Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)

Е. П. Мачикина Д.И. Новожилов

ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

Учебное пособие

Новосибирск
2023

УДК [510.6+510.5](075.8)

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ

Рецензенты:
доцент кафедры высшей математики СибГУТИ Т.Э. Захарова
доцент кафедры алгебры и математической логики НГТУ,
к.ф.-м.н. Е.В. Овчинникова
доцент кафедры алгебры и математической логики ТюмГУ, к.п.н. Д.В. Шармин

Мачикина Е.П., Новожилов Д.И. Задачник по математической логике и теории алгоритмов : учебное / Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики ; каф. прикладной математики и кибернетики. – Новосибирск, 2023. – 90 с.

В пособии содержатся задачи и упражнения для решения на практических занятиях и во время самостоятельной работы по всем разделам дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профили «Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем», «Электронно-вычислительные машины, комплексы, системы и сети», «Программное обеспечение средств мобильных систем», направления 02.03.01 Фундаментальная информатика и информационные технологии, профиль Системное программное обеспечение. Большинство задач и упражнений пособия снабжено ответами и указаниями к решению.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ... 5

1. Булевы функции ... 7

2 Нормальные формы ... 12

3 Полнота системы булевых функций ... 15

4 Формулы логики высказываний ... 18

5 Исчисление высказываний ... 23

6 Методы проверки выводимости формул в исчислении высказываний ... 26

7 Предикаты и операции с предикатами ... 30

8 Формулы и термы в исчислении предикатов ... 36

9 Логические эквивалентности с кванторами ... 40

10 Выводимость формул в исчислении предикатов ... 42

11 Метод резолюций для исчисления предикатов ... 44

12 Простые программы для машины Тьюринга ... 48

13 Вычисление арифметических функций на машине Тьюринга ... 51

14 Примитивно рекурсивные функции ... 56

15 Частично рекурсивные функции ... 60

Ответы и указания ... 63

К задачам раздела 1. Булевы функции ... 63

К задачам раздела 2 Нормальные формы ... 65

К задачам раздела 3 Полнота системы булевых функций ... 68

К задачам раздела 4 Формулы логики высказываний ... 72

К задачам раздела 5 Исчисление высказываний ... 74

К задачам раздела 6 Методы проверки выводимости формул в исчислении высказываний ... 76

К задачам раздела 7 Предикаты и операции с предикатами ... 78

К задачам раздела 8 Формулы и термы в исчислении предикатов 82

К задачам раздела 9 Логические эквивалентности с кванторами 85

к задачам раздела 10 Выводимость формул в исчислении предикатов 86

К задачам раздела 11 Метод резолюций для исчисления предикатов 87

К задачам раздела 12 Простые программы для машины Тьюринга 91

К задачам раздела 13 Вычисление арифметических функций на машине Тьюринга 94

К задачам раздела 14 Примитивно рекурсивные функции 98

К задачам раздела 15 Частично рекурсивные функции 100

Список литературы 102

Введение

Настоящий сборник задач по математической логике и теории алгоритмов разработан на основании многолетнего опыта преподавания курса «Математическая логика и теория алгоритмов» в СибГУТИ. Задачи, вошедшие в задачник, предназначены для выработки у студентов целостного представления о дисциплине и закрепления полученных знаний, начиная от элементарных постулатов булевой алгебры до более сложных понятий, таких как, выводимость в логических исчислениях.

Логика берёт своё начало ещё от древнегреческих философов, в первую очередь от Аристотеля. Аристотелевская логика вытекает из теории множеств и оперирует с понятиями «принадлежит к множеству» и «не принадлежит множеству», использует понятия «некоторый», «любой», порождает операции объединения и пересечения множеств. Понятия «истина», «ложь», «противоречие», а также причины истинности или ложности заключений, полученных из истинных посылок, надолго стали предметом изучения в логике. Долгое время учёные пытались выработать понятийный аппарат для того, чтобы придать логике математическую строгость.

Важный шаг в этом направлении был сделан английским математиком Джорджем Булем, который изобрёл двоичную алгебру, оперирующую только с нулями и единицами. Тем самым, понятия из аристотелевской логики обрели математически строгие формулировки. Интересно, что сам Джордж Буль считал своё детище всего лишь забавным математическим курьёзом, который никогда не найдёт практического применения. Однако именно гениальная простота выбранного подхода позволила с исчерпывающей ясностью сформулировать основные определения булевой алгебры, тем самым заложив фундамент современной математической логики и теории алгоритмов. Именно двоичная алгебра оказалась необходимой теоретической основой, позволившей воплотить первые механические устройства, выполнявшие операции и простые вычисления.

Современный вид математическая логика приобрела в 1880-е годы в трудах немецкого логика, математика и философа Г. Фреге (1848-1925). Он дал первую аксиоматику логики высказываний и предикатов, сделав попытку свести математику к логике. Значительный вклад в развитие логики внесли Б. Рассел, А.Н. Уайтхед, Д. Гильберт, К. Гедель, А. Тарский, А. Черч.

В современной логике логические процессы изучаются путем их отображения в формализованных языках или логических исчислениях. Построение исчисления отличается особой тщательностью, с которой формулируются его синтаксические и семантические правила, отсутствием исключений, характерных для естественного языка. Исследованием формального строения логических исчислений, правил образования и преобразования занимается логический синтаксис. Отношения между исчислениями и содержательными областями, служащими их интерпретациями или моделями, исследуются логической семантикой. Современная логика слагается из большого числа логических систем, описывающих отдельные фрагменты, или типы содержательных рассуждений.

Математическая логика и теория алгоритмов должна сформировать у обучающихся целостное и ясное представление о том, какими методами им следует действовать, чтобы «математизировать» задачи, с которыми им придётся сталкиваться в своей жизни и профессиональной деятельности, и найти для них своевременное и адекватное решение, чтобы вместо «изобретения велосипеда» уверенно «стоять на плечах гигантов». Помочь обучающимся в этом должен метод другого выдающегося логика – Рене Декарта. Метод радикального сомнения Декарта заключается в том, чтобы подвергнуть сомнению всё, что только возможно. Задачник так и составлен, чтобы для решения задач обучающемуся пришлось бы поставить под сомнение возникающие у него вопросы, а пройдя через сомнение сформировать абсолютную уверенность в том, как надо решать подобные задачи, тем самым, математическая логика и теория алгоритмов станет путеводной «нитью Ариадны».

Математическая логика абсолютно необходима для решения любых задач, имеющих отношение к разработке аппаратной части электронно-вычислительной техники, программному обеспечению, средств связи – проводной, оптической и радиосвязи, периферийных устройств. Разработка аппаратной части сводится к декомпозиции задачи и реализации составных частей в виде отдельных вентилей комбинаторной логики, триггеров, конечных автоматов, объединяемых в процессоры, ячейки памяти, порты ввода-вывода, периферийные устройства и каналы связи, а реализация программного обеспечения включает в себя декомпозицию задач и реализации их в виде алгоритмов.

Решать задачи необходимо по порядку, начиная с самых первых. Последовательность задач дана в предположении, что обучающиеся будут их решать в заданном порядке, поскольку решение последующих задач требует ясного понимания принципов, закрепляемых предыдущими задачами. Для самоконтроля большинство задач снабжены ответами, решениями или указаниями, приведенными в конце задачника

1. Булевы функции

1° *Булевой (или логической) функцией* от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется функция $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, т.е. булева функция ставит в соответствие произвольному набору $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ нулей и единиц значение $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in \{0,1\}$. Если булева функция принимает значение только 1(или 0) на всех наборах значений переменных, то такая функция называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*).

2° Булеву функцию можно задать *таблицей истинности*, в которой каждой строке из n нулей и единиц значение булевой функции.

Таблицы истинности для основных логических операций (связок) – отрицание (¬), конъюнкция (&), дизъюнкция (∨), импликация (→), эквиваленция (~) приведены ниже.

x	y	$\neg x$	$x \& y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \sim y$
0	0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Таблицы истинности для логических функций: *штрих Шеффера* $(x \mid y) \equiv \neg(x \& y)$, *стрелка Пирса* $(x \downarrow y) \equiv \neg(x \vee y)$, *кольцевая сумма* $(x \oplus y) \equiv \neg(x \sim y)$.

x	y	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	**1**	**1**	**0**
0	1	**1**	**0**	**1**
1	0	**1**	**0**	**1**
1	1	**0**	**0**	**0**

3° Любая логическая переменная является логической формулой. Если α и β – логические формулы, то выражения $\neg(\alpha)$, $(\alpha * \beta)$, где * – знак логической операции, являются формулами; никаких других способов построения логических формул нет.

Формула G называется *подформулой* формулы F, если G является частью F. Например, для формулы $F = x_1 \sim (x_1 \& x_2 \to x_3)$ формула $G = x_1 \& x_2$ является подформулой.

Любая формула, кроме переменной, по определению должна быть заключена в наружные круглые скобки. Для упрощения чтения формул приняты некоторые соглашения относительно расстановки скобок: внешние скобки не пишутся и) логические операции наделяются приоритетом (здесь операции перечислены в порядке убывания приоритета ¬, |, ↓, &, ∨, →, ~, ⊕). Тогда скобки в формулах ставятся только тогда, когда требуется изменить последовательность выполнения операций.

4° Формулы F и G называются *равносильными* ($F \equiv G$), если формулы реализуют одну и ту же булеву функцию (т.е. на всех наборах переменных их значения истинности совпадают).

Закон двойного отрицания	$\neg\neg x \equiv x$	
Законы коммутативности	$x \,\&\, y \equiv y \,\&\, x$	$x \vee y \equiv y \vee x$
Законы ассоциативности	$x \,\&\, (y \,\&\, z) \equiv (x \,\&\, y) \,\&\, z$	
	$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$	
Законы дистрибутивности	$x \vee (y \,\&\, z) \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$	
	$x \,\&\, (y \vee z) \equiv (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$	
Законы идемпотентности	$x \,\&\, x \equiv x$	$x \vee x \equiv x$
Законы де Моргана	$\neg(x \,\&\, y) \equiv \neg x \vee \neg y$	$\neg(x \vee y) \equiv \neg x \,\&\, \neg y$
Законы нуля и единицы	$x \vee 1 \equiv 1$	$x \,\&\, 0 \equiv 0$
	$x \vee 0 \equiv x$	$x \,\&\, 1 \equiv x$
Закон противоречия	$x \,\&\, \neg x \equiv 0$	
Закон исключенного третьего	$x \vee \neg x \equiv 1$	
Замена импликации	$x \to y \equiv \neg x \vee y$	
Замена эквиваленции	$x \sim y \equiv (x \to y) \,\&\, (y \to x)$	

5° Пусть даны формулы $F(y_1, y_2,..y_m)$, $f_1(x_1, x_2,...,x_n)$, $f_2(x_1, x_2,...,x_n)$, …, $f_m(x_1, x_2,...,x_n)$ Тогда *подстановкой* формул f_i, $i = 1,2,...,m$ в формулу F называется следующая конструкция:

$$(F \mid y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2,...,x_n) = F(f_1(x_1,...,x_n), f_2(x_1,...,x_n),..., f_m(x_1,...,x_n)).$$

Нетрудно показать, что подстановка формул также является формулой, т.е. вместо некоторой подформулы в формулу может быть подставлена другая формула, и в результате получится правильно построенная формула.
Для получения равносильных формул используют равносильности из таблицы и два правила.
Правило подстановки. Если в равносильных формулах $F(y_1, y_2,..., y_n)$ и $G(y_1, y_2,..., y_n)$ вместо всех вхождений некоторой переменной y_i подставить одну и ту же формулу, то получатся равносильные формулы.

Правило замены. Если в формуле F заменить некоторую подформулу f на равносильную g, то получится равносильная F формула.

6° Пусть $f(x_1, x_2,...,x_n)$ – булева функция от n переменных. Функция $f^*(x_1, x_2,...,x_n) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2,..., \neg x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2,...,x_n)$. Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f, то такая функция f называется *самодвойственной*.
Теорема (общий принцип двойственности).

Если формула $G(x_1,...,x_n)$ *получена подстановкой формул* f_i *из* $F(y_1,...,y_m)$*,*
т.е. $G(x_1,...,x_n)=(F\,|\,y_i\leftarrow f_i)(x_1,x_2,...,x_n)$*, то*
$G^*(x_1,...,x_n)=(F^*|\,y_i\leftarrow f_i{}^*)(x_1,x_2,...,x_n)$.

Теорема (принцип двойственности для булевых формул).
Двойственная формула к булевой формуле может быть получена заменой констант 0 *на* 1*,* 1 *на* 0*, дизъюнкции на конъюнкцию, конъюнкции на дизъюнкцию и сохранением структуры формулы (т.е. соответствующего исходному порядку действий).*

Задачи и упражнения

В задачах 1-3 упростить запись формулы (убрать лишние скобки):

1. $((((x\,\&\,y)\,\&\,(\neg z))\vee t)\rightarrow((x\vee(\neg y))\,\&\,x))$

2. $((((x\vee y)\,\&\,(\neg(z\vee x)))\rightarrow(x\,\&\,(\neg y)))\rightarrow((x\,\&\,(\neg y))\sim t))$

3. $((\neg((x\vee y)\,\&\,z)\vee((x\downarrow t)\,|\,y))\rightarrow(x\,\&\,((\neg z)\sim(x\,\&\neg y)))\rightarrow t))$

В задачах 4-6 расставить скобки в формуле в соответствии с приоритетом выполнения операций:

4. $x\oplus y\sim\neg z\rightarrow u\vee v\,\&\,w\downarrow x\,|\,y\rightarrow x\,\&\,z$

5. $x\oplus y\,\&\neg z\vee u\vee v\,|\,w\rightarrow x\,|\,y\,\&\,z\sim x\,\&\,z\vee\neg y\,\&\,x$

6. $x\,\&\,y\,\&\neg z\vee u\downarrow v\,\&\,w\oplus x\vee y\,\&\,z\sim\neg(x\,\&\,z)\vee x\rightarrow y$

7. Выписать все подформулы формул из задач 4-6.

8. Определить число различных булевых функций от n переменных.

9. Определить число различных булевых функций от 3 переменных, которые истинны только на двух наборах значений переменных.

10. Определить число различных булевых функций от 3 переменных, которые на наборах (1, 0, 1) и (1,1,0) имеют противоположные значения.

11. Определить число различных булевых функций от 4 переменных, которые не более, чем на трех наборах, принимают истинные значения.

В задачах 12-17 составить таблицы истинности для формул:

12. $x\rightarrow(y\vee x)$

13. $(x\rightarrow y)\rightarrow z$

14. $x\sim(y\sim z)$

15. $(x\rightarrow(y\vee z))\rightarrow(\neg x\,\&\,(\neg y\,\&\neg z))$

16. $(x\sim\neg(y\vee z))\sim(x\sim(y\vee z))$

17. $(x\sim y)\rightarrow(((y\sim z)\rightarrow(z\rightarrow x))\rightarrow(x\sim z))$

18. Выяснить, какие из формул а – е равносильны:

а. $x \vee y \& \neg z \& u \downarrow v \& w \oplus x \to y \vee z \sim x \& z \vee x$

б. $x \vee (y \& \neg z \& u) \downarrow v \& w \oplus x \to (y \vee z) \sim x \& z \vee x$

в. $x \vee (y \& \neg z) \& u \downarrow v \& w \oplus (x \to (y \vee z)) \sim (x \& z) \vee x$

г. $(x \vee y \& \neg z \& u \downarrow (v \& w) \oplus x) \to y \vee z \sim (x \& z) \vee x$

д. $((x \vee y \& \neg z \& u \downarrow v \& w \oplus x) \to y \vee z) \sim (x \& z \vee x)$

е. $(x \vee y \& \neg z \& u \downarrow v \& w \oplus x) \to (y \vee z) \sim (x \& z) \vee x$

В задачах 19-24 доказать тождества, применяя равносильные преобразования

19. $x \vee y \equiv \neg(\neg x \& \neg y)$

20. $x \to y \equiv \neg y \to \neg x$

21. $x \& (\neg x \vee y) \equiv x \& y$

22. $x \vee \neg x \& y \equiv x \vee y$

23. $(x \vee y) \& (x \vee \neg y) \equiv x$

24. $x \& (x \vee y) \equiv x$

В задачах 25-27 доказать тождественную истинность формул, применяя равносильные преобразования

25. $x \to (y \to x \& y)$

26. $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x)$

27. $(x \to z) \& (y \to z) \to (x \vee y \to z)$

В задачах 28-31 записать логическую функцию в виде булевой формулы (т.е. формулы, содержащей только связки ¬, &, ∨)

28. $f(x, y, z) = (z \vee y \to y) \& (x \& y) \to y \oplus x \downarrow y \& x$

29. $f(x, y) = (x \vee \neg y \to y) \& (\neg x \vee y) \to (x \mid y \& x \oplus y)$

30. $f(x, y) = (\neg(x \& y) \sim \neg x \vee y) \to (x \oplus y)$

31. $f(x, y) = \neg((x \to y) \sim (\neg y \to \neg x)) \oplus x \downarrow \neg y \to x \vee y$

В задачах 32-38 для заданной логической функции найти двойственную:

32. $f(x, y, z) = \neg(x \vee y) \& (x \vee \neg(y \& z))$

33. $f(x, y, z) = x \& (\neg y \vee z)$

34. $f(x, y) = (\neg x \vee y) \& (x \vee \neg y)$

35. $f(x, y) = \neg x \& y \vee x \& \neg y$

36. $f(x, y, z) = x \& y \vee x \& z$

37. $f(x,y,z)=x\,\&\,(\neg y\vee z)$

38. $f(x,y)=(x\rightarrow y)\,\&\,(x\vee\neg y)$

В задачах 39-41 проверить самодвойственность функции:

39. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\neg x_1\neg x_2x_3\vee x_1\neg x_2\neg x_4\vee\neg x_2\neg x_3x_4\vee x_1x_2x_3x_4\vee\neg x_1x_2\neg x_3\neg x_4$

40. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\neg x_2\,\&\,(x_1\vee\neg x_3\vee\neg x_4)\vee x_1\,\&\,\neg x_3\,\&\,\neg x_4$

41. $f(x,y,z)=\neg(x\,\&\,y\,\&\,z)\vee x\,\&\,y\,\&\,\neg z\vee x\,\&\,\neg y\,\&\,z\vee\neg x\,\&\,y\,\&\,z$

2 Нормальные формы

1° *Элементарная дизъюнкция* (*конъюнкция*) – дизъюнкция (конъюнкция) переменных или их отрицаний. Формула логической функции в *нормальной форме*, если формула представлена как конъюнкция элементарных дизъюнкций (*конъюнктивная нормальная форма КНФ*) или как дизъюнкция элементарных конъюнкций (*дизъюнктивная нормальная форма ДНФ*). В таких формулах отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, а знаки отрицания находятся только при переменных. Как ДНФ, так и КНФ логической функции не всега единственна.
Теорема. *Для любой формулы F существует равносильная формула G (F≡G) в дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме.*

2° ДНФ (КНФ) называется *совершенной*, если каждая переменная формулы входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз.
Теорема. *Для всякой не тождественно ложной формулы алгебры логики существует равносильная ей СДНФ и притом единственная с точностью до перестановок элементарных конъюнкций в дизъюнкции и переменных в элементарных конъюнкциях.*
Теорема. *Для всякой не тождественно истинной формулы алгебры логики существует равносильная ей СКНФ и притом единственная с точностью до перестановок элементарных дизъюнкций в конъюнкции и переменных в элементарных дизъюнкциях.*

3° *Контактная цепь* (схема) – это устройство из проводов и контактов, связывающих два полюса. Любой контакт может быть либо замкнут, либо разомкнут. Контакты обозначаются $x_1, x_2, \ldots,$ при этом

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если контакт разомкнут} \\ 1, & \text{если контакт замкнут.} \end{cases}$$

Контактной схеме соответствует некоторая булева функция, которая принимает значение 1, если контур между двумя полюсами замкнут, и 0 – в противном случае. Основные операции булевой алгебры можно реализовать с помощью последовательного и параллельного соединения контактов (см. рисунок 1).

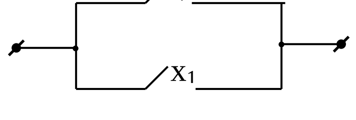
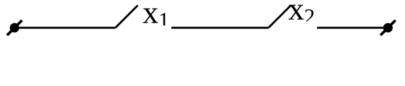
Схема	**Булева операция**
	$x_1 \vee x_2$
	$x_1 \,\&\, x_2$
	$\neg x_1$

Рис. 1. Соответствие контактных схем и логических связок

Задачи и упражнения

В задачах 42-51 заданные формулы привести равносильными преобразованиями к ДНФ и КНФ

42. $x \to (y \to z)$

43. $\neg(x \,\&\, y) \vee (x \to y)$

44. $(x \sim y) \sim z$

45. $(x \vee y) \,\&\, (y \vee z) \to (x \vee z)$

46. $x \to y \& z \& t$

47. $x \vee y \,\&\, z$

48. $(z \to y \,\&\, x) \vee (y \to z)$

49. $(z \sim x) \to (x \,\&\, y \vee z \,\&\, x \vee y \,\&\, z)$

50. $(x \sim y) \vee x \,\&\, z$

51. $(x \,\&\, y) \to (x \sim y)$

52. Найти СКНФ и СДНФ для конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции.

В задачах 53-57 привести логические формулы к СДНФ и СКНФ равносильными преобразованиями:

53. $x \to (y \to x)$

54. $(x \vee y) \,\&\, (y \vee z) \,\&\, (x \sim z)$

55. $x \vee y \vee z \to (x \vee y) \,\&\, z$

56. $x \,\&\, y \,\&\, z$

57. $x \to y \,\&\, z$

В задачах 58-65 найти СДНФ и СКНФ для функций с помощью таблицы истинности:

58. $f(x, y, z) = x \vee \neg x \,\&\, y \vee y \,\&\, z$

59. $f(x, y, z) = x \vee \neg y \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, y \,\&\, z \vee x \,\&\, \neg y$

60. $f(x, y, z) = \neg(x \,\&\, y \vee y \,\&\, z) \,\&\, \neg(x \,\&\, y)$

61. $f(x, y, z) = (x \vee z) \to \neg(y \,\&\, z)$

62. $f(x, y, z) = (x \to \neg(y \vee z)) \vee x$

63. $f(x, y, z) = \neg(x \,\&\, \neg y) \sim (x \vee \neg z)$

64. $f(x,y,z) = \neg(x \to y)\,\&\,(z \vee x)$

65. $f(x,y,z) = (\neg x \vee \neg y) \to (z \to x)$

В задачах 66-68 записать в виде формулы булеву функцию от 3 переменных, которая:

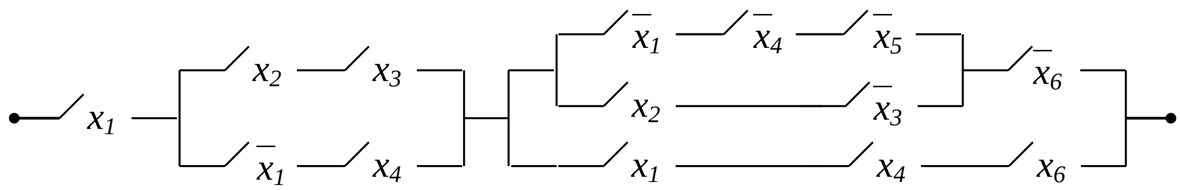
66. истинна только на наборах значений переменных (1,0,1) и (0,0,0);

67. истинна только на наборах значений переменных с четным числом единиц;

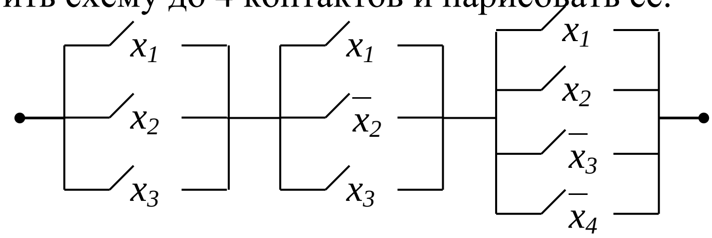
68. ложна только на наборах значений переменных (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0).

69. Составить контактные схемы для функций, заданных в задачах 58-68.

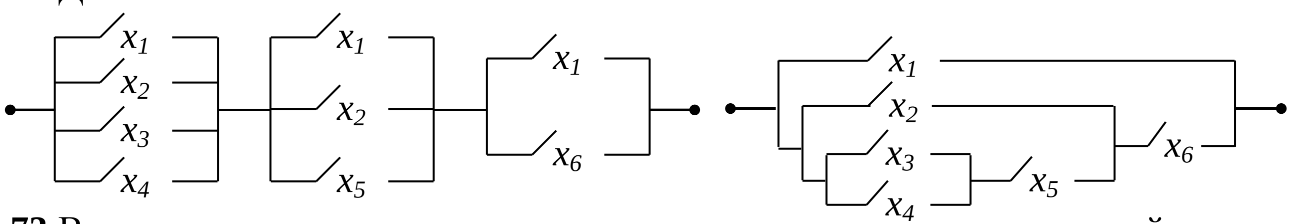
70. Упростить схему до 5 контактов и нарисовать ее:



71. Упростить схему до 4 контактов и нарисовать ее:



72. Доказать эквивалентность схем:



73. В подъезде трехэтажного дома на каждом этаже имеется кнопочный выключатель, которым можно включать/выключать свет в подъезде. Нажатие любого из выключателей должно менять состояние света на противоположное – свет гаснет, если до этого горел, и загорается, если был выключен. Построить контактную схему соединения этих выключателей.

74. По установленному сигналу каждый игрок замыкает или размыкает выключатель, находящийся под его управлением. Если оба игрока делают одно и то же, то выигрывает первый, если разное – то второй. Построить схему так, чтобы в случае выигрыша первого игрока загоралась лампочка.

75. Комиссия из пяти человек принимает решение большинством голосов, и решение не принимается, если председатель голосует «против», даже при большинстве голосов «за». Построить схему, в которой голосование «за» производится нажатием кнопки и в случае принятия решения загорается сигнальная лампочка.

3 Полнота системы булевых функций

1° Система функций $F=\{f_1, f_2,\ldots,f_k\}$ называется *полной*, если любая логическая функция может быть выражена через функции системы F с помощью подстановок.

