

Теория вероятностей и математическая статистика

Преподаватель:
Дьячкова Марина Сергеевна
Кафедра ПМиК (1 корпус, ауд. 430а)

Курс в ЭиОС

Курс ТМиМС (Теория вероятностей и математическая статистика)

<https://eios.sibsutis.ru/course/view.php?id=3369>

Модули курса:

1. Вероятность событий (1 - 6 неделя)
2. Случайные величины (7 - 11 неделя)
3. Математическая статистика (12 - 15 неделя)

Отработка долгов – 16 неделя

Зачет – 17 неделя

Рейтинговая система

Лекции

- 2 балла за посещение каждой лекции
- До 10 баллов за конспект всех лекций (в конце семестра)

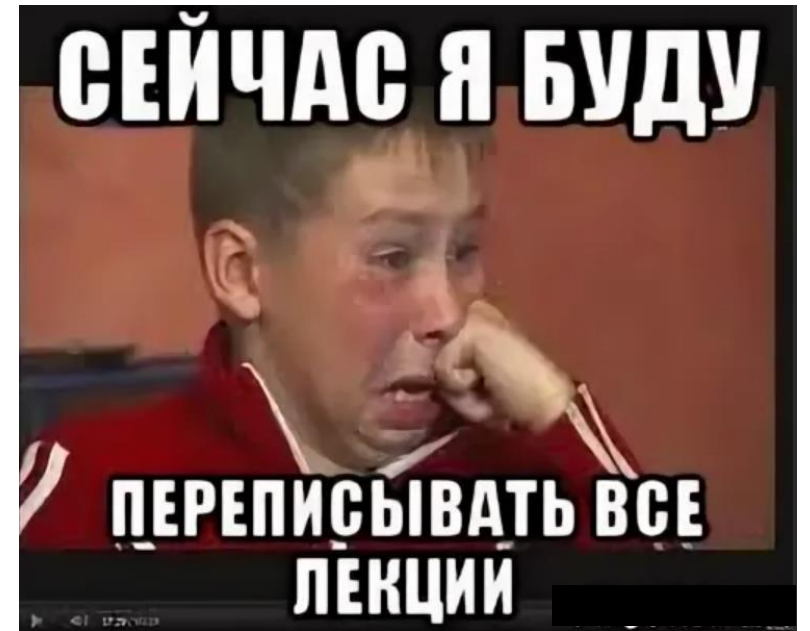
Практические занятия

- До 5 баллов за работу на занятии
- До 3 баллов за домашнее задание

Контрольные работы

- Три контрольных работы по каждому блоку
- Тест по математической статистике

Зачет



	Абсолютный максимум	Минимум на автомат
<i>Вероятность событий</i>		
Баллы за 1 блок	40	20
Контрольная 1	18	9
<i>Случайные величины</i>		
Баллы за 2 блок	32	16
Контрольная 2	16	8
<i>Математическая статистика</i>		
Баллы за 3 блок	24	12
Контрольная 3	8	4
Тест	10	5
<i>Общее</i>		
Лекции	32 (+10 за конспект)	28

Пьер-Симон Лаплас: «Теория вероятностей есть, в сущности, не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению»



История развития ТВ

Первые работы, в которых зарождались основные понятия ТВ, представляют собой попытки **создать теорию азартных игр** – конец XVI – начало XVII века (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и т. д.).

Эти задачи не могли быть решены известными в то время математическими методами. Можно считать, что как наука ТВ возникла из чисто практических потребностей.





В 1494 году, итальянский математик **Лука Пачоли** опубликовал энциклопедический труд, в котором рассмотрел следующую ситуацию:

Два игрока договорились играть в кости до того момента, когда одному из них удастся выиграть m партий.

Но игра была прервана после того, как первый выиграл a ($a < m$), а второй – b ($b < m$) партий.

Как справедливо разделить ставку?

- Пачоли предлагал разделить ставку в отношении $a : b$.
- Только через 160 лет эта задача была решена двумя выдающимися французскими математиками **Б.Паскалем** и **П.Ферма**.

Они предложили учитывать исходы партий, которые не были сыграны.

