

- 1.1** Какой способ использован при задании множеств:
а) $IVT = \{\text{множество групп факультета ИВТ}\}$; б) $P42 = \{\text{множество студентов группы П-42}\}$? Верно ли, что: $P42 \in IVT$? $P42 \subset IVT$?
- 1.2** Перечислить все элементы множества $\{x \mid x - \text{целое и } x^2 < 49\}$.
- 1.3** Описать множество $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ при помощи характеристического свойства.
- 1.4** Перечислить все подмножества множества $\{a, b, c\}$.
- 1.5** Справедливо ли равенство: $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} = \{a, b, c\}$?
- 1.6** Пусть $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ – множество всех целых четных чисел; $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел. Определить, из каких чисел будут состоять множества: $E \cap N$, $E \cup N$, $E \setminus N$, $N \setminus E$?
- 1.7** Доказать, что $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.
- 1.8** Установить истинность или ложность каждого из следующих утверждений:
а) $\emptyset \subseteq \emptyset$; б) $\emptyset \subseteq A$, где A – произвольное множество; в) $\emptyset \subset \emptyset$;
г) $\emptyset \in \emptyset$; д) $\emptyset \in A$, где A – произвольное множество.
- 1.9** Определить количество элементов в каждом множестве:
а) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; б) $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; в) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$;
г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$; д) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- 1.10** Доказать, что если множества $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
- 1.11** Пусть даны множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Определить множества:
а) $A \cup C$; б) $A \cap B$; в) $(A \cap B) \cup C$; г) $A \setminus B$;
д) $U \setminus (A \cap B)$; е) $\overline{A} \cap \overline{B}$; ж) $A \cap (B \cup C)$; з) $A \Delta B$;
и) $(A \cup C) \setminus \overline{B}$; к) $B \Delta C$; л) $(A \setminus \emptyset) \cup (A \setminus A)$.
- 1.12** Определить, какие из следующих утверждений верны, а какие – нет:
а) $A \cap \emptyset = A$; б) $A \Delta A = \emptyset$; в) если $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$;
г) $A \setminus A = A$; д) $A \cup \emptyset = A$; е) если $A \cap B = A$, то $B \subseteq A$;
ж) $\overline{A \setminus \emptyset} = \overline{A}$; з) $A \Delta \emptyset = A$; и) если $A \subseteq B$, то $A \cup B = A$;
к) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$; л) $A \times \emptyset = A$; м) если $A \cup B = A$, то $B \subseteq A$.
- 1.13** Доказать, используя определения операций \cup и \cap , что для любых множеств A, B, C выполняется: а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; б) $(A \cap B) \cup A = A$;
в) $(A \cup B) \cap A = A$; г) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
- 1.14** Определить операции \cup, \cap, \setminus через: а) Δ, \cap ; б) Δ, \cup ; в) \setminus, Δ .
- 1.15** Доказать, что $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$. Проиллюстрировать графически.
- 1.16** Доказать, что $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Проиллюстрировать графически.
- 1.17** Пусть множества A, B, C удовлетворяют соотношениям: $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$$

- 1.18** Пусть множества A, B, C удовлетворяют соотношениям: $B \subseteq A \subseteq C$. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}.$$
- 1.19** Пусть множества A, B, C удовлетворяют соотношениям: $B \subseteq A \subseteq C$. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ A \cup X = C \end{cases}.$$
- 1.20** Доказать аналитически, используя свойства операций над множествами, и проиллюстрировать графически:
- 1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$; 2) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
 - 3) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$; 4) $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$;
 - 5) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$; 6) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;
 - 7) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$; 8) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
 - 9) $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C)$; 10) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
 - 11) $A \cap B = (\bar{A} \cup B) \cap A$; 12) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
 - 13) $A \Delta (A \Delta B) = B$; 14) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$;
 - 15) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$; 16) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
- 1.21** Указать такие множества A, B, C что $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.
- 1.22** При каком условии на множества A, B, C выполняется $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$?
- 1.23** Пусть $A = \{a, b, c, d\}$. Какие из следующих классов множеств составляют разбиение или покрытие множества A ?
- а) $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$; б) $\{\{a, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b\}\}$; в) $\{\{a\}, \{c, d\}\}$; г) $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$.
- 1.24** Выписать все варианты непустых разбиений множества $A = \{a, b, c, d\}$.

Тема 2 *Отношения*

Занятие 2

- 1.25** Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Определить:
- а) $A \times B$; б) $B \times B$; в) $A \times \emptyset$; г) $B \times A$; д) $A \Delta B$.
- 1.26** Выяснить, справедливы ли равенства. Если нет – привести контрпример.
- а) $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$; б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
- в) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$; г) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
- д) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cup ((A \times D) \cap (B \times C)) \cup (B \times D)$.
- 1.27** Найти область определения и множество значений отношений:
- а) $\{(a, 1), (a, 2), (c, 1), (c, 2), (c, 4), (d, 5)\}$; б) $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$;
- в) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ и } x = y^2\}$; г) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{I} \text{ и } x^2 + y^2 \leq 16\}$.
- 1.28** Установить, какие из приведенных совокупностей элементов составляют разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Для тех, что составляют, перечислить элементы соответствующего отношения R , такого, что $aRb \Leftrightarrow a, b \in \text{одному } A_i$:
- а) $\{\{1, 2\}, \emptyset, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}\}$; б) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}\}$; в) $\{\{1, 7\}, \{3, 4, 6\}\}$;
- г) $\{\{1, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 6, 7\}\}$; д) $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$.
- 1.29** На плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Указать точки плоскости, соответствующие элементам отношения $R \subseteq \mathbf{N}^2$, если:
- а) $R = \{(x, y) \mid x \leq 6, y \leq 4, x > y\}$; б) $R = \{(x, y) \mid x \leq 10, y \leq 10, x \text{ делит } y\}$.