Система функций $\{\neg,\&,\vee\}$ – полная, поскольку любая логическая функция может быть представлена в нормальной форме. Из этой системы можно удалить конъюнкцию, выразив через отрицание и дизъюнкцию $x\,\&\,y=\neg x\vee\neg y$

.

2° Булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ представлена в виде *полинома Жегалкина* от n переменных, если $f(x_1,\ldots,x_n)=\bigoplus\limits_{\{i_1,i_2,\ldots i_m\}\subseteq I} a_{i_1 i_2\ldots i_m} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}$,

где коэффициенты полинома $a_{i_1 i_2\ldots i_m}\in\{0,1\}$ индексированы всеми возможными подмножествами множества $I=\{1,2,\ldots,n\}$. Между коэффициентами и переменными стоит конъюнкция, которая опущена для сокращения длины формулы.

Утверждение. *Полином Жегалкина для любой булевой функции определен однозначно.*

Система функций $\{1,\&,\oplus\}$ называется базисом Жегалкина и является полной системой функций.

3° Логическая функция f *сохраняет константу* 0, если $f(0,0,\ldots,0)=0$. Функцию f называют *функцией, сохраняющей константу* 1, если $f(1,1,\ldots,1)=1$. Множество всех функций, сохраняющих константу 0, обозначим T_0, а множество всех функций, сохраняющих константу 1, – T_1.

Двойственной к булевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется функция $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\neg f(\neg x_1,\neg x_2,\ldots,\neg x_n)$. Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f, то такая функция f называется *самодвойственной*.

Логическая функция f *монотонная*, если для любых двух наборов значений переменных α, β таких, что $\alpha\le\beta$, $f(\alpha)\le f(\beta)$. Множество всех монотонных функций принято обозначать через M .

Функция f *линейная*, если f представима в виде полинома Жегалкина первой степени, т.е. $f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\ldots\oplus a_nx_n\oplus a_0$. Множество всех линейных функций обозначают через L.

Множества функций T_0, T_1, S , M , L называются *классами Поста*.

4° Множество булевых функций F называют *замкнутым*, если любая подстановка (сложная функция) функций из F также принадлежит F .

Теорема. *Каждый класс Поста замкнут*.

Критерий Поста. *Множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов Поста.*

Задачи и упражнения

В задачах 76-78 показать полноту системы логических функций сведением к заведомо полной системе $\{\neg, \&\}$:

76. $\{x_1 \downarrow x_2\}$

77. $\{x_1 \mid x_2\}$

78. $\{x_1 \to x_2, \neg(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)\}$

В задачах 79-81 записать в виде многочлена Жегалкина логическую функцию от 3 переменных, которая:

79. истинна только на наборах значений переменных (1,0,1) и (0,0,0)

80. истинна только на наборах значений переменных с четным числом единиц

81. ложна только на наборах значений переменных (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0)

В задачах 82-87 определить принадлежность заданной логической функции классам Поста.

82. $x_1 \to x_2$

83. $x_1 \vee x_2$

84. $x_1 \downarrow x_2$

85. $x_1 \mid x_2$

86. $x_1 \sim x_2$

87. $x_1 \oplus x_2$

В задачах 88-92 привести пример логической функции, которая:

88. принадлежит всем классам Поста

89. не принадлежит никакому классу Поста

90. является линейной и самодвойственной

91. является монотонной и самодвойственной

92. является монотонной и линейной

93. Доказать замкнутость классов Поста T_0, T_1, M, L, S.

В задачах 94-99 определить количество логических функций от n переменных во множествах:

94. $T_0 \cap T_1$

95. $T_0 \cap T_1 \cap S$

96. $L \cap S$

97. $M \cap L$

98. $M \cap L \cap S$

99. $M \setminus (T_0 \cap T_1)$

В задачах 100-104 проверить полноту систем логических функций, используя критерий Поста.

100. $\{x_1 \to x_2, x_1 \,\&\, x_2\}$

101. $\{x_1 \to x_2, x_1 \vee x_2\}$

102. $\{x_1 \to x_2, 0, 1\}$

103. $\{(01101001), (10001101), (00011100)\}$

104. $\{(1011), (1111110011000000)\}$

105. Выразить через суперпозицию функций полных систем из задач 100-104 константы 0 и 1, отрицание, конъюнкцию.

В задачах 106-108 проверить являются ли базисами следующие полные системы:

106. $\{x_1 \to x_2, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}$

107. $\{1, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \oplus x_2\}$

108. $\{0, 1, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$

109. Доказать, что максимально возможное число булевых функций в базисе – четыре.

4 Формулы логики высказываний

1° *Высказывание* это фраза (предложение), которая истинна или ложная. Не всякое предложение может быть истинным или ложным, а значит, быть высказыванием. В *логике высказываний* важно не содержательный смысл высказывания, а истинность или ложность высказывания. Истинностное значение – истина или ложь – будут обозначаться И и Л соответственно.

2° Для соединения высказываний в более сложные высказывания используют *логические операции* (*связки*).

Отрицанием высказывания A называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. В естественном языке отрицание $\neg A$ соответствует следующим конструкциям:

- не A;
- A не имеет места;
- не верно A.

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. В естественном языке конъюнкция $A \& B$ соответствует следующим конструкциям:

- A и B;
- не только A, но и B;
- B, хотя и A;
- как A, так и B;
- A вместе с B;
- A, в то время как B.

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. В естественном языке дизъюнкция $A \vee B$ соответствует следующим конструкциям:

- A или B, или оба;
- A или B;
- A, если не B;
- A и/или B

Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. В естественном языке импликация $A \to B$ соответствует следующим конструкциям:

- если A, то B;
- в случае A имеет место B;
- для B достаточно A;
- для A необходимо B;
- B, если A;
- A, потому что B

Эквиваленцией двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения A и B совпадают. В естественном языке эквиваленция $A \sim B$ соответствует следующим конструкциям:

- A, если и только если B;

- если *A*, то *B*, и обратно;
- *A*, если *B*, и *B*, если *A;*
- для *A* необходимо и достаточно *B;*
- *A* равносильно *B;*
- *A* тогда и только тогда, когда *B.*

3° Алфавит логики высказываний содержит заглавные латинские букв для обозначения *высказывательных переменных,* логические символы, символы скобок (,).

Последовательность символов алфавита логики высказываний называется *формулой,* если она удовлетворяет следующему определению:

1. Любая высказывательная переменная – формула.
2. Если A и B – формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \sim B)$, $\neg A$ –формулы.
3. Других формул нет.

Для упрощения записи вводится приоритет операций ($\neg$, &, $\vee$, ~, →) и лишние скобки опускаются**.**

4° Любую формулу логики высказываний можно интерпретировать как формулу логики булевых функций. По аналогии с булевыми функциями для любого высказывания можно построить таблицу истинности. Все свойства формул булевых функций сохраняются и для формул логики высказываний.,

Формула F называется *тавтологией* (тождественно-истинной формулой), если при любых значениях (интерпретации) переменных она принимает истинное значение. Формула F называется *противоречием* (тождественно ложной формулой), если при любых значениях переменных списка формула принимает ложное значение. Формула F называется *выполнимой*, если при некоторой интерпретации значений переменных F принимает истинное значение. Формула F называется *опровержимой*, если при некоторых значениях переменных формула принимает ложное значение.

5° Формула G *логически следует* из формулы F $(F \Rightarrow G)$, если формула G принимает истинное значение при всех интерпретациях, при которых формула F принимает истинное значение. Формулы F и G *логически эквивалентны* $(F \equiv G)$, если они являются логическим следствием друг друга. Логически эквивалентные формулы имеют одинаковые логические значения при любой интерпретации переменных.

Задачи и упражнения

110. Являются ли следующие предложения высказываниями?

а. Новосибирск расположен на берегах реки Оки.
б. Завтра будет дождь.
в. Вступайте в профсоюз!

г. 3<5.
д. Физику я, скорее всего, не сдам.
е. Береза и осина являются вечнозелеными растениями.
ж. Я лгу

В задачах 111-116 проверить являются ли следующие выражения формулами логики высказываний

111. $X \to (Y \vee X)$

112. $(X \to Y) \to Z$

113. $X \sim (Y \sim Z)$

114. $(X \to (Y \vee Z)) \to (\neg X(\neg Y \wedge \neg Z))$

115. $(X \sim \neg Y \vee Z)) \sim (X \sim (Y \vee Z))$

116. $(X \sim Y) \to (((Y \sim Z) \to (Z \to X) \to (X \sim Z))$

В задачах 117-124 используя определение, проверить являются ли формулами логики высказываний выражения

117. $(A \& B) C \neg D$

118. $(A \& B) \to C$

119. $(A \to B) \to (C \to D)$

120. $(((\neg A) \to D) \to C)$

121. $((A \to C) \& \to (A \vee B))$

122. $\& (A \& B) C \neg D$

123. $(A \& \to B) \to C$

124. $(A \to \neg B) \to (C \to \neg D)$

В задачах 125-129 выяснить сколькими способами можно расставить скобки, чтобы выражение было формулой логики высказываний

125. $A \to B \vee \neg B \& C$

126. $A \to B \to C \to \neg A \to \neg B$

127. $\neg B \to \neg A \to A \to C$

128. $\neg B \to A \to \neg A \vee B$

129. $A \to C \& C \to A \vee B$

В задачах 130 - 135 определить тип формулы (тавтология, противоречие, опровержимая, выполнимая)

130. $(X \to Y) \to X$

131. $(A \to B) \to (C \to B)$

132. $(X \to Y) \& \neg X$

133. $(A \to B) \vee \neg B \& C \to B)$

134. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

135. $(A \to B) \& \neg B \& A$

В задачах 136-141 выяснить является ли формула G логическим следствием из формулы F $(F \Rightarrow G)$

136. $F = A$, $G = A \& B$

137. $F = A$, $G = A \vee B$

138. $F = A$, $G = A \to B$

139. $F = A \vee B$, $G = A \& B$

140. $F = B$, $G = A \to B$

141. $F = A \& B$, $G = A \sim B$

В задачах 142-147 доказать логическую эквивалентность формул логики высказываний построением таблиц истинности

142. $X \vee Y \equiv Y \vee X$

143. $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \& \neg Y$

144. $X \to Y \equiv \neg Y \to \neg X$

145. $X \& (\neg X \vee Y) \equiv X \& Y$

146. $X \vee \neg X \& Y \equiv X \vee Y$

147. $(X \vee Y) \& (X \vee \neg Y) \equiv X$

148. Доказать, что если формулы $A, A \to B$ тождественно истинны, формула B тождественно истинна.

149. Доказать, что $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \Rightarrow Q$ тогда и только тогда, когда $(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n) \to Q$ – тавтология $(n \geq 1)$.

150. Доказать, что $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \Rightarrow Q$ тогда и только тогда, когда $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \& \neg Q$ – противоречие $(n \geq 1)$.

151. Студенты A, B, C учатся на разных факультетах. На вопрос «Кто изучал математическую логику?» был получен верный ответ: «Если изучал A, то изучал и C, но неверно, что если изучал B, то изучал и C». Кто из студентов изучал математическую логику?

В задачах 152-154 записать рассуждение в логической символике и проверить является ли рассуждение верным

152. Я бы заплатил за работу по ремонту телевизора, только если телевизор будет работать. Телевизор не работает. Поэтому я платить не буду.

153. Он сказал, что придет, если не будет дождя. Но идет дождь. Значит, он не придет.

154. Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то четырехугольник является параллелограммом. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали делятся в точке пересечения пополам. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Следовательно, диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам.

5 Исчисление высказываний

1° Построение научной теории в виде набора аксиом (постулатов) и правил вывода, позволяющих формальным логическим путем получать утверждения (теоремы) данной теории, называется *аксиоматическим методом*. Для определения *формальной аксиоматической теории* $\mathcal{T}$, необходимо задать:

1. Алфавит теории $\mathcal{T}$, т.е. некоторое счётное множество символов (конечные последовательности символов теории $\mathcal{T}$ называются выражениями).
2. Множество формул теории $\mathcal{T}$ как подмножество выражений теории $\mathcal{T}$
3. Набор аксиом как подмножество формул теории $\mathcal{T}$
4. Правила вывода теории $\mathcal{T}$, т.е. конечное множество отношений между формулами $R_1, R_2, ..., R_m$

2° F называется *непосредственным следствием* из формул $F_1, F_2, ..., F_i$, полученным по правилу вывода R_k, если формула F и формулы $F_1, F_2, ..., F_i$ находятся в некотором отношении R_k. Обозначается это так $\dfrac{F_1, F_2, \dots F_i}{F} R_k$, при этом формулы $F_1, F_2, ..., F_i$ называются *посылками*, формула F – *заключением*. *Выводом формулы* F *из формул* $F_1, F_2, ..., F_k$ в теории $\mathcal{T}$ называется всякая последовательность формул $G_1, G_2, ..., G_i, ..., G_n$ такая, что $G_n = F$ и для любого i, $1 \le i \le n$. Формула G_i это либо аксиома теории $\mathcal{T}$, либо одна из формул F_j, $1 \le j \le k$, либо непосредственное следствие из формул G_s и G_t, $1 \le s, t < i$.

Если в теории $\mathcal{T}$ существует вывод формулы F из формул $F_1, F_2, ..., F_k$, то это записывают так: $F_1, F_2, ..., F_k \vdash_T F$, при этом формулы $F_1, F_2, ..., F_k$ называются *гипотезами вывода*. Если множество посылок в выводе формулы F пустое или $\vdash_T F$, то формула F называется *теоремой* теории $\mathcal{T}$ (т.е. выводима только из аксиом без гипотез). Вывод теоремы называется *доказательством*.

3° Исчисление высказываний $\mathcal{L}$ как формальная аксиоматическая теория задается следующим образом:

- Алфавит ИВ образуют буквы $A, B, C, ...$ и т.д. (возможно с индексами), которые называются пропозициональными переменными, логические символы (связки $\neg$, $\to$), а также вспомогательные символы скобок (,).
- Множество формул ИВ определяется индуктивно:

  все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;
  если A и B формулы ИВ, то $(\neg A)$, $(A \to B)$ – формулы ИВ;
  других формул нет.
- Аксиомы ИВ (классическое определение):

  $\mathcal{A}_1 : (A \to (B \to A))$
  $\mathcal{A}_2 : ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

$\mathcal{A}_3: ((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$

- Правило вывода в ИВ называется правилом отделения (*modus ponens*): если A и $(A \to B)$ – выводимые формулы, то B – также выводимая формула или $\dfrac{A, A \to B}{B} MP$

4° **Теорема дедукции.** *Пусть* Γ *– множество формул,* A *и* B*– формулы. Если* $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{L}} B$*, то* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \to B$ *и обратно.*

Задачи и упражнения

В задачах 155-157 укажите формулы, которые являются аксиомами исчисления высказываний.

155. $((X \to Y) \to (\neg Z \to (X \to Y)))$

156. $((\neg A \to (B \to \neg C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

157. $((\neg A \to \neg B) \to ((\neg B \to A) \to B))$

В задачах 158-161 выяснить является ли формула F непосредственным следствием двух заданных формул G_1 и G_2.

158. $F = C$, $G_1 = A \to (B \to C)$, $G_2 = A \to B$

159. $F = B \to A$, $G_1 = A \to (B \to A)$, $G_2 = A$

160. $F = B \to C$, $G_1 = A \to (B \to A)$, $G_2 = A$

161. $F = (\neg B \to A) \to B$, $G_1 = (A \to B) \to ((\neg B \to A) \to B)$, $G_2 = A \to B$

В задачах 162-164 выяснить может ли последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ быть доказательством (выводом) некоторой формулы в ИВ

162. $F_1 = A \to (A \vee B)$

163. $F_1 = A \to (A \vee B)$, $F_2 = (A \to (A \vee B)) \to (B \to (A \to (A \vee B)))$, $F_3 = B \to (A \to (A \vee B))$

164. $F_1 = A \to (B \to A)$, $F_2 = (A \to (B \to A)) \to B$, $F_3 = B$

165. Доказать производное правило вывода в ИВ (правило транзитивности) $A \to B, B \to C \vdash_{\mathcal{L}} A \to C$, где A, B, C – произвольные формулы ИВ.

166. Доказать производное правило вывода в ИВ (правило сечения) $A \to (B \to C), B \vdash_{\mathcal{L}} A \to C$, где A, B, C – произвольные формулы ИВ.

167. Доказать производное правило вывода в ИВ (правило введения импликации) $A \vdash_{\mathcal{L}} (B \to A)$, где A, B – произвольные формулы ИВ.

В задачах 168-179 построить в исчислении высказываний вывод формулы

168. $\vdash A \to A$

169. $\vdash \neg\neg A \to A$

170. $\vdash A \to \neg\neg A$

171. $\vdash A \to (A \to B)$

172. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

173. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

174. $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

175. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

176. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$

177. $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$

178. $\vdash (\neg B \to \neg C) \to ((\neg C \to \neg A) \to (A \to B))$

179. $\vdash (A \to (\neg B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to \neg C))$

180. Записать рассуждение в логической символике и проверить правильность рассуждения построением вывода:

> Если все стороны четырехугольника равны между собой, то четырехугольник является ромбом. Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны. Все стороны четырехугольника равны между собой.
>
> Следовательно, диагонали четырехугольника перпендикулярны.

181. Записать рассуждение в логической символике и проверить правильность рассуждения построением вывода:

> Если число делится на 16, то оно делится на 8. Если число делится 8, то оно делится на 4. Данное число делится на 16.
>
> Значит, данное число делится на 4.

6 Методы проверки выводимости формул в исчислении высказываний

1° Следующая теорема, доказанная Постом, устанавливает взаимосвязь между тождественной истинностью и доказуемостью формулы.

Теорема (Пост, 1921). *Формула F является теоремой исчисления высказываний тогда и только тогда, когда F – тавтология.*

Таким образом, для проверки выводимости формулы в исчислении высказываний достаточно проверить тождественную истинность этой формулы, что можно сделать за конечное число шагов, т.е. исчисление высказываний является разрешимой теорией.

2° *Тривиальный метод* проверки выводимости заключается в проверке значений формулы при всевозможных значениях (интерпретациях) ее переменных. Однако при большом количестве переменных такой метод становится очень громоздким.

Метод Куайна проверки тождественной истинности формулы представляет собой модификацию тривиального метода. Выполняется подстановка логической константы вместо некоторой переменной X в проверяемую формулу F, далее применяются логические равносильности с подставленной логической константой. После выполнения преобразовани й получена формула F' с меньшим количеством переменных, к которой опять можно применить описанную процедуру подстановки. Если на каком-то шаге получена тавтология или противоречие, то процедуру проверки на этом шаге можно остановить. Таким образом, можно установить, что формула является тавтологией либо что существует набор переменных, на котором формула принимает ложное значение. Обычно метод Куайна требует проверки меньшего количества интерпретаций, чем тривиальный метод.

3° Рассмотрим *метод редукции* распознавания тождественно истинных формул в исчислении высказываний. Если формула F имеет вид импликации $F = A \to B$ и $F = 0$, то $A = 1$, $B = 0$. Таким образом, проверка формулы F сводится к проверке формул A и B. После этого данный процесс применяется к формулам A и B и продолжается до тех пор, пока не будет получено противоречие с начальным предположением о ложности формулы. В этом случае доказано, что формула F является тавтологией. В противном случае будет определен набор значений переменных, на котором формула F принимает ложное значение.

3° Наиболее известный классический алгоритм проверки выводимости формул в ИВ называется *методом резолюций*. В основу метода резолюций положена следующая теорема (доказательство от противного).

Теорема (доказательство от противного). *Если* $\Gamma, \neg A \vdash_{\mathcal{L}} B$, *где* B *– любое противоречие, то* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A$.

В качестве формулы B при доказательстве от противного по методу резолюций принято использовать пустую формулу, которую будем обозначать $\varnothing$

. Пустая формула не имеет никакого значения и не является истинной ни при какой интерпретации и по определению является противоречием. Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые будем называть *предложениями*. Предложение – это дизъюнкция литералов (переменных или их отрицаний). Любая формула исчисления высказываний может быть преобразована во множество предложений. Для этого сначала формула приводится к КНФ, а затем конъюнкция дизъюнкций литералов разбивается на множество предложений.

Пусть A и B – два предложения, которые имеют следующий вид $A = P \vee A_1$ и $B = \neg P \vee B_1$, где P – переменная, а A_1, B_1 – любые предложения (в частности, может быть пустые или состоящие только из одного литерала). Правило вывода $\dfrac{A, B}{A_1 \vee B_1} R$ называется *правилом резолюции*. Предложения A и B называются *резольвируемыми* (или родительскими), предложение $A_1 \vee B_1$ – *резольвентой*, а формулы P, $\neg P$ – *контрарными* литералами.

Пусть нужно установить выводимость $\Gamma \vdash_{\pounds} F$, что равносильно доказательству выводимости $\Gamma, \neg F \vdash_{\pounds} \varnothing$. Сначала каждая формула множества гипотез Γ и формула $\neg F$ независимо преобразуются во множества предложений. В полученном совокупном множестве предложений S отыскиваются резольвируемые предложения, к ним применяется правило резолюции и полученная резольвента пополняет множество предложений S. После чего процедура резольвирования повторяется. При этом возможны две ситуации:

- Среди предложений множества S нет резольвируемых предложений или нельзя получить новую резольвенту с помощью резольвирования. Тогда теорема опровергнута или формула F не выводима из множества формул Γ.
- После очередного применения правила резолюции получено пустое предложение. Тогда теорема доказана или $\Gamma \vdash_{\pounds} F$.

Задачи и упражнения

В задачах 182-192 проверить выводимость формул в исчислении высказываний методом Куайна и методом редукции

182. $(A \to B) \vee (B \to A)$

183. $(A \to B) \vee (B \to \neg A)$

184. $A \to (B \to (A \& B))$

185. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

186. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

187. $C \to ((A \to (C \to B)) \to (A \to B))$

188. $(A \to \neg C) \to (A \to (B \to \neg C))$

189. $C \to (\neg A \to ((\neg B \to A) \to B))$

190. $(A \to C) \to (A \to (B \to C))$

191. $C \to ((A \to B) \to (A \to \neg\neg A))$

192. $(A \to C) \to ((B \to A) \to (B \to C))$

193. Доказать, что правило резолюции логично, т.е. резольвента является логическим следствием резольвируемых предложений.

В задачах 194-199 проверить выводимости в ИВ различными методами

194. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

195. $\neg A \to B, A \to C \vdash \neg B \to C$

196. $\neg A \to B, A \to C, B \to D \vdash \neg C \to D$

197. $A \to B, C \to \neg B \vdash A \to \neg C$

198. $A \& B, C \to (A \sim B) \vdash A \vee \neg C$

199. $A \to C, \neg(B \to C) \vdash A$

В задачах 200 - 214 записать в логической символике и проверить правильность рассуждения

200. Я высыпаюсь, только когда мне ничего не надо делать. Если я свободен, то я иду гулять. Значит, я не высплюсь.

201. Если человек занимается спортом, то у него хороший аппетит. Когда у человека хороший аппетит, он много ест. Этот человек много ест. Значит, он занимается спортом.

202. Я люблю вкусно поесть после стресса. Если я вкусно поем, то мне приходится делать физические упражнения. После физических упражнений у меня стресс. Значит, у меня всегда стресс.

203. Я могу сварить суп, если у меня есть овощи и вода. Если магазин закрыт, то у меня не будет овощей. Магазин открыт, но воду отключили. Значит, суп я не смогу сварить.

204. Если кошка мяукает, то она либо голодная, либо хочет в комнату. Кошка сытая и сейчас мяукает. Значит, она хочет в комнату.

205. Если на улице тепло, то я сяду в кабриолет. Если я сяду в кабриолет, то уеду куда-нибудь. На улице – холодно. Значит, я никуда не поеду.

206. Если он с утра выучил уроки, то потом весь день свободен. У него хорошее настроение тогда и только тогда, когда он выучил уроки. У него хорошее настроение. Значит, у него есть свободное время.

207. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

208. Если к власти придет Кощей Бессмертный, то будет война. Если будет война, то все пойдут воевать и в стране будет голод. Если заграница нам поможет, то голода не будет. Значит, если к власти придет Кощей Бессмертный, то и заграница не поможет.

209. Если бы он учился в университете, он был бы умным. Он учится тогда и только тогда, когда ему хочется. Сейчас ему не хочется. Значит, он глупый.

210. Если человек счастлив, то у него есть кот и горячий шоколад. Если кота нет, то человек не счастлив. Следовательно, если у человека нет горячего шоколада, то он несчастлив.

211. Человек, обедающий в кафе быстрого питания, голоден и куда-то торопится. Человек не обедает в кафе быстрого питания, хотя и очень торопится. Значит, он не голоден.

212. Наша футбольная команда либо выигрывает матч, либо проигрывает, либо сводит его к ничьей. Если матч выигран или проигран, то он не перенесён. Команда матч не выиграла и не свела его к ничьей. Следовательно, матч не перенесён и проигран.

213. Если Паша ляжет поздно спать, то он опоздает в школу. Если он заснет рано, то он не успеет сделать домашнее задание. Следовательно, или Паша завтра опоздает в школу, или он не успеет сделать домашнее задание.

214. Если студент завел будильник и приготовился к занятиям, то он пойдет в университет к первой паре. Студент забыл завести будильник и не пошел к первой паре. Значит, студент не приготовился к занятиям.

7 Предикаты и операции с предикатами

1° Каждое высказывание представляет собой некоторое суждение о предмете высказывания (субъекте) или взаимосвязи нескольких субъектов. Предметы (субъекты), о которых делается суждение, могут быть самой различной природы. Множество субъектов, о которых делаются высказывания, называется *предметной областью* Ω. Для обозначения субъектов используются *предметные переменные*. *Предикатом от* n *переменных* (*n-местным предикатом*) $P(x_1,...,x_i,...,x_n)$, $x_i \in \Omega$ определенным на предметной области Ω, называют отображение набора предметных переменных $x_1,...,x_n$ во множество высказываний.

