

Федеральное агентство связи
Федеральное государственное
образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»
(ФГОБУ ВПО «СибГУТИ»)

**В. К. Трофимов
Т. С. Мурзина
Т. Э. Захарова**

ТЕОРИЯ РЯДОВ

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 230100.62 «Информатика и вычислительная техника», 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и по специальности 090302.65 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Новосибирск
2013

УДК 517.3 (075.8)

В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т. Э. Захарова. Теория рядов: Учебное пособие/ СибГУТИ. – Новосибирск, 2013.– 145 стр.

В учебном пособии излагается классический раздел математического анализа – теория рядов. В книге подробно изложен теоретический материал по следующим разделам: числовые ряды, функциональные, степенные ряды и ряды Фурье. Приведены примеры решения задач, на которых продемонстрированы тонкости излагаемого материала. Кроме того, пособие содержит большое количество задач для самостоятельного решения.

Кафедра высшей математики СибГУТИ

Ил.11, список лит.- 17 наименований

Для специальностей 230100.62, 210700.62, 090302.65

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. Г.Г.Черных
к.т.н., доцент Е.М.Григорьев

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ в качестве учебного пособия.

© Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1	Числовые ряды	
§1.1	Понятие числового ряда, сходимость ряда, умножение ряда на число, сложение рядов.....	5
§1.2	Необходимое условие сходимости ряда.....	9
§1.3	Свойства сходящихся рядов.....	10
§1.4	Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.....	11
§1.5	Признаки сравнения.....	12
§1.6	Признак Даламбера.....	15
§1.7	Признак Коши.....	19
§1.8	Признак Раабе.....	23
§1.9	Интегральный признак сходимости ряда.....	27
§1.10	Абсолютно и условно сходящиеся ряды.....	31
§1.11	Знакочередующиеся ряды.....	33
§1.12	Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.....	36
§1.13	Условно сходящиеся ряды.....	40
Глава 2	Функциональные ряды	
§2.1	Сходимость функциональных рядов.....	46
§2.2	Равномерная сходимость функциональных рядов.....	50
§2.3	Признак Вейерштрасса.....	60
§2.4	Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.....	63
§2.5	Степенные ряды. Теорема Абеля.....	71
§2.6	Область сходимости степенного ряда.....	73
§2.7	Вычисление радиуса сходимости степенного ряда методами Даламбера и Коши.....	73
§2.8	Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.....	79
§2.9	Разложение функций в степенные ряды.....	84
§2.10	Применение рядов для приближенных вычислений.....	97
Глава 3	Ряды Фурье	
§3.1	Введение.....	104
§3.2	Понятие ортогональности функций на отрезке. Ортогональность тригонометрических функций.....	104
§3.3	Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье.....	107
§3.4	Теоремы разложения.....	109
§3.5	Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций.....	113
§3.6	Разложение функции, заданной на части промежутка $[-\pi, \pi]$	116
§3.7	Разложение функции, заданной на промежутке $[a, a + 2\pi]$	119
§3.8	Разложение в ряд Фурье периодичной функции с периодом $2l$	121
§3.9	Приближение функции тригонометрическими многочленами.....	123
§3.10	Сходимость в среднем. Равенство Парсеваля.....	127
§3.11	Ряд Фурье в комплексной форме.....	128

§3.12	Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам.....	130
§3.13	Интеграл Фурье в тригонометрической форме.....	132
§3.14	Интеграл Фурье в комплексной форме.....	134
§3.15	Теорема Котельникова о квантовании непрерывного сигнала по времени.....	136
Ответы к примерам		140
Литература		145

Глава 1. Числовые ряды

§1.1 Понятие числового ряда, сходимость ряда, умножение ряда на число, сложение рядов

Пусть задана некоторая числовая последовательность $\{a_n\}$, где n – натуральное число, то есть $n \in N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (1.1)$$

где $n = 1, 2, \dots$, а a_n – действительные числа, будем называть *числовым рядом*.

Ряд (1.1) сокращенно записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются членами ряда, а число a_n – n -ым членом ряда.

Сумму n первых членов ряда (1.1) будем называть n -ой частичной суммой и обозначать S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Определение 1. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел S , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S < \infty.$$

Число S назовем *суммой ряда* (1.1) и будем писать:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{или} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же этот предел бесконечный или последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не имеет предела, то говорят, что ряд (1.1) *расходится*.

Замечание. Вопрос о сходимости ряда (1.1) в силу определения 1, равносителен вопросу о существовании предела последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда.

С другой стороны, вопрос о сходимости произвольной последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ($n \in N$) равносителен вопросу о сходимости следующего числового ряда:

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + \dots, \quad (1.2)$$

для которого $b_1 = u_1$, $b_2 = u_2 - u_1$, $b_3 = u_3 - u_2$, …, $b_n = u_n - u_{n-1}$, …, а последовательность частичных сумм совпадает с членами последовательности $\{u_n\}$:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = b_1 + b_2 = u_2, \quad S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = u_3, \quad \dots, \\ S_n = b_1 + \dots + b_n = u_n, \dots.$$

При этом предел последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ($n \in N$) совпадает с суммой ряда (1.2).

Таким образом, изучение бесконечного ряда и его суммы есть просто иная форма изучения последовательности и ее предела, но эта форма имеет определенные преимущества как при исследовании вопроса существования предела, так и при его вычислении.

При изучении сходимости последовательности большое значение имеет критерий Коши. Напомним этот критерий сходимости последовательности.

Критерий Коши (для последовательности). Для сходимости последовательности $\{S_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ нашелся номер M такой, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq M$, и для всех натуральных $p \in N$ выполнялось условие $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

Как следствие из этого утверждения получим критерий Коши сходимости ряда:

Критерий Коши (для ряда). Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ нашелся номер M такой, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq M$, и для всех натуральных $p \in N$ выполнялось условие $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$.

Доказательство. В нашем случае $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ и $S_{n+p} = \sum_{k=1}^{n+p} a_k$. Тогда

$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. Отсюда, из определения сходимости ряда и критерия Коши для последовательности вытекает справедливость утверждения.

Что и требовалось доказать.

Установим, что конечное число членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость. Более точно справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.3)$$

Наряду с рядом (1.3) рассмотрим ряд

$$a_{t+1} + a_{t+2} + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=t+1}^{\infty} a_k, \quad (1.4)$$

полученный из ряда (1.3) отбрасыванием первых t членов.

