# Случайные величины и их распределения

# Случайная величина

**Результат многих случайных испытаний** выражается одним или несколькими числами

- Число очков, выпавших на кубике
- Число выигрышных билетов в лотерею среди купленных в кассе
- Число шаров определенного цвета, среди вытащенных из урны

Измеряемая по ходу испытания **числовая характеристика** *зависит от его случайного исхода* и сама является *случайной*

# Случайная величина

- **Случайной величиной** называется функция ξ,

*заданная на пространстве* элементарных исходов
$\Omega = \{\omega\}$ случайных испытаний

и *ставящая в соответствие* каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ***число*** $\xi = \xi(\omega)$

- Случайные величины принято обозначать греческими буквами $\xi, \zeta, \eta, \mu$…
или большими латинскими буквами X, Y, Z, …

# Случайная величина

- Случайные величины принято обозначать греческими буквами ξ, η, ζ, μ… или большими латинскими буквами X, Y, Z, …

# Случайная величина

*Пример:*

Монету подбрасывают дважды. Пространство элементарных исходов имеет вид $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$

Определим случайную величину $\xi$ как функцию $\xi = \xi(\omega)$ элементарного исхода.

Пусть $\xi$ – число выпадений герба при двух бросаниях монеты

| **ω** | **ГГ** | **ГР** | **РГ** | **РР** |
|---|---|---|---|---|
| **ξ(ω)** | 2 | 1 | 1 | 0 |

# Случайная величина

*Пример:* Производится один выстрел по мишени.
Пусть $\xi$ – расстояние от точки попадания до центра мишени.

Для определения $\xi$ как функции от элементарного исхода, введем в плоскости мишени прямоугольную систему координат и поместим ее в центр мишени.

Пусть x – абсцисса, y – ордината точки попадания.

Тогда $\Omega = \{\, (x, y) : x, y \in R \,\}$

$$\xi = \xi(\omega) = \xi(\, (x, y)\, ) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

# Случайная величина

- **Случайной величиной** называется функция $\xi$,

*заданная на пространстве* элементарных исходов
$\Omega = \{\omega\}$ случайных испытаний

и *ставящая в соответствие* каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ***число*** $\boldsymbol{\xi = \xi(\omega)}$

- Случайные величины принято обозначать греческими буквами $\xi$, $\zeta$, $\eta$, $\mu$…
или большими латинскими буквами $X$, $Y$, $Z$, …

# Случайные величины

**Случайные величины (и дискретные, и непрерывные) имеют:**

- Закон распределения (ряд или плотность распределения)
- Функция распределения

Числовые характеристики:

- Математическое ожидание
- Дисперсия и среднеквадратичное отклонение

# Закон распределения

- **Законом распределения** случайной величины (с.в.) называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями с.в. и соответствующими им вероятностями.
- *Испытание – подбрасывание двух монеток*

| ω | ГГ | ГР | РГ | РР |
|---|---|---|---|---|
| ξ(ω) | 2 | 1 | 1 | 0 |

ω – элементарные исходы испытания

**ξ(ω) или ξ – случайная величина**

| ξ(ω) | 0 | 1 | 2 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |

p – вероятность конкретного значения с.в.

# Закон распределения

- **Законом распределения** случайной величины (с.в.) называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями с.в. и соответствующими им вероятностями.

| **ξ(ω)** | **0** | **1** | **2** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|
| **p** | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |

- Говорят, что случайная величина «распределена» по данному закону или «подчинена» ему
- Закон распределения любой случайной величины может быть задан при помощь ее **функции распределения**

# Функция распределения

- **Функцией распределения** случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x)$ действительной переменной x, выражающая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее x:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

- Индекс ξ может быть опущен, и функция распределения одной случайного величины обозначается просто **F(x)**

| **ξ(ω)** | **0** | **1** | **2** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|
| **p** | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |

# Функция распределения

$F(0) = P\{\ \xi < 0\ \} = 0$

$F(1) = P\{\ \xi < 1\ \} = 0.25$

$F(2) = P\{\ \xi < 2\ \} = 0.25 + 0.5 = 0.75$

$F(3) = P\{\ \xi < 3\} = 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1$

| **ξ(ω)** | **0** | **1** | **2** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|
| **p** | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |

# Свойства функции распределения

# Свойства функции распределения

1. Функция распределения заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

2. Функция распределения является неубывающей функцией:

если $x1 < x2$, то $F(x1) \leq F(x2)$.