Рассмотрим решение в случае $m = 3$, $a = 2$ и $b = 1$.



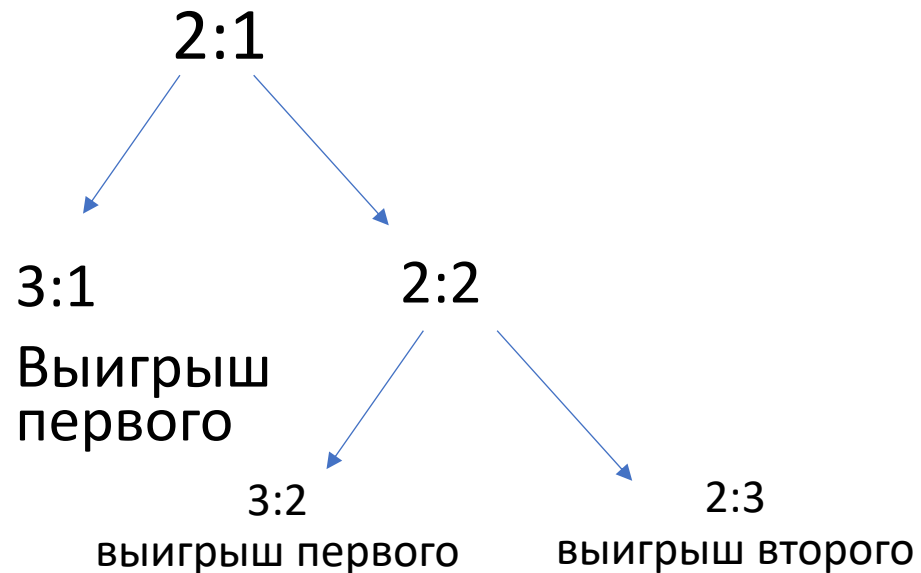
Блез Паскаль
1623-1662



Пьер Ферма
1601-1665

$m = 3, a = 2$ и $b = 1$

Если бы игроки сыграли еще одну партию, то ситуация упростилась.



В среднем

Первый игрок: $(1 + 1/2) / 2 = 3/4$

Второй игрок: $(0 + 1/2) / 2 = 1/4$

Соотношение : $(3/4) / (1/4) = 3 : 1$

Итак, выигрыш следует разделить в отношении 3 : 1
(а не 2 : 1, как предлагал Пачоли).

История развития ТВ

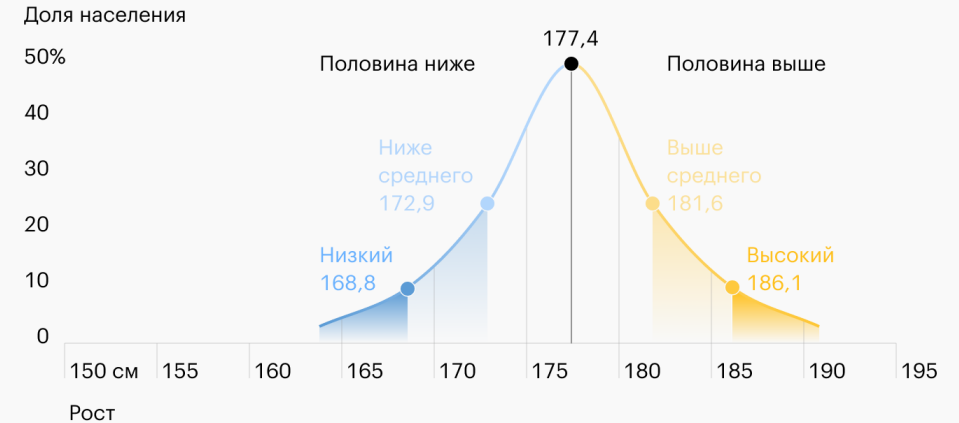
- Следующий этап развития ТВ связан с именем **Я. Бернулли**. Доказанная им теорема (1713 г.), получившая впоследствии название **«закон больших чисел»**, была первым теоретическим обоснованием накопленных результатов.
- Успехи и потребности развивающихся естественных наук, особенно физики, послужили толчком к дальнейшему развитию ТВ. Возникла теория ошибок, связанная с именами **Гаусса, Пуассона**. Ошибки, как правило, случайны и не поддаются индивидуальному учету, однако проявляют некоторую устойчивость.