Если обозначить $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ сумму первых n членов ряда (1.3) и $\tilde{S}_{n-t} = a_{t+1} + a_{t+2} + \dots + a_n$ сумму $n-t$ первых членов ряда (1.4), то справедливо равенство

$$S_n = S_t + \tilde{S}_{n-t}. \quad (1.5)$$

В равенстве (1.5) перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_t = S_t$, то, учитывая, что предел суммы равен сумме пределов, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_t + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_{n-t}. \quad (1.6)$$

Из последнего равенства вытекает, что последовательности $\{S_n\}$ и $\{\tilde{S}_{n-t}\}$ одновременно либо имеют предел, либо его не имеют. Это означает, что из сходимости ряда (1.3) следует сходимость ряда (1.4) и его сумма равна $S - S_t$, а из расходимости (1.3) следует расходимость (1.4). Верно и обратное утверждение.

Таким образом, отбрасывание (или добавление) конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда, а влияет только на значение суммы ряда.

Лемма доказана.

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, где q – произвольное число.

► Решение. Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем q . Используем известную формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии (при $q \neq 1$):

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

а) Если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q} \right) = \frac{1}{1 - q}.$$

Значит, если $|q| < 1$, то последовательность $\{S_n\}$ имеет конечный предел,

равный $\frac{1}{1 - q}$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и его сумма $S = \frac{1}{1 - q}$.

б) Если $q > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \infty$.

В случае $q < -1$ предел последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ не существует. Действительно, обозначив $q = -p$, $p > 1$, запишем

$$S_n = \frac{(-1)^{n+1} p^n + 1}{1+p} \quad \text{и} \quad \text{заметим, что} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^{k-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^{2^{k-1}-1} + 1}{1+p} = \infty, \quad \text{а}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-p^{2^k} + 1}{1+p} = -\infty$. Это означает, что предел последовательности $\{S_n\}$ не существует.

Таким образом, при $|q| > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ расходится.

в) Если $q=1$, то ряд имеет вид

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

В этом случае $S_n = n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$

расходится при $q=1$.

г) Если $q=-1$, то ряд имеет вид

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

и его частичные суммы запишутся следующим образом: $S_{2n} = 0$; $S_{2n+1} = 1$.

Это означает, что не существует предел последовательности частичных сумм получившегося ряда, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ расходится в случае $q=-1$. ◀

Пример 2. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ и найти его

сумму.

► **Решение.** Заметим, что

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

то есть

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \text{ где } b_n = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Легко видно, что существует конечный предел последовательности $\{b_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ (он равен нулю). Запишем n -ую частичную сумму исходного ряда:

$$S_n = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \dots + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}.$$

Вычислим предел последовательности этих частичных сумм $\{S_n\}$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - b_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = b_1.$$

Этот предел существует и равен b_1 , а значит и сумма исходного ряда равна $b_1 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{4}$. ◀

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

► Решение. Так как при любом $k = 1, 2, \dots, n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

то

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится. ◀

§1.2 Необходимое условие сходимости ряда

В этом параграфе рассмотрим необходимое условие сходимости ряда и достаточное условие расходимости ряда.

Теорема 1. (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд (1.1) сходится, то его n -ый член стремится к нулю при неограниченном возрастании n , то есть: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, это означает, что существуют конечные пределы последовательностей $\{S_n\}$ и $\{S_{n-1}\}$ частичных сумм ряда, так как при $n \rightarrow \infty$ величина $(n-1)$ также стремится к бесконечности. Заметим, что

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Учитывая, что в нашем случае предел разности равен разности пределов, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Это условие не является достаточным для сходимости ряда: из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ не следует, что ряд сходится, он может как сходиться, так и расходиться. Например, ряд из примера 3 удовлетворяет условию $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, но расходится. Но если n -й член ряда (1.1) не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то этот ряд расходится. Таким образом, можно сформулировать достаточный признак расходимости ряда:

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). *Если n -ый член ряда (1.1) не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то этот ряд расходится.*

Ряд

$$-a + a - a + \dots$$

расходится потому, что для его n -го члена $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a \neq 0$.

Задачи для самостоятельного решения.

1-11. Проверить выполнение необходимого признака сходимости:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^3 + 1}{n^2 - 1}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{2n^3 + 1}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{(n^3 + 8)^{1/3}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 3}{n^2}\right)$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2} \right)^{\sqrt{n}+1}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{5^n}\right)$$

§1.3 Свойства сходящихся рядов

Докажем несколько свойств сходящихся рядов, которые будут полезны в дальнейшем.

Свойство 1. Для произвольного числа $c \neq 0$ два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$

сходятся или расходятся одновременно. В случае их сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство. Обозначим через A_n частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а через B_n

частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. Тогда имеем

$$B_n = \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k = cA_n.$$

Из этого равенства и из свойств последовательностей следует, что последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ сходятся или расходятся одновременно. Кроме того, если предел последовательности $\{B_n\}$ существует, то справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} A_n,$$

из которого и следует утверждение

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, тогда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство. Обозначим через A_n частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а через B_n

частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Так как ряды сходятся, то существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B.$$

Тогда имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k = A_n \pm B_n.$$

Из этого равенства и из свойств последовательностей следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B.$$

Что и требовалось доказать.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно: сумма рядов может сходиться, в то время как каждый ряд расходится. Примером тому является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+5)n}$, каждый член которого равен разности соответствующих членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$. Он, как будет показано далее, сходится, хотя сами ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходятся.

§1.4 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами

Определение 2. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого неотрицательны $a_n \geq 0$, ($n = 1, 2, \dots$), называется *неотрицательным рядом* или *рядом с неотрицательными членами*.

Определение 3. Последовательность $\{S_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если найдется такое число M , что для всех натуральных значений $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $S_n \leq M$.

Теорема 2. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ была ограничена сверху.

Доказательство. Заметим, что в силу неотрицательности членов a_n последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм является монотонно неубывающей:

$$S_n \leq S_{n+1} = S_n + a_n \text{ для любого } n \in N.$$

Необходимость. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а значит, существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Тогда по теореме Вейерштрасса о пределе возрастающей последовательности (неубывающая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху) для любого $n \in N$ $S_n \leq S$, т.е. утверждение верно.

Достаточность. Неубывающая последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, следовательно, она имеет конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, а это означает,

что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Теорема доказана.

§1.5 Признаки сравнения

Теорема 3. Если для всех $n \in N$ выполняется условие

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad (1.7)$$

Тогда

а) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Обозначим через A_n и B_n , соответственно, частичную сумму первого и второго рядов:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Заметим, что в силу неотрицательности членов заданных рядов последовательности A_n и B_n будут неубывающими.

а) Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует существование предела последовательности его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B.$$

То есть для всех $n \in N$ выполнено неравенство $B_n \leq B$. Отсюда, используя условие (1.7), получаем $A_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq B$ для всех $n \in N$. Таким образом, последовательность частичных сумм A_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также ограничена сверху и, как было замечено, является неубывающей, а значит, имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A,$$

причем $A \leq B$.

б) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится.

Предположим противное. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда по доказанному в пункте а), получим, что сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что противоречит условию, согласно которому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Теорема доказана.

Замечание. Из леммы 1 следует, что теорема 3 остается в силе, если условие (1.7) выполняется при всех n , начиная с некоторого m .

Следствие. Если члены знакоположительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяют для всех $k \geq m$ (m – заданный номер) условиям:

$$a_n > 0, b_n > 0, \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \quad (1.8)$$

то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Запишем неравенство (1.8), полагая $k = m, m+1, \dots, n-1$:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \leq \frac{b_{m+1}}{b_m}$$

.....

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_{m+1}}{b_m} \cdot \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} \cdots \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} \quad \text{или} \quad \frac{a_n}{a_m} \leq \frac{b_n}{b_m}, \quad \text{откуда}$$

следует, что при всех $n \geq m + 1$ выполняется неравенство $a_n \leq A b_n$, где

$$A = \frac{a_m}{b_m} > 0. \quad \text{Если ряд } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится, то в силу теоремы 3 сходится и ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

. А в случае расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ из этой же теоремы 3 следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 4. (Предельный признак сравнения). *Если $a_n > 0$ и $b_n > 0$ для всех $n \geq m$ (m – заданный номер) и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, где $0 < k < \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Доказательство.

а) Пусть, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Из условия существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ для произвольного положительного ε верно неравенство $\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$. Раскрывая знак модуля, запишем это неравенство в виде

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon. \quad (1.9)$$

Из него следует неравенство

$$a_n < (k + \varepsilon)b_n. \quad (1.10)$$

По свойству 1 из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)b_n, \quad \text{из сходимости которого в силу неравенства (1.10) и теоремы 3}$$

следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

В случае, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, доказательство строится аналогично с той лишь разницей, что следствие из неравенства (1.9) запишем в виде:

$$b_n < \frac{1}{k - \varepsilon} a_n.$$

б) Рассмотрим теперь случай, когда один из рядов расходится. Пусть, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Очевидно, что из существования предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (k \neq 0)$$

следует существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k}$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

должен расходиться, так как иначе в силу доказанного в пункте а) этой теоремы сходился бы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а это невозможно.

Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения.

12-17. Исследовать сходимость рядов, используя теоремы сравнения:

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + 2}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{n^2}\right)$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 5n}{25 + n^{25}}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n^8 + n^2 + 7)^{1/4}}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n^2 + 2}\right)$$

На основании сравнения исследуемого ряда с рядом геометрической прогрессии, знакомой еще из школы, доказываются следующие два часто используемых достаточных признака сходимости рядов: признак Даламбера и признак Коши.

§1.6. Признак Даламбера

Теорема 5. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n > 0$ для всех $n \in N$.

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то

при $l < 1$ ряд сходится,
при $l > 1$ ряд расходится,

при $l = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться, т.е. вопрос остается открытым.

Доказательство. 1) Пусть $l < 1$. Рассмотрим число q (такое число всегда найдется), удовлетворяющее соотношению $l < q < 1$. Из существования

предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ следует, что, начиная с некоторого номера N , выполнено

неравенство: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < q - l$. Раскрывая модуль, получим

$$-q + l < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < q - l.$$

Отсюда можно записать: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, то есть $a_{n+1} < qa_n$.

Выпишем это неравенство для значений n , начиная с номера N :

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< qa_N \\ a_{N+2} &< qa_{N+1} < q^2 a_N \\ \dots & \\ a_{N+p} &< q^p a_N \\ \dots & \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь два ряда:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$$

и

$$a_N + qa_N + q^2 a_N + \dots$$

Второй из этих рядов есть не что иное, как геометрическая прогрессия с знаменателем $0 < q < 1$, а значит сходится (см. пример 1). По теореме 3

сходится тогда и ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$, откуда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

получаемого из ряда $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$ добавлением конечного числа членов a_1, \dots, a_{N-1}

(лемма 1).

2) Пусть $l > 1$. Из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ следует, что, начиная с

некоторого номера N , выполнено неравенство: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < l - 1$. Раскрывая

модуль $-l + 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < l - 1$, можно записать его в виде: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Запишем это неравенство для значений n , начиная с номера N :

$$a_{N+1} > a_N, \\ a_{N+2} > a_{N+1} > a_N, \text{ и т.д.}$$

Следовательно, члены ряда возрастают, начиная с номера $N+1$, то есть не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$). Поэтому ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}, \text{ а вместе с ним и ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится.}$$

3) Пусть $l = 1$. В этом случае признак Даламбера не дает возможности установить, сходится ряд или расходится, так как в этом случае ряд может оказаться и сходящимся, и расходящимся. Приведем такие примеры.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Он сходится, это видно из примера 2.

А ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – расходится (см. пример 3). При этом в обоих случаях предел

дроби $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n \rightarrow \infty$ равен 1.

Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n/n}{n/n + 3/n} \right) = 1.$$

Аналогично вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n/n}{n/n + 1/n}} \right) = 1.$$

Теорема доказана.

Заметим, что существует формулировка признака Даламбера в другом виде:

Теорема 5.1. а) Если существует число $q \in (0,1)$ и номер m такие, что для всех

$n \geq m$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, то ряд сходится;

б) если существует номер m такой, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Доказательство. а) Из условия $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ следует, что $a_{m+1} \leq qa_m$, $a_{m+2} \leq qa_{m+1} \leq q^2 a_m$ и можно

записать $a_{m+p} \leq q^p a_m$ для любого $p \in N$. Так как ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_m q^p$, где $0 < q < 1$, сходится (см.

пример 1 и свойство 1) и $a_n > 0$ при всех $n \in N$, то по теореме 3 сходится ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p}$, откуда

следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, получаемого из ряда $\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p}$ добавлением конечного числа членов a_1, \dots, a_m .

б) Из условия $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ следует, что $a_{m+1} \geq a_m$, $a_{m+2} \geq a_{m+1} \geq a_m$, $a_{m+3} \geq a_m$ и т.д.

Следовательно, $a_{m+p} \geq a_m > 0$ для всех $p \in N$. Поэтому ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p}$, а вместе с ним и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

Что и требовалось доказать.

