text{т. е.}\, y = 2x - 1 \text{ или } \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases}.$$

На отрезке AB имеем $t \in [1; 2]$, поэтому

$$\int_{\widehat{AB}} |z|^2 \operatorname{Re} z\, dz = \int_{\widehat{AB}} (x^2 + y^2)x\, d(x + iy) =$$

$$\int_1^2 (t^2 + (2t-1)^2)t\, d(t + (2t-1)i) =$$

$$\int_1^2 (5t^3 - 4t^2 + t)(1 + 2i)dt =$$

$$(1 + 2i)\int_1^2 (5t^3 - 4t^2 + t)dt = (1 + 2i)\left(5\frac{t^4}{4} - 4\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= (1 + 2i)\left(20 - \frac{32}{3} + 2 - \frac{5}{4} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = (1 + 2i)\frac{131}{12} = \frac{131}{12} + \frac{262}{12}i.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\hat{C}} \frac{1}{z - 5}\, dz,$$

где $\hat{C}$ – эллипс $x = 3\cos t,\, y = 2\sin t.$

Решение. Подынтегральная функция является аналитической в области, ограниченной данным эллипсом, следовательно,

$$\oint\limits_{\hat{C}} \frac{1}{z - 5}\, dz = 0.$$

Если функция $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)|_{z_0}^{z_1},$$

где $F(z)$ – какая-либо первообразная функции $f(z)$, т.е. $F'(z) = f(z)$ в области D.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_1^i z^2\, dz.$$

Решение. Подынтегральная функция является аналитической на всей комплексной плоскости. Используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^i z^2\,dz = \left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_1^i = \frac{i^3}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{i}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{(i+1)}{3}.$$

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ – аналитические функции в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,g'(z)dz = f(z)g(z)|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)\,f'(z)dz.$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_0^i z\cos z\,dz.$$

Решение. Функции $f(z) = z$ и $g(z) = \cos z$ являются аналитическими всюду. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^i z\cos z\,dz = \int_0^i z(\sin z)'\,dz = z\sin z|_0^i - \int_0^i \sin z\,dz = \lfloor z\sin z + \cos z\rfloor_0^i$$
$$= i\sin i + \cos i - 1 = i\left(\frac{e^{-1}-e}{2i}\right) + \left(\frac{e^{-1}+e}{2}\right) - 1 = \frac{1-e}{e}.$$

Замена переменных в интегралах от функций комплексной переменной производится аналогично случаю функций действительной переменной. Пусть аналитическая функция $z = g(\omega)$ взаимно-однозначно отображает кривую C_0 в ω – плоскости на кривую C в z – плоскости. Тогда

$$\int_{\hat{C}} f(z)\,dz = \int_{C_0} f(g(\omega))g'(\omega)\,d\omega.$$

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0 или окружностью с центром в точке z_0, то полезно делать замену переменной вида

$$z - z_0 = re^{i\varphi}.$$

В первом случае $\varphi = const$, а r – переменная интегрирования, во втором случае $r = const$, а φ - переменная интегрирования.

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\hat{C}} z\overline{z}\,\mathrm{d}z,$$

где $\hat{C}$ – полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, обход против часовой стрелки.

Решение. Положим $z = |z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$, тогда $\overline{z} = e^{-i\varphi}$, $\mathrm{d}z = ie^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ и

$$\int\limits_0^\pi e^{i\varphi}\, e^{-i\varphi} i e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi = i\int\limits_0^\pi e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi = i\,\frac{e^{i\varphi}}{i}\bigg|_0^\pi = e^{i\varphi}\Big|_0^\pi = e^{i\pi} - 1 = -2.$$

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладкой замкнутой кривой C, и на самой кривой, то справедлива *интегральная формула Коши*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\hat{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z \qquad (z_0 \in\ D),$$

где кривая C обходится так, что область D остается все время слева.

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D и на ее границе C, то для любого натурального n имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\hat{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (z_0 \in\ D, z \in C).$$

Интегральная формула Коши позволяет вычислять некоторые интегралы.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\mathrm{d}z.$$

Решение. Внутри области, ограниченной окружностью $|z - 2| = 3$, находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2 - 6z}\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^z}{z-6}}{z}\mathrm{d}z.$$

Функция $f(z)=\frac{e^z}{z-6}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши ($z_0=0$) получим

$$\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{e^z}{z^2-6z}\mathrm{d}z=2\pi i\left.\frac{e^z}{z-6}\right|_{z=0}=2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi i}{3}.$$

Упражнения

Вычислить интегралы:

4.1. $\int_{\hat{C}}\ \mathrm{Re}(z+z^2)\mathrm{d}z\,,\ \hat{C}\colon y=2x^2,\ 0\le x\le 1.$

4.2. $\int_{\hat{C}}\ e^{|z|^2}\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z,\ \hat{C}$ – отрезок прямой от $z_1=0$ до $z_2=1+i$.

4.3. $\int_{\hat{C}}\ \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$, $\hat{C}$ – ломаная $z_1z_2z_3$, $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=2+i$.

4.4. $\int_{\hat{C}}\ (2z+1)\overline{z}\,\mathrm{d}z,\ \hat{C}\colon |z|=1, 0\le \arg z\le \pi.$

4.5. $\int_{\hat{C}}\ (\overline{z}^2-z)\,\mathrm{d}z,\ \hat{C}\colon |z|=1, \pi\le \arg z\le 2\pi.$

4.6. $\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\,\mathrm{d}z.$

4.7. $\int_1^i ze^z\,\mathrm{d}z.$

4.8. $\oint_C\ \frac{e^z}{z^2+z}\mathrm{d}z,\ C\colon |z|=\frac{1}{2}.$

4.9. а) $\oint_C\ \frac{e^{2z}}{z-\pi i}\mathrm{d}z,\ C\colon |z|=4$; б) $\oint_C\ \frac{e^{2z}}{z-\pi i}\mathrm{d}z,\ C\colon |z|=1.$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

4.10. $\int_{\hat{C}}\ |z|\,\mathrm{d}z,\ \hat{C}\colon y=\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1.$

4.11. $\int_{\hat{C}}\ z\,\mathrm{Im}(z^2)\,\mathrm{d}z,\ \widehat{C}\colon |\mathrm{Im}\,z|\le 1, \mathrm{Re}\,z=1.$

4.12. $\int_{\hat{C}}\ z\overline{z}\,\mathrm{d}z,\ \hat{C}\colon |z|=1, 0\le \arg z\le 2\pi.$

4.13. $\int_{\hat{C}} \frac{z}{\bar{z}} \mathrm{d}z,\ \hat{C}: |z| = 1, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

4.14. $\int_1^i (3z^4 - 2z^3)\, \mathrm{d}z$.