- 1.30** Представить заданное бинарное отношение R на множестве A списком пар; построить его графически; выписать область определения и область значений: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(x, y) \mid \text{остаток от деления } y \text{ на } x \text{ равен } 1\}$.
- 1.31** Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, отношения $R_1, R_2 \subseteq A^2$: $R_1 = \{(x, y) \mid 2x \leq y\}$, $R_2 = \{(x, y) \mid x + 3y \text{ четно}\}$. Построить R_1 , R_2 , $R = R_2 \circ R_1$, области определения и области значений всех трех отношений.

Занятие 3

- 1.32** Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, $C = \{10, 11, 12, 13\}$; отношения: $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$: $R = \{(1, 7), (4, 6), (5, 6), (2, 8)\}$, $S = \{(6, 10), (6, 11), (7, 10), (8, 13)\}$. Определить: а) R^{-1} и S^{-1} ; б) $S \circ R$; в) $R^{-1} \circ S^{-1}$; г) $S^{-1} \circ S$ и $S \circ S^{-1}$.
- 1.33** Определить, являются ли указанные отношения на множестве \mathbb{N} рефлексивными, транзитивными, симметричными, антисимметричными?
а) $\{(m, n) \mid m \text{ и } n \text{ взаимно просты}\}$; б) $\{(m, n) \mid m \text{ делится на } n\}$;
в) $\{(m, n) \mid m - n = 3\}$; г) $\{(m, n) \mid (m + 2 \cdot n) \text{ кратно } 3\}$.
- 1.34** Определить на множестве $\{a, b, c\}$ отношение:
а) эквивалентности; б) частичного порядка;
в) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;
г) рефлексивное, транзитивное, не симметричное;
д) симметричное, транзитивное, не рефлексивное.
- 1.35** Отношение $R \subseteq A^2$, $A = \{a, b, c\}$. Определить, является ли отношение рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным, используя свойства матриц бинарного отношения.
а) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$; б) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$;
в) $R = \{(a, a), (a, b), (c, c), (c, b)\}$; г) $R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, a), (c, b), (c, a)\}$;
- 1.36** Является ли каждое из приведенных ниже отношений $R \subseteq A^2$ отношением эквивалентности? Если да – построить классы эквивалентности:
а) $A = \mathcal{P}(M)$, если $M = \{a, b, c, d\}$, sRt , если s и t имеют одинаковую мощность;
б) $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(a, b) \mid a + b = 0\}$; в) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, aRb , если $a + b > 0$;
г) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, aRb , если $a + b$ четное;
д) $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(a, b) \mid \exists k \in \mathbb{Z} \mid a - b = 5k\}$;
е) $A = \{\text{мн-во прямых на плоскости}\}$, nRm , если прямые n и m пересекаются;
ж) $A = \{\text{мн-во прямых на плоскости}\}$, nRm , если прямые n и m параллельны.
- 1.37** Пусть $C = \{1, 2, 3\}$ и X – булеан множества C с заданным на нем отношением частичного порядка \subseteq . Определить: (если возможно) а) точную верхнюю грань для подмножества $X \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$;
б) подмножество X , для которого точной верхней гранью является $\{1, 3\}$;
в) точную нижнюю грань для X и подмножеств из а) и б).
- 1.38** Пусть X – множество с заданным на нем отношением частичного порядка \subseteq . Определить максимальные и минимальные элементы; точные верхнюю и нижнюю грани (если возможно):
а) $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$;
б) $X = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

- 1.39** Пусть $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Найти область определения и область значений следующих функций:
 а) $f(x) = x^2 + 4$; б) $f(x) = \sqrt{x-2}$; в) $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$; г) $f(x) = 1/(x^2 + 4)$.
- 1.40** На множестве $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ задать функцию:
 а) не инъективную; б) биективную.
- 1.41** Для функций f и g , заданных на множестве действительных чисел, найти $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:
 а) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x + 3$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $g(x) = x^2 + 3$;
 в) $f(x) = 1/x$; $g(x) = 2 \cdot x + 3$;
- 1.42** Выяснить, какие из следующих функций, у которых область определения и область значений совпадает с действительной числовой осью, являются инъективными, сюръективными, имеют обратную функцию:
 а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = x^2 + 4$; в) $f(x) = x^3 + 6$; г) $f(x) = x + |x|$; д) $f(x) = x(x-2)(x+2)$.
- 1.43** На множестве \mathbf{N} задать функцию: а) не инъективную; б) инъективную, но не сюръективную; в) сюръективную, но не биективную; г) биективную.
- 1.44** Используя принцип математической индукции, доказать:
 а) неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n \quad \forall n \in \mathbf{N} \text{ и } a > -1, a \in \mathbf{R}$;
 б) $\forall n \in \mathbf{Z}, n > 0 \quad n^3 - n$ делится на три;
 в) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$;
 г) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;
 д) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$; е) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$.