Пример 4. Из признака Даламбера в предельной форме ничего нельзя сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, так как $l=1$. В то же время легко показать, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n - 1}{n^2 + 2n + 1} = 1 - \frac{2n + 1}{n^2 + 2n + 1} \leq q < 1, \text{ что означает}$$

сходимость ряда.

Пример 5. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, где $a > 0$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

► Решение. а) Вычислим

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1,$$

это означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.

б) Вычислим

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = e^{-1} < 1.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ сходится. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

18-31. Применяя признак Даламбера, исследовать сходимость рядов:

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n + 3}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{3^n n!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n(3n+5)}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n!}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

§1.7 Признак Коши

Теорема 6. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$ для всех $n \in N$. Тогда:

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то

при $l < 1$ ряд сходится,

при $l > 1$ – ряд расходится, а

при $l = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. 1) Пусть $l < 1$. Рассмотрим число q (такое число всегда найдется), удовлетворяющее соотношению $l < q < 1$. Из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ следует, что, начиная с некоторого номера N , выполнено неравенство: $|\sqrt[n]{a_n} - l| < q - l$. Раскрывая модуль, можно записать неравенство в виде: $\sqrt[n]{a_n} < q$ или $a_n < q^n$ для всех $n \geq N$.

Рассмотрим теперь два ряда:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$$

и

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots$$

Второй из этих рядов есть не что иное, как убывающая геометрическая прогрессия, а, значит – сходится (пример 1). Но тогда по теореме 3 сходится и ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$, откуда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, получаемого из ряда

$\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$ добавлением конечного числа членов a_1, \dots, a_{N-1} (лемма 1).

2) Пусть $l > 1$. Из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ следует, что, начиная с некоторого номера $n=N$, выполнено неравенство: $|\sqrt[n]{a_n} - l| < l - 1$. Раскрывая модуль, можно записать неравенство в виде: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ или $a_n > 1$ для всех $n \geq N$. Но если все члены рассматриваемого ряда, начиная с a_N больше 1,

то этот ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю, то есть не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$).

3) Пусть $l = 1$. В этом случае радикальный признак Коши не дает возможности установить, сходится ряд или расходится, требуются дополнительные исследования. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Мы знаем, что он сходится (пример 4). Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$, применив предварительное логарифмирование:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln n}{n}} = \begin{cases} \text{применяя} \\ \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{cases} = e^{-2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1}} = e^0 = 1.$$

Также известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – расходится (пример 3). При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ и вычисляется он аналогичным образом.

Теорема полностью доказана.

Заметим также, что существует формулировка признака Коши в другом виде.

Теорема 6.1 Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$ для всех $n \in N$. Тогда:

а) если существует число $q \in (0,1)$ и номер m такие, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то ряд сходится;

б) если существует номер m такой, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Доказательство. а) Из условия $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ следует, что при всех $n \geq m$ выполняется неравенство $a_n \leq q^n$, где $0 < q < 1$. По теореме 3 из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ следует сходимость ряда $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, а значит и сходимость исходного ряда.

б) Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то $a_n \geq 1$ при всех $n \geq m$, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (не выполнен необходимый признак сходимости).

Что и требовалось доказать.

Замечание. Признак Коши при исследовании сходимости рядов с положительными членами называют более сильным, чем признак Даламбера.

Потому, что из существования $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ следует, что существует равный ему

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Сформулируем это замечание в виде теоремы, доказательство которой при первом прочтении можно пропустить. Предварительно сформулируем и докажем две леммы, на которые опирается доказательство этой теоремы.

Лемма 2. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу A , то к этому же пределу сходится и последовательность ее средних арифметических $\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.*

Таким образом $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Доказательство. По определению сходимости последовательности $\{a_n\}$ имеем: для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер M такой, что для всех $n \geq M$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого $n \geq M$ выполнено

$$\begin{aligned} |\sigma_n - A| &= \left| \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_n - A)}{n} \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_M - A)}{n} + \frac{(a_{M+1} - A) + \dots + (a_n - A)}{n} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_M - A)}{n} \right| + \frac{\varepsilon(n-M)}{n} < \left| \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_M - A)}{n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Так как M фиксировано, то, выбрав достаточно большое число M_1 таким, чтобы выполнялось неравенство $\left| \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_M - A)}{M_1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, получим, что для всех номеров n , больших, чем M_1 , будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{(a_1 - A) + \dots + (a_M - A)}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется число $M_1 > 0$ такое, что для всех $n \geq M_1$ будет выполняться неравенство $|\sigma_n - A| < \varepsilon$, то есть, по определению $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = A$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу A , то к тому же пределу сходится и последовательность ее средних геометрических $p_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.*

Доказательство. Из условия сходимости последовательности $\{a_n\}$ к пределу A и из непрерывности логарифмической функции имеем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln A,$$

причем, если $A = 0$, то полагаем $\ln A = -\infty$. Используя лемму 2, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln A.$$

Из этого равенства, в силу непрерывности показательной функции, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln p_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln p_n} = e^{\ln A} = A$, что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Если для ряда $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то существует равный ему $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$D_1 = a_1, D_2 = \frac{a_2}{a_1}, \dots, D_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \dots,$$

для которой предполагаем существование предела: $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = l$. Тогда на основании леммы 3 получаем, что существует и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_1 D_2 \dots D_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = l$, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение не верно. Другими словами, из существования предела по Коши не следует, что существует предел из признака Даламбера.

Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^n}$ по признаку Коши $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2^n}} = \frac{1}{2}$

(Применим, например, теорему о двух милиционерах к неравенству:

$\sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{4}{2^n}}$. Поскольку пределы левой и правой последовательностей при $n \rightarrow \infty$ равны $\frac{1}{2}$, то и предел рассматриваемой последовательности тоже равен $\frac{1}{2}$). А предел $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n \rightarrow \infty$ не существует,

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{2}$.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$.

► Решение. Применим признак Коши.

Вычислим

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \right)^2} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e}. \quad l < 1, \quad \text{а значит,}$$

исходный ряд сходится. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

32–44. Применяя радикальный признак Коши, исследовать сходимость рядов:

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^n$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^n$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{3n-1} \right)^{2n}$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n \frac{\pi}{4n}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2+2)^{\sqrt[n]{2}}}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+5}{6n^2-7} \right)^{2n}$$

45–56. Пользуясь признаками Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5^n}$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^{n+1}}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{\pi^n}$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{(\ln(n+1))^n}} \quad (\alpha > 0)$$

В случаях, когда признаки Даламбера и Коши не дают результата, иногда утвердительный ответ могут дать признаки, основанные на сравнении с другими рядами, сходящимися или расходящимися «медленнее», чем ряд геометрической прогрессии. Одним из таких признаков является признак Раабе.