4.15. $\int_0^i (z - i)e^{-z}\, \mathrm{d}z$.

4.16. $\oint_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} \mathrm{d}z,\ C: |z| = 1$.

4.17. а) $\oint_C \frac{z^2}{z - 2i} \mathrm{d}z,\ C: |z| = 1$; б) $\oint_C \frac{z^2}{z - 2i} \mathrm{d}z,\ C: |z| = 4$.

5. Ряды в комплексной области. Ряды Тейлора и Лорана

Пусть дан ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots,$$

где $c_n = a_n + ib_n$.

Данный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей членов этого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n| + \cdots.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}.$$

Решение. Имеем $e^{in} = \cos \mathrm{n} + i \sin n$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

сходится абсолютно, следовательно, данный ряд также сходится абсолютно.

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

где c_0, c_1, c_2, и т.д. – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется *степенным рядом* в комплексной области.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$сходится при некотором значении $z = z_0$, то он сходится и при том абсолютно при всех значениях z, для которых $|z| < |z_0|$. Если ряд расходится при $z = z_1$, то он расходится и при любом z, для которого $|z| > |z_1|$.*

Область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ есть круг с центром в начале координат.

Радиус сходимости степенного ряда можно определить по формулам:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad (c_n \neq 0).$$

Степенной ряд может иметь вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. В этом случае центр круга сходимости находится в точке z_0.

Пример 2. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n - i)z^n$.

Решение. Найдем модули коэффициентов c_n и c_{n+1}:

$$|c_n| = |n - i| = \sqrt{n^2 + 1},$$

$$|c_{n+1}| = |(n + 1) - i| = \sqrt{(n + 1)^2 + 1} = \sqrt{n^2 + 2n + 2}.$$

Затем найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 2n + 2}} = 1.$$

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в точке $z = z_0$, разлагается в окрестности этой точки в степенной *ряд Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f(z_0)^n}{n!} \ (n = 0,1,2,\ldots),$$

где Γ – окружность с центром в точке $z = z_0$, целиком лежащая в окрестности точки z_0, в которой функция $f(z)$ аналитична. Центр круга сходимости находится в точке z_0. Радиус сходимости ряда будет равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Разложения некоторых функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ (ряд Маклорена):

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \ \ (R = \infty),$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \ \ (R = \infty),$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \ \ (R = \infty),$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots \ \ (R = 1),$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \ \ \ (R = 1),$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \cdots \ \ (R = 1).$$

Пример 3. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{i+z^2}$ в ряд Тейлора по степеням z, найти радиус сходимости ряда.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)$ к виду:

$$f(z) = \frac{z}{i+z^2} = \frac{z}{i}\left(\frac{1}{1+\frac{z^2}{i}}\right).$$

Такое представление функции позволит нам применить готовое разложение

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots.$$

В нашем случае $t = \frac{z^2}{i}$:

$$f(z) = \frac{z}{i}\left(1 - \frac{z^2}{i} + \left(\frac{z^2}{i}\right)^2 - \left(\frac{z^2}{i}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{z}{i} - \frac{z^3}{i^2} + \frac{z^5}{i^3} - \frac{z^7}{i^4} + \cdots = -iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \cdots.$$

Этот ряд сходится при условии $|\frac{z^2}{i}| < 1$, т.е. при $|z| < 1$.

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (возможны случаи $r = 0$ и $R = \infty$) разлагается в этом кольце в *ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f(z_0)^n}{n!} \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где γ – окружность с центром в точке $z = z_0$, целиком лежащая внутри данного кольца.

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

называется *главной частью ряда Лорана*, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется *правильной частью ряда Лорана*.

Как правило, если это возможно, для нахождения коэффициентов c_n используются готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

Пример 4. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функцию

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3}.$$

Решение. Для любого комплексного переменного z имеем

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Получим

$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^3}{6!} + \cdots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 0$ (в кольце $0 < |z| < +\infty$). Главная часть данного разложения:

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z},$$

правильная часть разложения:

$$\frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^3}{6!} + \cdots$$

Упражнения

Найти радиусы сходимости рядов:

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$.

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$.

Разложить функции в ряд Тейлора и найти радиусы сходимости рядов:

5.3. $\sin(z - \frac{\pi}{4})$ по степеням z.

5.4. $\sin^2 z$ по степеням z.

5.5. $\frac{1}{3+4z}$ по степеням z.

5.6. $\sqrt[3]{27 - z}$ по степеням z.

5.7. $\frac{1}{3+z}$ по степеням $(z-1)$.

Разложить функции в ряд Лорана в окрестностях указанных точек, указать области сходимости рядов:

5.8. $\sin\frac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

5.9. $\frac{z}{(z+1)^3}$, $z_0 = -1$.

5.10. $\frac{1-\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$.

Разложить функцию в ряд Лорана в указанных кольцах:

5.11. $\frac{1}{(z-2)(z+3)}$, а) $2 < |z| < 3$, б) $3 < |z| < +\infty$.

Задания для самостоятельного решения

Найти радиусы сходимости рядов:

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2n}} z^n$.

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$.

Разложить функции в ряд Тейлора и найти радиусы сходимости рядов:

5.14. $\frac{z}{4+z^2}$ по степеням z.