*Пример:*

$F(0) = P\{ \xi < 0 \} = 0$

$F(1) = P\{ \xi < 1 \} = 0.25$

$F(2) = P\{ \xi < 2 \} = 0.75$

$F(3) = P\{ \xi < 3 \} = 1$

# Свойства функции распределения

3. Функция распределения непрерывна слева:

$$F(x_0 - 0) = F(x_0),\ \text{где}\ F(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0,\ x < x_0} F(x).$$

*Пример:*

$F(0) = P\{\xi < 0\} = 0$

$F(1) = P\{\xi < 1\} = 0.25$

$F(2) = P\{\xi < 2\} = 0.75$

$F(3) = P\{\xi < 3\} = 1$

$$F(2 - 0) = \lim_{x \to 2-} F(x) = F(2) = P\{\xi < 2\} = 0.75$$

# Свойства функции распределения

4. Функция распределения удовлетворяет следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

*Пример:*

$F(0) = P\{\xi < 0\} = 0$

$F(1) = P\{\xi < 1\} = 0.25$

$F(2) = P\{\xi < 2\} = 0.75$

$F(3) = P\{\xi < 3\} = 1$

$F(-\infty) = P\{\xi < -\infty\} = F(0) = 0$

$F(+\infty) = P\{\xi < +\infty\} = F(3) = 1$

# Свойства функции распределения

*Замечание:*

Свойства 1 – 4 являются необходимыми и достаточными.

**Необходимость:** любая функция распределения F(x) обладает указанными свойствами.

**Ф. Р.** $\longrightarrow$ **СВОЙСТВА 1 – 4**

**Достаточность:** если какая-либо функция F(x) обладает свойствами 1 – 4, то она является функцией распределения некоторой случайной величины.

**Ф. Р.** $\longleftarrow$ **СВОЙСТВА 1 – 4**

# Свойства функции распределения

5. Так как $F(x) = P\{\xi < x\}$,

$$\text{то } P\{\xi \le x\} = F(x+0) = \lim_{x\to x_0,\, x>x_0} F(x).$$

*Пример:*

$F(0) = P\{\xi < 0\} = 0$

$F(1) = P\{\xi < 1\} = 0.25$

$F(2) = P\{\xi < 2\} = 0.75$

$F(3) = P\{\xi < 3\} = 1$

$P\{\xi \le 1\} = F(1+) = 0.75$

# Свойства функции распределения

6. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение $x_0$ равна величине скачка функции F(x) в точке $x_0$:

$$P\{\xi = x_0\} = F(x+0) - F(x)$$

*Пример:*

$F(0) = P\{\xi < 0\} = 0$

$F(1) = P\{\xi < 1\} = 0.25$

$F(2) = P\{\xi < 2\} = 0.75$

$F(3) = P\{\xi < 3\} = 1$

| **ξ(ω)** | **0** | **1** | **2** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|
| **p** | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |

$P\{\xi = 1\} = F(1+) - F(1) = 0.75 - 0.25 = 0.5$

# Свойства функции распределения

7. Справедливы следующие формулы:

$$P\{\xi \in [x_1, x_2)\} = P\{x_1 \le \xi < x_2\} =$$

$$= P\{\xi < x_2\} - P\{x_1 > \xi\} =$$

$$= P\{\xi < x_2\} - P\{\xi < x_1\} =$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$

# Свойства функции распределения

7. Справедливы следующие формулы:

$$P\{\xi \in [x_1, x_2)\} = P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P\{\xi \in [x_1, x_2]\} = ?$$

$$P\{\xi \in (x_1, x_2)\} = ?$$

$$P\{\xi \in (x_1, x_2]\} = ?$$

# Свойства функции распределения

7. Справедливы следующие формулы:

$$P\{\xi \in [x_1, x_2)\} = P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P\{\xi \in [x_1, x_2]\} = P\{x_1 \le \xi \le x_2\} = F(x_2 + 0) - F(x_1)$$

$$P\{\xi \in (x_1, x_2)\} = P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1 + 0)$$

$$P\{\xi \in (x_1, x_2]\} = P\{x_1 < \xi \le x_2\} = F(x_2 + 0) - F(x_1 + 0)$$

# Свойства функции распределения

# Свойства функции распределения

**Самое важное о функции распределения:**

1. Определена для любого $-\infty < x < \infty$
2. Возрастает от 0 до 1

3. $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, т.е.