§1.8 Признак Раабе

Теорема 8. Если для членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$,

то

при $r > 1$ ряд сходится,
при $r < 1$ ряд расходится.

Доказательство. Заметим сначала, что существует замечательный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p, \text{ где } p > 0 \text{ – произвольное число.} \quad (1.13)$$

Действительно, применив правило Лопитала, запишем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1} \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1} = p.$$

1) Пусть $r > 1$. Тогда существуют числа p и q такие, что $1 < p < q < r$.

Из равенства (1.13) в силу выбора p и q для достаточно больших n будет иметь место неравенство

$$\left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} - p \right| < \varepsilon,$$

которое при $\varepsilon = q - p$, можно записать в виде

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} < q$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n}. \quad (1.14)$$

Из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$ следует, что для

произвольного положительного ε , начиная с некоторого номера N , выполнено неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - r \right| < \varepsilon \\ \text{или} \quad & -\varepsilon < n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - r < \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Запишем левое неравенство при $\varepsilon = r - q$:

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > q,$$

или другими словами $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > \frac{q}{n}$,

или $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n}$.

Учитывая (1.14), получим

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

Перепишем это неравенство таким образом:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}$$

Из этого неравенства и следствия из теоремы 3, в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 1$), получаем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть $r < 1$. Из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$ следует,

что, для произвольного положительного ε , начиная с некоторого номера N , выполнено неравенство:

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < r + \varepsilon.$$

Взяв в качестве $\varepsilon = 1 - r$, неравенство можно записать в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

или $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}}$.

Но тогда по следствию из теоремы 3, в силу расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, получаем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Замечание. Если сравнить признаки Даламбера и Раабе, то можно показать, что второй значительно сильнее первого. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \neq 1$, то и для последовательности Раабе существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$, причем

$$r = \begin{cases} +\infty, & \text{при } l < 1 \\ -\infty, & \text{при } l > 1 \end{cases}.$$

Таким образом, если признак Даламбера дает ответ на вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то признак Раабе тоже его дает, причем эти случаи охватываются всего двумя значениями r : $r = +\infty$ и $r = -\infty$. Все остальные случаи конечного $r \neq 1$, когда признак Раабе дает утвердительный ответ на вопрос о сходимости, соответствуют случаю $l = 1$, то есть случаю, когда признак Даламбера не дает утвердительного ответа о сходимости или расходимости ряда.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

► **Решение.** Ни признак Коши, ни признак Даламбера не дают ответ на вопрос

о сходимости этого ряда, так как $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Действительно,

применяя известную формулу Стирлинга $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ при $n \rightarrow \infty$ [10],

вычислим $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} = 1$. Вычисление второго предела не представляет трудности:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot e^n \cdot n!}{n^n \cdot e^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} e = 1.$$

Воспользуемся признаком Раабе.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} = x \\ x \rightarrow 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1+x)^{-1/x} - 1}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так как $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$.

Для вычисления предела применим правило Лопиталя. Продифференцируем сначала степенно-показательную функцию, стоящую в числителе дроби по формуле:

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

$$\left((1+x)^{-\frac{1}{x}} \right)' = -\frac{1}{x} (1+x)^{-\frac{1}{x}-1} + (1+x)^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln(1+x) \cdot \frac{1}{x^2} = (1+x)^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x^2}.$$

И продолжим вычисление исходного предела:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{применим} \\ \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{bmatrix} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+x+1}{2x(1+x)^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

и, согласно признаку Раабе, рассматриваемый ряд расходится. ◀

Рассмотренные выше признаки сходимости рядов основаны на теоремах сравнения и являются достаточными, но не являются необходимыми, то есть если условия признака для рассматриваемого ряда не выполняются, то ничего о

сходимости этого ряда сказать нельзя, он может как сходиться, так и расходиться.

Изложенный далее интегральный признак Коши-Маклорена отличается от рассмотренных выше по форме. Он построен на идее сопоставления бесконечной суммы (ряда) с бесконечным (несобственным) интегралом и показывает естественную взаимосвязь между теорией рядов и теорией интегралов. Эта взаимосвязь легко прослеживается также на примере признаков сравнения, аналоги которых имеют место для несобственных интегралов и их формулировки почти дословно совпадают с формулировками для рядов.

§1.9 Интегральный признак сходимости ряда

Теорема 9. Пусть $f(x)$ – монотонно убывающая на промежутке $[1; \infty)$ функция, такая, что $f(1) = a_1; f(2) = a_2; \dots; f(n) = a_n; \dots$. Тогда числовой

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.16)$$

сходится и расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int_1^{\infty} f(x) dx. \quad (1.17)$$

Другими словами, справедливы следующие утверждения:

а) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Доказательство. Обозначим $\Delta_k = [k; k+1]$, где $k \in N$, и пусть $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Так как $f(x)$ – убывающая при $x \geq 1$ функция, то она интегрируема на каждом из отрезков Δ_k и для всех $x \in \Delta_k$ удовлетворяет условию

$$f(k+1) < f(x) < f(k).$$

Отсюда из свойств интеграла получаем

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x) dx < f(k).$$

Запишем эти неравенства для $k = 1, \dots, n$:

$$f(2) < \int_1^2 f(x) dx < f(1)$$

$$f(3) < \int_2^3 f(x) dx < f(2)$$

$$\cdots \\ f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x)dx < f(n)$$

Складывая все эти неравенства почленно, находим

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^n f(k)$$

или $S_{n+1} - f(1) < \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n . \quad n=1,2,\dots \quad (1.18)$

а) Пусть сходится интеграл (1.17), т.е. существует конечный

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_1^\xi f(x)dx = I .$$

Так как $f(x)$ – неотрицательная функция, то по теореме* для всех $\xi \in [1, \infty)$

выполняется неравенство $\int_1^\xi f(x)dx \leq I$ и поэтому для любого $n \in N$

справедливо

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^\infty f(x)dx = I . \quad (1.19)$$

Из (1.18) и (1.19) следует, что для любого $n \in N$

$$S_{n+1} < f(1) + I ,$$

т.е. последовательность частичных сумм ряда (1.16) с неотрицательными членами ограничена сверху. По теореме 2 ряд (1.16) сходится.