5.15. $\cos^2 z$ по степеням z.

5.16. $(1-z)e^{-2z}$ по степеням z.

5.17. $\sqrt[3]{z}$ по степеням $(z-1)$.

Разложить функции в ряд Лорана в окрестностях указанных точек и указать области сходимости рядов:

5.18. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0 = 0$.

5.19. $\frac{1}{(z+3)z}$, $z_0 = 0$.

5.20. $z^2 e^{1/z}$, $z_0 = 0$.

Разложить функцию в ряд Лорана в указанном кольце:

5.21. $\frac{1}{z^2+1}$, $0 < |z - i| < 2$.

6. Особые точки и вычеты

Нули функции. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется *нулем функции* $f(z)$ *порядка* n, если выполняются условия:

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Точка z_0 является нулем порядка n функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

где функция $g(z)$ аналитична в точке z_0 и $g(z_0) \neq 0$.

Если точка z_0 является нулем порядка n функции $f(z)$ и является нулем порядка m функции $g(z)$, то для функции $f(z)g(z)$ точка z_0 является нулем порядка $n + m$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z) = \sin 2z$ и определить их порядок.

Решение. Решив уравнение $\sin 2z = 0$, найдем нули функции $f(z)$:

$$z = \frac{\pi n}{2}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Далее,

$$f'(z) = 2\cos 2z, \qquad f'\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 2\cos \pi n = 2(-1)^n \neq 0,$$

следовательно, точки $z = \frac{\pi n}{2}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ являются нулями первого порядка (простыми нулями) данной функции.

Пример 2. Найти нуль функции $f(z) = \frac{z^5}{z - \sin z}$ и определить его порядок.

Решение. Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Маклорена, получим:

$$f(z) = \frac{z^5}{z - \sin z} = \frac{z^5}{z - (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots)} = \frac{z^5}{z - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots}$$

$$= \frac{z^5}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots} = \frac{z^5}{z^3(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots)} = z^2 \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots} = z^2 g(z),$$

где $g(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots}$ – функция, аналитическая в точке $z_0 = 0$. Т.к. $g(0) = 6 \neq 0$, то, точка $z_0 = 0$ является для данной функции нулем второго порядка.

Изолированные особые точки. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки z_0.

Если z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, то существует такое $R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

При этом возможны следующие случаи:

1) Ряд Лорана не содержит главной части. В этом случае точка z_0 называется *устранимой* особой точкой функции $f(z)$.

Изолированная особая точка z_0 является устранимой, если существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

2) Главная часть разложения в ряд Лорана содержит конечное число членов. В этом случае точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$.

Если точка z_0 – полюс, то в окрестности этой точки разложение Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_{-m} \neq 0$. В этом случае полюс z_0 называется *полюсом порядка* m функции $f(z)$. Если $m = 1$, то полюс z_0 называется *простым.*

Изолированная особая точка z_0 является полюсом, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Если точка z_0 – нуль порядка m функции $f(z)$, то z_0 – полюс порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$. Если точка z_0 – полюс порядка m функции $f(z)$, то z_0 – нуль порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$.

Точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$ если функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

где функция $g(z)$ аналитична в точке z_0 и $g(z_0) \neq 0$.

3) Главная часть разложения в ряд Лорана содержит бесконечное число членов. В этом случае точка z_0 называется *существенно особой* точкой функции $f(z)$.

Изолированная особая точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, если в точке z_0 функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Пример 3. Указать особую точку функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ и определить ее характер.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, получим:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots.$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержит только правильную часть, следовательно, z_0 есть устранимая особая точка.

Пример 4. Указать особую точку функции $f(z) = \frac{1}{(z-i)^5}$ и определить ее характер.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = i$. Для функции $\frac{1}{f(z)} = (z - i)^5$ точка $z_0 = i$ является нулем пятого порядка, следовательно, для функции $f(z)$ *точка* $z_0 = i$ – полюс пятого порядка.

Пример 5. Указать все особые точки функции $f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^2(z+1)}$ и определить их характер.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Исследуем $z_1 = 1$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\dfrac{\cos z}{z+1}}{(z-1)^2}.$$

Здесь, функция

$$g(z) = \frac{\cos z}{z+1}$$

аналитична в окрестности точки $z_1 = 1$ и $g(1) = \frac{\cos 1}{2} \neq 0$. Следовательно, $z_1 = 1$ является полюсом второго порядка данной функции. Аналогично, представив функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}}{z+1}$$

заключаем, что $z_2 = -1$ есть простой полюс данной функции.

Пример 6. Указать особую точку функции $f(z) = e^{1/z}$ и определить ее характер.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, получим:

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots.$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное число членов в главной части, следовательно, z_0 есть существенно особая точка.

Вычеты функций. Пусть точка z_0 есть изолированная особая точка функции $f(z)$. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0 называется число $\operatorname{Res} f(z_0)$, определяемое равенством

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

где контур γ – окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса, такого, чтобы окружность полностью находилась в области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри других особых точек функции $f(z)$.

Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}.$$

Способ вычисления вычета зависит от характера особой точки функции.

1) Если точка z_0– устранимая особая точка, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = 0.$$

2) Если точка z_0 – полюс n -го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}\{f(z)(z-z_0)^n\}}{dz^{n-1}},$$

при этом, если точка z_0 – простой полюс ($n = 1$), то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \{f(z)(z-z_0)\}.$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

причем z_0 – простой полюс ($g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$), то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

3) Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то необходимо использовать разложение в ряд Лорана.

Пример 7. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z}{\sin 2z}$ относительно всех особых точек.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки

$$z = \frac{\pi n}{2}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Заметим, что в точке $z_0 = 0$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin 2z} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $z_0 = 0$ есть устранимая особая точка и $\operatorname{Res} f(0) = 0$.