2° Пусть P, Q – предикаты от n переменных, определенные на предметной области Ω. Тогда логические операции для предикатов P, Q вводятся следующим образом:

$$(\neg P)(x_1,...,x_n) := \neg(P(x_1,...,x_n))$$
$$(P \vee Q)(x_1,...,x_n) := (P(x_1,...,x_n) \vee Q(x_1,...,x_n))$$
$$(P \,\&\, Q)(x_1,...,x_n) := (P(x_1,...,x_n) \,\&\, Q(x_1,...,x_n))$$
$$(P \to Q)(x_1,...,x_n) := (P(x_1,...,x_n) \to Q(x_1,...,x_n))$$

3° Пусть Q – одноместный предикат, определенный на предметной области Ω. Если множество Ω имеет конечное число элементов, т.е. $\Omega = \{a_1,...,a_m\}$, то высказывание $A =$«Все элементы Ω обладают свойством Q» можно записать в виде конечной конъюнкции $A = Q(a_1) \,\&\, Q(a_2) \,\&\, ... \,\&\, Q(a_m)$, а высказывание A будет истинно тогда и только тогда, когда предикат Q принимает истинное значение для любого $a_i \in \Omega$. Однако в случае бесконечного множества Ω нельзя записать бесконечную конъюнкцию предикатов и в этом случае используют операцию *квантор всеобщности*.

Предикату $P(x_1,..x_n)$, определенному на предметной области Ω, ставится в соответствие $(n-1)$-местный предикат $\forall x_i P(x_1,...,x_i,...,x_n)$, который зависит от переменных $x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ и получен из исходного предиката навешиванием *квантора всеобщности.* Переменная x_i *связана* квантором всеобщности.

В естественном языке предикату $\forall x P(x)$ соответствуют фразы:

- Для любого x (имеет место) P.
- $P(x)$ при произвольном x.
- Для всех x (верно) $P(x)$.
- $P(x)$, каково бы ни было x.
- Для каждого x (верно) $P(x)$.
- Всегда имеет место $P(x)$.

- Каждый обладает свойством P.
- Свойство P присуще всем.

4° Пусть Q – одноместный предикат, определенный на предметной области Ω. Если множество Ω имеет конечное число элементов, т.е. $\Omega=\{a_1,...,a_m\}$, то высказывание $B=$«Хотя бы один элемент Ω обладает свойством Q» можно записать его в виде конечной дизъюнкции предикатов – $B=Q(a_1)\vee Q(a_2)\vee\ldots\vee Q(a_m)$. Высказывание B будет истинным, если хотя для одного элемента из предметной области предикат принимает истинное значение. Однако в случае бесконечного множества Ω нельзя записать бесконечную дизъюнкцию предикатов и в этом случае используют операцию *квантор существования*.

Пусть имеется n-местный предикат $P(x_1,..x_n)$, определенный на предметной области Ω. Предикату P поставим в соответствие $(n-1)$-местный предикат $\exists x_i P(x_1,...,x_i,...,x_n)$, который зависит от переменных $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ и получен из исходного предиката навешиванием *квантора существования.* Переменная x_i *связана* квантором существования.

В естественном языке предикату $\exists xP(x)$ соответствуют фразы:

- Для некоторых x (имеет место) $P(x)$.
- Для подходящего x (верно) $P(x)$.
- Существует x, для которого (такой, что) $P(x)$.
- Имеется x, для которого (такой, что) $P(x)$.
- Найдется x, для которого (такой, что) $P(x)$.
- У некоторых вещей есть признак P.
- Хотя бы для одного x (верно) $P(x)$.
- Кто-нибудь относится к (есть) P.
- По крайней мере, один объект есть P.

Задачи и упражнения

215. Привести примеры различных предметных областей и определенных на них предикатов различной местности.

В задачах 216-222 переведите на русский язык формулы логики предикатов и определите их истинностные значения:

На множестве натуральных чисел определены предикаты:

$P(x)$= «x – простое число»,

$E(x)$= «x – четное число»,

$O(x)$= «x – нечетное число»,

$D(x,y)$= «y делится на x».

216. $P(11)$

217. $E(2)\,\&\,P(2)$

218. $\forall x(E(x)\,\&\,D(x,6))$

219. $\forall x(\neg E(x)\to\neg D(2,x))$

220. $\forall x(E(x)\,\&\,\forall y(D(x,y)\to E(y)))$

221. $\forall x(O(x)\to\forall y(P(y)\to\neg D(x,y)))$

222. $\forall x(P(x)\to\exists y(E(y)\,\&\,D(x,y)))$

В задачах 223-232 установите истинность предикатов

На множестве натуральных чисел определены предикаты:

$A(n)=$ «n кратно 5»
$B(n)=$ «n кратно 2»
$C(n)=$ «n кратно 4»
$D(n)=$ «n кратно 10»
$E(n)=$ «n кратно 20»

223. $\forall nD(n)$

224. $\exists nE(n)$

225. $\forall n(D(n)\to A(n)\,\&\,B(n))$

226. $\exists n(A(n)\,\&\,B(n)\to C(n))$

227. $\forall n(\neg A(n)\to\neg E(n))$

228. $\exists n(A(n)\,\&\,B(n))$

229. $\forall n(A(n)\,\&\,B(n))$

230. $\forall n(A(n)\to B(n))$

231. $\forall n(B(n)\,\&\,D(n)\to E(n))$

232. $\exists n(B(n)\,\&\,C(n)\to\neg D(n))$

В задачах 233-241 установите область истинности предикатов, т.е. множество значений, где предикат принимает истинное значение.

Пусть предметная область Ω – множество вещественных чисел. На множестве Ω определены предикаты $P(x,y)="x+2y\le 10"$ и $Q(x,y)="xy=6"$.

233. $\exists xP(x,y)\vee\exists xQ(y,x)$

234. $\exists xP(x,y)\&\exists xQ(y,x)$

235. $\exists xP(x,y)\vee Q(y,x)$

236. $\exists x(P(x,y)\to Q(y,x))$

237. $\forall xP(x,y)\vee\neg Q(y,x)$

238. $\exists y(P(x,y)\,\&\,Q(y,x))$

239. $\forall xP(x,y)\vee\exists y\neg Q(x,y)$

240. $\forall x(P(x,y)\vee\neg Q(x,y))$

241. $\forall xP(x,y)\vee\exists yQ(x,y)$

Пусть предметная область Ω – множество неотрицательных целых чисел. На множестве Ω определены предикаты $S^3(x,y,z)=\text{"}x+y=z\text{"}$ и $P^3(x,y,z)=\text{"}xy=z\text{"}$. В задачах 242-257 записать предикат, определенный на Ω, с использованием предикатов $S^3(x,y,z)$ и $P^3(x,y,z)$ и логических операций, который принимает истинное значение только, если

242. $x=0$

243. $x=1$

244. $x=2$

245. x – четное число

246. x – нечетное число

247. $x=y$

248. $x\geq y$

249. $x<y$

250. x делит y

251. x – простое число

252. z – общее кратное x и y

253. z – общий делитель x и y

254. При любых x и y выполняется коммутативность сложения, то есть $x+y=y+x$

255. При любых x, y и z выполняется ассоциативность сложения, то есть $(x+y)+z=x+(y+z)$

256. Существуют x, y такие что $x+y=1$

257. Существуют x, y такие что $3x-y=0$

В задачах 258-266 записать в логической символике утверждения и их отрицания

258. Функция $f(x)$ возрастает на интервале (a_0,a_1).

259. Функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a_0, a_1).

260. Множество A является собственным подмножеством множества B.

261. Точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$.

262. Функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a_0, a_1]$ в точке x_0.

263. Бинарное отношение ρ является симметричным.

264. Функция $f(x)$ ограничена на множестве R.

265. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ самодвойственна.

266. Множества A и B не пересекаются.

В задачах 267-285 записать в логической символике утверждения с использованием заданных предикатов.

Пусть Ω – множество людей. На множестве Ω заданы следующие предикаты:

$E(x, y)$ = «x и y – один и тот же человек»
$P(x, y)$ = «x родитель y»
$C(x, y)$ = «x и y – супруги»
$M(x)$ = «x – мужчина»
$W(x)$ = «x – женщина»

267. У каждого есть отец и мать

268. У каждого есть бабушка

269. x – прабабушка

270. x – прадедушка

271. x – деверь

272. x – золовка

273. x – теща

274. x – свекор

275. x – зять

276. x – сноха

277. x – правнук

278. У некоторых людей есть братья

279. У некоторых людей есть сестры

280. Некоторые супруги бездетны

281. Некоторые супруги имеют детей только женского пола

282. x – двоюродная тетя

283. x – двоюродный племянник

284. x – внучатая племянница

285. x – племянница

8 Формулы и термы в исчислении предикатов

1° В алфавит исчисления предикатов входят:

- предметные переменные x_i, y_j, z_r; значениями предметных переменных являются элементы предметной области Ω
- функциональные переменные f_m^n, $n, m = 0,1,2,\ldots$, где n – арность функции; функциональные переменные нужны для обозначения функций, заданных на предметной области и со значениями в предметной области
- предикатные переменные P_m^n, $n, m = 0,1,2,\ldots$, n – арность предиката;
- логические символы $\to$, $\neg$, $\forall$ (дополнительные $\vee$, &,$\exists$)
- служебные символы (,)

2° Символическая запись функций, определенных на предметной области и со значениями в предметной области в исчислении предикатов называется *термом*, если она удовлетворяет следующему определению:

1. любая предметная переменная, любая нульарная функциональная переменная является термом;
2. если $T_1,\ldots,T_n$ – термы, то $f_m^n(T_1,\ldots,T_n)$ – терм;
3. других термов нет.

3° Последовательность символов алфавита исчисления предикатов называется *формулой,* если она удовлетворяет следующему определению:

1. каждый предикатный символ арности нуль является формулой;
2. если P_m^n– n-арный предикатный символ и $T_1,\ldots,T_n$ – термы, то $P_m^n(T_1,\ldots,T_n)$ – формула и все входящие в эту формулу предметные переменные – свободные;
3. если F_1, F_2 – формулы, то $\neg(F_1)$, $(F_1 \to F_2)$ – формулы и свободные вхождения переменных в F_1, F_2 остаются свободными в формулах $\neg(F_1)$, $(F_1 \to F_2)$;
4. если переменная x – свободная в формуле F, то выражение $\forall x(F)$ – формула и вхождения других переменных (отличных от x) остаются свободными в формуле $\forall x(F)$;
5. других формул нет.

Одна и та же переменная может иметь в одной и той же формуле как свободные, так и связанные вхождения. Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется *замкнутой*.

Задачи и упражнения

В задачах 286-290 выяснить, является ли выражение термом. Пусть f^1, g^2, h^3 – унарный, бинарный и тернарный функциональные символы, определенные на предметной области Ω.

286. $f^1(g^2(x_0,x_1))$

287. $g^2(f^1(x_2),h^3(x_0,x_1,x_2))$

288. $f^1(g^2(x_0),h^3(x_0,x_1,x_2))$

289. $g^2(f^1(x_2,x_0),h^3(x_0,x_1))$

290. $h^3(x,g^2(y),z)$

В задачах 291-294 выяснить, является ли выражение формулой. Пусть f^1, g^2, h^3 – унарный, бинарный и тернарный функциональные символы, P^1 и Q^3 – унарный и тернарный предикатные символы, определенные на предметной области Ω.

291. $Q^3(x_0, f^1(x_1),h^3(x_1,x_2,x_3))$

292. $(P^1(x_0) \to \forall x_1(Q^3(x_0,x_1,x_2) \,\&\, P^1(g^2(x_0,x_1))))$

293. $Q^3(P^1(x), f^1(y), f^1(y))$

294. $f^1(h^3(x,y,z))$

В задачах 295-309 выяснить, будет ли выражение формулой исчисления предикатов. В каждой формуле укажите свободные и связанные вхождения переменных

295. $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 P(x_1,x_2,x_3,x_4)$

296. $\forall x P(x,y) \to \exists y P(x,y)$

297. $\exists x \exists y (P(x,y) \,\&\, Q(x,y))$

298. $\forall x \exists y (P(x,z) \to Q(z))$

299. $(P(x) \,\&\, P(y)) \vee (Q(x) \to Q(z))$

300. $\forall x \exists x P(x,y)$

301. $\exists x \to y P(x,y)$

302. $\exists x \forall y P(x,y) \to Q(z)$

303. $(\neg A \to B) \to (A \to B)$

304. $x \to \forall y P(x,y)$

305. $\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(z))$

306. $\forall x P(x) \to \forall y Q(y)$

307. $\neg(\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z)))$

308. $(P(x) \to Q(x)) \,\&\, \exists x(\forall x R(x))$

309. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to \forall x Q(x, y)$

В задачах 310-313 указать все подформулы формул исчисления предикатов:

310. $Q^2(f^1(x), g^2(x, y))$

311. $\exists x Q^2(x, y) \to \neg(\forall x(P^1(g^2(x, y))) \& \forall z P^1(z))$

312. $\forall x P^2(x, y) \to \forall z Q^2(x, z)$

313. $\neg(\exists z Q^2(z, z) \vee R^3(x, y, z))$

В задачах 314-322 выяснить, будет ли выражение предикатом, определенным на множестве вещественных чисел. Для каждого предиката установить местность и область истинности, изобразить область истинности графически.

314. $x + 2 = 0$

315. При $x = 0$ выполняется равенство $x - 2 = 0$

316. $x^2 - 4 = 0$

317. $\exists x(x^3 - 8 = 0)$

318. $x - y = 1$

319. $x^2 - 3x + 6$

320. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

321. $x - 2y \geq 0$

322. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = 0$

В задачах 323-327 пользуясь знаками арифметических операций (+, ×) и отношений (<, =), записать в виде формулы исчисления предикатов следующие высказывания о действительных числах и определите, истинные они или ложные:

323. Если произведение двух чисел равно 0, то хотя бы один из сомножителей равен 0

324. Система уравнений $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ не имеет решения

325. Существует ровно одно положительное значение квадратного корня из положительного числа

326. Существует такое положительное число x, что $x^2 - 4 = 0$

327. Для любых действительных чисел x и y, если $x < y$ и $y \neq 0$, то $\frac{x}{y} < 1$

В задачах 328-330 записать в виде предиката выражение. Пусть +, –, | |, < – операции сложения, вычитания, взятия модуля и отношение неравенства, определенные на множестве вещественных чисел R.

328. $|x + y| - 5 < 0$

329. $|x| + |y| < |x + y|$

330. $|x - 3| < 7 + y$

331. Используя другие операции, определенные на множестве вещественных чисел, указать новую интерпретацию формул из задач 328-330.

9 Логические эквивалентности с кванторами

1° Предикаты P,Q мощности n, определенные на предметной области Ω, называются логически эквивалентными (равносильными) $P \equiv Q$, если $P(x_1,\ldots,x_n) = Q(x_1,\ldots,x_n)$ для любого набора предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$.

2° Справедливы следующие логические эквивалентности для n-местных предикатов P, Q, R (1 и 0 – тождественно истинный и тождественно ложный предикаты соответственно)

Закон двойного отрицания	$\neg\neg P \equiv P$
Законы коммутативности	$P \,\&\, Q \equiv Q \,\&\, P \quad P \vee Q \equiv Q \vee P$
Законы ассоциативности	$P \,\&\, (Q \,\&\, R) \equiv (P \,\&\, Q) \,\&\, R$
	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Законы дистрибутивности	$P \vee (Q \,\&\, R) \equiv (P \vee Q) \,\&\, (P \vee R)$
	$P \,\&\, (Q \vee R) \equiv (P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R)$
Законы идемпотентности	$P \,\&\, P \equiv P \quad P \vee P \equiv P$
Законы де Моргана	$\neg(P \,\&\, Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \,\&\, \neg Q$
Законы нуля и единицы	$P \vee 1 \equiv 1 \quad P \,\&\, 0 \equiv 0$
	$P \vee 0 \equiv P \quad P \,\&\, 1 \equiv P$
Законы поглощения	$P \vee (P \,\&\, Q) \equiv P \quad P \,\&\, (P \vee Q) \equiv P$
Закон противоречия	$P \,\&\, \neg P \equiv 0$
Закон исключенного третьего	$P \vee \neg P \equiv 1$

3° Имеют место следующие логические следования и эквивалентности с кванторами:

Законы де Моргана $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \qquad \neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Коммутация одноименных кванторов

$$\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$$
$$\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$$

Законы дистрибутивности $\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \equiv \forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x)$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

Законы ограничения действия кванторов

$$\forall x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x P(x) \vee Q(y)$$
$$\forall x(P(x) \,\&\, Q(y)) \equiv \forall x P(x) \,\&\, Q(y)$$
$$\exists x(P(x) \,\&\, Q(y)) \equiv \exists x P(x) \,\&\, Q(y)$$
$$\exists x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \exists x P(x) \vee Q(y)$$

4° Формула F находится в *предваренной форме*, если она имеет следующий вид: $F = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n G(x_1,\ldots,x_n)$,где Q_i – квантор всеобщности или существования или отсутствие квантора по переменной x_i, а G – бескванторная формула. Приставка $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n$ называется *префиксом*, а формула G – *матрицей*.

Теорема. *Для любой формулы исчисления предикатов существует логически эквивалентная ей формула в предваренной форме.*

Задачи и упражнения

332. Привести пример предиката $P(x,y)$, такого что $\forall x\exists yP(x,y)\neq\exists y\forall xP(x,y)$, т.е. разноименные кванторы не всегда коммутируют.

333. Доказать, что $\exists y\forall xP(x,y)\to\forall x\exists yP(x,y)\equiv 1$

В задачах 334-338 привести формулу к предваренной форме равносильными преобразованиями

334. $\neg\exists x\forall y\exists z\forall uA(x,y,z,u)$

335. $\exists x\forall yA(x,y)\,\&\,\exists x\forall yB(x,y)$

336. $\exists x\forall yA(x,y)\to\exists x\forall yB(x,y)$

337. $\exists x\forall yA(x,y)\vee\exists x\forall yB(x,y)$

338. $\exists x\forall yA(x,y)\to\forall x\exists yB(x,y)$

В задачах 339-351 записать инверсию формулы в предваренной форме.

339. $\exists x\neg A(x)$

340. $\exists x(A(x)\,\&\,\neg B(x))$

341. $\forall x\neg A(x)$

342. $\forall x(A(x)\to\forall yB(y))$

343. $\exists x(A(x)\,\&\,B(x)\,\&\,C(x))$

344. $\forall x(A(x)\to B(x))$

345. $\exists x(A(x)\sim B(x))$

346. $\forall x(A(x)\vee\exists yB(y))$

347. $\forall x(A(x)\to B(x))\,\&\,\exists x(C(x)\,\&\,\neg D(x))$

348. $\forall x\exists y\forall z(A(x,y,z)\to B(x,y,z))$

349. $(\forall x\exists yQ(x,y))\to((\exists y\forall xQ(x,y))\vee R(x,y))$

350. $(\forall x\exists yQ(x,y))\to((\exists y\forall xP(x,y))\to Q(x,y))$

351. $\forall xQ(x,y)\to(\exists yQ(x,y)\vee\exists xR(x,y))$

10 Выводимость формул в исчислении предикатов

1° Множество аксиом исчисления предикатов состоит из пяти аксиом:

$\mathcal{A}_1 : (A \to (B \to A))$

$\mathcal{A}_2 : ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

$\mathcal{A}_3 : ((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$

$\mathcal{P}_1 : (\forall x A(x) \to A(t))$, где формула $A(x)$ не содержит терм t

$\mathcal{P}_2 : (\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B))$, если формула A не включает свободных вхождений x.

Вместо A и B можно подставлять любые правильно построенные формулы исчисления предикатов.

2° Правила вывода в исчислении предикатов:

- modus ponens: $\dfrac{A, A \to B}{B} MP$,
- правило обобщения $\dfrac{A}{\forall x A}(\forall^{+})$.

Понятие выводимой формулы определяется так же, как и в исчислении высказываний (см. раздел 5).

3° Значение формулы исчисления предикатов зависит от определения предметной области и предикатов , определенных на предметной области, т.е. *интерпретации* формулы.

Формула F *выполнима в данной интерпретации,* если существует набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \Omega$, значений свободных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ формулы F такой, что $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ принимает истинное значение.

Формула F *выполнима (в логике предикатов),* если существует интерпретация, в которой F выполнима.

Формула F *истинна в данной интерпретации*, если она принимает истинное значение на любом наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \Omega$, значений своих свободных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Формула F *общезначима или (тождественно истинна в логике предикатов)*, если она истинна в любой интерпретации.

4° **Теорема**. (Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов) *Формула доказуема в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда формула общезначима*.

Теорема (Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов**)**. *ИП является полуразрешимой теорией.*

Задачи и упражнения

352. Построить вывод в исчислении предикатов $\forall x \forall y A \vdash \forall y \forall x A$

353. Доказать производное правило вывода в исчислении предикатов правило индивидуализации: если $A(x)$ не содержит терм t, то $\forall x A(x) \vdash A(t)$.

354. Доказать производное правило вывода в исчислении предикатов правило существования: если терм t свободный для переменной x в формуле $A(x)$, то $A(t) \vdash \exists x A(x)$.

355. Показать, что аксиомы $\mathcal{P}_1$ $\mathcal{P}_2$ являются тавтологиями в исчислении предикатов. Формула F тавтология в ИП , если тавтологией является формула, полученная из F опусканием всех кванторов и термов вместе со всеми соответствующими скобками и переменными

356. Доказать, что если формула F – тавтология в ИП, то F является теоремой в ИП и может быть выведена лишь с использованием аксиом $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_3$ и правила вывода МР.

В задачах 357-367 определить тип формулы (выполнимая, истинная, общезначимая)

357. $\forall x P(x) \to P(y)$

358. $P(y) \to \forall x P(x)$

359. $\neg(\exists x P(x) \to \forall x P(x))$

360. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$

361. $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$

362. $\forall x \exists y Q(x, y) \to \exists y \forall x Q(x, y)$

363. $(\exists x \forall y A(x, y)) \,\&\, (\exists x \forall y B(x, y))$

364. $(\exists x \forall y A(x, y)) \to (\exists x \forall y B(x, y))$

365. $(\exists x \forall y A(x, y)) \vee (\exists x \forall y B(x, y))$

366. $(\forall x \exists y Q(x, y)) \to ((\exists y \forall x Q(x, y)) \vee R(x, y))$

367. $(\forall x \exists y Q(x, y)) \to ((\exists y \forall x P(x, y)) \to Q(x, y))$

11 Метод резолюций для исчисления предикатов

1° Метод резолюций, предложенный в 1965 г. А. Робинсоном, для проверки выводимости формул в логических исчислениях используется во многих системах логического программирования. Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые называются предложениями. Предложение – это бескванторная дизъюнкция предикатных символов и (или) их отрицаний (литералов). Любая формула ИП может быть преобразована во множество предложений, используя следующие шаги:

- Приведение к предваренной форме с использованием равносильных преобразований.
- Элиминация кванторов существования с использованием преобразований (неравносильных)
  $$\exists x_1 Q_2 x_2 .. Q_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q_2 x_2 .. Q_n x_n F(a, x_2, \ldots, x_n)$$
  $$\forall x_1 .. \forall x_{i-1} \exists x_i Q_{i+1} x_{i+1} .. Q_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \forall x_1 .. \forall x_{i-1} Q_{i+1} x_{i+1} .. Q_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, f(x_1, \ldots, x_{i-1}), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
  где a – новая предметная константа, f – новый функциональный символ, $Q_2, \ldots, Q_n$ – кванторы существования или всеобщности (или отсутствие квантора) по соответствующим переменным. После этого этапа формула может содержать только кванторы всеобщности. Такой вид формул называется *скулемовская стандартная форма*.
- Элиминация кванторов всеобщности с использованием преобразования (неравносильного)
  $$\forall x A(x) \Rightarrow A(x)$$
  После этого шага формула не содержит кванторов.
- Приведение к конъюнктивной нормальной форме и элиминация конъюнкций. После этого получается множество предложений.

2° В целом метод резолюций для предикатов похож на метод резолюций для исчисления высказываний, хотя и имеет свои особенности. При рассмотрении метода резолюций для исчисления высказываний особое внимание уделялось поиску контрарных пар во множестве предложений. В логике предикатов этот поиск заметно усложняется, поскольку в формулы входят предметные переменные.

Пусть X – множество предметных переменных из Ω и T – множество термов над переменными из X. *Подстановкой* называется отображение $\sigma : X \to T$. Подстановка σ называется *конечной*, если $\sigma(x) \neq x$ лишь для конечного числа элементов $x \in X$. Подстановка, не имеющая элементов, называется *тождественной*. Подстановку будем обозначать как множество пар $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_k \leftarrow t_k\}$, где $x_1, \ldots, x_k$ – переменные, $t_1, \ldots, t_k$ – термы.

Подстановка σ называется *унификатором* для множества термов $\{t_1, \ldots, t_k\}$, если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = \ldots = \sigma(t_k)$. Пусть имеется две конечные последовательности термов $(t_1,...,t_k)$ и $(p_1,...,p_k)$. Унификатором двух последовательностей термов называется подстановка σ такая, что $\sigma(t_1)=\sigma(p_1),...,\sigma(t_k)=\sigma(p_k)$.

3° Следующий рекурсивный алгоритм выясняет, унифицируемы ли два терма S и T:

- Если термы S и T – константы, то S и T унифицируемы тогда и только тогда, когда они являются одной и той же предметной константой.
- Если терм S является переменной, а T – произвольным термом, то термы S и T унифицируемы и $\sigma=\{S\leftarrow T\}$. Если терм T является переменной, а S – произвольным термом, то термы S и T унифицируемы и $\sigma=\{T\leftarrow S\}$.
- В остальных случаях термы S и T унифицируемы тогда и только тогда, когда S и T имеют одинаковый главный функциональный символ и все их соответствующие компоненты (подтермы) унифицируемы.

4° Пусть A и B – два предложения в исчислении предикатов, причем $A=P_1\vee A_1$ и $B=\neg P_2\vee B_1$, где P_1 и P_2 унифицируемые с помощью унификатора σ контрарные литералы. Правило вывода $\dfrac{A,B}{(A_1\vee B_1)\sigma}R$ называется *правилом резолюции* в исчислении предикатов. В этом случае резольвентой предложений A и B является предложение $(A_1\vee B_1)\sigma$, полученное из предложения $A_1\vee B_1$ применением унификатора σ.