б) Обратно, если ряд (1.16) с неотрицательными членами сходится, а его сумма равна S , то для любого $n \in N$

$$S_n \leq S . \quad (1.20)$$

Из (1.18) и (1.20) следует, что для любого $n \in N$

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S . \quad (1.21)$$

Для любого $\xi \geq 1$ выберем $n \in N$ таким, чтобы выполнялось условие $n+1 \geq \xi$. Тогда из неравенства (1.21) и условия $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$ следует, что

$$\int_1^\xi f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S ,$$

и поэтому по теореме* интеграл (1.17) сходится.

* **ТЕОРЕМА.** Если для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$, то для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\int_a^\xi f(x)dx$ была ограничена сверху, т.е.

нашлось такое число C , что для любого $\xi \in [a, b]$ выполняется неравенство $\int_a^\xi f(x)dx \leq C$.

В случае, когда интеграл (1.17) расходится, ряд (1.16) должен расходиться, так как в случае сходимости ряда (1.16) сходился бы по только что доказанному и интеграл (1.17).

Аналогично, из расходимости ряда (1.16) следует расходимость интеграла (1.17). Теорема доказана.

Интегральный признак допускает простое геометрическое истолкование, близкое к идеи Маклорена, который впервые нашел этот признак в геометрической форме (лишь впоследствии этот признак был вновь открыт Коши). Если изобразить функцию $f(x)$ кривой (рис.1.1), то интеграл $\int_1^{n+1} f(x)dx$ будет выражать площадь фигуры, ограниченной этой кривой, осью Ox и двумя ординатами; интеграл же $\int_1^{\infty} f(x)dx$ можно рассматривать как выражение для площади всей бесконечно простирающейся направо фигуры под кривой. С другой стороны, члены $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ряда (1.16) выражают величины ординат в точках $1, 2, \dots, n, \dots$ или, что тоже, площади прямоугольников с основаниями 1 и с высотами, равными упомянутым ординатам.

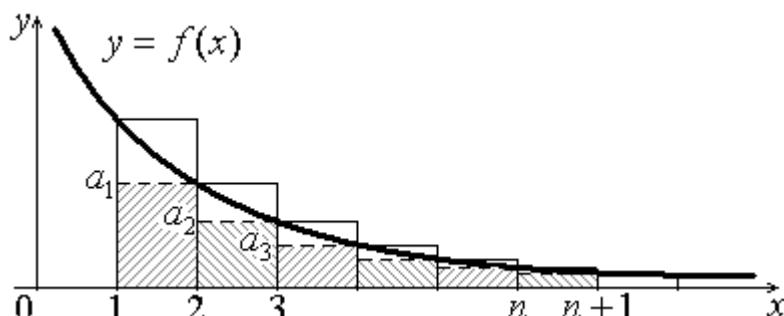


Рис.1.1

Таким образом, сумма ряда (1.16) есть не что иное, как сумма площадей *выходящих* прямоугольников, и лишь первым членом отличается от суммы площадей *входящих* прямоугольников. Это делает совершенно наглядным установленный выше результат: если площадь криволинейной фигуры конечна, то и подавно конечна площадь заключенной в нее ступенчатой фигуры, и рассматриваемый ряд сходится; если же площадь криволинейной фигуры

* **ТЕОРЕМА.** Если для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$, то для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\int_a^{\xi} f(x)dx$ была ограничена сверху, т.е.

нашлось такое число C , что для любого $\xi \in [a, b]$ выполняется неравенство $\int_a^{\xi} f(x)dx \leq C$.

бесконечна, то бесконечна и площадь содержащей ее ступенчатой фигуры, так что в этом случае ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где α – любое

действительное число.

► Решение. Пусть $\alpha > 0$. Здесь $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Эта функция положительна и убывает. Как известно, несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Тогда, согласно теореме 9 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

При $\alpha \leq 0$ ряд будет расходиться, так как не выполнен необходимый признак сходимости, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

57–65. Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость рядов:

$$57. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$58. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$60. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$$

$$61. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

$$62. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^4}$$

$$63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 5n}{7n}$$

$$65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5}$$

66–89. Исследовать сходимость знакоположительных рядов, применяя любой достаточный признак сходимости:

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$$

$$68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

$$69. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}$$

$$70. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$$

$$71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n} \cos \frac{\pi}{2n}$$

$$72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$74. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + 5} \cos \frac{\pi}{3n}$$

$$75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{n \cdot 3^n}$$

$$76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+2)}$$

$$77. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+2^n}{5+3^n}$$

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n+2}}$$

$$79. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3 + 2n+1}}$$

$$80. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}$$

$$81. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$$

$$82. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+2) \ln(n+2)}$$

$$83. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n}$$

$$84. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1) \ln^3 n}$$

$$85. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 \sqrt{n}}$$

$$86. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$$

$$87. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{n(n+1)}$$

$$88. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 4}$$

$$89. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-7)\sqrt{n-3}}$$

§1.10 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Будем называть ряд знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Мы рассмотрим здесь некоторые свойства знакопеременных рядов, при этом будем полагать, что числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Определение 4. Ряд с действительными или комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение 5. Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то такой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

Установим свойства абсолютно сходящихся рядов.

Свойство 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Пусть s_n и σ_n – суммы n первых членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Обозначим s_n^+ сумму всех положительных, а s_n^- – сумму абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данного ряда. Тогда

$$s_n = s_n^+ - s_n^-, \quad \sigma_n = s_n^+ + s_n^-.$$

По условию существует предел σ_n . Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, а это значит, что s_n^+ и s_n^- – положительные возрастающие величины, меньшие σ . Следовательно, они имеют пределы: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^+ = s^+$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^- = s^-$. Тогда из соотношения

$$s_n = s_n^+ - s_n^-$$

следует, что и s_n имеет предел, который равен $s^+ - s^-$. Из сказанного выше вытекает, что знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, а последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

Доказательство. Докажем это свойство, используя признак сравнения (см. §1.5 теорема 3). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$. Из условия ограниченности последовательности $\{b_n\}$ следует, что найдется такое число $M > 0$, что для всех $k = 1, 2, \dots$ выполнены неравенства: $|a_k b_k| \leq M |a_k|$. Тогда по признаку сравнения из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} M |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$.

Свойство доказано.

Свойство 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то при любых значениях констант α и β абсолютно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$.

Доказательство. Для доказательства свойства 3 тоже применим признак сравнения. Сначала заметим, что $|\alpha a_k + \beta b_k| \leq |\alpha a_k| + |\beta b_k| = |\alpha| |a_k| + |\beta| |b_k|$. Причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha| |a_k| + |\beta| |b_k|)$ будет сходиться, так как сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$. А это по признаку сравнения означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n + \beta b_n|$.