Остальные особые точки функции $f(z)$ есть простые полюсы, так как числитель дроби не равен нулю, а знаменатель имеет простые нули в этих точках:

$$\sin\left(2\frac{\pi n}{2}\right) = \sin\pi n = 0, \quad \sin'\left(2\frac{\pi n}{2}\right) = 2\cos\left(2\frac{\pi n}{2}\right) = 2\cos\pi n = 2(-1)^n \neq 0$$

при $n \neq 0$. Таким образом,

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{z}{\sin' 2z}\Big|_{z=\frac{\pi n}{2}} = \frac{z}{2\cos 2z} = \frac{\frac{\pi n}{2}}{2(-1)^n} = (-1)^n\frac{\pi n}{4},$$
$$(n = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Пример 8. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z}{(z-2i)(z+2)^2}$ относительно всех особых точек.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2$. Точка z_1 – простой полюс, поэтому

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \lim_{z\to 2i}\left\{\frac{z(z-2i)}{(z-2i)(z+2)^2}\right\} = \lim_{z\to 2i}\left\{\frac{z}{(z+2)^2}\right\} = \frac{2i}{(2i+2)^2} = \frac{2i}{4i} = \frac{1}{2}.$$

Точка z_2 – полюс второго порядка, следовательно,

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \lim_{z\to -2}\left(\frac{z(z+2)^2}{(z-2i)(z+2)^2}\right)' = \lim_{z\to -2}\left(\frac{z}{z-2i}\right)' = \lim_{z\to -2}\frac{-2i}{(z-2i)^2} =$$
$$= \frac{-2i}{(-2-2i)^2} = \frac{-2i}{4i} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 9. Найти вычет функции $f(z) = e^{1/z}$ относительно ее особой точки.

Решение. Функция $f(z)$ имеет существенную особую точку $z_0 = 0$. Разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots,$$

следовательно,

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = 1.$$

Упражнения

Указать все нули функций и определить их порядки:

6.1. $f(z) = 4z^2 + z^4$.

6.2. $f(z) = z^2 \sin z$.

6.3. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Указать все особые точки функций и определить их характер:

6.4. $f(z) = \frac{1}{(z^2+i)^3}$.

6.5. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

6.6. $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(z-1)}$.

6.7. $f(z) = \cos \frac{1}{z+2i}$.

Найти вычеты функций относительно всех особых точек:

6.8. $f(z) = \frac{z^2+1}{z-2}$.

6.9. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

6.10. $f(z) = \operatorname{ctg} z$.

6.11. $f(z) = \cos \frac{1}{z}$.

6.12. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z}$.

Задания для самостоятельного решения

Указать все особые точки функций и определить их характер:

6.13. $f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$.

6.14. $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(e^z-1)}$.

6.15. $f(z) = \frac{z(\pi-z)}{\sin 2z}$.

6.16. $f(z) = \mathrm{e}^{1/z-3i}$.

Найти вычеты функций относительно всех особых точек:

6.17. $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

6.18. $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^4}$.

6.19. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

6.20. $f(z) = \sin\frac{1}{z}$.

6.21. $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(3z-\pi)}$.

7. Применение вычетов к вычислению интегралов

Вычисление контурных интегралов от функций комплексного переменного

Теорема Коши о вычетах. *Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то*

$$\oint_C f(z)\mathrm{dz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_\mathrm{k}).$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-2)}.$$

Решение. Простые полюсы $z = i, -i, 2$ находятся внутри замкнутого контура $|z| = 3$.

Отсюда

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i} \frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)(z-2)} = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z-2)} = \frac{1}{2i(2-i)},$$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \lim_{z\to -i} \frac{z^2(z+i)}{(z^2+1)(z-2)} = \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{(z-i)(z-2)} = -\frac{1}{2i(2+i)},$$

$$\operatorname{Res} f(2) = \lim_{z\to 2} \frac{z^2(z-2)}{(z^2+1)(z-2)} = \lim_{z\to 2} \frac{z^2}{(z^2+1)} = \frac{4}{5},$$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 \mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-2)} = 2\pi i\left(\frac{1}{2i(2-i)} - \frac{1}{2i(2+i)} + \frac{4}{5}\right) = \pi\Big(\frac{1}{2-i} -$$

$$-\frac{1}{2+i} + \frac{8}{5}i\Big) = \pi\Big(\frac{2}{5}i + \frac{8}{5}i\Big) = 2\pi i.$$

Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций действительного переменного

Теорема. Пусть $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены соответственно степеней m и n. Если $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_n(x) \neq 0$) и $n \geq m+2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sigma,$$

где σ есть сумма вычетов функции $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ - четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

Введем функцию $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$, которая на действительной оси, т.е. при $z=x$, совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ в верхней полуплоскости имеет полюс второго порядка в точке $z=i$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен

$$\operatorname{Res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d\{f(z)(z-i)^2\}}{dz}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{2iz}{(z+i)^3}=\frac{1}{4i}.$$

Получим

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{4}.$$

Упражнения

Вычислить контурные интегралы:

7.1. $\oint_{|z-2|=2}\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)}$.

7.2. $\oint_{|z|=2}\sin\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$.

7.3. $\oint_{|z|=4}\frac{(z+1)\mathrm{d}z}{e^z+1}$.

7.4. $\oint_{|z|=1}\frac{z^3\mathrm{d}z}{2z^4+1}$.

Вычислить несобственные интегралы:

7.5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}$.

7.6. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Задания для самостоятельного решения

Вычислить контурные интегралы:

7.7. $\oint_{|z|=1}\frac{e^z\mathrm{d}z}{z^2(z^2+9)}$.

7.8. $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

7.9. $\oint_{|z-i|=2} \frac{(1-e^{z^2})\mathrm{d}z}{z^2(z-i)}$.

Вычислить несобственные интегралы:

7.10. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$.

7.11. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4\mathrm{x}+13)^2}$.

Ответы

1.1. а) $2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2\mathrm{e}^{i\pi}$; б) $2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$;

в) $2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 2\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$; г) $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right) = 2\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$;

д) $\sqrt{34}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)\right) = \sqrt{34}e^{i\operatorname{arctg}\frac{3}{5}}$.