5° Для доказательства выводимости $\Gamma\vdash F$ в ИП методом резолюций можно доказывать выводимость $\Gamma,\neg F\vdash\varnothing$, где $\varnothing$ – пустая формула. Каждая формула множества гипотез Γ и отрицание целевой формулы $\neg F$ преобразуются предложения. Далее полученные предложения объединяются во множество S. В множестве S отыскиваются резольвируемые предложения с учетом существования унификатора и к ним применяется правило резолюции в ИП, резольвента пополняет множество S, при этом возможны три ситуации:

- В множестве S нет резольвируемых предложений или возможные шаги резолюции не позволяют получить новую непустую резольенту. Тогда теорема опровергнута или формула F не выводима из множества формул Γ.
- После очередного шага резолюции получено пустое предложение. Тогда теорема доказана или $\Gamma\vdash F$.
- Процесс резольвирования не заканчивается, т.е. множество предложений пополняется все новыми резольвентами, среди которых нет пустых. В этом случае нельзя однозначно сделать вывод о выводимости или невыводимости формулы F из множества гипотез Γ.

Задачи и упражнения

В задачах 368 - 377 проверить общезначимость формулы, используя метод резолюций

368. $\forall xQ(x,y) \to (\exists yQ(x,y) \vee \exists xR(x,y))$

369. $(\forall x\exists yQ(x,y)) \to (\exists yP(x,y) \to \forall xQ(x,y))$

370. $(\exists x\forall yA(x,y)) \vee \forall yB(x,y)$

371. $(\exists x\forall yA(x,y)) \to \neg(\forall x\exists yB(x,y))$

372. $\neg(\exists x\forall yQ(x,y)) \to (\forall y\exists xQ(x,y))$

373. $(\exists y\exists xQ(x,y) \to \exists yP(x,y)) \to \forall xQ(x,y)$

374. $\forall yA(x,y) \vee \exists x\forall yB(x,y)$

375. $\neg(\exists xA(x,y)) \to (\forall x\exists yB(x,y))$

376. $\forall y\exists xQ(x,y) \to \exists x\forall yQ(x,y)$

377. $\forall y\exists xQ(x,y) \,\&\, \exists x\forall y\neg B(x,y) \to \exists x(Q(x,y) \,\&\, \neg B(x,y))$

В задачах 378 - 394 записать рассуждение в символьном виде и проверить правильность рассуждения методом резолюций:

378. Все птицы – позвоночные. Все позвоночные – животные. Орел – птица. Значит, орел – животное.

379. Ни одно животное не бессмертно. Кошки – животные. Значит, некоторые кошки не бессмертны.

380. Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие лишены перьев.

381. Если бы кто-нибудь мог решить эту задачу, то и какой-нибудь математик смог бы. Кэббот – математик, а не может решить эту задачу. Значит, задача неразрешима.

382. Всякий, кто может решить эту задачу – математик. Кэббот не может решить задачу. Значит, Кэббот – не математик.

383. Всякий, кто может решить эту задачу, – математик. Ни один математик не может решить эту задачу. Значит, задача неразрешима.

384. Если туфли со шнурками, то эти туфли не летние. Если туфли со шпильками, то туфли без шнурков. Существуют модели не летних туфель без шнурков. Значит, все летние туфли без шнурков и со шпильками.

385. Если у людей много дел, то они торопятся. Если люди торопятся, то они едут на метро. Некоторые люди ездят на метро. Следовательно, у некоторых людей много дел.

386. Если у людей много дел, то они едут на машине. Если люди торопятся, то они едут на метро. Некоторые люди ездят на метро. Следовательно, у некоторых людей не много дел.

387. Все Повелители времени с планеты Галлифрей внешне похожи на людей. Обычный человек не умеет перемещаться во времени. Некоторые жители Земли имеют технологии управления временем. Значит, на Земле живут инопланетяне.

388. Если дракон черный, то он может извергать огонь. Если дракон подавился бензином, то он извергнет огонь. Значит, все драконы, которые давятся бензином, черные.

389. Если элемент является общим для всех объектов данного класса, то этот элемент – статический. Если элемент статический, то память под него резервируется при запуске программы. Поле count является общим для всех объектов класса. Значит, память для него выделилась до явного создания класса.

390. Если книга содержит полезные факты, то она заслуживает внимания. Если книга развивает умственные способности, то она содержит полезные факты. Существуют книги, содержащие полезные факты. Следовательно, любая книга заслуживает внимания.

391. Любой, кто играет на скрипке, умеет немного играть на фортепиано. Если человек умеет играть на фортепиано, то либо он безумно талантлив, либо имеет в этом опыт. Я опыта не имею, да и талантами музыкальными не блещу. Значит, скрипач из меня никакой.

392. Если профессия интересная, то человек становится увлеченным. Если человек увлекается профессией, то ему больше платят. Программирование – интересная профессия. Значит, программистам платят больше.

393. Если в пицце есть ананасы и кетчуп, то пицца – гавайская. Если в пицце есть оливки и свежие помидоры, то пицца – греческая. Я в свою пиццу положил оливки и ананасы. Значит пицца не гавайская и не греческая.

394. Некоторые люди любят мороженое. Если человек боится заболеть, то он не будет есть мороженое. Если у человек нет денег, то он тоже не ест мороженое. Значит, не все, кто любит мороженое, едят его.

12 Простые программы для машины Тьюринга

1° Машина Тьюринга состоит из следующих элементов:

- *бесконечная лента.* Лента разделена ячейки, в которых записаны входные, выходные и промежуточные данные. В ячейки ленты можно записывать элементы некоторого непустого конечного множества $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$, которое называется *внешний алфавит машины Тьюринга*. Удобно считать, что пустые ячейки ленты на самом деле содержат некоторую букву алфавита A (для определенности пустой символ – это буква a_0)

- *указатель.* Указатель может считывать символы, содержащиеся в ячейке ленты, записать символы в ячейку, оставаться на месте, передвигаться на одну ячейку вправо или влево. Указатель может находиться в одном состоянии и переходить из одного состояния в другое. Состояния указателя помечены символами непустого конечного множества $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$, которое называется *внутренний алфавит машины Тьюринга*. Одно из этих состояний называется *начальным*, с него начинает работу любая машина. В *заключительном* состоянии машина Тьюринга завершает работу, т.е. после перехода машины Тьюринга в заключительное состояние дальнейших действий машина не производит. Начальное состояние обозначается q_1, а заключительное – q_0.

- *области памяти указателя,* в которой содержатся команды для выполнения (программу) для машины Тьюринга.

2° Обычно машина Тьюринга схематично изображается так:

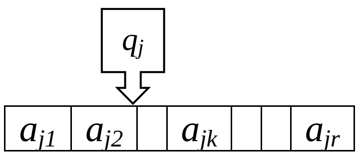


Рис. 2. Схематичное представление машины Тьюринга

Поскольку бесконечную ленту физически представить затруднительно, то обычно предполагается, что она конечная и разбита на конечное число ячеек. В процессе работы к существующим ячейкам машина может пристраивать новые ячейки, так что лента может считаться потенциально неограниченной в обе стороны. Все вновь пристраиваемые ячейки пристраиваются пустыми.

3° Во время работы машина Тьюринга за один такт из текущего состояния переходит в следующее состояние, затем от нового состояния по истечении такта работы переходит к новому состоянию и т. д. Если машина во внутреннем состоянии q_i и считывая из ячейки ленты символ a_j, переходит во внутреннее состояние q_r, заменяет содержимое ячейки символом a_s, а указатель остается на месте (H) или сдвигается на одну ячейку вправо (R) или влево (L), то машина выполняет одну из команд

$$q_i a_j \to a_s H q_r,\ q_i a_j \to a_s R q_r, q_i a_j \to a_s L q_r.$$

Совокупность всех команд, которые может выполнять машина Тьюринга, называется *программой*.

4° *Текущая конфигурация* машины Тьюринга – это полная информация о внутреннем состоянии машины, о содержимом ячеек ленты и о ячейке, которую обозревает указатель машины. Конфигурация машины может быть записана в виде последовательности символов xq_iy, где x и y – последовательности внешнего алфавита машины, записанные на ленте, причем:

- левее последовательности x и правее последовательности y все ячейки пустые;
- указатель машины указывает на ячейку, которая находится сразу после последовательности x;
- первый символ последовательности y ячейке ленты, на которыу указывает указатель машины;
- q_i – состояние машины на текущем шаге.

На рисунке определение конфигурации можно продемонстрировать следующим образом:

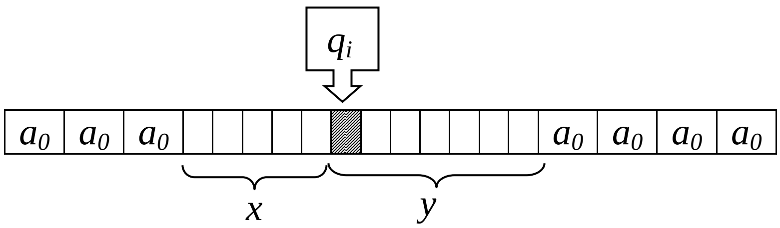


Рис. 3. Текущая конфигурация машины Тьюринга

Конфигурация с начальным состоянием указателя называется *начальной*, с заключительным состоянием – *заключительной*. Переход за один такт работы МТ из конфигурации $x_1q_iy_1$ в конфигурацию $x_2q_jy_2$ будем обозначать так:

$$x_1q_iy_1 \rightarrow x_2q_jy_2$$

Если переход из одной конфигурации в другую осуществляется более, чем за один шаг, то это будем обозначать таким образом:

$$x_1q_iy_1 \Rightarrow x_2q_jy_2$$

Задачи и упражнения

395. Дана машина Тьюринга с алфавитом $A=\{0,1\}$ и программой $q_1 0 \to 0Rq_2$, $q_1 1 \to 1Hq_0$, $q_2 0 \to 1Hq_0$, $q_2 1 \to 1Rq_2$. Определить конфигурацию, в которую переходит машина Тьюринга после выполнения не более чем 5 команд, если начальная конфигурация была $00q_1 00010110$.

396. Дана машина Тьюринга с алфавитом $A=\{0,1\}$ и программой $q_1 1 \to 1Rq_1$, $q_1 0 \to 1Hq_2$, $q_2 0 \to 1Hq_0$, $q_2 1 \to 1Rq_2$. Определить конфигурацию, в которую переходит машина Тьюринга после выполнения не более чем 4 команд, если начальная конфигурация была $00q_1 00010110$.

397. Дана машина Тьюринга с алфавитом $A=\{0,1\}$ и программой $q_1 1 \to 1Lq_1$, $q_1 0 \to 1Lq_2$, $q_2 0 \to 0Rq_0$, $q_2 1 \to 1Rq_2$. Определить конфигурацию, в которую переходит машина Тьюринга после выполнения не более чем 5 команд, если начальная конфигурация была $00q_1 11110110$.

В задачах 398 - 405 написать программу машины Тьюринга для перехода из начальной конфигурации в конечную ($n \geq 1$)

398. $q_1 01^n \Rightarrow q_0 0001^n 0$

399. $q_1 01^n \Rightarrow q_0 0001^n 0$, при этом указатель должен остановиться над той же ячейкой, с которой начал работу

400. $0q_1 1^n \Rightarrow 0q_0 1^{n+3} 0$

401. $q_1 01^n \Rightarrow q_0 0110101^n 0$

402. $0q_1 1^n \Rightarrow 01^n q_0 0$ (правый сдвиг)

403. $01^n q_1 0 \Rightarrow 0q_0 1^n 0$ (левый сдвиг)

404. $0q_1 1^n \Rightarrow 01^{n-1} q_0 10$

405. $0q_1(10)^n 0 \Rightarrow 0(10)^{n-1} q_0 10$

В задачах 406 - 408 написать программу машины Тьюринга для перехода из начальной конфигурации в конечную ($n \geq 1,\ m \geq 1$)

406. $0q_1 1^n 0 \Rightarrow 0q_0 1^n 01^n 0$

407. $0q_1 1^n 01^m 0 \Rightarrow 0q_0 1^m 01^n 0$

408. $0q_1 1^n 01^m 0 \Rightarrow 0q_0 (10)^{n+m} 0$

В задачах 409 - 418 построить машину Тьюринга для перевода из одной конфигурации в другую. На ленте записаны нули и единицы, при этом пустые ячейки содержат нули, $x, y \geq 1$. Выписать последовательность конфигураций для $x=2, y=1$.

409. $q_1 1^x 01^y 0 \Rightarrow q_0 1^x 0101^y 0$

410. $q_1 1^x 01^y 0 \Rightarrow q_0 1^x 01^y 01^x 0$

411. $q_1 1^x 01^y 0 \Rightarrow q_0 1^{x+y} 01^x 0$

412. $q_1 1^x 01^y 0 \Rightarrow q_0 1^{x+y} 01^{y+2} 0$

413. $q_1 1^x 0 \Rightarrow q_0 1^z$, где z – целая часть $x/3$

414. $q_1 1^x 01^y 0 \Rightarrow \begin{cases} q_0 1^y, \text{если } x > 2 \\ q_0 1^x, \text{если } x \leq 2 \end{cases}$

415. $q_1 1^x 0 1^y 0 \Rightarrow \begin{cases} q_0 1^x, \text{если } x \text{ четное} \\ q_0 1^y, \text{если } x \text{ нечетное} \end{cases}$

416. $q_1 1^x 0 1^y 0 \Rightarrow \begin{cases} q_0 1^x, \text{если } y > x \\ q_0 0, \text{если } y \le x \end{cases}$

417. $q_1 1^x 0 1^y 0 \Rightarrow \begin{cases} q_0 1^y, \text{если } x > y \\ q_0 0, \text{если } x \le y \end{cases}$

418. $q_1 1^x 0 1^y 0 \Rightarrow \begin{cases} q_0 1^x, \text{если } x > y \\ q_0 1^y, \text{если } x \le y \end{cases}$

13 Вычисление арифметических функций на машине Тьюринга

1° Вычисления, выполняемые МТ в алфавите A, называются *правильными*, если выполняются следующие условия:

- В начальный момент машина находится в состоянии q_1, а ленте записана некоторая последовательность W в алфавите A и все ячейки ленты, не содержащие слово W пустые. Указатель машины указывает на первый символ W.

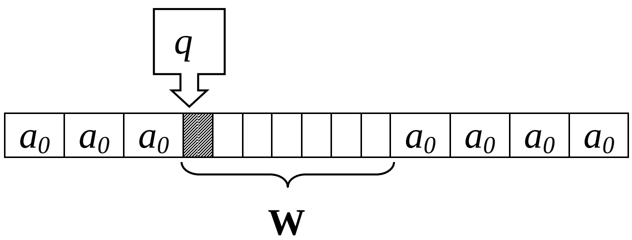


Рис. 4. Головка машины установлена на первом символе слова *W*

- При переходе МТ в заключительное состояние q_0 все ячейки левее указателя содержат пустой символ. Указатель указывает на самую левую непустую (если такие имеются).

Результатом правильных вычислений МТ считается:

- Пустая последовательность, если ячейки ленты не содержат непустых символов.
- Последовательность, первый символ которой находится в ячейке, куда указывает указатель, а последний символ – самый правый непустой символ на ленте.

2° Далее будем применять МТ для правильного вычисления арифметических функций $f : \overline{N} \to \overline{N}$, т.е. функций, определенных на множестве неотрицательных целых чисел, со значениями во множестве неотрицательных целых чисел. Для вычисления арифметических функций на машине Тьюринга с двоичным внешним алфавитом аргумент x функции $f(x)$ представлен на ленте в виде последовательности $x+1$ единиц (при $x=0$ на ленте 1 единица). Если функция зависит от нескольких аргументов, то аргументы последовательно записаны группами единиц, которые разделены 0.

Правильным вычислением арифметической функции $f(x)$ на МТ называется правильное вычисление, производимое МТ в алфавите $A=\{0,1\}$ при переходе от начальной конфигурации $0q_1 1^{x+1}0$ к заключительной конфигурации $0q_0 1^{f(x)+1}0$, т.е. машина Тьюринга выполняет переход $0q_1 1^{x+1}0 \Rightarrow 0q_0 1^{f(x)+1}0$. Если вычисляемая функция имеет два аргумента, то $0q_1 1^{x+1}01^{y+1}0 \Rightarrow 0q_0 1^{f(x,y)+1}0$

3° Конструкция суперпозиции машин Тьюринга состоит в следующем. Пусть имеются две машины T_1 и T_2, которые вычисляют функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно в одном и том же внешнем алфавите. Построим новую машину Тьюринга T следующим образом. Состояния машины T_2 переобозначаются (с помощью верхнего индекса) так, чтобы они отличались от состояний T_1. Начальное состояние q_1^1 машины T_1 объявляем начальным состоянием q_1 новой машины T, а заключительное состояние q_0^2 машины T_2 – заключительным состоянием q_0 для машины T. Заключительное состояние q_0^2 машины T_1 и начальное состояние q_1^2 машины T_2 отождествляются. Полученные команды для обеих машин объединяются в одну программу новой машины. Построенная машина T вычисляет суперпозицию функций $f(x)=f_2(f_1(x))$ и называется суперпозицией машин T_1 и T_2.

4° Конструкция ветвления машин Тьюринга состоит в следующем. Пусть имеются две машины T_1 и T_2, которые вычисляют функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно в одном и том же внешнем алфавите, а также машина TP, которая реализует вычисление предиката $P(x)$. Состояния машин T_1, T_2, TP переобозначим (с помощью верхнего индекса) так, чтобы они отличались друг от друга. Начальное состояние q_1^P машины TP будет начальным состоянием q_1 новой машины T, а заключительное состояние машины TP отождествляется с начальным состоянием машины T_1, если $P(x)=0$ или с начальным состоянием машины T_2, если $P(x)=1$. Заключительные состояния q_0^1 и q_0^2 машин T_1, T_2 отождествляются в одно заключительные состояние q_0 для машины T. Программа для новой машины строится следующим образом. Сначала записанные на ленте данные дублируются. Вычисление предиката $P(x)$ происходит с использованием левой копии данных, после вычисления все ячейки левее правой копии очищаются и машина устанавливает указатель на самую левую непустую ячейку правой копии данных в состоянии q_1^1, если $P(x)=0$ или в состоянии q_1^2, если $P(x)=1$. Далее вычисления происходят в соответствии с выбранной программой. Построенная машина T вычисляет функцию $f(x)=\begin{cases} f_1(x), \text{если } P(x)=0 \\ f_2(x), \text{если } P(x)=1 \end{cases}$ и называется ветвлением машин T_1 и T_2.

5° **Тезис Чёрча –Тьюринга**

Для любой интуитивно вычислимой арифметической функции существует правильно вычисляющая её машина Тьюринга.

Задачи и упражнения

В задачах 419 - 431 построить машину Тьюринга для правильного вычисления функции

419. $O(x)=0$

420. $f(x)=3$

421. $S(x)=x+1$

422. $f(x,y)=x+y$

423. $g(x)=3x$

424. $\overline{sg}(x)=\begin{cases} 1, x=0 \\ 0, x>0 \end{cases}$

425. $F(x)=x\dot{-}1=\begin{cases} x-1, x\geq 1 \\ 0, x=0 \end{cases}$ (усечённая разность)

426. $G(x)=x-3$

427. $d(x,y)=x\dot{-}y$ (усечённая разность)

428. $f(x,y)=|x-y|$

429. $g(x)=x\,\mathrm{mod}\,2$ (остаток от деления на 2)

430. $h(x)=x\,\mathrm{div}\,2$ (целочисленное частное при делении на 2)

431. Построить графы машин Тьюринга из задач 419 - 430.

В задачах 432 - 440 построить машину Тьюринга для правильного вычисления функции как суперпозицию или ветвление подходящих машин Тьюринга.

432. $f(x)=1$

433. $f(x)=2x+5$

434. $f(x)=\begin{cases} x, x>1, \\ x+1, \textit{иначе} \end{cases}$

435. $f(x)=\begin{cases} x, x<5, \\ x+2, x\geq 5 \end{cases}$

436. $f(x,y)=\begin{cases} y, y<x, \\ x+4, y\geq x \end{cases}$

437. $f(x,y)=\begin{cases} y, y=2, \\ x, y=3 \\ x+1, \text{иначе} \end{cases}$

438. $f(x,y)=\begin{cases} 3, 2\leq y\leq 6 \\ x+1, \text{иначе} \end{cases}$

439. $f(x,y)=(x+y)\bmod 3$

440. $f(x,y)=\begin{cases} 2x, y<x, \\ x+y, y\geq x \end{cases}$

В задачах 441 - 443 машины Тьюринга внешний алфавит состоит из десятичных цифр и пустого символа.

441. На ленте имеется число n в десятичной записи. Построить машину Тьюринга, преобразующую n в $n+4$. Все ячейки справа и слева от числа n содержат символ a. Вычисления должны быть правильными.

442. На ленте имеется число n в десятичной записи. Построить машину Тьюринга, преобразующую n в $n-2$. Все ячейки справа и слева от числа n содержат символ a. Вычисления должны быть правильными.

443. На ленте имеется число n в десятичной записи. Построить машину Тьюринга, преобразующую n в $2n$. Все ячейки справа и слева от числа n содержат символ a. Вычисления должны быть правильными.

В задачах 444 - 448 построить машину Тьюринга с внешним алфавитом A={0,1,*}, «*» – пустой символ, которая выполняет заданные действия. В начальный момент на ленте записано слово P (конечная последовательность символов внешнего алфавита A, слово P может быть пустым), указатель указывает на крайний левый непустой символ слова P или на пустую ячейку, если P – пустое слово. В заключительной конфигурации указатель должен указывать на крайний левый непустой символ результата. Если результатом окажется пустое слово, указатель указывает на пустую ячейку.

444. Определить, входит ли в слово P последовательность 00. Результат – слово из одного символа 1 (да, входит) или пустое слово (нет).

445. Определить содержится ли в слове P последовательность 01. Результат – слово из одного символа 1 (да, входит) или слово из одного символа 0 (нет).

446. Определить, является ли слово P записью числа в двоичной системе счисления (непустым словом, состоящем только из цифр 0 и 1) Результат: слово 1 (да) или пустое слово (нет).

447. Определить, содержит ли слово P четное количество 1. Результат – слово из одного символа 1 (да, количество 1 четно) или пустое слово (нет).

448. Слово P имеет вид 0^x1^y, $x, y \geq 0$. Определить, содержит ли слово P одинаковое количество 0 и 1. Результат – слово из одного символа 1 (да, количество одинаково), слово из одного символа (нет, 0 больше) или пустое слово (нет, 1 больше).

14 Примитивно рекурсивные функции

1° Функция f от n переменных называется *арифметической,* если $f:\overline{N}\times\overline{N}\times\ldots\times\overline{N}\to\overline{N}$, т.е. функция f определена на наборах неотрицательных целых чисел со значениями во множестве неотрицательных целых чисел. Если функция f определена не для каждого набора натуральных чисел, то функция f называется *частично определенной арифметической функцией*.

2° Для получения вычислимых арифметических функций используются базисные функции, для которых их вычислимость достаточно очевидна (например, на машине Тьюринга), и алгоритмические операции. В качестве *базовых или простейших* используются следующие функции:

- *функция следования*: $S(x)=x+1$;
- *функция проекции*: $U_i^n(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n)=x_i$, где n – количество переменных, а i – номер переменной, по которой берется проекция, $1\le i\le n$.
- *функция нуля*: $O(x)=0$, для всех $x=0,1,\ldots$

3° Пусть имеются n-арная функция f и m-арные функции $f_1,\ldots,f_n$. Говорят, что m-арная функция $g(x_1,\ldots,x_m)$ получена в результате *операции суперпозиции или подстановки* из функций f и $f_1,\ldots,f_n$, если для любых $x_1,\ldots,x_m\in N$

$$g(x_1,\ldots,x_m)=f(f_1(x_1,\ldots x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots x_m))$$

4° Пусть заданы произвольные функции: n-арная функция g и $n+2$-арная функция h. Говорят, что $n+1$-арная функция f получена *операцией примитивной рекурсии* из функций g и h, если для любых $x_1,\ldots,x_n,y\in N$ выполнены соотношения

$$f(x_1,\ldots x_n,0)=g(x_1,\ldots x_n),$$
$$f(x_1,\ldots x_n,y+1)=h(x_1,\ldots x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y)).$$

В случае, если $n=0$, то определение имеет такой вид. Говорят, что функция $f(x)$ получена *операцией примитивной рекурсии* из функции $h(x,y)$ и константы C, если для любого $x\in N$ выполнены соотношения

$$f(0)=C$$
$$f(x+1)=h(x,f(x))$$

Предложение (свойства операций суперпозиции и примитивной рекурсии)**.**
Операции суперпозиции и примитивной рекурсии сохраняют:

1. *всюду определённость функций;*
2. *интуитивную вычислимость функций.*

5° Функция f называется *примитивно рекурсивной*, если ее можно получить из простейших функций с помощью конечного числа операций суперпозиции и примитивной рекурсии. Свойства примитивно рекурсивных функций характеризует следующее

Предложение

1. *Всякая примитивно рекурсивная функция всюду определена.*

2. *Если функция f получена из примитивно рекурсивных функций с применением операций суперпозиции или примитивной рекурсии, то функция f является примитивно рекурсивной функцией.*
3. *Все примитивно рекурсивные функции интуитивно вычислимы.*

Задачи и упражнения

В задачах 449 - 453 найти значение функции g на заданном наборе значений переменных, если функция g получена операцией суперпозиции из функций f, $f_1,\ldots,f_n$, т.е. $g(x_1,\ldots,x_m) = f(f_1(x_1,\ldots x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots x_m))$

449. $f(x) = O(x)$, $f_1(x) = S(x)$ вычислить: $g(0)$, $g(3)$, $g(4)$

450. $f(x,y,z) = x + y + z$, $f_1(x,y) = x^2$, $f_2(x,y) = 2x + y$, $f_3(x,y) = 6$ вычислить: $g(3,3)$, $g(5,6)$, $g(2,34)$

451. $f(x,y,z) = xy + z$, $f_1(x,y) = x - y$, $f_2(x,y) = x + y$, $f_3(x,y) = |y - x|$ вычислить: $g(5,5)$, $g(12,10)$, $g(10,12)$

452. $f(x,y,z) = xy + z$, $f_1(x,y) = x \div y$, $f_2(x,y) = x + y$, $f_3(x,y) = |y - x|$ вычислить: $g(10,12)$, $g(5,5)$, $g(3,8)$

453. $f(x,y) = x + y$, $f_1(x,y,z) = (3x + 2y) - z$, $f_2(x,y,z) = 3x + (2y - z)$, вычислить: $g(1,1,2)$, $g(5,3,4)$, $g(3,1,8)$

В задачах 454 - 458 найти значение функции f на заданном наборе значений переменных, если функция f получена операцией примитивной рекурсии из функций g и h, т.е. $f(x_1,\ldots x_n,0) = g(x_1,\ldots x_n)$, $f(x_1,\ldots x_n, y+1) = h(x_1,\ldots x_n, y, f(x_1,\ldots,x_n,y))$.