Что и требовалось доказать.

Приведем еще два свойства для абсолютно сходящихся рядов без доказательства из-за их громоздкости.

Свойство 4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{a}_j$, полученный перестановкой членов исходного ряда абсолютно сходится, причем суммы этих рядов совпадают.

Свойство 5. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то и ряд $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s}$, составленный из всевозможных попарных произведений членов этих рядов абсолютно сходится, причем сумма ряда $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s}$ равна произведению сумм исходных рядов.

Задачи для самостоятельного решения.

90–98. Доказать абсолютную сходимость рядов:

$$90. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \cdot \sin n\alpha}{n^2}$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}$$

$$93. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{(2n+1)^n}$$

$$94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$$

$$95. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n}$$

$$96. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \sin n e^{-\sqrt{n}}$$

$$97. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^5 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n^2 + n}{n^4 + 1}$$

$$98. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\sqrt[3]{n}}$$

§1.11 Знакочередующиеся ряды

Определение 6. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, где $a_n > 0$ при всех $n \in N$, называется знакочередующимся рядом.

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Теорема 10. (Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ($a_n > 0$) таковы, что

$$1) a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$$

$$\text{и } 2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то этот ряд сходится. Причем его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда.

Доказательство. Рассмотрим сумму $2n$ первых членов ряда S_{2n} , которую можно записать в виде: $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Из условия монотонности следует, что выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, сумма S_{2n} положительна и монотонно возрастает. Кроме того, последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху. Это легко увидеть, если переписать S_{2n} в виде:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1. \end{aligned}$$

По теореме о пределе возрастающей и ограниченной сверху последовательности существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S.$$

Причем

$$0 < S < a_1.$$

Для завершения доказательства сходимости ряда докажем теперь, что частичные суммы S_{2n+1} также сходятся к пределу S .

Согласно определения частичных сумм $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Так как по условию теоремы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, то, используя теорему о пределе суммы, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S.$$

А это означает, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится, что и требовалось доказать.

Следствие. Для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, при всех $n \in N$

справедливы также неравенства:

$$\begin{aligned} S_{2n} &< S < S_{2n+1}, \\ |S - S_n| &< a_{n+1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Из условия $a_n > a_{n+1}$ для всех $n \in N$, записав

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

следует, что $S_{2n+1} < S_{2n-1}$,

т.е. $\{S_{2n+1}\}$ – убывающая последовательность. Так как S является пределом возрастающей последовательности $\{S_{2n}\}$ и пределом убывающей последовательности $\{S_{2n+1}\}$, то справедливо неравенство $S_{2n} < S < S_{2n+1}$, которое можно записать в виде

$$S_{2n-1} - a_{2n} < S < S_{2n} + a_{2n+1}.$$

Отсюда следует, что

$$S_{2n-1} - S < a_{2n} \text{ и } S - S_{2n} < a_{2n+1}.$$

А это означает, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство

$$|S - S_n| < a_{n+1}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 9. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$, где $\alpha > 0$, сходится.

► Решение. Для последовательности $\frac{1}{n^\alpha}$ выполнены оба условия теоремы Лейбница при любом положительном α . А это означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$.

В частном случае при $\alpha = 1$, ряд сходится, причем условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots,$$

а для его суммы S из неравенства $S_{2n} < S < S_{2n+1}$ при $n=1$ следует оценка

$$\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}.$$

Позднее будет показано, что $S = \ln 2$. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

99–107. Пользуясь теоремой Лейбница, доказать сходимость рядов:

99. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

100. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

101. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin \frac{1}{n}$

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \pi \cdot (\sqrt[n]{n} - 1)$

104. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

105. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{n}{n^2 + 1}$

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)!}$

107. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

108–125. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

108. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$

109. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n^2}$

110. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\ln(n+2)}$

111. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}$

112. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

113. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$

114. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$

115. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 3}$

116. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{n} \right)^n$

$$117. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)3^n}$$

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(2n+1)}$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^3 + 2}}$$

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$$

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$$

$$119. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$$

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n^2}$$

$$125. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

§1.12 Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ и два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Частичные суммы этих рядов обозначим, соответственно, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ и $\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$, $n \in N$ и $p \in N$. Сначала введем понятия монотонно сходящейся к нулю последовательности и ограниченной последовательности.

Определение 7. Последовательность $\{a_n\}$ называется *монотонно сходящейся к нулю*, если выполнены следующие условия:

1) $a_n \geq a_{n+1}$ для всех $n \in N$ или

$a_n \leq a_{n+1}$ для всех $n \in N$ и

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Определение 8. Последовательность $\{B_n\}$ называется *ограниченной*, если найдется такое число $M > 0$, что для всех натуральных значений $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $|S_n| \leq M$.

А теперь сформулируем еще два признака сходимости рядов с произвольными членами.

Теорема 11. (признак Дирихле). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, а последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю.

Доказательство. Требуется доказать, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется условие Коши. Преобразуем σ , учитывая, что $b_k = B_k - B_{k-1}$ при $k > 1$. Получим

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1},$$

где

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k + a_{n+1} B_n.$$

Поэтому

$$\sigma = a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Если справедливо неравенство $a_n \geq a_{n+1}$, то из формулы

$$\sigma = a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \quad \text{и} \quad \text{условия ограниченности}$$

последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует, что

$$|\sigma| \leq M(|a_{n+p}| + |a_{n+1}|) + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}),$$

где

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{n+p} \leq |a_{n+1}| + |a_{n+p}|.$$

Таким образом, для всех $n \in N$ и для всех $p \in N$ выполняется неравенство

$$|\sigma| \leq 2M(|a_{n+p}| + |a_{n+1}|).$$

Нетрудно показать, что это неравенство остается в силе, если $a_n \leq a_{n+1}$.

Далее, в силу условия существования $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$) и сказанного выше следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что начиная с которого и для всех $p \in N$ верно неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ удовлетворяет условию Коши, а следовательно сходится.

Теорема доказана.

Замечание. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов можно получить из признака Дирихле, полагая $b_n = (-1)^{n+1}$. Прием, использованный

при преобразовании суммы $\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$ к виду

$$\sigma = a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k,$$

который можно рассматривать как дискретный аналог интегрирования по частям.

Пример 10. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сходится при всех $x \in R$, если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям признака Дирихле, а именно: $a_n \geq a_{n+1}$ или $a_n \leq a_{n+1}$ для всех $n \in N$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

► **Решение.** Для $x = 2\pi m$, где $m \in Z$, все члены ряда равны нулю, а значит рассматриваемый ряд сходится.