   функция распределения в точке x (x – число) – вероятность того, что случайная величина меньше этого x.

4. Различна для дискретных и непрерывных случайных величин

# Случайные величины

**Непрерывные случайные величины** –
могут принимать бесконечное количество различных значений

- время пробега марафона спортсменом
- вес домашней кошки
- рост мужчин в возрасте от 35 до 45 лет
- время работы линии связи до наступления обрыва

**Дискретные случайные величины** –
могут принимать счетное количество различных значений

- количество бракованных товаров в партии
- количество студентов, сдавших экзамен
- количество обрывов на линии связи за день

# Случайные величины

**Случайные величины (дискретные и непрерывные) имеют:**

- Закон распределения (распределение)
- Функция распределения

Числовые характеристики:

- Математическое ожидание
- Дисперсия и среднеквадратичное отклонение

# Случайные величины

| **Характеристика** | **Дискретные случ. величины** | **Непрерывные случ. величины** |
|---|---|---|
| Закон распределения | | |
| Функция распределения | | |

# Дискретные случайные величины

Случайная величина ξ называется **дискретной**, если множество ее возможных значений представляет собой *конечную или бесконечную* **последовательность** чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ .

В первом случае случайная величина ξ называется *конечной*, во втором – *счетной*.

- количество попаданий в мишень при 10 выстрелах
- сумма выпавших очков при подбрасывании 2 кубиков
- число выпаданий герба при подбрасывании 3 монет

# Дискретные случайные величины

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается **рядом распределения.**

**Ряд распределения** – совокупность всех возможных значений случайной величины $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ и соответствующих им вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ .

$$p_k = P\{ \xi = x_k \}, k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Причем $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Т.к. события $A_k = \{ \xi = x_k \}, k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$образуют полную группу

# Дискретные случайные величины

Ряд распределения может быть задан аналитически в виде формулы:

$$p_k = P\{ \xi = x_k \} = f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

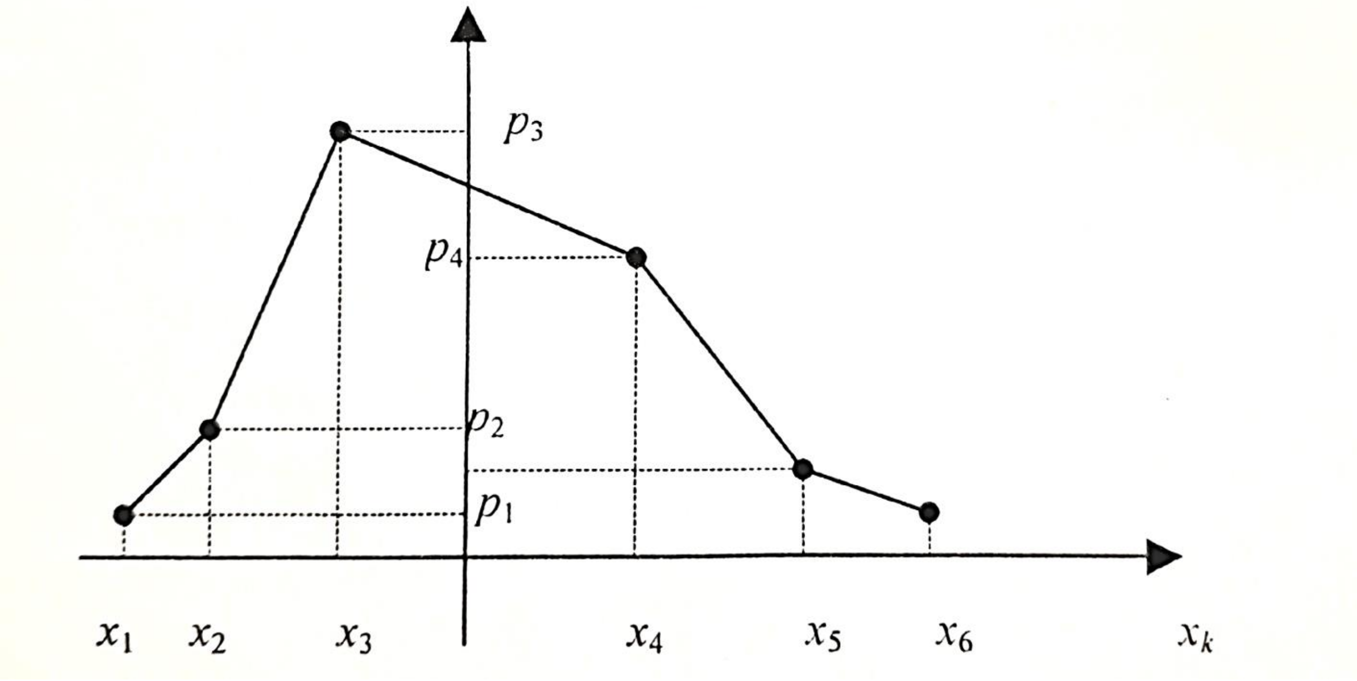
Ряд распределения представляют в виде таблицы