454. $g(x) = O(x)$, $h(x,y,z) = x + y + z$ вычислить: $f(3,2)$, $f(2,3)$, $f(1,4)$

455. $g(x) = x + 3$, $h(x,y,z) = xy + z$ вычислить: $f(2,4)$, $f(7,2)$, $f(0,3)$

456. $g(x) = x - 3$, $h(x,y,z) = x + z + 1$ вычислить: $f(2,3)$, $f(3,2)$, $f(5,3)$

457. $f(0) = 5$, $h(x,y) = x^2 + y^2$ вычислить: $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$

458. $g(x,y) = x * y$, $h(x,y,z,w) = x \div y + z + w$ вычислить: $f(1,1,1)$, $f(2,3,2)$, $f(3,2,2)$

В задачах 459 - 462 доказать, что из примитивной рекурсивности функции f следует примитивная рекурсивность функции g:

459. $g(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \cdots, x_n)$

460. $g(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$

461. $g(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \cdots, x_n, x_{n+1})$

462. $g(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$

В задачах 463 - 477 доказать примитивную рекурсивность функций:

463. $C_a(x) = a$, где a – константа

464. $f(x) = x + a$, где a – константа

465. $f(x, y) = x + y$

466. $f(x, y) = x \cdot y$

467. $f(x, y) = x^y$

468. $f(x) = x!$

469. $f(x) = x \operatorname{mod} 2$ (остаток от деления на 2)

470. $sg(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1, x > 0 \end{cases}$

471. $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x > 0 \end{cases}$

472. $f(x) = x \div 1$ (усечённая разность)

473. $f(x, y) = x \div y$ (усечённая разность)

474. $f(x, y) = | x - y |$

475. $f(x, y) = \max(x, y)$

476. $f(x, y) = \min(x, y)$

477. $f(x, y) = \left[\dfrac{x}{y} \right]$

В задачах 478 - 480 привести пример примитивно рекурсивной функции $u(x)$ с заданным свойством

478. $u(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 5$

479. $u(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 5$ или $x = 9$

480. $u(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \geq 1$

В задачах 481 - 482 привести пример примитивно рекурсивной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ с заданным свойством

481. $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 на наборах $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$, …, $(a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ и при остальных значениях аргументов функция f равна 0

482. $f(a_{11},\ldots,a_{1n})=b_1,\ \ldots,\ f(a_{k1},\ldots,a_{kn})=b_k$ и при остальных значениях аргументов функция f равна 0

В задачах 483 - 487 доказать примитивную рекурсивность функций, используя рекурсивность функций из задач 463 - 477

483. $f(x,y)=xy+x$

484. $f(x,y)=x^{y+2}+y$

485. $f(x,y)=(x\div y)+y$

486. $f(x,y)=x+|xy-x|$

487. $f(x,y)=(x+y)\bmod 2$

В задачах 488 - 494 доказать примитивную рекурсивность функций, используя результаты задач 481 - 482

488. $f(x)=\begin{cases}3, x\le 6,\\ 4, x\ge 10\\ 0, \text{иначе}\end{cases}$

489. $f(x,y)=\begin{cases}0, y<x,\\ 1, y\ge x\end{cases}$

490. $f(x,y)=\begin{cases}10, y<x,\\ 1, y\ge x\end{cases}$

491. $f(x)=\begin{cases}3, x=6,\\ 4, x=7\\ 0, \text{иначе}\end{cases}$

492. $f(x,y)=\begin{cases}x, x<5,\\ x+1, x\ge 5\end{cases}$

493. $f(x,y)=\begin{cases}3, 2\le y\le 6\\ x+1, \text{иначе}\end{cases}$

494. $f(x,y)=\begin{cases}5, 3<y<8\\ x\div 1, \text{иначе}\end{cases}$

В задачах 495 - 496 доказать примитивную рекурсивность функций, если n-арная функция g примитивно рекурсивна.

495. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{x_n} g(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},i)$

496. $u(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} g(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, i)$

15 Частично рекурсивные функции

1° Пусть имеется процесс вычисления частично определенной арифметической функции $f(x_1, \dots, x_n)$, причем значение функции не определено тогда и только тогда, когда процесс вычисления длится бесконечно, не выдавая никакого определенного результата.

Рассмотрим уравнение относительно y: $f(x_1, \dots x_{n-1}, y) = x_n$, где $x_1, \dots x_{n-1}$ набор заданных значений для первых $n-1$ аргументов функции f. Нахождение целого корня этого уравнения можно осуществить последовательным перебором. Вычислительный процесс для функции f последовательно вычисляет значения $f(x_1, \dots x_{n-1}, a)$ для $a = 0,1,2,\dots$, далее происходит сравнение с правой частью уравнения x_n. Наименьшее значение a, для которого выполняется равенство $f(x_1, \dots x_{n-1}, a) = x_n$, обозначим как $\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$. Очевидно, что $\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ является n-арной частичной функцией, которая получена *операцией минимизации* из функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

2° Описанный процесс нахождения корня уравнения y будет продолжаться бесконечно в следующих случаях:

- Значение $f(x_1, \dots x_{n-1}, y)$ не определено для каждого y.
- Значения $f(x_1, \dots x_{n-1}, i)$ для $i = 0,1,\dots, a-1$ определены, но отличны от x_n, а значение $f(x_1, \dots x_{n-1}, a)$ не определено.
- Значения $f(x_1, \dots x_{n-1}, y)$ определены для всех $y = 0,1,2,\dots$ и отличны от x_n .

Во всех этих случаях значение $\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ считается неопределенным. В остальных случаях описанный процесс обрывается и дает наименьшее решение $y = a$ для уравнения $f(x_1, \dots x_{n-1}, y) = x_n$.

3° Частичная функция f называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена из простейших функций конечным числом операций подстановки, примитивной рекурсии и минимизации.

4° **Тезис Чёрча-Клини**

Любая вычислимая функция является частично рекурсивной

Теорема о равносильности алгоритмических систем

Класс частично рекурсивных функций совпадает с классом функций, вычислимых на машине Тьюринга

Задачи и упражнения

В задачах 497 - 501 найти значение функции g на заданном наборе значений переменных, если функция g получена операцией минимизации из функций f

497. $f(x,y) = x + y$ вычислить: $g(3,2)$, $g(2,3)$, $g(1,5)$

498. $f(x,y) = x \cdot y$ вычислить: $g(1,3)$, $g(3,6)$, $g(5,3)$

499. $f(x) = \begin{cases} 3, x = 6, \\ 4, x = 7, \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$ вычислить: $g(0)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$,

500. $f(x,y) = (x + y) \bmod 2$ вычислить: $g(3,0)$, $g(2,1)$, $g(2,2)$

501. $f(x,y) = (x \div y) + y$ вычислить: $g(5,8)$, $g(8,5)$, $g(3,3)$

В задачах 502 - 505 привести пример частично рекурсивной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ с заданным свойством

502. Функция $f(x)$ не определена ни в одной точке

503. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ равна нулю на наборах $(a_{11},\ldots,a_{1n})$, …, $(a_{k1},\ldots,a_{kn})$ и не определена

504. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ такая, что $f(a_{11},\ldots,a_{1n}) = b_1$, …, $f(a_{k1},\ldots,a_{kn}) = b_k$ и при остальных значениях аргументов функция f не определена.

505. Функция f определена лишь в конечном числе точек

В задачах 506 - 520 провести минимизацию функции

506. $C_a(x) = a$, где a – константа

507. $f(x) = x + a$, где a – константа

508. $f(x,y) = x + y$

509. $f(x,y) = x \cdot y$

510. $f(x,y) = x^y$

511. $f(x) = x \bmod 2$ (остаток от деления на 2)

512. $sg(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1, x > 0 \end{cases}$

513. $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x > 0 \end{cases}$

514. $f(x) = \begin{cases} 3, x \le 6, \\ 4, x \ge 10 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

515. $f(x) = x \div 1$ (усечённая разность)

516. $f(x, y) = x \div y$ (усечённая разность)

517. $f(x, y) = | x - y |$

518. $f(x, y) = \max(x, y)$

519. $f(x, y) = \min(x, y)$

520. $f(x, y) = \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor$

Ответы и указания
К задачам раздела 1. Булевы функции

1. $x \& y \& \neg z \vee t \to (x \vee \neg y) \& x$
2. $(x \vee y) \& \neg(z \vee x) \to x \& \neg y \to (x \& \neg y \sim t)$
3. $\neg((x \vee y) \& z) \vee (x \downarrow t) \mid y) \to (x \& (\neg z \sim x \& \neg y) \to t)$
4. $(x \oplus (y \sim (((\neg z) \to (u \vee (v \& (w \downarrow (x \mid y))))) \to (x \& z))))$
5. $(x \oplus (((((y \& (\neg z)) \vee u) \vee (v \mid w)) \to ((x \mid y) \& z)) \sim ((x \& z) \vee ((\neg y) \& x))))$
6. $((((x \& y) \& (\neg z)) \vee ((u \downarrow v) \& w)) \oplus ((x \vee (y \& z)) \sim (((\neg(x \& z)) \vee x) \to y)))$
7. **Указание.** Подформулой является любая часть формулы, которая так же является формулой. Например: формула $x \& y$ содержит три подформулы $x \& y$, x и y.

Для решения задач 8-11 необходимо использовать различные формулы комбинаторики и определение равносильности логических формул.

8. **Решение.** Количество строк таблицы истинности логической функции с n переменными равно 2^n. Каждой строке соответствует значение логической функции из множества $\{0,1\}$, при этом разные функции имеют разные наборы значений. Следовательно, задача сводится к поиску количества различных наборов из нулей и единиц длины 2^n. Учитывая, что никаких дополнительных ограничений на функции не накладывается, то необходимо найти число перестановок с повторения из 2 элементного множества $\{0,1\}$ размером 2^n. Искомое значение будет равно $2^{\left(2^n\right)}$.
9. 28
10. 2^7
11. 697
12. Столбец значений логической функции (1111), значения функции соответствуют наборам значений переменных в лексикографическом порядке.
13. (01011101)
14. (01101001)
15. (10001000)
16. (00000000)
17. (10111101)
18. а $\equiv$ в, г $\equiv$ д $\equiv$ е

В заданиях 19-24 необходимо привести левую часть формулы к правой (или наоборот) с помощью последовательного применения тождественных преобразований. Цепочка равносильностей приведена для задачи номер 19.

19. **Решение.**

$x \vee y$ (Закон двойного отрицания) $\equiv \neg\neg(x \vee y)$ (Закон де Моргана) $\equiv \neg(\neg x \& \neg y)$

В заданиях 25-27 необходимо преобразовать формулу к константе 1 с помощью последовательного применения тождественных преобразований.

25. **Решение.**

$x \to (y \to x \& y)$ (преобразование 2 импликаций) $\equiv \neg x \vee (y \to x \& y) \equiv \neg x \vee (\neg y \vee x \& y)$ (Закон ассоциативности) $\equiv (\neg x \vee \neg y) \vee x \& y$ (Закон де Моргана)$\equiv \neg(x \& y) \vee (x \& y)$ (Закон исключенного третьего)$\equiv 1$

В заданиях 28-31 приведен один из вариантов формулы, ответ не единственен. Верным ответом будет любая равносильная булева формула.

28. $\neg y \vee y$
29. $(\neg y \vee y) \& (\neg x \vee x)$
30. $x \vee y$
31. $x \vee \neg y \vee y$

В заданиях 32-38 необходимо построить двойственную функцию.

Указания. Двойственную формулу можно получить для любой формулы алгебры логики. Получим двойственные формулы для основных логических операций, таких как $\neg x$, $x \vee y$, $x \& y$, $x \to y$, $x \sim y$. Пусть, $f(x) = \neg x$, тогда двойственная функция $f^*(x) = \neg(\neg(\neg x)) \equiv$ $\equiv \neg(x) \equiv \neg x$. Так как $f^*(x) = f(x)$ функция отрицания является самодвойственной функцией. Двойственные функции для других операций приведены в таблице.

$f(x, y)$	$f^*(x, y)$
$x \& y$	$x \vee y$
$x \vee y$	$x \& y$
$x \to y$	$\neg(y \to x) \equiv \neg x \& y$
$x \sim y$	$x \oplus y$

Используя принцип двойственности для булевых функций можно находить двойственные функции для булевых формул, не прибегая к общему правилу. Пусть дана функция $f(x, y, z)$, не находящаяся в булевой форме. Для построения двойственной формулы необходимо:

a) привести формулу к булевому виду;
b) заменить константы 1 на 0, 0 на 1;
c) заменить операции дизъюнкции на конъюнкцию, конъюнкции на дизъюнкцию;
d) сохранить структуру формулы (исходный порядок действий).

32. $f(x, y, z) = \neg(x \vee y) \& (x \vee \neg(y \& z)) \equiv \neg x \& \neg y \& (x \vee \neg y \vee \neg z)$ - булева формула, $f^*(x, y, z) = \neg x \vee \neg y \vee x \& \neg y \& \neg z$ - двойственная функция, полученная по теореме двойственности для булевых формул.
33. $f^*(x, y, z) = x \vee \neg y \& z$
34. $f^*(x, y) = \neg x \& y \vee x \& \neg y$
35. $f^*(x, y) = (\neg x \vee y) \& (x \vee \neg y)$
36. $f^*(x, y, z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$
37. $f^*(x, y, z) = x \vee \neg y \& z$
38. $f^*(x, y) = \neg x \& y \vee x \& \neg y$

В задания 39 - 41 необходимо построить двойственную формулу и доказать равносильность с исходной формулой.

39. Самодвойственная
40. Самодвойственная
41. Не самодвойственная

К задачам раздела 2 Нормальные формы

В задания 42-51 как КНФ, так и ДНФ для каждой формулы не единственны. Формула может быть преобразована к КНФ и ДНФ независимо, либо после получения одной из форм приведена к другой с помощью дистрибутивного закона и других равносильных преобразований.

42. **Решение.**
$x \to (y \to z)$ (преобразование 2 импликаций) $\equiv \neg x \vee (y \to z) \equiv \neg x \vee (\neg y \vee z) \equiv \neg x \vee \neg y \vee z$
Полученная формула находится в КНФ (с одной элементарной дизъюнкцией) и ДНФ (с тремя элементарными конъюнкциями).
43. КНФ и ДНФ $\neg x \vee \neg y \vee y$
44. КНФ $(x \vee y \vee z) \& (x \vee \neg y \vee \neg z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$,
ДНФ $\neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee x \& \neg y \& \neg z \vee x \& y \& z$
45. КНФ $x \vee \neg y \vee z$, ДНФ $\neg x \& \neg y \vee \neg y \& \neg z \vee x \vee z$
46. КНФ $(\neg x \vee y) \& (\neg x \vee z) \& (\neg x \vee t)$, ДНФ $\neg x \vee \neg y \& z \& t$
47. КНФ $(x \vee y) \& (x \vee z)$, ДНФ $x \vee y \& z$
48. КНФ $(x \vee \neg y \vee z \vee \neg z) \& (y \vee \neg y \vee z \vee \neg z)$, ДНФ $x \& y \vee \neg y \vee z \vee \neg z$
49. КНФ и ДНФ $x \vee z$
50. КНФ $(x \vee y) \& (\neg x \vee y \vee z)$, ДНФ $x \& y \vee \neg x \& \neg y \vee x \& z$
51. КНФ $(x \vee \neg x) \& (x \vee \neg x \vee y)$, ДНФ $\neg x \vee \neg y \vee x \& y \vee \neg x \& \neg y$
52.

$f(x,y)$	СКНФ	СДНФ
$x \& y$	$(x \vee y) \& (\neg x \vee y) \& (x \vee \neg y)$	$x \& y$
$x \vee y$	$x \vee y$	$\neg x \& y \vee x \& \neg y \vee x \& y$
$x \to y$	$\neg x \vee y$	$\neg x \& \neg y \vee \neg x \& y \vee x \& y$
$x \sim y$	$(\neg x \vee y) \& (x \vee \neg y)$	$\neg x \& \neg y \vee x \& y$

В задания 53-57 необходимо преобразовать формулу к ДНФ (КНФ), затем используя алгоритмы из номеров 53 и 54 составить СДНФ (СКНФ).

53. **Решение.** Преобразуем формулу к ДНФ без повторения переменных в элементарных конъюнкциях. $x \to (y \to x) \equiv \neg x \vee \neg y \vee x$. Для получения СДНФ необходимо в каждую неполную (содержащую не все переменные) элементарную конъюнкцию конъюнктивно присоединить константу 1, выраженную через дизъюнкцию переменной и ее отрицания. $\neg x \vee \neg y \vee x \equiv \neg x \& (y \vee \neg y) \vee \neg y \& (x \vee \neg x) \vee x \& (y \vee \neg y)$ Внося переменные в скобки, мы получим ДНФ с полными элементарными дизъюнкциями и возможными повторами скобок, после устранения повторов будет получена искомая СДНФ. $\neg x \& (y \vee \neg y) \vee \neg y \& (x \vee \neg x) \vee$
$\vee x \& (y \vee \neg y) \equiv$ $\neg x \& y \vee \neg x \& \neg y \vee x \& \neg y \vee \neg x \& \neg y \vee x \& y \vee x \& \neg y$ $\equiv \neg x \& \neg y \vee \neg x \& y \vee$
$\vee x \& \neg y \vee x \& y$. СКНФ для данной функции не существует, так как она равносильна константе 1, для которой СКНФ не существует.
54. **Решение** Преобразуем формулу к КНФ без повторения переменных в элементарных дизъюнкциях.
$(x \vee y) \& (y \vee z) \& (x \sim z) \equiv (x \vee y) \& (y \vee z) \& (\neg x \vee z) \& (x \vee \neg z)$. Для получения СКНФ необходимо в каждую неполную элементарную дизъюнкцию дизъюнктивно присоединить константу 0, выраженную через конъюнкцию переменной и ее отрицания. $(x \vee y) \& (y \vee z) \& (\neg x \vee z) \& (x \vee \neg z) \equiv (x \vee y \vee (z \& \neg z)) \& (y \vee z \vee (x \& \neg x)) \& (\neg x \vee z \vee (y \& \neg y)) \&$

$\& (x \vee \neg z \vee (y \& \neg y))$. Вносся переменные в скобки, мы получим КНФ с полными элементарными дизъюнкциями и возможными повторами скобок, после устранения повторов будет получена искомая СКНФ. $\equiv (x \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee z) \&$
$\& (\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z) \& (x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee \neg y \vee \neg z) \equiv (x \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \neg z) \&$
$\& (x \vee \neg y \vee z) \& (x \vee \neg y \vee \neg z) \& (\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$. СДНФ строится из начальной формулы по примеру в номере 53. СДНФ $(x \& \neg y \& z) \vee (x \& y \& z)$.

55. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& \neg y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee \neg y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$.

56. СДНФ $x \& y \& z$,
СКНФ $(x \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee \neg y \vee z) \& (x \vee \neg y \vee \neg z) \& (\neg x \vee y \vee z) \& \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$.

57. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$.

В задания 58-65 необходимо составить СДНФ (СКНФ) используя таблицу истинности исходной формулы.

58. Для построения СДНФ и СКНФ необходимо построить таблицу истинности.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для построения СКНФ по таблице истинности используются строки, на которых функция принимает значения 0. По каждой строке формируется элементарная дизъюнкция переменных или их отрицаний, при этом переменная берется с отрицанием, если в выбранной строке она принимала значение 1. Первой строке соответствует элементарная дизъюнкция $x \vee y \vee z$, второй строке $x \vee y \vee \neg z$. Все полученные элементарные дизъюнкции объединяются операцией конъюнкции, образуя СКНФ $(x \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \neg z)$.

Построение СДНФ двойственно по отношению к построению СКНФ. Используются строки, на которых функция принимает значение 1. По каждой строке формируется элементарная конъюнкция переменных или их отрицаний, при этом переменная берется с отрицанием, если в выбранной наборе переменная имеет значение 0. Все полученные элементарные дизъюнкции объединяются операцией дизъюнкции, образуя СДНФ $(\neg x \& y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee (x \& \neg y \& \neg z) \vee (x \& \neg y \& z) \vee (x \& y \& \neg z) \vee (x \& y \& z)$.

59. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$

60. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$

61. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$

62. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$

63. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,

СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$

64. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$
65. СДНФ $\neg x \& \neg y \& \neg z \vee \neg x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& \neg z \vee \neg x \& y \& z \vee x \& y \& z$,
СКНФ $(\neg x \vee y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$

В заданиях 66-68 приведен один из вариантов формулы, ответ не единственен.

66. $(\neg x \& \neg y \& \neg z) \vee (x \& \neg y \& z)$
67. $(\neg x \& \neg y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee (x \& \neg y \& z) \vee (x \& y \& \neg z)$
68. $(x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee \neg y \vee z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$

В заданиях 70-75 необходимо представить контактную схему (схемы) в виде логической формулы и упростить их, либо проверить на эквивалентность (задание 72).

70. $x_1 \& x_2 \& x_3 \& x_4 \& x_6$
71. $x_1 \vee x_3 \& (x_2 \vee \neg x_4)$
73. $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
74. $x_1 \sim x_2$
75. $x_1 \& (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \& (x_2 \vee x_3 \vee x_5) \& (x_2 \vee x_4 \vee x_5) \& (x_3 \vee x_4 \vee x_5)$

К задачам раздела 3 Полнота системы булевых функций

В задачах 76-78 необходимо выразить операции отрицания и конъюнкции через суперпозицию предложенных функций. Допустимо применение операций подстановки и отождествления переменных.

76. **Решение**. Необходимо выразить отрицание и конъюнкцию через операцию стрелка Пирса. Рассмотрим таблицу истинности функции $x_1 \downarrow x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Функция принимает значение 1 на наборе (0,0) и значение 0 на наборе (1,1) что соответствует таблице истинности функции отрицания. Учитывая, что переменные принимают одинаковые значения на наборах, искомое выражение функции может быть получено с помощью отождествлением переменных. Тогда $\neg x_1 \equiv x_1 \downarrow x_1$.

Таблица истинности $x_1 \downarrow x_2$ отличается от таблицы истинности конъюнкции только порядком значений. Тогда конъюнкция может быть выражена путем замены одной или нескольких переменных их отрицанием. Заметим, что единица стоит на противоположном наборе (конъюнкция принимает значение 1 на наборе (1,1)), следовательно, отрицать необходимо обе переменные. Получим конъюнкцию (операция отрицания была выражена выше): $x_1 \& x_2 \equiv \neg x_1 \downarrow \neg x_2 \equiv (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$.

77. $\neg x_1 \equiv x_1 \mid x_1$ $x_1 \& x_2 \equiv (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$

78. $\neg x_1 \equiv \neg(x_1 \oplus x_1 \oplus x_1)$
$x_1 \& x_2 \equiv \neg((x_1 \to \neg(x_2 \oplus x_2 \oplus x_2) \oplus (x_1 \to \neg(x_2 \oplus x_2 \oplus x_2) \oplus (x_1 \to \neg(x_2 \oplus x_2 \oplus x_2))$

В задачах 79-81 необходимо составить многочлен Жегалкина методом неопределенных коэффициентов.

79. **Решение**. Для построения полинома Жегалкина необходима таблица истинности исходной функции. Каждой строке соответствует свой набор неопределенных коэффициентов, что позволяет однозначно построить полином для любого числа переменных.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Полином Жегалкина с неопределенными коэффициентами для 3 переменных имеет вид: $f(x,y,z) = a_{123}xyz \oplus a_{12}xy \oplus a_{13}xz \oplus a_{23}yz \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_0$. Подставляя определенный набор переменных, получаем набор коэффициентов, соединенных операцией $\oplus$, который равен значению функции на этом наборе. Подставим набор (0,0,0) в полином, тогда $f(0{,}0{,}0) = a_0 = 1$ Далее, необходимо последовательно подставлять наборы значений переменных в порядке роста числа элементов, принимающих значение 1. Поставим набор (0,0,0) и учитывая, что $a_0 = 1$, получим $f(0{,}0{,}1) = a_3 1 \oplus 1 = 0$ и $a_3 = 1$. Последовательно находим $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{123} = 0$. Искомый полином: $f(x, y, z) = x \,\&\, y \oplus y \,\&\, z \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1$.

80. $x \oplus y \oplus z \oplus 1$

81. $xyz \oplus xz \oplus y \oplus 1$

В задачах 82-87 необходимо установить принадлежность функций классам Поста по определению.

82. **Решение** Рассмотрим функцию $x_1 \to x_2$. Таблицу истинности для этой функции можно записать в виде вектора (1101).

По определению функция принадлежит классу T_0, если на наборе из нулей (0,0) принимает значение 0. Данная функция не принадлежит классу T_0. Функция принадлежит классу T_1, если на наборе из единиц (1,1) принимает значение 1. Функция $x_1 \to x_2$ принадлежит классу T_1.

Для проверки функции на принадлежность классу необходимо построить полином Жегалкина: $x_1 \to x_2 \equiv x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$. Функция не принадлежит классу L, так как ее полином содержит конъюнкцию переменных.

Функция принадлежит классу M и является монотонной в случае, если большим значениям переменных соответствуют большие или равные значения функции. Функция $x_1 \to x_2$ не является монотонной, так как $f(0,0) = 1$, а $f(1,0) = 0$.

Функция принадлежит классу S, если она является самодвойственной. Операция импликации не является самодвойственной.

№	$f(x_1, x_2)$	T_0	T_1	M	L	S
82	$x_1 \to x_2$	-	+	-	-	-
83	$x_1 \vee x_2$	+	+	+	-	-
84	$x_1 \downarrow x_2$	-	-	-	-	-
85	$x_1 \mid x_2$	-	-	-	-	-
86	$x_1 \sim x_2$	-	+	-	+	-
87	$x_1 \oplus x_2$	+	-	-	+	-

В задачах 88-92 функции не единственны.

88. z

89. $x \downarrow y$

90. $x \oplus 1$

91. y

92. x

В задачах 94-99 необходимо определить число различных функций от n переменных, содержащихся в различных классах Поста.