1.2. а) 1728; б) 1.

1.3. $\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3} + i\right), -i$.

1.4. Окружность, внешность круга, внутренность круга радиуса 2 с центром в начале координат.

1.5. Окружность, внешность круга, внутренность круга радиуса 1 с центром в точке $z = 2$.

1.6. Окружность, внешность круга, внутренность круга радиуса 2 с центром в точке $z = i$.

1.7. Кольцо, образованное концентрическими окружностями с центром в точке $z = -2$ и радиусами 1 и 2, исключая окружность радиуса 1.

1.8. Прямая $4x + 2y + 3 = 0$.

1.9. Полуплоскость $x \geq 0$.

1.10. Полоса $0 \leq y < 1$.

1.11. Полоса $-2 \leq y \leq 2$.

1.12. Сектор между лучами $y = 0$, $y = x$, $x \geq 0$, включая луч $y = x$, $x \geq 0$.

1.13. Сектор между лучами $y = x$, $y = -x$, $x \leq 0$.

1.14. Ось абсцисс $y = 0$.

1.15. а) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$;

б) $5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) + i\sin\left(-\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)\right) = 5\sqrt{2}e^{i\left(-\pi + arctg\frac{1}{7}\right)}$.

1.16. а) $2^{10}(1+i)$; б) $-2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ $\left(\text{указание: } \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = -\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$.

1.17. $\pm\cos\frac{\pi}{8} \mp i\sin\frac{\pi}{8}$, $\pm\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$.

1.18. Кольцо, образованное концентрическими окружностями с центром в точке $z = i$ и радиусами 1 и 2, исключая сами окружности.

1.19. Круг с центром в точке $z = i$ и радиуса 2, исключая точку $z = i$.

1.20. Внешность круга с центром в точке $z = i$ и радиуса 2.

1.21. Внутренность полосы между прямыми $y = -\frac{1}{2}$ и $y = 0$.

1.22. Открытая полуплоскость слева от прямой $x = 1$.

1.23. Внутренность круга радиуса 2 с центром в точке $z = 2$.

1.24. Прямая $x - y + 1 = 0$ без точки $z = i$.
2.1. $u = 3xy^2 - x^3$, $v = 1 - 3x^2y + y^3$.
2.2. $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$.

2.3. $u = e^{-x}\cos y$, $v = -e^{-x}\sin y$.
2.4. $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $v = \operatorname{sh} y \cos x$.

2.5. $r = \pi$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

2.6. $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.7. $\operatorname{ch}\pi$.

2.8. $\ln\sqrt{2} + \pi i\left(2k - \frac{3}{4}\right)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.9. $e^{-2\pi k}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.10. $e^{\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.11. $e^{i\pi\sqrt{2}(2k+1)}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.12. $-\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) + 2\pi i m$ $(k, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.13. $\left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.14. $z_k = \pi(2k+1) + i\ln 2$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.15. $u = 2x^2 - 2y^2 + y$, $v = 4xy + x$.

2.16. $u = -\frac{x^2-(1+y)^2}{x^2+(1+y)^2}$, $v = -\frac{2x(1+y)}{x^2+(1+y)^2}$.

2.17. $u = e^{1-x}\cos y$, $v = -e^{1-x}\sin y$.

2.18. $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $v = -\sin x \operatorname{sh} y$.

2.19. $r = \operatorname{ch}1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2.20. $i\pi(2k+1)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.21. $i\pi\left(2k + \frac{1}{4}\right)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.22. $e^{-\pi(2k+1)}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

2.23. $z_{2k} = 2k\pi i$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

3.1. Дифференцируема только в одной точке $z = 0$.

3.2. Дифференцируема во всех точках комплексной плоскости.

3.3. Не дифференцируема ни в одной точке.

3.4. Вся плоскость, $\omega' = 2z + 1$.

3.5. Вся плоскость, $\omega' = 2\cos 2z$.

3.6. Вся плоскость, кроме точек $z = \pi m$ $(m = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, $\omega' = -\frac{1}{\sin^2 z}$.

3.7. Вся плоскость, кроме точек $z = \pm i$, $\omega' = -\frac{(1-z^2)\cos z - z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2}$.

3.8. $f(z) = z^3 + i$.

3.9. $f(z) = 2e^z + 1$.

3.10. Не дифференцируема ни в одной точке.

3.11. Дифференцируема во всех точках комплексной плоскости.

3.12. Вся плоскость, кроме точек $z = i2\pi m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, $\omega' = \frac{-2e^z}{(e^z-1)^2}$.

3.13. Вся плоскость, $\omega' = \operatorname{sh} z$.

3.14. $f(z) = \frac{1}{z} + 2iz - 1$.
3.15. $f(z) = -iz^2$.
4.1. $\frac{1}{30} - \frac{i}{3}$.

4.2. $\frac{1+i}{4}(e^2 - 1)$.

4.3. $2 + 2i$.

4.4. $-4 + \pi i$.

4.5. -2.

4.6. $7 + 19i$.

4.7. $(i - 1)e^i$.

4.8. $2\pi i$.

4.9. а) $2\pi i$; б) 0.

4.10. 2.

4.11. $-\frac{4}{3}$.

4.12. 0.

4.13. $-\frac{1+i}{3}$.

4.14. $\frac{3}{5}(i - 1)$.

4.15. $1 - \cos 1 - i(1 - \sin 1)$.
4.16. πi.
4.17. а) 0; б) $-8\pi i$.
5.1. $R = 1$.

5.2. $R = \sqrt{2}$.

5.3. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots\right)$, $R=\infty$.

5.4. $\frac{2z^2}{2!}-\frac{8z^4}{4!}+\frac{32z^6}{6!}-\cdots$, $R=\infty$.

5.5. $\frac{1}{3}-\frac{4z}{9}+\frac{16z^2}{27}-\frac{64z^3}{81}+\cdots$, $R=\frac{3}{4}$.