| **ξ(ω)** | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | **…** | $\mathbf{x_n}$ | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ | 1 |

# Дискретные случайные величины

| **ξ(ω)** | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | **…** | $\mathbf{x_n}$ | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ | 1 |

**Многоугольник распределения** дискретной случайной величины – ломаная на плоскости, соединяющая последовательно точки с координатами $(p_k, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$



# Случайные величины

| **Характеристика** | **Дискретные случ. величины** | **Непрерывные случ. величины** |
|---|---|---|
| Закон распределения | Ряд распределения (таблица)<br>$p_k = P\{ \xi = x_k \}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ | |
| Функция распределения | | |

# Дискретные случайные величины

**Функция распределения**

$$F(x) = P\{\xi < x\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

1) Для всех $x \le x_1$ событие $\{\xi < x\} = \emptyset$ и $F(x) = P(\emptyset) = 0$

2) Для $x_1 < x \le x_2$ событие $\{\xi < x\} = \{\xi = x_1\}$ и $F(x) = P(\xi = x_1) = p_1$

3) Для $x_2 < x \le x_3$ событие $\{\xi < x\} = \{\xi = x_1\} + \{\xi = x_2\}$ и
$F(x) = P(\xi = x_1) + P(\xi = x_2) =$ [события несовместны] $= p_1 + p_2$

# Дискретные случайные величины

**Функция распределения**

…

n-1) Для $x_{n-1} < x \leq x_n$

$$\text{событие } \{\xi < x\} = \{\xi = x_1\} + \{\xi = x_2\} + \ldots + \{\xi = x_{n-1}\}$$

$$F(x) = P(\xi = x_1) + \ldots + P(\xi = x_{n-1}) = [\text{события несовместны}] =$$

$$= p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$$

# Дискретные случайные величины

**Функция распределения**

n) Для $x > x_n$ событие $\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{n} \{\xi = xk\} = \Omega$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k = P(\Omega) = 1$$