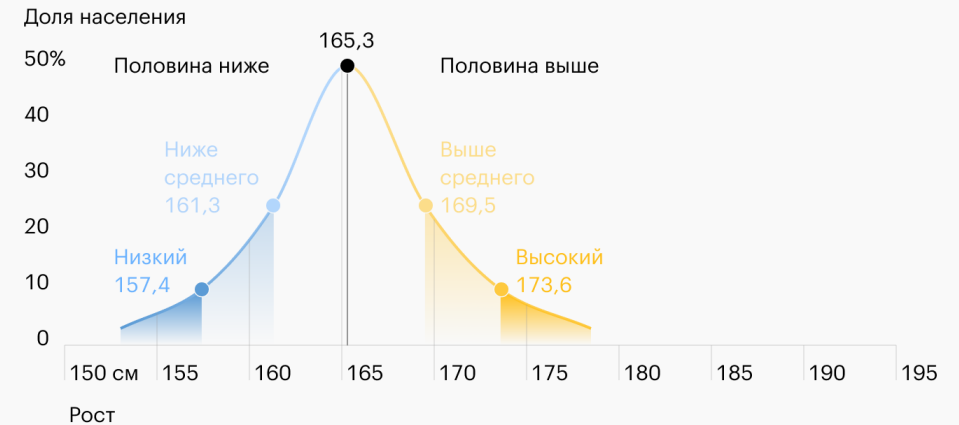
История развития ТВ

- В 1718 году французский математик **А.Муавр** написал книгу «Учение о случаях». Там он открыл закономерность, которая часто наблюдается в случайных явлениях. Он измерил рост примерно у 1375 случайно выбранных женщин и построил график, отражающий зависимость, сколько женщин имеют определенный рост.