5.6. $3-\frac{z}{3^3}-\frac{2z^2}{2!3^7}-\frac{1\cdot2\cdot5\cdot z^3}{3!3^{11}}-\cdots$, $R=27$.

5.7. $\frac{1}{4}-\frac{(z-1)}{4^2}+\frac{(z-1)^2}{4^3}-\frac{(z-1)^3}{4^4}+\cdots$, $R=4$.

5.8. $\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{3!(z-2)^3}+\frac{1}{5!(z-2)^5}+\cdots$, $0<|z-2|<+\infty$.

5.9. $\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{(z+1)^3}$, $0<|z+1|<+\infty$.

5.10. $\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\cdots$, $0<|z|<+\infty$.

5.11. а) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$; б) $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n3^n}{z^{n+1}}$.

5.12. $R=1$.

5.13. $R=1$.

5.14. $\frac{z}{4}-\frac{z^3}{4^2}+\frac{z^5}{4^3}-\frac{z^7}{4^4}+\cdots$, $R=2$.

5.15. $1-\frac{2z^2}{2!}+\frac{8z^4}{4!}-\frac{32z^6}{6!}+\cdots$, $R=\infty$.

5.16. $1-3z+4z^2-\frac{10z^3}{3}+2z^4-\cdots$, $R=\infty$.

5.17. $1+\frac{(z-1)}{3}-\frac{2(z-1)^2}{2!3^2}+\frac{1\cdot2\cdot5\cdot(z-1)^3}{3!3^3}-\frac{1\cdot2\cdot5\cdot8\cdot(z-1)^4}{4!3^4}+\cdots$, $R=1$.

5.18. $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!z}+\frac{z}{4!}-\frac{z^3}{6!}+\cdots$, $0<|z|<+\infty$.

5.19. $\frac{1}{3z}-\frac{1}{3^2}+\frac{z}{3^3}-\frac{z^2}{3^4}+\frac{z^3}{3^5}-\cdots$, $0<|z|<3$.

5.20. $z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots$, $0<|z|<+\infty$.

5.21. $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$.

6.1. $z_0=0$ – нуль 2-го порядка, $z_{1,2}=\pm2i$ – простые нули.

6.2. $z_0 = 0$ – нуль 3-го порядка, $z_n = \pi n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ – простые нули.

6.3. $z_n = \pi n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ – простые нули.

6.4. $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \mp i)$ – полюсы 3-го порядка.

6.5. $z_n = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ – простые полюсы.

6.6. $z_0 = 0$ – полюс 2-го порядка, $z_n = 1 + \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ – простые полюсы.

6.7. $z = -2i$ – существенно особая точка.

6.8. $\operatorname{Res} f(2) = 5$.

6.9. $\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{9}$, $\operatorname{Res} f(\pm 3i) = \pm \frac{i}{54} e^{\pm 3i}$.

6.10. $\operatorname{Res} f(\pi n) = 1$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

6.11. $\operatorname{Res} f(0) = 0$.

6.12. $\operatorname{Res} f(0) = 0$.

6.13. $z_0 = 0$, $z_1 = -1$ – простые полюсы, $z_2 = 1$ – полюс 3-го порядка.

6.14. $z_1 = -1$ – полюс 3-го порядка, $z_n = 2\pi n i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ – простые полюсы.

6.15. $z_0 = 0$, $z_1 = \pi$ – устранимые особые точки, $z_n = \frac{\pi n}{2}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ – простые полюсы.

6.16. $z = 3i$ – существенно особая точка.

6.17. $\operatorname{Res} f(\pm i) = \mp \frac{i}{4}$.

6.18. $\operatorname{Res} f(-1) = -\frac{4}{3}\cos 2$.

6.19. $\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -1$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

6.20. $\operatorname{Res} f(0) = 1$.
6.21. $\operatorname{Res} f(0) = -\frac{3}{\pi^2}$, $\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2\pi^2}$.
7.1. $2\pi i$.

7.2. $2\pi i$.

7.3. $-4\pi i$.

7.4. πi.

7.5. $\frac{\pi}{4}$.

7.6. $\frac{\pi}{12}$.

7.7. $\frac{2\pi i}{9}$.

7.8. 0.

7.9. $2\pi i\left(\frac{1}{e}-1\right)$.

7.10. $\frac{\pi}{32}$.

7.11. $-\frac{\pi}{27}$.

Контрольные задания

Вариант 1

1. Вычислить: $(1+i)^{-16}$, $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,\ f(0) = 0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (2-i-\overline{z})\mathrm{dz},\ L:\ x = y^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 9-3i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{\sin z^2}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}\mathrm{dz},\ C:|z| = 1.$$

Вариант 2

1. Вычислить: $\left[(1+i)/(1-i)\right]^8 + i^{25}$, $\mathrm{Ln}(1+i)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = 3x^2y - y^3 + y,\ f(0) = 1.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L z\,\mathrm{Im}\,\overline{z}\mathrm{dz},\ L:\ x = y^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 4+2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{z^2+1}{(z^2+4)^2}\mathrm{dz},\ C:|z+2i| = 3.$$

Вариант 3

1. Вычислить: $(1-i)^{28}$, $\mathrm{Arccos}\,3$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = x/(x^2+y^2), \quad f(i)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (2+i-\bar{z})\mathrm{d}z, \ L:\ y=x^2, \ z_1=0, \ z_2=3+9i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{e^z-1}{z^2(z+1)}\mathrm{d}z, \ C: |z|=2.$$

Вариант 4

1. Вычислить: $(2-2i)^7$, $\mathrm{Arctg}(1+2i)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = x^2-y^2+xy, \quad f(0)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z\mathrm{d}z, \ L \text{ - прямая}, \ z_1=0, \ z_2=4+2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}\mathrm{d}z, \ C: |z|=2.$$

Вариант 5

1. Вычислить: $\left(1+i\sqrt{3}\right)^6$, $\cos\left(3+i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\ f(i)=i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (2i-\overline{z})\mathrm{dz},\ L:\ x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=9+3i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z-i)}\mathrm{dz},\ C:|z|=2.$$