# Дискретные случайные величины

**Функция распределения**

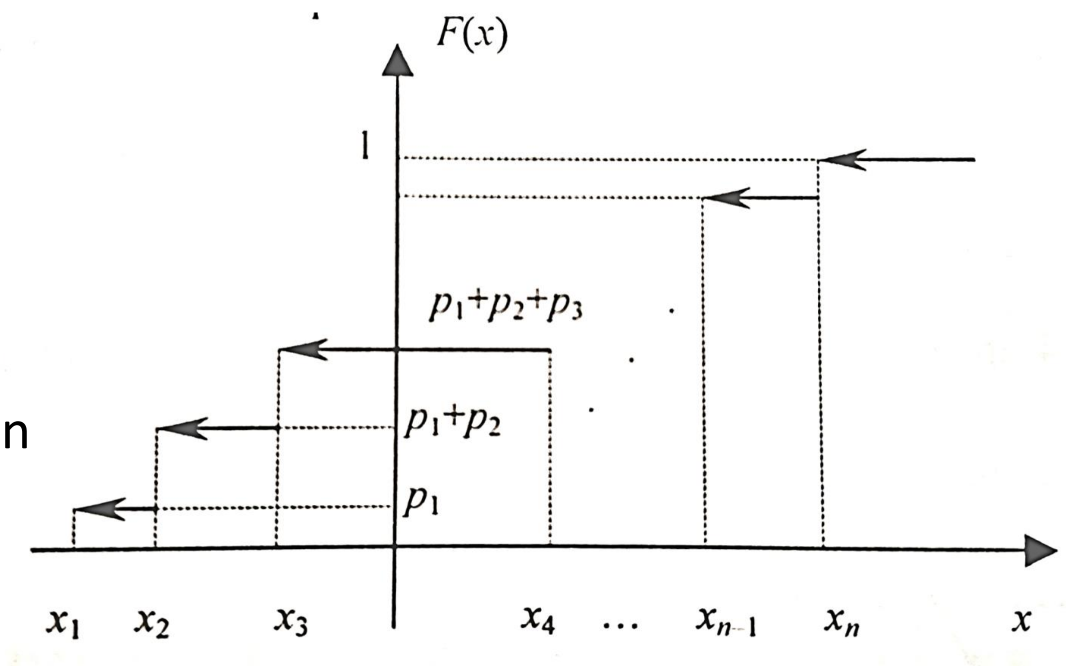
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1 \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \le x_3 \\ & \dots \\ \sum_{k=1}^{n-1} p_k, & \text{если } x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, & \text{если } x > x_n \end{cases}$$

# Дискретные случайные величины

**Функция распределения**

$$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k$$

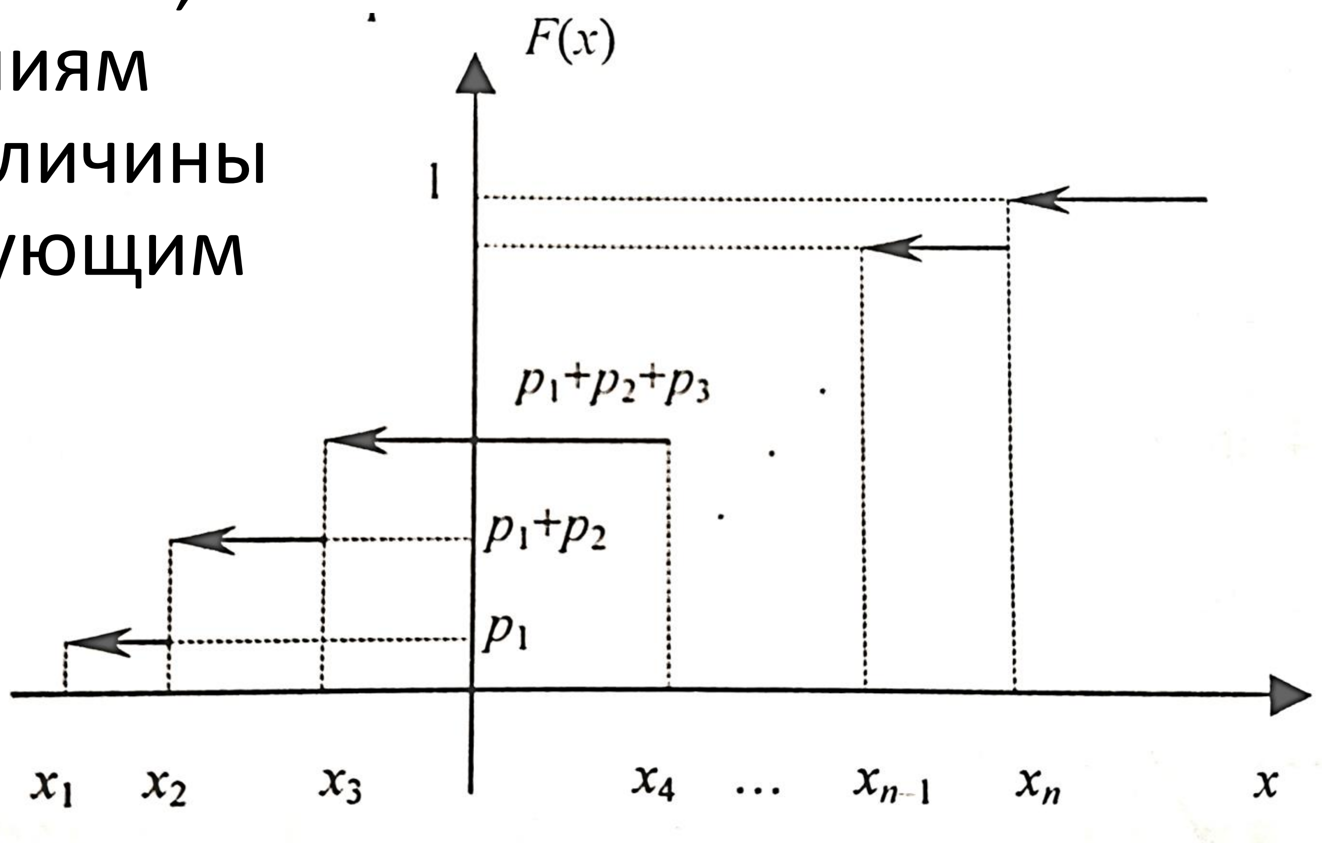
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1 \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \le x_3 \\ \dots & \\ \sum_{k=1}^{n-1} p_k, & \text{если } x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, & \text{если } x > x_n \end{cases}$$