Распределение россиян 1992 года рождения по росту

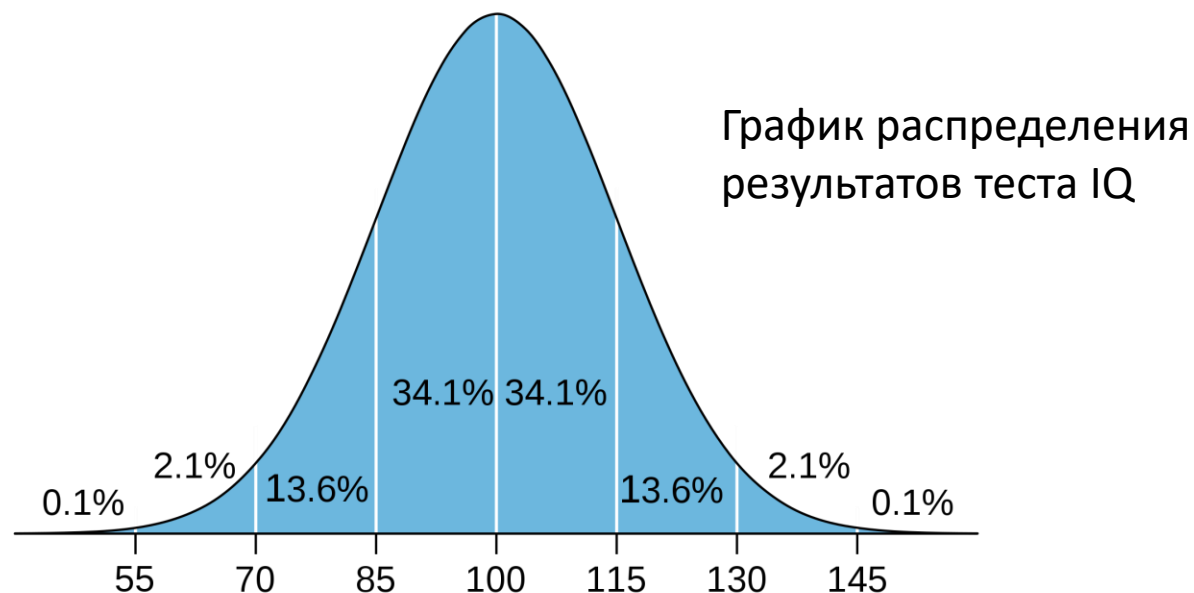


Распределение россиянок 1992 года рождения по росту

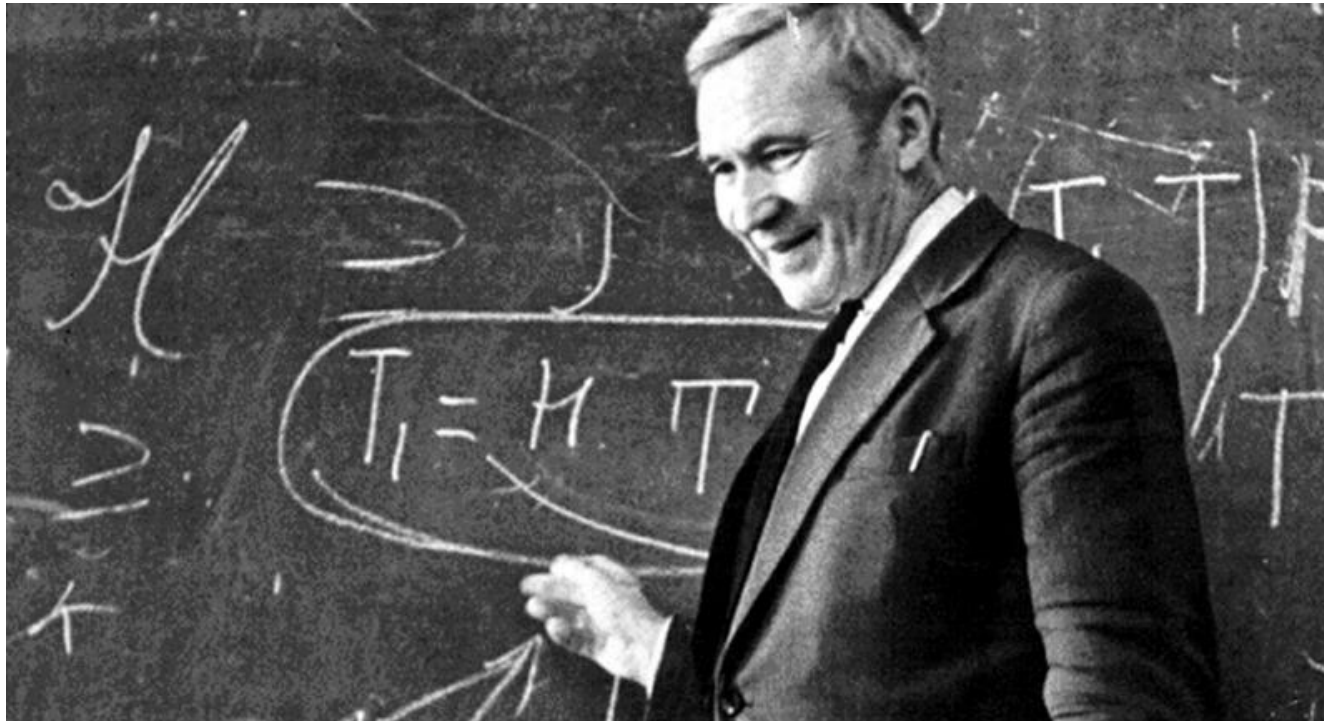


История развития ТВ

- Позже выяснилось, что этот закон имеет важное практическое значение: по этому закону распределяется скорость газовых молекул, вес новорожденного и много других случайных событий.
- Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных явлений. Методы теории вероятностей используются в процессах планирования, принятия решений.



- Современный период в ТВ начинается с установления аксиоматики в этой науке. В 1933 г. вышла в свет книга советского математика **А.Н. Колмогорова** «Основные понятия теории вероятностей». Предложенная в ней аксиоматика получила всемирную поддержку и не только позволила охватить все имеющиеся разделы ТВ, но и образовала тот фундамент, на котором выросло логически стройное здание этой науки.