Вариант 6

1. Вычислить: $\left(1-i\right)^5$, $\mathrm{Ln}\left(3-2i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V=xy;\qquad f(0)=0;$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L z\,\mathrm{Re}\,z\mathrm{dz},\ L \text{ - прямая},\ z_1=0,\ z_2=1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{1-\cos z}{z^2(z+3i)}dz,\ C:|z|=4.$$

Вариант 7

1. Вычислить: $\left[\left(-1+i\sqrt{3}\right)\big/2\right]^{60}$, $\operatorname{Arctg}\dfrac{i}{3}$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = x^2 - y^2 + x, \quad f(1+i) = i+1.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (2i+\overline{z})\mathrm{dz}, \ L: \ y = x^2, \ z_1 = 0, \ z_2 = -3+9i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\oint_C \frac{z+1}{(z-1)(z+3)}\mathrm{dz}, \ C: |z| = 4.$$

Вариант 8

1. Вычислить: $\left(3-i\sqrt{3}\right)\big/\left(1+i\right)^{40}$, $\operatorname{Arcsin} 3$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = 3x^2y - y^3 + 1, \quad f(0) = i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L \operatorname{Im}\overline{z}\,\mathrm{dz}, \ L: \ x = y^2, \ z_1 = 0, \ z_2 = 4-2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\oint_C \frac{1}{z^3+4z}\mathrm{dz}, \ C: |z-2i| = 3.$$

Вариант 9

1. Вычислить: $\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)/\left(1-i\right)\right]^{30}$, $\mathrm{Ln}\left(2\sqrt{3}-6i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = y(2x+1), \qquad f(0)=1.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (2+\bar{z})\mathrm{dz},\ L:\ x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=4-2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{e^{3iz}}{z^2(z+9)}\mathrm{dz},\ C:|z|=2.$$

Вариант 10

1. Вычислить: $5i^9/\left(-3-3i\right)^5$, $\cos\left(3-2i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = x^2-y^2-2xy+y, \qquad f(i)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L \mathrm{Im}\,z\mathrm{dz},\ L \text{ прямая},\ z_1=0,\ z_2=1+2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{z}{(z-i)(z-2)}\mathrm{dz},\ C:|z|=3.$$

Вариант 11

1. Вычислить: $2i\Big/\left(3+i\sqrt{3}\right)^6$, $\cos(1-i)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = 2x^3 - 6xy^2 + x - 1, \qquad f(0) = -1.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1-i+\overline{z})^2 \mathrm{dz},\ L \text{ - прямая},\ \ z_1 = 1+i,\ z_2 = 2+2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{1-\cos z}{z^2(z+2)} \mathrm{dz},\ C: |z| = 3.$$

Вариант 12

1. Вычислить: $(3-3i)\big/(-i\sqrt{3}-1)^6$, $\mathrm{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = 4x^3 - 12xy^2 + x, \qquad f(i) = i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L \mathrm{Re}\,\overline{z}\mathrm{dz},\ L:\ y = x^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{1}{(z-i)^2(z^2+1)} \mathrm{dz},\ C: |z| = 2.$$

Вариант 13

1. Вычислить: $(1-i)^4 \Big/ \left(-2+i2\sqrt{3}\right)^6$, $\sin(1+2i)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = x^3 - 3xy^2 - x, \; f(1) = 0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1+i-\overline{z})\mathrm{dz}, \; L: \; y = x^2, \; z_1 = 0, \; z_2 = 1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{\sin^2 z}{(z+i)(z-2)}\mathrm{dz}, \; C: |z| = 3.$$

Вариант 14

1. Вычислить: $(1+i)^{10} \Big/ (1-i)^8$, $\mathrm{Arctg}(i-1)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = 3x^2y - y^3 + y, \quad f(1) = 2.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L \mathrm{Re}\, z\mathrm{dz}, \; L \text{ - прямая}, \quad z_1 = 0, \; z_2 = 2+2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{e^{iz} z^2}{z^4 + 10z^2 + 9}\mathrm{dz}, \; C: |z| = 4.$$

Вариант 15

1. Вычислить: $(5i-5)\Big/\left(i\sqrt{3}+1\right)^3$, $\mathrm{Arccos}\,2$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = arctg\,\frac{y}{x}, \qquad f(1)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1+\overline{z}^2)\mathrm{dz},\ L:\ y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=2+4i,$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\oint_C \frac{\sin(z-i)}{z(z+i)^2}\mathrm{dz},\ C:|z|=2.$$

Вариант 16

1. Вычислить: $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^7\Big/i^{15}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U=-y\big/(x^2+y^2), \quad f(1)=i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1-i-\overline{z})\mathrm{dz},\ L:\ x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\oint_C \frac{e^{\pi z}}{4z^2-1}\mathrm{dz},\ C:|z|=1.$$

Вариант 17

1. Вычислить: $\left(i^{25}-1\right)\big/\left(i+1\right)^5$, $\sin\left(\pi+2i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U=-3x^2y+y^3+2x, \qquad f(i)=1+i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L(1-i-\overline{z})\mathrm{dz},\ L:\ x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C\frac{\sin z}{z^2(z+2)}\mathrm{dz},\ C:|z|=1.$$

Вариант 18

1. Вычислить: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)\big/\left(-1-i\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{Ln}\left(-2+i\sqrt{12}\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U=x(y+1), \qquad f(0)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L(i-2\overline{z})\mathrm{dz},\ L\ \text{- прямая},\ \ z_1=0,\ z_2=2+4i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C\frac{e^{2z}}{z(z-i)^2}\mathrm{dz},\ C:|z|=2.$$

Вариант 19

1. Вычислить: $\left[(1+i)/(1-i)\right]^9$, $\mathrm{Ln}\left(-3-i\sqrt{3}\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = x(1-2y), \qquad f(0)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L z\,\mathrm{Re}\,z\mathrm{dz},\ L:\ x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{z}{(z+i)(1-\cos z)}\mathrm{dz},\ C:|z|=2.$$