94. **Решение.** Различными являются функции, чьи таблицы истинности не совпадают. Учитывая, что функция должна принадлежать классам T_0 и T_1 значение функции на наборах $(0,0,...,0)$ и $(1,1,...,1)$ – 0 и 1 соответственно. Выбор остальных 2^n-2 значений функции ничем не ограничен. Тогда искомое количество функций равно $2^{(2^n-2)}$.

95. $2^{(2^{n-1}-1)}$

96. $2*\sum\limits_{k}^{n} C_n^k$, где $k \in \{x \mid x - \textit{нечетное}, x \le n\}$

97. n

98. n

99. 2

В задачах 100-104 необходимо проверить полноту системы логических функций, используя критерий Поста.

100. **Решение**. По критерию Поста множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов Поста. Поэтому необходимо проверить принадлежность каждой из функций всем классам Поста. Для этого составим общую таблицу.

	T_0	T_1	L	M	S
$x_1 \to x_2$	–	+	–	–	–
$x_1 \& x_2$	+	+	–	+	–

Система будет являться полной, если в каждом столбце сводной таблицы будет хотя бы один минус (система не содержится целиком ни в 1 из классов Поста). Все логические функции принадлежат классу T_1, следовательно, система является неполной по критерию Поста.

101. Неполная

102. Полная

103. Полная

104. Полная

В задаче 105 необходимо выразить через суперпозицию функций полных систем из задач 100-104 константы 0 и 1, отрицание и конъюнкцию.

105. **Указание**. Чтобы выразить требуемые операции можно воспользоваться рассуждениями, приведенными в указаниях к задаче 76. Так же можно воспользоваться замкнутостью классов Поста. Например, константа 0 может быть выражена из функций, которые принадлежат тем же классам Поста, что и она.

102) $$\begin{array}{l} \neg x_1 \equiv x_1 \to 0 \\ x_1 \& x_2 \equiv (x_1 \to (x_2 \to 0)) \to 0 \end{array}$$

103) Константы чаще всего выражаются с помощью операции отождествления переменных, либо их отрицаний. Так для выражения константы 1(0) необходима функция, которая принадлежит (не принадлежит) классу T_1 и не принадлежит (принадлежит) классу T_0. Тогда константа 1(0) выражается через функцию отождествлением всех ее переменных.

$1 \equiv f_2(x,x,x)$

$0 \equiv f_3(x,x,x)$

$x \& y \equiv f_3(f_3(x,x,x),x,y)$

$\neg x \equiv f_3(f_3(x,x,x), f_3(x,x,x), x)$

104)

$1 \equiv f_1(x, x)$

$\neg x \equiv f_2(x, x, x, x)$

$0 \equiv f_2(f_1(x, x), f_1(x, x), f_1(x, x), f_1(x, x))$

$x \,\&\, y \equiv f_2(f_1(f_2(x, x, x, x), y), f_1(f_2(x, x, x, x), y), f_1(f_2(x, x, x, x), y), f_1(f_2(x, x, x, x), y))$

В задачах 106-108 необходимо проверить являются ли базисами системы. Полная система логических функций называется базисом, если она перестает быть полной при исключении из неё любой функции.

106. Неполная, не базис
107. Базис
108. Базис

К задачам раздела 4 Формулы логики высказываний

110. Предложения а, г, е являются высказываниями, предложения б, в, д, ж не являются высказываниями

В задачах 111-116 формулой логики высказываний будут являться выражения, которые построены по правилу построения формул логики высказываний.

111. Формула логики высказываний
112. Формула логики высказываний
113. Формула логики высказываний
114. Не является формулой
115. Не является формулой
116. Не является формулой

В задачах 117-124 необходимо проверить являются ли формулами логики высказываний выражения, то есть, построены ли они по правилам построения формул логики высказываний.

117. Не является формулой
118. Формула логики высказываний
119. Формула логики высказываний
120. Формула логики высказываний
121. Не является формулой
122. Не является формулой
123. Не является формулой
124. Формула логики высказываний

В задачах 125-129 необходимо определить, сколько существует способов расставить скобки, чтобы выражение оставалось формулой логики высказываний.

125. 40
126. 152
127. 80
128. 80
129. 76

В задачах 130-135 для определения типа формулы необходимо составить таблицу истинности и по ней определить тип формулы. Если формула содержит хотя бы одно истинное (ложное) значение, то она является выполнимой(опровержимой). Формула принимающая только истинные(ложные) значения является тавтологией(противоречием).

130. Выполнимая, опровержимая
131. Выполнимая, опровержимая
132. Выполнимая, опровержимая
133. Выполнимая, опровержимая
134. Тавтология
135. Противоречие

В задачах 136-141 формула G является логическим следствием из формулы F, если формула G истинна при любых интерпретациях истинности высказывательных переменных, при которых истинна формула F (остальные возможные значения переменных не имеют значения).

136. Пусть формула $F = A$ принимает истинное значение. Формула G будет являться логическим следствием из формулы F, если при $A = И$ она принимает истинное значение. Подставим $A = И$ в формулу G, тогда $G = И \& B = B$. и формула G может быть ложной. Следовательно, формула G не является логическим следствием формулы F.
137. Формула G является логическим следствием из формулы F
138. Формула G не является логическим следствием из формулы F
139. Формула G не является логическим следствием из формулы F
140. Формула G является логическим следствием из формулы F
141. Формула G является логическим следствием из формулы F

Указание. В задачах 142-147 формулы логики высказываний равносильны, если их таблиц истинности совпадают.

151. Так как был получен верный ответ, то значение формулы логики высказываний истинно. Необходимо составить формулу и определить, при каких значениях высказывательных переменных формула будет истинна. Пусть А, В и С соответствуют высказываниям «Студент А изучал математическую логику», «Студент В изучал математическую логику», «Студент С изучал математическую логику» соответственно. Тогда, рассуждение можно записать в виде формулы: $F = (A \to C) \& \neg(B \to C)$.

Ответ был верен, значит, формула $F = И$. Построением таблицы истинности находим, что формула F принимает истинное значение только при $A = Л, B = И, C = Л$. Следовательно, студент В изучал математическую логику, а А и С – нет.

В задачах 152-154 необходимо выделить простые высказывания (не содержащие связок) записать рассуждение в виде формулы. Верным считается рассуждение, которое тождественно истинно при любых значения высказывательных переменных, то есть является тавтологией.

152. Обозначим высказывания «Я заплатил за работу по ремонту телевизора» и «Телевизор работает» как А и В, соответственно. Тогда рассуждение можно представить в виде формулы $F = (A \sim B) \& \neg B \to \neg A$. Предложения в рассуждениях соединяются конъюнктивно, выводу соответствует импликация.
Чтобы проверить верно ли рассуждение, составим таблицу истинности.

A	B	F
$Л$	$Л$	$И$
$Л$	$И$	$И$
$И$	$Л$	$И$
$И$	$И$	$И$

Формула логики высказываний тождественно истинна, следовательно, рассуждение верно.
153. Рассуждение неверно
154. Рассуждение неверно

К задачам раздела 5 Исчисление высказываний

В задачах 155-157 формула будет являться аксиомой исчисления высказываний, если она может быть получена с помощью некоторой подстановки из классических аксиом исчисления высказываний.

155. Аксиома ИВ, подстановка в $\mathcal{A}_1$: $(A \to (B \to A))$ $A \leftarrow (X \to Y)$, $B \leftarrow \neg Z$
156. Не является аксиомой ИВ
157. Не является аксиомой ИВ

В задачах 158-161 формула F является непосредственным следствием двух заданных формул G_1 и G_2, если она получена из G_1 и G_2 по правилу отделения с некоторой подстановкой.

158. **Решение**. По правилу отделения $\dfrac{A, A \to B}{B} MP$ формула $F = C$ выводима из формул $G_1 = A \to (B \to C)$ и $G_2 = A \to B$, если возможно найти подстановку, которая преобразует формулы правила отделения к G_1 и G_2 соответственно.

Предположим, что формула $F = C$ получена по этому правилу, тогда из формулы A подстановкой должна быть получена формула $G_1 = A \to (B \to C)$, а из $A \to B$ формула $G_2 = A \to B$, либо наоборот.

Пусть $G_2 = A \to B$ получена из $A \to B$ с помощью подстановки $A \leftarrow A$, $B \leftarrow B$, используя эту же подставноку для формулы A, мы не сможем получить формулу $G_1 = A \to (B \to C)$, следовательно такая подстановка не походит.

Пусть формула $G_1 = A \to (B \to C)$ получена из $A \to B$ с помощью подстановки $A \leftarrow A$, $B \leftarrow (B \to C)$, тогда формула $G_2 = A \to B$ должна быть получена из формулы A, с помощью этой же подстановки, что невозможно.

Так как невозможно найти подстановку, с помощью которой возможно получить формулу $F = C$, то она не является логическим следствием формул G_1 и G_2.

159. Является
160. Является
161. Является

В задачах 162-164 последовательность формул $F_1, F_2, ..., F_n$ будет являться доказательством (выводом) формулы в ИВ, если в этой последовательности каждая формула является гипотезой или непосредственным следствием двух предшествующих ей формул. При этом формула F_n должна совпадать с выводимой формулой.

162. **Решение.** Рассмотрим формулу $F_1 = A \to (A \vee B)$. Предположим, что она является гипотезой некоторого вывода, тогда из $F_1 = A \to (A \vee B)$ должна быть выводима последняя формула последовательности, то есть $A \to (A \vee B)$. То есть, из формулы F_1 можно построить вывод $A \to (A \vee B) \vdash A \to (A \vee B)$.

Указание. В случае, когда последовательность формул длиннее возможно применение правила отделения к некоторому набору гипотез.

163. Является
164. Является

В задачах 165-167 необходимо доказать производные правила вывода в ИВ, при доказательстве допускается применение аксиом ИВ, правила отделения и теоремы дедукции.

165. **Решение.** Построим доказательство для правила транзитивности $A \to B, B \to C \vdash_{\mathrm{L}} A \to C$.

Для удобства формулы последовательности вывода располагаются друг под другом в столбик, а справа указывается на каком основании формула включена в вывод.

1	$A \to B$	гипотеза
2	$B \to C$	гипотеза
3	A	гипотеза
4	B	МР 3,1
5	C	МР 4,2
6	$A \to B, B \to C, A \vdash_{\mathrm{L}} C$	1-5
7	$A \to B, B \to C \vdash_{\mathrm{L}} A \to C$	Теорема дедукции

В задачах 168-179 вывод формулы строится на основе гипотез, аксиом ИВ, правил вывода и теоремы дедукции.

168. **Решение** Построим вывод для формулы $\vdash A \to A$

1	$(A \to ((A \to A) \to A))$	A_1: $B \leftarrow (A \to A)$
2	$((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$	A_2: $B \leftarrow (A \to A)\,; C \leftarrow A$
3	$((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	МР 1,2
4	$(A \to (A \to A))$	A_1: $B \leftarrow A$
5	$(A \to A)$	МР 4,3

В задачах 180, 181 необходимо проверить правильность рассуждений построением вывода. При проверке рассуждения с помощью выхода необходимо определить множество гипотез и формулу, для которой строится вывод.

180. **Решение**. Пусть А, В и С соответствуют высказываниям «Все стороны четырехугольника равны между собой», «четырехугольник является ромбом», «диагонали четырехугольника перпендикулярны», тогда множество гипотез состоит из формул $A \to B, B \to C$ и A. Вывод необходимо построить для формулы C.

Построим вывод для формулы $A \to B, B \to C, A \vdash C$

1	$A \to B$	гипотеза
2	$B \to C$	гипотеза
3	A	гипотеза
4	B	МР 3,1
5	C	МР 4,2
6	$A \to B, B \to C, A \vdash C$	1-5

Вывод построен, следовательно, формула C выводима в ИВ из набора гипотез и рассуждение верно.

181. Рассуждение верно

К задачам раздела 6 Методы проверки выводимости формул в исчислении высказываний

В задачах 182-192 необходимо проверить выводимость в ИВ формул методом Куайна и методом редукции. Результаты проверки этими методами должны совпадать.

182. **Решение** Метод Куайна строится на предположении о значении некоторых переменных и последовательной проверке истинности функции при таких значениях переменной (например, формула может быть всюду истинна при каком-то определенном значении переменной).

Пусть $A=0,$ тогда $(0\to B)\vee(B\to 0)\equiv 1\vee B\equiv 1$. Следовательно, при $A=0$ формула истинна при любых значениях B. Пусть $A=1,$ тогда $(1\to B)\vee(B\to 1)\equiv B\vee 1\equiv 1$. Следовательно, при $A=1$ формула истинна при любых значениях B.

Поскольку формула истинна при любых значениях A и B, то формула является тавтологией и выводима в исчислении высказываний.

Метод редукции строится на предположении о том, что формула принимает ложное значение на некотором наборе переменных. Результатом метода является набор значений переменных, на котором формула ложна, либо противоречие, которое доказывает, что формула всюду истинна.

Пусть $(A\to B)\vee(B\to A)=0,$ тогда $(A\to B)=0$ и $(B\to A)=0,$ так как дизъюнкция ложна только на одном наборе переменных $(0\vee 0=0)$. Тогда из первой скобки получаем, что $A=1, B=0,$ из второй скобки $A=0, B=1.$ Получено противоречие, так как одновременно переменные не могут иметь различные значения. Следовательно, предположение неверно и формула всюду истинна, а значит выводима в ИВ.

Метод Куайна применим для любого типа формул, метод редукции оптимален для формулах с большим числом импликаций и/или дизъюнкций.

183. Формула выводима в ИВ
184. Формула выводима в ИВ
185. Формула выводима в ИВ
186. Формула выводима в ИВ
187. Формула выводима в ИВ
188. Формула выводима в ИВ
189. Формула выводима в ИВ
190. Формула выводима в ИВ
191. Формула выводима в ИВ
192. Формула выводима в ИВ

В задачах 194-199 необходимо проверить выводимости в ИВ методами Куайна, редукции и резолюций.

194. **Решение**. Метод резолюций работает с предложения. Необходимо получить предложения из каждой гипотезы и отрицания вывода отдельно, затем объединить их в общее множество.

Необходимо доказать выводимость $\vdash\ (A\to B)\to((\neg A\to B)\to B)$, множество гипотез пустое, но выводимая формула завершается импликацией (последнее действие). В таких случаях можно применить теорему дедукции максимально возможное число раз. Тогда:

	$\vdash\ (A\to B)\to((\neg A\to B)\to B)$	
1	$A\to B\vdash\ (\neg A\to B)\to B$	По ТД
2	$A\to B,\ \neg A\to B\vdash\ B$	По ТД

Теперь достаточно доказать выводимость B из набора гипотез, чтобы доказать выводимость всей формулы.

Преобразуем гипотезы и отрицание выводу к виду предложений (дизъюнкция высказывательных переменных и их отрицаний):

1. $A \to B = \neg A \vee B,$
2. $\neg A \to B = A \vee B,$
3. $\neg B$

Множество предложений становится набором гипотез для вывода противоречия, которым является пустая формула. Резольвирование возможно между 2 предложениями, содержащими контрарные литералы (одну и ту же переменную с отрицанием и без). Процесс резольвирования продолжается пока не получена пустая формула, либо невозможно получить новую резольвенту.

$\neg A \vee B,\ A \vee B,\ \neg B \vdash \varnothing$

1	$\neg A \vee B$	гипотеза
2	$A \vee B$	гипотеза
3	$\neg B$	гипотеза
4	B	ПР 1,2 (A)
5	$\varnothing$	ПР 3,4
6	$\neg A \vee B,\ A \vee B, \neg B \vdash \varnothing$	1-5

Пустая формула получена, следовательно, формула $A \to B, \neg A \to B \vdash B$ выводима в ИВ, применяя теорему дедукции в обратную сторону, получаем, что исходная формула $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$ так же выводима в ИВ.

195. Формула выводима в ИВ
196. Формула выводима в ИВ
197. Формула выводима в ИВ
198. Формула выводима в ИВ
199. Формула не выводима в ИВ

В задачах 200-214 необходимо проверить правильность рассуждений, используя методы проверки выводимости формул в ИВ.

200. Рассуждение неверно
201. Рассуждение неверно
202. Рассуждение неверно
203. Рассуждение неверно
204. Рассуждение верно
205. Рассуждение неверно
206. Рассуждение верно
207. Рассуждение неверно
208. Рассуждение верно
209. Рассуждение неверно
210. Рассуждение верно
211. Рассуждение неверно
212. Рассуждение верно
213. Рассуждение верно
214. Рассуждение неверно

К задачам раздела 7 Предикаты и операции с предикатами

В задачах 216-222 необходимо перевести предикаты на русский язык и определить истинность полученных выражений.

216. 11 – простое число. Истина.
217. 2 – четное и простое число. Истина.
218. Любое натуральное число четное и является делителем 6. Ложь.
219. Для любого натурального числа верно следующее, если число нечетное, то оно не делится на 2. Истина.
220. Для любого натурального числа, верно, что оно четное и для любого второго натуральное число выполняется отношение, если второе число делится на первое, то второе число так же является четным. Ложь.
221. Для любого натурального числа верно следующее, если это число нечетное, то для любого второго числа, верно, что если оно простое, то оно не делится на первое. Ложь.
222. Для любого натурального числа, верно, что если оно простое, то существует такое натуральное четное число, которое делится на первое. Истина.

В задачах 223-232 необходимо установить истинность предикатов.

223. **Решение**. Перевод $\forall nD(n)$ на русский язык: «Любое натуральное число кратно 10». Высказывание ложно, так как, например, натуральное число 2 не кратно 10.
224. Истина
225. Истина
226. Истина
227. Истина
228. Истина
229. Ложь
230. Ложь
231. Ложь
232. Истина

В задачах 233-241 необходимо установить область истинности предикатов. Область истинности предиката – множество значений (упорядоченных наборов) свободной(-ых) переменных из предметной области, при которых предикат принимает истинное значение.

233. **Решение**. Пусть дан предикат $\exists xP(x,y) \vee \exists xQ(y,x)$. Переменная x связана квантором существования, следовательно, область истинности определяется по переменной y. Пусть Y, Y_1, Y_2 множества значений предметных переменных, при которых истинным является предикат целиком, первая часть дизъюнкции предикатных символов и вторая соответственно.

Чтобы определить область истинности необходимо найти Y как $Y = Y_1 \cup Y_2$. Знак между множествами Y_1 и Y_2 напрямую зависит от знака, соединяющего предикатные символы. Дизъюнкция верна, когда верна хотя бы одна из составляющих, следовательно, достаточно объединить множества.

Множество Y_1 можно определить полным перебором значений переменной y с учетом особенности переменной x. Так как переменная x связана квантором существования для каждого нового значения y достаточно подобрать хотя бы одно значение x, при котором часть предиката (или весь предикат) верна. Тогда $Y_1 = R$, так как для любого вещественного y мы найдем x, такой что $y \le \frac{10-x}{2}$.

Аналогично находим $Y_2 = R \setminus \{0\}$. Тогда $Y = Y_1 \cup Y_2 = R$.

234. $Y = R \setminus \{0\}$.

235. $Y = R$

236. $Y = R$

237. $XY = \{(x, y) \mid x, y \in R\, u\, x * y \neq 6\}$

238. **Решение**. Найдем область истинности предиката $\exists y(P(x, y) \,\&\, Q(y, x))$. В отличии от предыдущего примера при поиске истинности такого предиката невозможно рассматривать 2 предиката отдельно. Область истинности данного предиката определяется свободной переменной x. Так как предикатные символы соединены конъюнкцией необходимо решить систему $\begin{cases} x + 2y \leq 10, \\ x * y = 6 \end{cases}$ относительно x.

Так как предикат верен, когда значение y существует, выразим его из второго равенства и подставим в неравенство, тогда область истинности задается неравенством $x + 2\dfrac{6}{x} \leq 10$. Решив неравенство, получим искомую область истинности

$X = \{x \mid x \in [-5 - \sqrt{13}; -5 + \sqrt{13}]\}$

239. $X = R$

240. $Y = \{0\}$

241. $X = R \setminus \{0\}$.

В задачах 242-257 необходимо записать предикат, область истинности которого соответствует заданной. Ответ не единственный.

242. **Решение**. Предикат должен быть верен исключительно при $x = 0$. Так как область истинности по переменной x, то другие переменные должны быть связанными. Число 0 не меняет значение суммы, поэтому можно использовать предикат $S^3(x, y, z) = "x + y = z"$ и отождествление переменных. Получим предикат $S^3(x, y, y) = "x + y = y"$, который будет принимать значение истина для любого y только при $x = 0$. Искомый предикат $\forall y S(x, y, y)$.

243. $\forall y P(x, y, y)$

244. **Решение**. Число 2 можно получить как сумму двух единиц. Предикат, верный при $x = 1$ получен в задаче 243. Тогда предикат верный только при $x = 2$ можно представить как конъюнкцию двух предикатов. С помощью предиката $S^3(y, y, x) = "y + y = x"$ выразим x как сумму двух одинаковых чисел, а используя предикат $\forall z P(y, z, z)$ «установим» значение переменной y. Учитывая область истинности по переменной x, используем конъюнкцию и квантор существования по переменной y, получим предикат $\exists y(S(y, y, x) \,\&\, \forall z P(y, z, z))$.

245. $\exists y S(y, y, x)$

246. $\forall y \neg S(y, y, x)$

247. $\exists z(S(x, z, y) \,\&\, \forall t P(z, t, t))$

248. $\exists z S(x, z, y)$

249. $\forall z \neg S(x, z, y)$

250. $\exists z P(x, z, y)$

251. $\forall z(\neg P(x, z, x) \vee \exists t \neg P(z, t, t))$

252. $\exists k P(x, k, z) \,\&\, \exists t P(y, t, z)$

253. $\exists k P(z, k, x) \,\&\, \exists t P(z, t, y)$

254. $\forall x \forall y \exists z(S(x, y, z) \,\&\, S(y, x, z))$

255. $\forall x\forall y\forall z\exists k\exists m\exists t(S(x,y,k)\,\&\,S(k,z,t)\,\&\,S(y,z,m)\,\&\,S(x,m,t))$

256. $\exists x\exists y\exists z(S(x,y,z)\,\&\,\forall tS(z,t,t))$

257. **Указание**. Разность равно 0, только если уменьшаемое и вычитаемое равны

В задачах 258-266 необходимо определить область значений и записать в логической символике утверждения и их отрицания. Ответ не единственен.

258. **Решение**. Функция возрастает на интервале, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Пусть $\Omega = R,$ введем терм $f(x),$ вычисляющий значение некоторой функции $f(x)$ и предикаты $P(x,y) = "x < y"$ и $Q(x) = "a_0 < x < a_1"$. Тогда, предикат $\forall x\forall y(Q(x)\,\&\,Q(y)\,\&\,P(x,y) \to P(f(x), f(y))$ истинен только, когда вычисляемая функция $f(x)$ возрастает.

Отрицанием утверждения является утверждение "функция убывает или не меняет своего значения". То есть существует пара переменных, для которой большему значению аргумента соответствует меньшее или равное значение функции. Тогда, предикат можно представить как $\exists x\exists y(Q(x)\,\&\,Q(y)\,\&\,P(x,y)\,\&\,\neg P(f(x), f(y))$. Можно заметить, что этот предиката равносилен отрицанию первого предиката.

259. $\Omega = R,\ f(x), O(x,y) = "x = y", Q(x) = "a_0 < x < a_1"$
$\forall x(Q(x) \to \exists yO(f(x),y)),\ \exists x(Q(x)\,\&\,\forall y\neg O(f(x),y))$

260. $\Omega = U, A(x) = "x \in A", B(x) = "x \in B"$
$\forall x(A(x) \to B(x))\,\&\,\neg\forall x(B(x) \to A(x)),\ \exists x(A(x)\,\&\,\neg B(x)) \vee \forall x(B(x) \to A(x)))$

261. $\Omega = R,\ f(x) = f`(x), E(x,y) = "x = y"$
$\exists x(E(f(x),0)\,\&\,E(x,x_0)),\ \forall x(\neg E(f(x),0) \vee \neg E(x,x_0))$

262. $\Omega = R,\ f(x), P(x,y) = "x \le y", Q(x) = "a_0 \le x \le a_1"$
$\forall x(Q(x) \to P(f(x), f(x_0))),\ \exists x(Q(x)\,\&\,\neg P(f(x), f(x_0)))$

263. $\Omega = A, P(x,y) = "(x,y) \in \rho"$
$\forall x\forall y(P(x,y) \to P(y,x)),\ \exists x\exists y(P(x,y)\,\&\,\neg P(y,x))$

264. $\Omega = R,\ f(x), E(x,y) = "x < y"$
$\exists y\forall xE(f(x),y),\ \forall y\exists x\neg E(f(x),y)$

265. $\Omega -$ множество булевых функций от k переменных, $f(x) = x^*$ ($f(x)$ терм, преобразующий булеву функцию x в двойственную ей функцию), $P(x,y) = "x \equiv y"$ (предикат определен для двух функций, истинен только, если две булевы x и Y функции имеют одинаковые табл истинности)

$P(x, f(x))$, $\neg P(x, f(x))$

266. $\Omega = U, A(x) = "x \in A", B(x) = "x \in B"$
$\forall x(A(x) \sim \neg B(x)),\ \exists x(A(x) \sim B(x))$

В задачах 267-285 записать в логической символике утверждения с использованием заданных предикатов.

267. $\forall x\exists m\exists p(P(m,x)\,\&\,W(m)\,\&\,P(p,x)\,\&\,M(p))$

268. $\forall x\exists b\exists r(P(r,x)\,\&\,W(b)\,\&\,P(b,r))$

269. **Решение**. Необходимо перевести в форму предиката утверждение «х – прабабушка». Прабабушка – женщина, у которой есть правнук или правнучка, то есть ребенок ее внука или внучки. Тогда, можно сказать, что человек является прабабушкой, если существуют люди, которые соединяют ее с правнуками.

Тогда предикат $W(x) \& \exists d \exists v \exists pv(P(x,d) \& P(d,v) \& P(v,pv))$ будет истинен, только если человек является прабабушкой.