- Дальнейшее развитие ТВ связано с именами математиков **С.Н. Бернштейна, В.И. Романовского, А.Я. Хинчина, Б.В. Гнеденко, Н.В. Смирнова** и др.
- Роль ТВ в различных отраслях знаний трудно переоценить; она служит основой математической статистики, один из ее разделов (случайные процессы) быстро развивается как в теоретическом, так и в прикладном аспекте.



Элементы комбинаторики

Основное правило комбинаторики: пусть требуется выполнить одно за другим K действий, первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами, ..., k -е – n_K способами.

Тогда все K действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 * n_2 * \dots * n_K$$

Пример: Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:

- 1) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;*
- 2) цифры могут повторяться;*
- 3) числа должны быть нечетными?*

Элементы комбинаторики

- 1) *Первой цифрой числа может быть любая из 1, 2, 3, 4, 5. Если первая цифра выбрана, то вторая может быть выбрана пятью способами, третья – четырьмя способами, четвертая – тремя способами. Следовательно, общее число способов составления четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами в них равно **$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$** .*
- 2) *Здесь первая цифра числа также может быть выбрана пятью способами. Для каждой из последующих цифр возможен один из шести случаев: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Следовательно, общее число способов равно **$5 \cdot 6^3 = 1080$** .*
- 3) *Число нечетных чисел равно **$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$** .*

Элементы комбинаторики

Размещениями из n элементов по m элементов называют соединения, состоящие из m элементов, взятых из данных n элементов и отличающихся друг от друга или **самими элементами**, или **их порядком**.

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad 1 \leq m \leq n$$

*Пример: имеются буквы a, b, c . Упорядоченные двумерные подмножества этого множества букв имеют вид ab, ac, ba, bc, ca, cb , их число равно $A_3^2 = 3 * 2 = 6$.*

Элементы комбинаторики

Перестановки – это размещения при $m = n$.

$$P_n = A_n^n = n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = n!$$

Пример:

- *из двух букв a, b можно составить следующие перестановки: ab, ba , число перестановок равно $P_2 = 2! = 2$.*
- *из трех букв a, b, c можно составить следующие перестановки: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, число перестановок равно $P_3 = 3! = 6$.*

Элементы комбинаторики

Сочетаниями из n элементов по m элементов называют m -элементные соединения, взятые из данных n элементов и отличающиеся друг от друга **хотя бы одним элементом**.

Иначе говоря, это m -элементные неупорядоченные подмножества множества, состоящего из n элементов. В отличие от размещений **порядок элементов** в сочетаниях **не учитывается**.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!},$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Пример: имеются буквы a, b, c . Двумерные подмножества этого множества букв имеют вид ab, ac, bc . Их число равно $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$.

Элементы комбинаторики

Размещениями с повторениями из n элементов по m элементов называются соединения по m элементов, причем каждый из m элементов **может быть любым** из n элементов.

$$\overline{A_n^m} = V_n^m = n^m$$

*Пример: Так, из трех букв a, b, c можно составить такие размещения с повторениями по две буквы:
 $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$.*

$$V_3^2 = 3^2 = 9$$

Элементы комбинаторики

Перестановками с повторениями из n элементов, среди которых имеется n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго, ..., n_k элементов k -го типа, при этом $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, называются соединения, содержащие все данные n элементов с указанными числами повторений одинаковых элементов.

Все эти соединения отличаются друг от друга **только порядком элементов**.

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Число различных слов, которые можно получить перестановкой букв в слове мама: мама, амма, маам, аамм, ммаа, амам. $k = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4 - 2$

$$P_4(2, 2) = \frac{4!}{2! 2!} = 6$$

Элементы комбинаторики

Число сочетаний с повторениями длины m из n букв вычисляется по формуле

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}$$

Пример: Из букв a, b, c можно составить такие сочетания с повторениями: aa, ab, ac, bb, bc, cc , тогда

$$\overline{C_3^2} = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4 * 3}{1 * 2} = 6$$

Элементы комбинаторики

	Без повторений	С повторениями
Размещения	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$\overline{A_n^m} = n^m$
Перестановки	$P_n = A_n^n = n!$	$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
Сочетания	$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$	$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m! (n-1)!}$