# Дискретные случайные величины

**Функция распределения**

является разрывной, ступенчатой функцией со скачками в точках, координаты равны значениям случайной величины, а величины скачков равны соответствующим им вероятностям.



# Случайные величины

| Характеристика | Дискретные случ. величины | Непрерывные случ. величины |
| --- | --- | --- |
| Закон распределения | Ряд распределения (таблица)<br>$p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ | |
| Функция распределения | Ступенчатая, разрывная функция со скачками в точках $x_k$<br>$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k$ | |

# Дискретные случайные величины

*Пример:*

Пусть случайная величина $\xi$ – число гербов, $\eta$ – число решек, выпавших при одном бросании монеты.

Найти закон распределения и функцию распределения $\xi$ и $\eta$

# Дискретные случайные величины

*Решение:* Величины ξ и η принимают всего 2 значения: 0 и 1. Ряды распределений имеют вид:

| $x_k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p_k$ | 1/2 | 1/2 |

| $y_k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p_k$ | 1/2 | 1/2 |

Обе сл. величины имеют одинаковую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 1/2, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

хотя ясно, что ξ всегда отлична от η, ибо η = 1 – ξ.

Каждая случайная величина *однозначно определяет* свою функцию распределения, но существует множество различных случайных величин, имеющих *одинаковую функцию распределения*

# Дискретные случайные величины

*Пример:*

На зачете студент получил 4 задачи. Вероятность правильно решить каждую задачу равна 0.7.

Найти ряд и функцию распределения, построить многоугольник и график функции распределения случайной величины $\xi$ – числа правильно решенных задач.

# Дискретные случайные величины

*Решение:*

Величина ξ принимает значения 0, 1, 2, 3, 4. «Успехом» испытания – решения задачи – назовем ее правильное решение. Воспользуемся формулой Бернулли:

$n = 4,\ p = 0.7,\ q = 0.3$

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_4^k p^k q^{4-k},\ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Ряд распределения имеет вид

| $x_k$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,0081 | 0,0756 | 0,2646 | 0,4116 | 0,2401 | **1** |

# Дискретные случайные величины

Ряд распределения имеет вид:

| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,0081 | 0,0756 | 0,2646 | 0,4116 | 0,2401 | **1** |

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 0.0081, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 0.0837, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0.3483, & \text{при } 2 < x \le 3 \\ 0.7599, & \text{при } 3 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