270. $M(x) \& \exists d \exists v \exists pv(P(x,d) \& P(d,v) \& P(v,pv))$

271. **Указание**. Деверь – брат мужа

272. **Указание** Золовка – сестра мужа

273. **Указание** Теща – мать жены

274. **Указание** Свекор – отец мужа

275. **Указание** Зять – муж дочери или муж сестры мужа (жене)

276. **Указание** Сноха – жена сына (отцу)

282. **Указание** Двоюродная тетя – дочь двоюродных бабушки/дедушки (либо жена двоюродного дяди)

283. **Указание** Двоюродный племянник – сын двоюродной сестры (брата), двоюродная сестра (брат) – дочь (сын) брата/сестры отца или матери

284. **Указание** Внучатая племянница – дочь двоюродной племянницы или племянника

285. **Указание** Племянница – дочь брата или сестры

К задачам раздела 8 Формулы и термы в исчислении предикатов

В задачах 286-290 необходимо указать, является ли выражение термом. Термом является выражение, содержащее только функциональные символы и предметные переменные, при этом размерность функциональных символов должна соблюдаться.

286. **Решение**. Является термом, так как это композиция термов.
287. Является термом
288. Не является термом, так как не соблюдена размерность функционального символа g^2
289. Не является термом
290. Не является термом

В задачах 291-294 необходимо указать, является ли выражение формулой.

291. **Решение**. Является формулой, поскольку в предикатный символ Q^3 переданы термы, определенные на предметной области.
292. Является формулой
293. **Решение** Не является формулой, так как в предикатный символ Q^3, определенный на предметной области, передано логическое значение предиката P^1. Предикатный символ Q^3 может принимать только переменные, определенные на предметной области, либо функциональные символы, которые возвращают в качестве результата элемент из предметной области.
294. Не является формулой

В задачах 295-309 необходимо указать, будет ли выражение формулой исчисления предикатов, и определить в формулах свободные и связанные вхождения переменных.

295. **Решение**. Выражение $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ является формулой, так как предикатный символ P^4 принимает четыре терма (переменные x_1, x_2, x_3, x_4), при этом на переменные x_1, x_2, x_3 последовательно наложены кванторы. Переменные x_1, x_2, x_3 являются связанными, так как на них наложены соответствующие кванторы. Переменная x_4 является свободной.
296. Формула. В первой части переменная x свободна, переменная y связанная. Во второй части предиката переменная x свободная, y связанная
297. Формула. Переменные x и y связанные, свободных переменных нет
298. Выражение не является формулой
299. Формула, все переменные свободные
300. Выражение не является формулой
301. Выражение не является формулой
302. Формула. Переменные x и y связанные, z - свободная
303. Формула, переменных нет
304. Выражение не является формулой
305. Формула. Переменные x и y связанные, z - свободная
306. Формула, все переменные связанные
307. Формула. Переменные x и z связанные, y - свободная
308. Выражение не является формулой
309. Формула. Переменная x связанная, y свободная

В задачах 310-313 необходимо указать все подформулы формул исчисления предикатов.

310. $Q^2(f^1(x), g^2(x,y))$

$\exists x Q^2(x,y) \to \neg(\forall x(P^1(g^2(x,y))) \,\&\, \forall z P^1(z)), \exists x Q^2(x,y), Q^2(x,y),$

311. $\neg(\forall x(P^1(g^2(x,y))) \,\&\, \forall z P^1(z)), \forall x(P^1(g^2(x,y))) \,\&\, \forall z P^1(z),$

$\forall x(P^1(g^2(x,y))), P^1(g^2(x,y)), \forall z P^1(z), P^1(z)$

312. $\forall x P^2(x,y) \to \forall z Q^2(x,z), \forall x P^2(x,y), P^2(x,y), \forall z Q^2(x,z), Q^2(x,z)$

313. $\neg(\exists z Q^2(z,z) \vee R^3(x,y,z)), \exists z Q^2(z,z) \vee R^3(x,y,z), \exists z Q^2(z,z), Q^2(z,z), R^3(x,y,z)$

В задачах 314-322 необходимо установить, будет ли выражение предикатом, определенным на множестве вещественных чисел, определить местность и область истинности, изобразить область истинности графически.

314. Одноместный предикат, область истинности $X = \{-2\}$
315. Ложный нульместный предикат
316. Одноместный предикат, область истинности $X = \{-2{,}2\}$
317. Истинный нульместный предикат
318. Двуместный предикат, область истинности прямая $y = x - 1$
319. Выражение не является предикатом
320. Одноместный предикат, область истинности $X = \{-1\}$
321. Двуместный предикат, область истинности – область под прямой $y = \frac{x}{2}$
322. Одноместный предикат, область истинности $X = R$

В задачах 323-327 пользуясь знаками арифметических операций (+, ×) и отношений (<, =), записать в виде формулы исчисления предикатов высказывания и определить их истинность.

323. **Решение**. Обозначим операции суммы и умножения через термы $f_1^2(x,y) = x + y$ и $f_2^2(x,y) = x * y$, а отношения зададим предикатами $P^2(x,y) = "x < y"$ и $Q^2(x,y) = "x = y"$. Введем предметную константу $a_0 = 0$, тогда высказывание можно записать как $\forall x \forall y (Q(f_2(x,y), a_0) \to (Q(x,a_0) \vee Q(y,a_0)))$. Этот предикат принимает значение истина в данной интерпретации.

324. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$

$\neg\exists x \exists y (Q(f_1(x,y).a_1) \,\&\, Q(f_1(f_2(a_2,x), f_2(a_2,y)), a_0)) = 1$

325. $a_0 = 0$

$\forall x (P(a_0,x) \to \exists y (P(a_0,y) \,\&\, Q(f_2(y,y),x) \,\&\, \forall z (Q(f_2(z,z),x) \to Q(y,z)))) = 1$

326. $a_0 = 0, a_1 = -4$

$\exists x (P(a_0,x) \,\&\, Q(f_1(f_2(x,x),a_1),a_0) \,\&\, \forall y (Q(f_1(f_2(y,y),a_1),a_0) \to Q(x,y))) = 1$

327. $a_0 = 0, a_1 = 1$

$\forall x \forall y (P(x,y) \,\&\, \neg Q(y,a_0) \to \exists z (Q(f_2(y,z),x)) \,\&\, P(z,a_1)) = 0$

В задачах 328-330 необходимо записать в виде предиката выражения. Определим на множестве R предикат $P^2(x,y) = "x < y"$ и термы $f_1^1(x) = |x|$, $f_2^2(x,y) = x + y$, $f_3^2(x,y) = x - y$.

328. $a_1 = 5$
$P(f_3(f_1(f_2(x,y)),a_1), f_3(x,x))$

329. $P(f_2(f_1(x), f_1(y)), f_1(f_2(x,y)))$

330. $a_1 = 3, a_2 = 7$
$P(f_1(f_3(x,a_1)), f_2(a_2,y))$

331. Для выполнения задания необходимо использовать термы и предикат, отличные от предложенных в задачах 328-330.

К задачам раздела 9 Логические эквивалентности с кванторами

332. $\Omega = Z, P(x,y) = "x + y = 0"$
$\forall x \exists y P(x,y) = 1,\ \exists y \forall x P(x.y) = 0$

В задачах 334-338 необходимо привести формулу к предваренной форме равносильными преобразованиями

334. **Решение**. В предикате $\neg \exists x \forall y \exists z \forall u A(x,y,z,u)$ все переменные связанные. Для получения предваренной формы необходимо избавиться от отрицания перед кванторами. Используя закон де Моргана четыре раза, получаем искомую форму предиката. $\neg \exists x \forall y \exists z \forall u A(x,y,z,u) \equiv \forall x \exists y \forall z \exists u \neg A(x,y,z,u)$

335. **Решение**. Предикат содержит 2 предикатных символа, чтобы получить предваренную форму необходимо вынести все кванторы вперед, а конъюнкцию предикатных символов заключить в общую скобку.

Переменные, на которые наложены кванторы, являются связанными, то есть при проверке происходит полный перебор элементов из предметной области. Так как порядок перебора не изменяет результата, то можно переименовать связанные переменные при предикатном символе B, чтобы воспользоваться законами ограничения действия. Тогда предваренную форму можно получить как:

$$\exists x \forall y A(x,y) \,\&\, \exists x \forall y B(x,y) \equiv \exists x \forall y A(x,y) \,\&\, \exists k \forall t B(k,t) \equiv \exists x \forall y \exists k \forall t (A(x,y) \,\&\, B(k,t))$$

336. $\forall x \exists y \exists k \forall t (\neg A(x,y) \vee B(k,t))$

337. $\exists x \forall y \forall t (A(x,y) \vee B(x,t))$

338. $\forall x \exists y \forall k \exists t (\neg A(x,y) \vee B(k,t))$

В задачах 339-351 записать инверсию формулы в предваренной форме. Ответ не единственный.

339. $\neg(\exists x \neg A(x)) \equiv \forall x \neg\neg A(x) \equiv \forall x A(x)$

340. $\forall x (\neg A(x) \vee B(x))$

341. $\exists x A(x)$

342. $\exists x \exists y (A(x) \,\&\, \neg B(y))$

343. $\forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee \neg C(x))$

344. $\exists x (A(x) \,\&\, \neg B(x))$

345. $\forall x (A(x) \oplus B(x))$

346. $\exists x \forall y (\neg A(x) \,\&\, \neg B(y))$

347. $\exists x \forall y ((A(x) \,\&\, \neg B(x)) \vee \neg C(y) \vee D(y))$

348. $\exists x \forall y \exists z (A(x,y,z) \,\&\, \neg B(x,y,z))$

349. $\forall a \exists b \forall k \exists t (Q(a,b) \,\&\, \neg Q(k,t) \,\&\, \neg R(x,y))$

350. $\forall a \exists b \exists k \forall t (Q(a,b) \,\&\, P(k,t) \,\&\, \neg Q(x,y))$

351. $\forall a \forall b \forall t (Q(a,y) \,\&\, \neg Q(x,b) \,\&\, \neg R(t,y))$

к задачам раздела 10 Выводимость формул в исчислении предикатов

352. **Решение**. Построим вывод формулы $\forall x\forall yA(x,y) \vdash \forall y\forall xA(x,y)$ в виде конечной последовательности формул. Каждая формул последовательности это или аксиома, или гипотеза, или логическое следствие по правилам вывода из предыдущих формул последовательности.

1	$\forall x\forall yA(x,y)$	гипотеза
2	$\forall x\forall yA(x,y) \to \forall yA(x,y)$	P_1
3	$\forall yA(x,y)$	MP 1,2
4	$\forall yA(x,y) \to A(x,y)$	P_1
5	$A(x,y)$	MP 3,4
6	$\forall xA(x,y)$	$\forall^+$ 5
7	$\forall y\forall xA(x,y)$	$\forall^+$ 6

В задачах 357-367 необходимо определить тип формулы (выполнимая, истинная, общезначимая). Общезначимая формула истина при любых значениях переменных (независимо от предметной области и определения предикатов). Истинным предикат является, если он истинен в данной интерпретации. Выполнимый предикат истинен хотя бы в одной интерпретации на одном наборе переменных.

357. **Решение**. Предположим, что $\forall xP(x) \to P(y) = 0$ для некоторой интерпретации предикатного символа P и предметной области Ω. Тогда $\forall xP(x) = 1$ и $P(y) = 0$ одновременно. Предикат $\forall xP(x)$ может быть истинным только в том случае, если предикат $P(x)$ принимает значение 1 при любом $x \in \Omega$. По условию должен существовать некоторый $y \in \Omega$, такой что $P(y) = 0$, что противоречит первому утверждению и истинности предиката $P(x)$ на всей предметной области. Следовательно, предположение о ложности формулы $\forall xP(x) \to P(y)$ неверно и она принимает значение истина при любой интерпретации предикатного символа P и предметной области Ω. Так как формула принимает истинные значения независимо от интерпретации предметной области и предикатных символов, она является общезначимой.

358. **Решение** Пусть $P(y) \to \forall xP(x) = 0$, тогда $P(y) = 1$ и $\forall xP(x) = 0$. Такое возможно, если предикат P принимает значение истина только для некоторых элементов из предметной области. Следовательно, предположение верно и формула общезначимой не является.

Установить истинность формулы невозможно, так как отсутствует интерпретация предиката P и предметной области Ω. Для $P(y) \to \forall xP(x) = 1$ достаточно, чтобы $P(y) = 0$ для некоторого значения переменной $y \in \Omega$. Можно интерпретировать P как тождественно ложный предикат, тогда формула принимает истинное значение в этой интерпретации. Так как существует интерпретация, в которой формула принимает значение истина на некотором наборе переменных, то она является выполнимой.

359. Выполнимая
360. Выполнимая
361. Общезначимая
362. Выполнимая
363. Выполнимая
364. Выполнимая
365. Выполнимая
366. Выполнимая
367. Выполнимая

К задачам раздела 11 Метод резолюций для исчисления предикатов

В задачах 368-377 необходимо проверить общезначимость формулы, используя метод резолюций. По теореме Гёделя формула доказуема в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда она является общезначимой. В задачах 368, 376 и 377 приведены различные результаты применения метода резолюций.

368. **Решение**. Необходимо доказать выводимость $\vdash \forall x Q(x,y) \to (\exists y Q(x,y) \vee \exists x R(x,y))$. Множество гипотез пустое, но выводимая формула завершается импликацией (последнее действие), поэтому возможно применение теоремы дедукции для предикатов:

$\vdash \forall x Q(x,y) \to (\exists y Q(x,y) \vee \exists x R(x,y))$

1. $\forall x Q(x,y) \vdash \exists y Q(x,y) \vee \exists x R(x,y)$ По ТД

Теперь достаточно доказать выводимость $\exists y Q(x,y) \vee \exists x R(x,y)$ из набора гипотез, чтобы доказать выводимость всей формулы.

Метод резолюций в ИП подобен методу резолюций в ИП, он так же работает с предложения. Необходимо получить предложения из каждой гипотезы и отрицания вывода отдельно, затем объединить их в общее множество. Для этого необходимо:

1. Каждую гипотезу отдельно и отрицания вывода привести к предваренной форме;
2. Элиминировать кванторы существования и всеобщности;
3. Привести каждую формулу к форме КНФ, считая предикатные символы самостоятельными логическими переменными;
4. Составить множество предложений, путем элиминации конъюнкций в каждой из полученных КНФ.

Преобразуем гипотезы и отрицание вывода к предваренной форме:

1. Гипотеза $\forall x Q(x,y)$ находится в предваренной форме

3. $\neg(\exists y Q(x,y) \vee \exists x R(x,y)) \equiv \neg\exists y Q(x,y) \,\&\, \neg\exists x R(x,y) \equiv \forall y \neg Q(x,y) \,\&\, \forall x \neg R(x,y) \equiv$
$\equiv \forall t \neg Q(x,t) \,\&\, \forall k \neg R(k,y) \equiv \forall t \forall k(\neg Q(x,t) \,\&\, \neg R(k,y))$

Кванторов существования формулы не содержат, кванторы всеобщности удаляем без изменений в формуле. Получаем набор гипотез и отрицание вывода без кванторов $Q(x,y)$, $\neg Q(x,t) \,\&\, \neg R(k,y)$. Обе формулы находятся в форме КНФ, разделяем формулу, полученную из отрицания вывода на 2 самостоятельных предложения.

Множество предложений становится набором гипотез для вывода противоречия, которым является пустая формула. Резольвирование возможно между 2 предложениями, содержащими контрарные литералы (один и тот же предикатный символ с отрицанием и без) в случае, если их внутренние термы совпадают. Процесс резольвирования в ИП продолжается, пока не получена пустая формула, либо невозможно получить новую резольвенту, либо резольвирование приводит к бесконечному количеству новых резольвент без получения пустой формулы.

1. $Q(x,y)$ гипотеза
2. $\neg Q(x,t)$ гипотеза
3. $\neg R(k,y)$ гипотеза

Формулы 1 и 2 содержат контрарные литералы $Q(x,y)$ и $\neg Q(x,t)$, но зависят от различных термов, поэтому резольвировать их нельзя. Необходимо подобрать подстановку $\sigma : X \to T$, такую, чтобы унифицировать (сделать одинаковыми) термы этих формул. Первые термы формул одинаковы, вторые являются предметными переменными и могут быть преобразованы с помощью подстановки $\sigma = \{y \leftarrow t\}$. Подстановка σ не влияет на предметные переменные x и t, поэтому вторая формула не изменится. Применим подстановку к формуле 1.

4. $Q(x,t)$ σ

5. $\varnothing$ ПР 2,4

Пустая формула получена, следовательно, имеет место выводимость $\forall xQ(x,y) \vdash \exists yQ(x,y) \lor \exists xR(x,y)$. По теореме дедукции исходная формула $\forall xQ(x,y) \to (\exists yQ(x,y) \lor \exists xR(x,y))$ так же выводима в ИП. По теореме Геделя о полноте исчисления предикатов формула является общезначимой.

369. Является общезначимой

370. Не является общезначимой

371. Не является общезначимой

372. Не является общезначимой

373. Не является общезначимой

374. Не является общезначимой

375. Не является общезначимой

376. **Решение**. Чтобы проверить общезначимость формулы $\vdash \forall y\exists xQ(x,y) \to \exists x\forall yQ(x,y)$ используем теорему дедукции.

$\forall y\exists xQ(x,y) \vdash \exists x\forall yQ(x,y)$ По ТД

Преобразуем гипотезы и отрицание вывода к виду предложений:

1. $\forall y\exists xQ(x,y)$ в предваренной форме, элиминируем кванторы $\forall y\exists xQ(x,y) \Rightarrow \forall yQ(f(y),y) \Rightarrow Q(f(y),y)$. При замене квантора существования по переменной x вводится терм $f(y)$, так как квантор существования стоит после квантора всеобщности по переменной y.

2. $\neg\exists x\forall yQ(x,y) \equiv \forall x\exists y\neg Q(x,y)$ в предваренной форме, элиминируем кванторы $\forall x\exists y\neg Q(x,y) \Rightarrow \forall x\neg Q(x,g(x)) \Rightarrow \neg Q(x,g(x))$. При замене квантора существования по переменной y вводится терм $g(x)$, так как квантор существования стоит после квантора всеобщности по переменной x.

Процесс резольвирования множества предложений:

1. $Q(f(y),y)$
2. $\neg Q(x,g(x))$

Предложения 1 и 2 содержат контрарные литералы $Q(f(y),y)$ и $\neg Q(x,g(x))$, но зависят от различных термов, поэтому напрямую резольвировать их нельзя. Необходимо подобрать подстановку σ, чтобы унифицировать термы. Так как оба терма формул различны, необходимо вычислять подстановку как произведение подстановок.

Подстановка $\sigma_1 = \{x \leftarrow f(y)\}$ позволяет унифицировать первые термы предикатов, применив ее ко второй формуле получим $\neg Q(f(y),g(f(y)))$. Теперь первые термы равны, унифицировать вторые терма невозможно, так как они оба зависят от переменной y и при этом их главные функциональные символы различны (сама переменная y не имеет функционального символа, главный функциональный символ второго терма g).

Унифицировать термы 2 предикатов с контрарными литералами не удалось, следовательно, дальнейшее резольвирование невозможно и формула невыводима в ИП и не является общезначимой.

377. **Решение**. Процесс резольвирования множества предложений.

1. $Q(f(y),y)$
2. $\neg B(a_1,y)$
3. $\neg Q(x,y) \lor B(x,y)$
4. $\neg Q(f(y),y) \lor B(f(y),y)$ $\sigma = \{x \leftarrow f(y)\}$
5. $B(f(y),y)$ ПР 1,4

Предложения 2 и 5 содержат контрарные литералы $\neg B(a_1, y)$ и $B(f(y), y)$, но зависят от различных термов, поэтому резольвировать их нельзя. Унифицировать их так же невозможно, так как один из термов является константой, а другой содержит функциональный символ.

Определим другую подстановку σ_1, которая позволит унифицировать термы формул так, чтобы они содержали константу a_1, как и предикат $\neg B(a_1, y)$. Подстановка $\sigma_1 = \{x \leftarrow f(a_1), y \leftarrow a_1\}$, позволит унифицировать термы предложний 1 и 4 необходимым образом. Тогда они примут вид $Q(f(a_1), a_1)$ и $\neg Q(f(a_1), a_1) \vee B(f(a_1), a_1)$. Резольвировать их так же возможно.

6. $B(f(a_1), a_1)$ ПР 1,4 σ_1

Получена новая резольвента, которую так же нельзя унифицировать с предложением 2. Очевидно, что процесс получения новых резольвент может продолжаться бесконечно, но не приведет к желаемому результату. В таких случаях говорят, что метод резолюций не дал определенного результата. Не доказано, что формула выводима в ИП, при этом не доказано и обратное, поэтому невозможно установить, является ли формула общезначимой.

В задачах 378-394 записать рассуждение в символьном виде и проверить правильность рассуждения методом резолюций. Чтобы записать рассуждение логики предикатов в виде формулы необходимо установить предметную область, задать на ней предикаты и записать рассуждение в логической символике, используя заданные предикаты, кванторы и предметные переменные.

378. **Решение**. На предметной области (Ω - живые существа) определим предикаты:

1) $P(x)$ = « x - позвоночное»
2) $Q(x)$ = « x - птица»
3) $R(x)$ = « x - животное»

Запишем каждое предложение как отдельную формулу логики предикатов.

1. $\forall x(Q(x) \to P(x))$
2. $\forall x(P(x) \to R(x))$
3. $Q(a_1)$, где a_1 предметная константа, обозначающая орла.
4. $R(a_1)$

Первые 3 предложения являются гипотезами, последнее выводом, чтобы доказать истинность рассуждения необходимо проверить является ли формула $\forall x(Q(x) \to P(x))$, $\forall x(P(x) \to R(x))$, $Q(a_1) \vdash R(a_1)$ общезначимой.

Проверим общезначимость формулы по методу резолюции. Построим вывод для пустой формулы из множества предложений, полученных из гипотез и отрицания вывода. $\neg Q(x) \vee P(x)$, $\neg P(x) \vee R(x)$, $Q(a_1)$, $\neg R(a_1) \vdash \varnothing$

1.	$\neg Q(x) \vee P(x)$	гипотеза
2.	$\neg P(x) \vee R(x)$	гипотеза
3.	$Q(a_1)$	гипотеза
4.	$\neg R(a_1)$	гипотеза
5.	$\neg Q(a_1) \vee P(a_1)$	$1, \sigma = \{x \leftarrow a_1\}$
6.	$P(a_1)$	ПР 3,5
7.	$\neg P(a_1) \vee R(a_1)$	$2, \sigma = \{x \leftarrow a_1\}$
8.	$R(a_1)$	ПР 6,7
9.	$\varnothing$	ПР 4,8

Пустая формула получена, следовательно, формула $\forall x(Q(x)\to P(x))$, $\forall x(P(x)\to R(x))$, $Q(a_1)\vdash R(a_1)$ является общезначимой, следовательно, рассуждение верно.

379. Ω - живые существа, $P(x)$ = «x - животное», $Q(x)$ = «x - бессмертный», $R(x)$ = «x - кошка» $\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$, $\forall x(R(x)\to P(x))\vdash\exists x(R(x)\to\neg Q(x))$, рассуждение верно

380. Ω - животные, $P(x)$ = «у x есть перья», $Q(x)$ = «x - млекопитающее», $R(x)$ = «x - птица» $P(x)\sim R(x)$, $\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\vdash\forall x(Q(x)\to\neg P(x))$, рассуждение верно

381. Ω - люди, $P(x)$=«x может решить эту задачу», $M(x)$«x - математик», a_1 - Кэббот $\exists xP(x)\to\exists y(M(y)\,\&\,P(y))$, $M(a_1)\,\&\,\neg P(a_1)\vdash\neg\exists xP(x)$, рассуждение неверно

382. Ω - люди, $P(x)$=«x может решить эту задачу», $M(x)$«x - математик», a_1 - Кэббот $\forall x(P(x)\to M(x))$, $\neg P(a_1)\vdash\neg M(a_1)$, рассуждение неверно

383. Ω - люди, $P(x)$=«x может решить эту задачу», $M(x)$«x - математик» $\forall x(M(x)\to\neg P(x))\vdash\neg\exists xP(x)$, рассуждение верно

384. Ω - туфли, $P(x)$=«x со шнурками», $L(x)$=«x летние», $S(x)$= «x со шпилькой», $P(x)\to\neg L(x)$, $S(x)\to\neg P(x)$, $\exists x(\neg L(x)\,\&\,\neg P(x))\vdash\forall x(L(x)\to\neg P(x)\,\&\,S(x))$, рассуждение неверно

385. Ω - люди, $P(x)$=«у x много дел», $T(x)$=«x торопится», $R(x)$=«x едет на метро» $P(x)\to T(x)$, $T(x)\to R(x)$, $\exists xR(x)\vdash\exists xP(x)$, рассуждение неверно

386. Ω - люди, $P(x)$=«у x много дел», $Q(x)$=«x едет на машине», $T(x)$=«x торопится», $R(x)$ =«x едет на метро» $P(x)\to Q(x)$, $T(x)\to R(x)$, $\exists xR(x)\vdash\exists x\neg P(x)$, рассуждение неверно

387. Ω - разумных существ, $Q(x)$=«x инопланетянин», $P(x)$= «x управляет временем», $R(x)$ = «x живет на Земле» $\forall x(Q(x)\to P(x))$, $\neg Q(x)\to\neg P(x)$, $\exists x(R(x)\,\&\,P(x))\vdash R(x)\,\&\,Q(x)$, рассуждение верно

388. Ω - драконы, $P(x)$ = «x черный», $Q(x)$ = «x умеет извергать огонь», $R(x)$ = «x подавился бензином» $P(x)\to Q(x)$, $R(x)\to Q(x)\vdash\forall x(R(x)\to P(x))$, рассуждение неверно

389. Ω - элементы класса, $P(x)$ = «x общий», $Q(x)$ = «x статический», $R(x)$ = «память для x выделяется заранее» $P(x)\to Q(x)$, $Q(x)\to R(x)$, $P(a_1)\vdash R(a_1)$, рассуждение верно

390. Ω - книги, $P(x)$ = «x содержит полезные факты», $Q(x)$ = «x заслуживает внимания», $R(x)$ = « x развивает умственные способности» $P(x)\to Q(x)$, $R(x)\to P(x)$, $\exists xP(x)\vdash\forall xQ(x)$, рассуждение неверно

391. Ω-люди, $P(x)$=«x играет на скрипке», $Q(x)$=«x играет на фортепиано», $T(x)$=«x талантлив», $O(x)$=«x имеет опыт игры на музыкальных инструментах», $Q(x)\to T(x)\vee O(x)$, $\neg O(a_1)\,\&\,\neg T(a_1)\vdash\neg P(a_1)$, рассуждение верно

392. Ω - профессии, $P(x)$ = «x интересная», $Q(x)$ = «x увлекательная», $R(x)$ = « x высоко оплачивается» $P(x)\to Q(x)$, $Q(x)\to R(x)$, $P(a_1)\vdash R(a_1)$, рассуждение верно

393. Ω-пицца, $A(x)$=«x с ананасами», $K(x)$=«x с кетчупом», $P(x)$=«x со свежими помидорами», $O(x)$=«x с оливками», $Q(x)$=«x гавайская», $G(x)$=«x греческая», $A(x)\,\&\,K(x)\to Q(x)$, $O(x)\,\&\,P(x)\to G(x)$, $A(a_1)\,\&\,O(a_1)\vdash\neg Q(a_1)\,\&\,\neg G(a_1)$, рассуждение неверно

394. Ω-люди, $P(x)$ = «x любит мороженое», $Q(x)$ = «x боится заболеть», $R(x)$ = « x ест мороженое» $D(x)$= «у x нет денег» $\exists xP(x)$, $Q(x)\to\neg R(x)$, $D(x)\to\neg R(x)\vdash\neg\forall x(P(x)\to R(x))$, рассуждение неверно

К задачам раздела 12 Простые программы для машины Тьюринга

В задачах 395-397 необходимо определить конфигурацию машины Тьюринга через несколько шагов. Конфигурация МТ – полная информация о содержимом ячеек ленты и текущем состоянии машины.