Вариант 20

1. Вычислить: $(1+i)^{-12}$, $\mathrm{Ln}\left(3+i\sqrt{3}\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = x^2-y^2+y, \quad f(1)=1+i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (i+2\overline{z})\mathrm{dz},\ L \text{ - прямая},\ z_1=0,\ z_2=-2-2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{z^2}{\cos z}\mathrm{dz},\ C:|z|=2.$$

Вариант 21

1. Вычислить: $\left(i^{21}\sqrt{3}-1\right)^{13}$, $\cos\left(-2-2i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U=3(x^2-y^2)+2xy, \qquad f(0)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1+i+\overline{z}^2)\mathrm{dz}\,,\ L\text{ - прямая, } z_1=0\,,\ z_2=1+i\,.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\mathrm{dz}\,,\ C:\left|z-1\right|=\frac{1}{2}\,.$$

Вариант 22

1. Вычислить: $\left(\sqrt{3}-i^7\right)^9$, $\mathrm{Ln}\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{4}$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U=x^3-3xy^2+x^2-y^2, \quad f(1)=2.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (i+\overline{z})\mathrm{dz}\,,\ L\text{ - прямая, } z_1=0\,,\ z_2=-2-i\,.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{2z+1}{z^3(z+2)}\mathrm{dz}\,,\ C:\left|z\right|=1.$$

Вариант 23

1. Вычислить: $\left(i\sqrt{3}-1\right)^6 \Big/ \left(i+1\right)^2$, $\mathrm{Ln}\left(6+2i\sqrt{3}\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = 3x^2y - y^3 - 4xy, \qquad f(0)=0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1+i+\overline{z}^2)\mathrm{dz},\ L \text{ - прямая},\ z_1=0,\ z_2=1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{\sin^2 z}{(z+i)(z-2)}\mathrm{dz},\ C: |z|=3.$$

Вариант 24

1. Вычислить: $\mathrm{Ln}\left(6+2i\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}-3i\right)^{18} \Big/ i^7$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = x^2 - y^2 + 2xy, \qquad f(0)=i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1-2\overline{z})\mathrm{dz},\ L:\ y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=-2+4i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{e^z-1}{z^3+z^2}\mathrm{dz},\ C: |z|=2.$$

Вариант 25

1. Вычислить: $\left(\sqrt{3}-3i\right)^{18} \Big/ i^{7}$, $\operatorname{ctg}\left(3-4i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = 3xy - x,\ f(1) = 1 - i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1+i+\overline{z}^2)\mathrm{dz},\ L \text{ - прямая, } z_1 = 0,\ z_2 = 1+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{z-1}{(z^3+1)z}\mathrm{dz},\ C: |z| = 2.$$

Вариант 26

1. Вычислить: $\left(i^{29}-1\right) \Big/ \left(i+1\right)^{12}$, $\operatorname{Arctg}\dfrac{i}{2}$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = x + y + 2xy,\quad f(-1-i) = 0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (i-\overline{z})^2\mathrm{dz},\ L \text{ прямая, } z_1 = 0,\ z_2 = -1-i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{2z+1}{(z^3-1)z}\mathrm{dz},\ C: |z| = 2.$$

Вариант 27

1. Вычислить: $\left(-\sqrt{3}+3i\right)\Big/\left(2-2i\right)^8$, $\mathrm{Ln}\left(-6+2i\sqrt{3}\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V = 3x^2 - y^2 + 2xy, \qquad f(0) = 0.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L (1+2\bar{z})\mathrm{d}z,\ L:\ x = y^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1-i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}\mathrm{d}z,\ C: |z| = 3.$$

Вариант 28

1. Вычислить: $\left(1+i\right)^8\Big/\left(3i+\sqrt{3}\right)^9$, $\mathrm{tg}\left(2+i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U = \frac{x^2-y^2}{2} + x, \quad f(1) = \frac{3}{2}.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int_L \bar{z}\,\mathrm{Im}\,\bar{z}\mathrm{d}z,\ L \text{ - прямая},\ z_1 = 0,\ z_2 = -1-2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int_C \frac{\sin^2 \pi z}{(z-1)^2(z^2-1)}\mathrm{d}z,\ C: |z| = 3.$$

Вариант 29

1. Вычислить: $4i^{19}\Big/\left(i-1\right)^{40}$, $\mathrm{Ln}\left(-5-5i\right)$.

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$V=2x\big/(x^2+y^2),\quad f(i)=1.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int\limits_L z\,\mathrm{Im}\,z\mathrm{d}z,\ L\text{ - прямая, } z_1=0,\ z_2=2+i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int\limits_C \frac{\sin z}{(z+1)^2(z^2+1)z}\mathrm{d}z,\ C:|z|=2.$$

Вариант 30

1. Вычислить: $\left(1-i\right)^4\Big/\left(3-i\sqrt{3}\right)^{12}$; $\mathrm{Ln}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$;

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y)$ при заданном начальном условии:

$$U=2x(y+1),\qquad f(0)=i.$$

3. Вычислить интеграл по дуге L от точки z_1 до точки z_2:

$$\int\limits_L \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z,\ L\text{ - прямая, } z_1=1+i;\ z_2=2+2i.$$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\int\limits_C \frac{e^z}{(4z^2+\pi^2)^2}\mathrm{d}z,\ C:|z|=\pi.$$

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Оникс, 2008. – 816 с.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного: задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч.2. – М.: Айрис-пресс, 2012. – 252с.

Содержание

БЕРНШТЕЙН Татьяна Викторовна,
ПРОКУДИН Дмитрий Алексеевич

Теория функций комплексной переменной

Учебное пособие

Редактор Т.В. Храмова
Корректор И.П. Крутас

Подписано в печать 01.01.2015
Формат 60 × 84 1/16. Отпечатано 01.01.2015
3.9 п. л., заказ № , тираж 100 экз.

СибГУТИ, 630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86