# Дискретные случайные величины

| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,0081 | 0,0756 | 0,2646 | 0,4116 | 0,2401 | **1** |

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 0.0081, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 0.0837, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0.3483, & \text{при } 2 < x \le 3 \\ 0.7599, & \text{при } 3 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

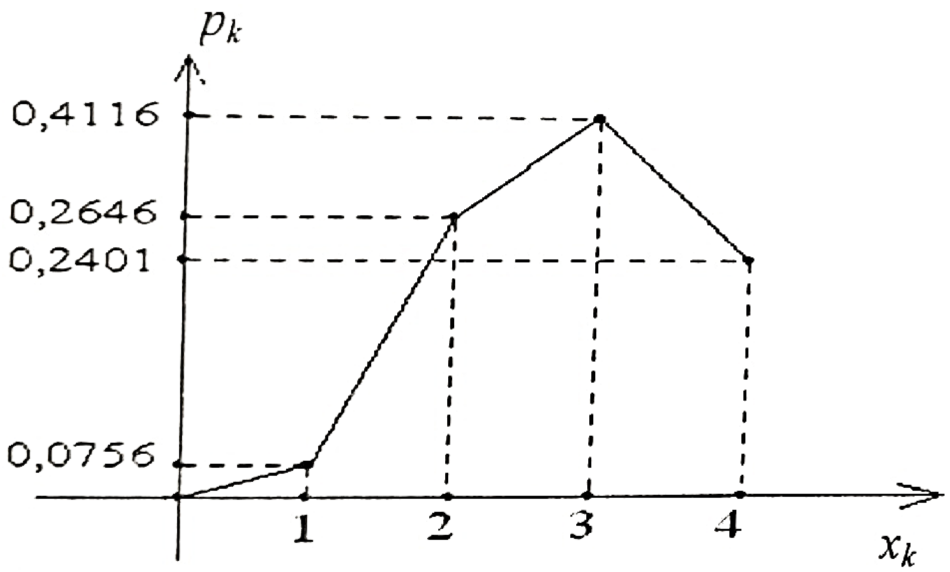



*Рис. 2.3.* Многоугольник распределения

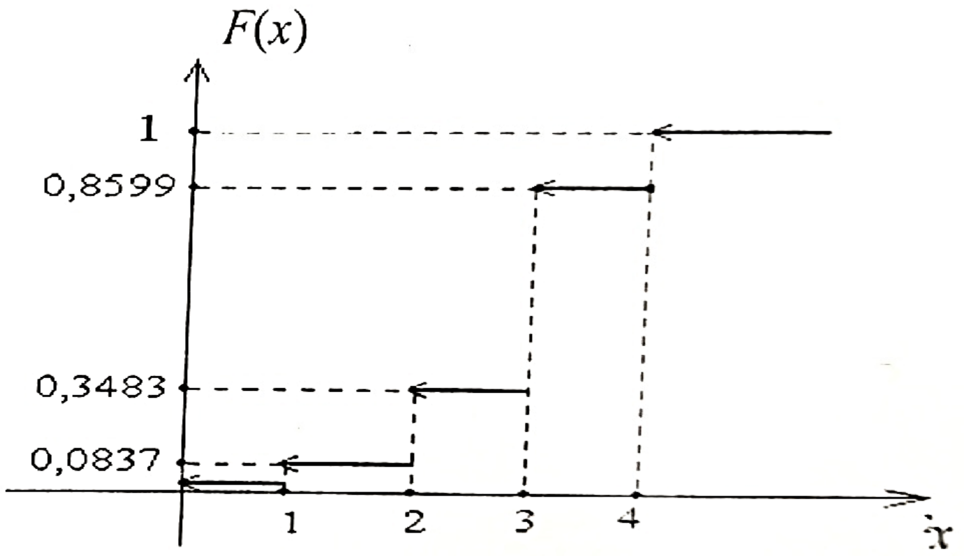



*Рис. 2.4.* Функция распределения

# Основные дискретные распределения

Основные **законы распределения** дискретных случ. величин:

1. Распределение Бернулли
2. Биномиальное распределение
3. Геометрическое распределение
4. Гипергеометрическое распределение
5. Распределение Пуассона