395. **Решение**. Конфигурация машины Тьюринга может быть определена построением переходов. Процесс выбора команды продолжается до тех пор, пока возможно выполнить действие либо пока не выполнено определенное количество действий. Если достигнуто конечное состояние или конфигурация МТ не позволяет выбрать одну из команд, то работа МТ прекращается и конфигурация считается конечной.

Начальное состояние машины Тьюринга $00q_1 00010110$, в состоянии q_1 указатель считывает символ 0, поэтому МТ выполняет команду $q_1 0 \to 0Rq_2$, т.е. в ячейку записывается символ 0, происходит сдвиг на одну ячейку вправо и МТ переходит в состояние q_2. Начальная конфигурация изменилась на $000q_2 0010110$. Продолжая этот процесс, получается последовательность конфигураций: $00q_1 00010110 \Rightarrow 000q_2 0010110 \Rightarrow 000q_0 1010110$.

В заключительном состоянии q_0 МТ прекращает работу, конечной конфигурацией будет $000q_0 1010110$.

396. $001q_0 1010110$

397. $0q_0 111110110$

В задачах 398 - 405 написать программу машины Тьюринга для перехода из начальной конфигурации в конечную ($n \geq 1$). Программа машина Тьюринга должна быть правильной, то есть для любых допустимых n переводить машину Тьюринга в верную конечную конфигурацию.

398. **Решение.** Для построения программы машины Тьюринга необходимо определить внешний алфавит, и задать необходимое количество переходов.

Чтобы перевести МТ из начальной конфигурации $q_1 01^n$ в заключительную конфигурацию $q_0 0001^n 0$ достаточно сделать 2 шага влево и остановить работу МТ в состоянии q_0. Учитывая, что алгоритм реализует смещение указателя, замена символов в ячейках ленты не требуется. Внешний алфавит состоит из символов 0 и 1, программу МТ можно записать в следующем виде:

$$q_1 0 \to 0Lq_2$$
$$q_2 0 \to 0Lq_0$$

Последовательность конфигураций при $n = 3$: $q_1 0111 \Rightarrow q_2 00111 \Rightarrow q_0 000111$

399. **Решение**. Пример отличается от предыдущего тем, что недостаточно поменять положения считывающей головки для получения верного ответа. Необходимо изменить содержимое ячеек ленты, но при этом сохранить положение считывающей головки. В подобных случаях используется машина переноса.

Машиной переноса называют МТ, которая начинает и заканчивает свою работу в одной и той же ячейке ленты, при этом производя верные преобразования. Основная идея машины переноса – вести преобразования за пределами начальной ячейки и затем возвращаться в исходную точку. Для построения требуемой МТ необходимо перенести две первые единицы в конец последовательности, при этом заменяя их нулями. После переноса необходимо вернуться на место первой перенесенной единицы.

Так как необходимо перенести счетное число единиц потребуется два цикла переноса, каждый из которых отвечает за перенос одной единицы. Пусть состояние q_1 – состояние перехода к последовательности, удаления первой единицы и начало ее переноса в конец последовательности, q_2 – состояние прохода по оставшейся последовательности и установки единицы в ближайшую пустую ячейку, состояние q_3 возврат по последовательности и переход к переносу второй единицы. Состояния q_1, q_2, q_3 необходимо продублировать в процессе нового переноса, то есть действия будут аналогичны этим состояниям, но их имена должны быть иными, чтобы было возможно отследить число выполненных циклов. После возврата к началу последовательности необходимо сделать два шага влево по символу 0, чтобы вернуться в требуемую ячейку. Внешний алфавит состоит из символов: 0 и 1, программу МТ можно записать в виде таблицы, где в строках записаны символы алфавита, в столбцах состояния МТ, а ячейка задает переход:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
0	$0Rq_1$	$1Lq_3$	$0Rq_4$		$1Lq_6$	$0Lq_7$	$0Lq_0$
1	$0Rq_2$	$1Rq_2$	$1Lq_3$	$0Rq_5$	$1Rq_5$	$1Lq_6$	

Если определенная ячейка не содержит команды, то такое состояние не должно быть достижимо в МТ, иначе вычисления, выполняемые этой МТ, считаются неправильными. Рассмотрим работу этой машины Тьюринга при $n=3$: $q_1 0111 \Rightarrow 0q_1 111 \Rightarrow 00q_2 11 \Rightarrow 001q_2 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0011q_2 0 \Rightarrow 001q_3 11 \Rightarrow 00q_3 111 \Rightarrow 0q_3 0111 \Rightarrow 00q_4 111 \Rightarrow 000q_5 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0001q_5 1 \Rightarrow 00011q_5 0 \Rightarrow 0001q_6 11 \Rightarrow 000q_6 111 \Rightarrow 00q_6 0111 \Rightarrow 0q_7 00111 \Rightarrow q_0 000111$

В задачах 409-418 необходимо построить МТ и выписать последовательность конфигураций для $x=2, y=1$.

410. **Указание**. Используйте машину переноса (см. номер 399)

413. **Указание**. Деление можно заменить последовательным вычитанием.

414. **Решение**. При сравнении количество символов последовательности с заданным числом используют конечное количество состояний, которое равно заданному числу. Если результат сравнения хотя бы в одном из случаев содержит саму последовательность, то сравнение производят без изменения последовательности, в остальных случаях последовательность стирают в процессе сравнения.

Пример для машины строгого сравнения последовательности с числом 2:

$q_1 1 \to 1Rq_2$	Проходим первую единицу, $x \geq 1$
$q_2 1 \to 1Rq_3$	Проходим вторую единицу, $x \geq 2$
$q_2 0 \to 0Lq_4$	После прохода мимо первой единицы встретили 0, значит $x=1$ и необходимо оставить на ленте только 1^y
$q_3 1 \to 1Lq_6$	Проходим через третью единицу $x \geq 3$, значит число $x > 2$, необходимо оставить только 1^x
$q_3 0 \to 0Lq_4$	После прохода мимо первой второй встретили 0, значит $x = 2$ и необходимо оставить на ленте только 1^y
	Удаление последовательности 1^x *и возврат к началу последовательности* 1^y
$q_4 1 \to 0Lq_4$	Удаляем единицы, которые успели прочитать
$q_4 0 \to 0Rq_5$	Встретили 0, все единицы были удалены

$q_5 0 \to 0Rq_5$	Идем вправо до последовательности 1^y
$q_5 1 \to 1Hq_0$	Дошли до первой единицы, завершаем работу
	Удаление последовательности 1^y *и возврат к началу последовательности* 1^x
$q_6 1 \to 1Rq_6$	Проходим по оставшимся единицам последовательности 1^x
$q_6 0 \to 0Rq_7$	Перешагиваем разделяющий 0
$q_7 1 \to 0Rq_7$	Проходим по последовательности 1^y, удаляя ее
$q_7 0 \to 0Lq_8$	Встретили 0, последовательность 1^y удалена
$q_8 0 \to 0Lq_8$	Возвращаемся к последовательности 1^x
$q_8 1 \to 1Lq_9$	Дошли до последовательности 1^x
$q_9 1 \to 1Lq_9$	Проходим через последовательность 1^x
$q_9 0 \to 0Rq_0$	Дошли до начала последовательности 1^x, перемещаем головку на первую единицу и заканчиваем работу

Рассмотрим работу этой машины Тьюринга при $x = 2, y = 1$:

$q_1 1101 \Rightarrow 1q_2 101 \Rightarrow 11q_3 01 \Rightarrow 1q_4 101 \Rightarrow q_4 1001 \Rightarrow q_4 00001 \Rightarrow q_5 0001 \Rightarrow 0q_5 001 \Rightarrow 00q_5 01 \Rightarrow \Rightarrow 0q_0 10$

415. **Указание**. Для определения четности достаточно задать два состояния и определить, в каком из них МТ закончит свою работу.

416. **Указание**. Для сравнения двух последовательностей необходимо последовательно стирать единицы с начала первой и конца второй последовательности. Для сохранения самих последовательностей можно скопировать их левее и правее их соответственно, либо восстанавливать в процессе сравнения.

К задачам раздела 13 Вычисление арифметических функций на машине Тьюринга

В задачах 421-430 необходимо построить машину Тьюринга для правильного вычисления функции.

421. **Решение**. Вычислим функцию $S(x) = x + 1$. Чтобы реализовать вычисление этой функции на МТ, необходимо осуществить переход $0q_1 1^{x+1} 0 \Rightarrow 0q_0 1^{(x+1)+1} 0$. Для вычисления этой функции достаточно приписать слева одну единицу к последовательности единиц на ленте. Программа вычислений приведена в таблице:

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$1Lq_2$	

422. **Решение**. Чтобы правильно вычислить данную функцию, необходимо построить МТ, которая переводит конфигурацию $0q_1 1^{x+1} 0 1^{y+1} 0$ в конфигурацию $0q_0 1^{x+y+1} 0$. Очевидно, что достаточно соединить две последовательности единиц и убрать лишние единицы из начала слова. $1^{x+1} 1 1^{y+1} = 1^{x+1+y+1+1} = 1^{x+y+3}$, т.е. необходимо удалить 2 единицы из последовательности. Набор команд для МТ:

$q_1 1 \to 0Rq_2$	Удаляем первую единицу
$q_2 1 \to 1Rq_3$	Проходим по числу x до появления 0
$q_2 0 \to 1Lq_3$	Заменяем 0 на 1, чтобы соединить два числа
$q_3 1 \to 1Lq_3$	Возвращаемся к началу числа x
$q_3 0 \to 0Rq_4$	Встретили 0, смещаемся на первую единицу
$q_4 1 \to 0Rq_0$	Удаляем вторую лишнюю единицу и смещаемся на первый символ итоговой последовательности

Ошибка! Источник ссылки не найден.. **Решение**. Машина знака является частным случаем машины сравнения. Необходимо проверить, что $x > 0$ и вывести число 1 (последовательность из двух единиц), если неравенство выполняется, или 0 (одну единицу), в случае неверного неравенства. Программу для такой машины Тьюринга можно представить в виде таблицы:

	q_1	q_2	q_3	q_4
0		$1Hq_0$	$1Lq_4$	$1Hq_0$
1	$0Rq_2$	$0Rq_3$	$0Rq_3$	

425. **Решение** Функция усеченной разности с константой строится на основе машины сравнения с числом и конструкции ветвления с машинами разности и нуля. Команды для машины Тьюринга для усеченной разности представлены в таблице:

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$0Rq_2$	$1Hq_0$

Начальная последовательность на ленте содержит как минимум одну 1 при $x = 0$, удаляя ее количество единиц на ленте уменьшается на 1. Если это была последняя единица, то число было действительно равно 0 и необходимо поставить единицу, так как 0 на машине Тьюринга записывается как одна единица. В противном случае процесс закончен, и точное значение x не имеет значения.

В задачах 432-440 необходимо построить машину Тьюринга как суперпозицию или ветвление подходящих машин Тьюринга.

432. **Решение**. Функция $f(x)=1$ может быть построена как суперпозиция функций $O(x)=0$ и $S(x)=x+1$, т.е. $f(x)=S(O(x))=1$. Представим алгоритмы для этих двух машин в виде таблиц:

$O(x)=0$	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$0Rq_2$	$0Rq_2$

$S(x)=x+1$	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$1Lq_2$	

Для реализации суперпозиции машин Тьюринга необходимо переобозначить состояния машин Тьюринга, чтобы они отличались друг от друга, например с помощью верхнего индекса, тогда:

$O(x)=0$	q_1^1	q_2^1
0		$1Hq_0^1$
1	$0Rq_2^1$	$0Rq_2^1$

$S(x)=x+1$	q_1^2	q_2^2
0		$1Hq_0^2$
1	$1Lq_2^2$	

Отождествив конечное состояние первой машины q_0^1 и начальное состояние второй машины q_1^2, получим суперпозицию машин, вычисляющих функции $O(x)=0$ и $S(x)=x+1$. Результатом суперпозиции машин будет новая машина, вычисляющая функцию $f(x)=1$. Представим машину в виде таблицы:

$f(x)=1$	q_1^1	q_2^1	q_1^2	q_2^2
0		$1Hq_1^2$		$1Hq_0^2$
1	$0Rq_2^1$	$0Rq_2^1$	$1Lq_2^2$	

Изменив названия состояний на последовательные, получим машину Тьюринга в стандартном виде.

$f(x)=1$	q_1	q_2	q_3	q_4
0		$1Hq_3$		$1Hq_0$
1	$0Rq_2$	$0Rq_2$	$1Lq_4$	

434. **Решение**. Конструкция машины Тьюринга, полученной ветвлением, обычно содержит минимум 3 машины Тьюринга. Первая преобразует ленту к виду, подаваемому следующим машинам в различных случаях.

С помощью первой машины необходимо определить число $x>1$ или нет. И в том, и в другом случае будет необходимо сохранить на ленте число x, поэтому ленту преобразовывать ненужно, достаточно вернуться к началу числа и запустить необходимую машину.

Зададим 2 конечных состояния q_0^1 и q_0^2, первое конечное состояние будет достижимо при $x>1$, второе в противном случае. В эти состояния необходимо переходить независимо, обозревая первую единицу числа x. Алгоритм работы такой машины можно записать так:

$q_1 1 \to 1Rq_2$ Проходим первую единицу $x \geq 0$

$q_2 1 \to 1Rq_3$ Проходим вторую единицу $x \geq 1$

$q_2 0 \to 0Lq_4$ После прохода мимо первой единицы встретили 0, значит $x=0$ и необходимо вернуться к началу числа в состоянии q_0^1

$q_3 1 \to 1Lq_5$ Проходим через третью единицу $x>1$, необходимо вернуться к началу числа в состоянии q_0^2

$q_3 0 \to 0Lq_4$	После прохода мимо первой второй встретили 0, значит $x=1$ и необходимо вернуться к началу числа в состоянии q_0^1
$q_4 1 \to 1Lq_4$	Возвращаемся к началу числа x, $x<1$
$q_4 0 \to 0Rq_0^1$	Дошли до начала числа x, перемещаем головку на первую единицу и заканчиваем работу в состоянии q_0^1
$q_5 1 \to 1Rq_5$	Возвращаемся к началу числа x, $x \geq 1$
$q_5 0 \to 0Rq_0^2$	Дошли до начала числа x, перемещаем головку на первую единицу и заканчиваем работу в состоянии q_0^2

Далее строим конструкцию ветвления путем отождествления соответствующего конечного состояния с начальным состоянием необходимой машины. Состояние q_0^1 нужно отождествить с начальным состоянием машины, вычисляющей $f(x)=x$, состояние q_0^2 - с начальным состоянием машины, вычисляющей $S(x)=x+1$. После переименований машину Тьюринга можно записать как:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
0		$0Lq_4$	$0Lq_4$	$0Rq_6$	$0Rq_7$			$1Hq_0$
1	$1Rq_2$	$1Rq_3$	$1Lq_5$	$1Lq_4$	$1Rq_5$	$1Hq_0$	$1Lq_8$	

В задачах 441-443 построить машину Тьюринга, вычисляющую в десятичной системе счисления.

441. Используйте принцип сложения столбиком
442. Используйте принцип вычитания столбиком
443. Используйте принцип умножения столбиком

В задачах 444-448 необходимо определить свойства заданного слова и вывести соответствующий ответ. Внешний алфавит машины Тьюринга строго определен, иные символы на ленте размещать нельзя.

444. **Решение**. Для поиска последовательности в слове Р необходимо задать количество состояний, равное длине последовательности и дополнительное состояние, которое будет подтверждать, что последовательность содержится в слове. Так же необходимо учитывать, что слово Р может быть пустым, в этом случае последовательность оно не содержит и ответом должно быть пустое слово

Пусть заданы состояния q_1 - последовательность еще не началась, q_2 - считан первый ноль последовательности, q_3 - последовательность присутствует в слове Р. Тогда, если слово закончится на первом или втором состоянии необходимо сообщить, что последовательности нет, оставив ленту пустой. Если же состояние q_3 было достигнуто, то необходимо стереть все символы оставшегося слова и вывести 1 на ленте. Учитывая, что само слово в ответе не участвует в процессе поиска последовательности, слово можно стирать после прочтения очередного символа. Программа машины Тьюринга для поиска последовательности 00 может быть записана как:

	q_1	q_2	q_3
0	$*Rq_2$	$*Rq_3$	$*Rq_3$
1	$*Rq_1$	$*Rq_1$	$*Rq_3$
*	$*Hq_0$	$*Hq_0$	$1Hq_0$

Рассмотрим работу этой машины Тьюринга при $P = 1001$: $q_1 1001 \Rightarrow q_1 001 \Rightarrow q_2 01 \Rightarrow q_3 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow q_3 * \Rightarrow q_0 1$

К задачам раздела 14 Примитивно рекурсивные функции

В задачах 449-453 найти значение функции g, полученной операцией суперпозиции из функций f, $f_1,\ldots,f_n$, т.е. $g(x_1,\ldots,x_m)=f(f_1(x_1,\ldots x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots x_m))$

449. **Решение**. Для вычисления значений функции g непосредственно построим ее. Функция $g(x)$ получена операцией суперпозиции из функций $f(x)=O(x)$ и $f_1(x)=S(x)$, следовательно, $g(x)=f(f_1(x))=f(S(x))=O(S(x))$.

Подставляя значения переменной получим: $g(0)=O(S(0))=O(0+1)=O(1)=0$, $g(3)=O(S(3))=O(3+1)=O(4)=0$, $g(4)=O(S(4))=O(4+1)=O(5)=0$

450. 24, 47, 48
451. 0, 46, значение не определено
452. 2, 0, 5
453. 34, 6, значение не определено

В задачах 454-458 найти значение функции f, полученной операцией примитивной рекурсии из функций g и h, т.е. $f(x_1,\ldots x_n,0)=g(x_1,\ldots x_n)$, $f(x_1,\ldots x_n,y+1)=h(x_1,\ldots x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y))$.

454. **Решение**. Для вычисления значений функции $f(x,y)$ непосредственно построим ее. Функция $f(x,y)$ получена с помощью операции примитивной рекурсии из функций $g(x)=O(x)$ и $h(x,y,z)=x+y+z$, следовательно, $f(x,0)=g(x)=O(x)$, а $f(x,y+1)=$ $=h(x,y,f(x,y))=x+y+f(x,y)$.

Учитывая, что для вычисления каждого следующего значения необходимо знать предыдущее, вычисления всегда будут начинаться с функции $f(x,0)=g(x)=O(x)=0$. Подставляя значения переменной получим: $f(3,0)=g(3)=O(3)=0$, $f(3,1)=h(3,0,0)=3+0+0=3$, $f(3,2)=h(3,1,3)=3+1+3=7$. Продолжая аналогичные вычисления, получим $f(2,3)=9$, $f(1,4)=10$.

455. 17, 17, 3
456. значение не определено, 8, 20
457. 636, 391880, 153569934409
458. 1, 7, 9

В задачах 463-477 необходимо доказать примитивную рекурсивность функций, выразив ее через простейшие или другие примитивно-рекурсивные функции

463. **Решение**. Выразим функцию константы через суперпозиции функции $O(x)=0$ и функции следования $S(x)=x+1$, сначала преобразуем число в 0, затем добавим необходимое число единиц ы зависимости от константы a $S(S(...S(O(x))...))$

464. $S(S(...S(U_1^1(x))...))$ a раз

465. **Решение**. Пусть $g(x)=x=U_1^1(x)$, $h(x,y,z)=z+1=U_3^3(x,y,z)+1=S(U_3^3(x,y,z))$, тогда $f(x,y)=x+y$ можно получить с помощью примитивной рекурсии, где $f(x,0)=U_1^1(x)$, $f(x,y+1)=S(U_3^3(x,y,f(x,y)))$. Функция получена с помощью операции примитивной рекурсии и простейших функций.

466. **Указание**. Используйте рекурсивность суммы и операцию примитивной рекурсии
467. **Указание** Используйте рекурсивность произведения и операцию примитивной рекурсии
468. **Указание** Используйте рекурсивность произведения и операцию примитивной рекурсии

470. **Решение**. Представим функцию в виде примитивной рекурсии: $sg(0)=0=O(x)$, $sg(x+1)=S(O(sg(x)))=h(x,sg(x))$, где $h(x,y)=S(O(U_2^2(x,y)))$. Функция получена с помощью операции примитивной рекурсии и суперпозиции из простейших формул, следовательно, является примитивно рекурсивной функцией.

471. **Решение**. Представим функцию в виде примитивной рекурсии: $\overline{sg}(0)=1=S(O(x))$, $\overline{sg}(x+1)==O(\overline{sg}(x))=h(x,\overline{sg}(x))$, где $h(x,y)=O(U_2^2(x,y))$.

474. **Указание**. Используйте примитивную рекурсивность усеченной разности и суммы

К задачам раздела 15 Частично рекурсивные функции

В задачах 497-501 найти значение функции g, полученной операцией минимизации из функций f

497. **Решение** Операция примитивной рекурсии не требует непосредственного построения формулы для функции g. Необходимо задать процесс вычисления значения функции g. Значением функции g будет решение уравнения $f(x_1, y) = x_2$, которое решается перебором возможных значений y, начиная с 0.

Пусть $y = 0$, тогда $f(3,0) = 2 \Rightarrow 3+0 \neq 2$ и $y = 0$ не является решением уравнения и не является результатом операции минимизации при таких значениях.

Пусть $y = 1$, тогда $f(3,1) = 2 \Rightarrow 3+1 \neq 2$, такое значение так же не подходит. Продолжая перебор, не удается найти такое целое неотрицательное число, которое удовлетворяет равенству. В таком случае значение функции, полученной операцией минимизации считается не определенным, т.е. $g(3,2)$ неопределенное

Найдем $g(2,3) = \mu_y(f(2, y) = 3)$. Пусть $y = 0$, тогда $f(2,0) = 2 \Rightarrow 2+0 \neq 3$. При $y = 1$ получим $f(2,1) = 3 \Rightarrow 2+1 = 3$ решение уравнения найдено, так как перебор осуществлялся с нуля, то так как $y = 1$ является минимально-возможным решением уравнения, то $g(2,3) = 1$.
$g(1,5) = 4$

498. 3, 2, значение не определено
499. 0, 6, 7, значение не определено
500. 1, 1, значение не определено
501. 8, значение не определено, 0

В задачах 506-520 необходимо задать функцию, полученную операцией минимизации из других функций

506. **Решение**. Функция $g(x)$ получена с помощью операции примитивной рекурсии из функции $f(x)$, если для любого значения переменной она возвращает минимально возможное решение уравнения $g(x) = \mu_y(f(y) = x)$.

Рассмотрим функцию $C_a(x) = a$, она принимает значение, равное константе a при любом значении переменной x. Найдем $g(x) = \mu_y(C_a(y) = x)$. Пусть $x = 0$, тогда, необходимо используя метод перебора найти такое значение y, при котором $C_a(y) = 0$. Пусть $y = 0$, тогда $C_a(0) = a \Rightarrow a \neq 0$. При $y = 1$ получим $C_a(1) = a \Rightarrow a \neq 0$. При изменении значения x, процесс перебора будет бесконечен во всех случаях, кроме $x = a$, то есть функция минимизации функции константы будет определена только для $x = a$, так как иных значений начальная функция не принимает. Тогда функцию $g(x)$ можно записать как:

$$g(x) = \begin{cases} 0, x = a \\ не\,опред., иначе \end{cases}$$

508. $g(x) = \begin{cases} 0, x = y, \\ y - x, x < y \\ не\,опред, иначе \end{cases}$

512. $g(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1, x = 1, \\ не\,опред, иначе \end{cases}$

515. $$g(x) = \begin{cases} 0, x = 3, \\ 10, x = 4, \\ 7, x = 0, \\ \textit{не опред}, \textit{иначе} \end{cases}$$

Список литературы

1. Мачикина, Е. П. Математическая логика и теория алгоритмов : учебно-методическое пособие / Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск: СибГУТИ, 2020. 86с. Режим доступа: https://www.iprbookshop.ru/102154.html Лицензия: весь срок охраны авторского права.
2. Мачикина, Е. П. Указания по выполнению РГР по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»: учебно-методическое пособие / Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : СибГУТИ, 2020. 45 с.
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975.
4. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БЧВ-Петербург, 2004.
5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
6. Зюзьков, В. М. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. М. Зюзьков. – Электрон. текстовые данные. – Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2015. – 236с. – 978-5-4332-0197-2. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72122.html. Лицензия: весь срок охраны авторского права.

Учебное издание

Мачикина Елена Павловна
Новожилов Дмитрий Иванович

Задачник по математической логике и теории алгоритмов

Редактор:
Корректор:

Подписано в печать 01.01.2021.
Формат бумаги 62 × 84/16, отпечатано на ризографе, шрифт № 10,
п. л. – 5,5, заказ № , тираж – 50.

СибГУТИ
630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86, офис 107, тел. (383) 269-83-20