Пусть $x \neq 2\pi m$, $m \in Z$. Обозначим $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$. Выведем формулу для частичной суммы:

$$B_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Для $x \neq 2\pi m$, где $m \in Z$ умножим обе части равенства $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$ на

$2 \sin \frac{x}{2} \neq 0$. Получим

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} B_n(x) &= \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx = \sum_{k=1}^n \left(\cos x \left(\frac{1}{2} - k \right) - \cos x \left(\frac{1}{2} + k \right) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{1-2k}{2}x - \cos \frac{1+2k}{2}x \right) = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \dots + \\ &+ \cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}. \end{aligned}$$

Разделив обе части этого равенства на $2 \sin \frac{x}{2} \neq 0$ получим

$$B_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Отсюда $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$ для любого $n \in N$, т.е. последовательность

$\{B_n(x)\}$ ограничена. По теореме 11 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ для каждого $x \neq 2\pi m$,

$m \in Z$, сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ сходится при любом $x \in R$. В

частности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, где $\alpha > 0$ сходится при любом $x \in R$. ◀

Пример 11. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится при любом $x \neq 2\pi m$, где $m \in Z$, если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям признака Дирихле, а именно: $a_n \geq a_{n+1}$ или $a_n \leq a_{n+1}$ для всех $n \in N$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

► **Решение.** Воспользуемся формулой $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \cdot \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$,

$x \neq 2\pi m$, $m \in Z$.

Для доказательства этой формулы умножим обе части равенства $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx$ на $2 \sin \frac{x}{2} \neq 0$, получим

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot B_n(x) &= \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos kx = \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(\frac{1}{2} + k \right)x + \sin \left(\frac{1}{2} - k \right)x \right) = = \\ \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{2k+1}{2}x - \sin \frac{2k-1}{2}x \right) &= \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \dots + \\ + \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{2n-1}{2}x &= \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}. \end{aligned}$$

А теперь, поделив обе части полученного равенства на $2 \sin \frac{x}{2} \neq 0$, получаем

$$B_n(x) = \frac{\sin \frac{n}{2}x \cdot \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Так как $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$ при $x \neq 2\pi m$, $m \in Z$, а последовательность $\{a_n\}$

монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ при $x \neq 2\pi m$, $m \in Z$ сходится по теореме 11. ◀

Теорема 12. (признак Абеля). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если сходится ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена.

Доказательство. Из условия монотонности и ограниченности последовательности $\{a_n\}$ следует, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Это означает, что последовательность $\{a_n - a\}$ монотонно стремится к нулю. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует, что последовательность его частичных сумм ограничена.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$ сходится по признаку Дирихле. Отсюда и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ можно заключить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, так как $a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n$.

Что и требовалось доказать.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n} \ln(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

► Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n} \ln(n+1)}$ сходится (см. пример 11), а последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ монотонна и ограничена. Заметим, кстати, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}$. А значит, что по теореме 12 (теорема Абеля) исследуемый ряд сходится. ◀

§1.13 Условно сходящиеся ряды

Ранее было определено, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся,

если этот ряд сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей его членов, расходится.

При исследования ряда на сходимость и абсолютную сходимость бывает полезно следующее утверждение, которое приведем без доказательства.

Теорема 13. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ одновременно либо сходятся абсолютно, либо расходятся условно, либо расходятся.

Другими словами, добавляя к рассматриваемому ряду абсолютно сходящийся ряд, не изменяя сходимости (или расходимости) исходного ряда.

Пример 13. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \neq \pi m \quad (m \in Z),$ сходится условно.

► **Решение.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 0$ (см. пример 10). Осталось доказать, что абсолютной сходимости этого ряда нет, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^{\alpha}}$ расходится. Воспользуемся неравенством

$$\frac{|\sin nx|}{n^{\alpha}} \geq \frac{\sin^2 nx}{n^{\alpha}} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n^{\alpha}}.$$

Но так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^{\alpha}}$ при $0 < \alpha \leq 1, \quad x \neq \pi m \quad (m \in Z),$ сходится (см. пример 11), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\alpha}}$, при $0 < \alpha \leq 1$ расходится (см. пример 8), то по теореме 13 расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2nx}{2n^{\alpha}}$. А это в силу признака сравнения означает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$.

Таким образом, доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ сходится условно. ◀

Пример 14. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

► **Решение.** Запишем n -ый член ряда в следующем виде:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{-1}.$$

Используя формулу Тейлора для биномиальной функции $(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, получим:

$$\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{-1} = 1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}(1 + \alpha_n),$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и поэтому $|\alpha_n| \leq 1$ при $n \geq n_0$. Тогда можно записать

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + b_n,$$

где $|b_n| \leq \frac{2}{n^{3/2}}$, и поэтому слагаемое b_n не влияет на сходимость исходного ряда

(теорема 13). Но так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится условно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ –

расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$ расходится. ◀

Замечание. Если для членов знакочередующихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется условие $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то отсюда не следует, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ эквивалентны в смысле сходимости, т.е. сходятся или расходятся

одновременно. Примером служат ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$. Первый из них сходится, а второй расходится, хотя $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим свойства условно сходящихся рядов.

В предыдущем параграфе было отмечено переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда (свойство 4). Условно сходящийся ряд, в отличие от абсолютно сходящегося таким свойством не обладает. Сумма условно сходящегося ряда может изменяться при перестановке его членов. Более того, можно так переставить его члены, что сходимость исчезнет вовсе.

Докажем предварительно лемму. Для этого рассмотрим условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим

$$\alpha_k = \frac{a_k + |a_k|}{2}, \quad \beta_k = \frac{|a_k| - a_k}{2}. \quad (1.22)$$

Тогда для всех $k \in N$ следует, что

$$\alpha_k \geq 0, \quad \beta_k \geq 0, \quad (1.23)$$

$$\alpha_k = \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k > 0 \\ 0, & \text{если } a_k \leq 0 \end{cases}, \quad \beta_k = \begin{cases} -a_k, & \text{если } a_k < 0 \\ 0, & \text{если } a_k \geq 0 \end{cases}, \quad (1.24)$$

и

$$a_k = \alpha_k - \beta_k. \quad (1.25)$$

Лемма 4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ расходятся, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Доказательство. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится. Тогда из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$, так как $\alpha_n + \beta_n = 2\alpha_n - (\alpha_n - \beta_n)$.

Из равенств (1.22) следует, что $|a_n| = \alpha_n + \beta_n$, где $\alpha_n \geq 0$, $\beta_n \geq 0$. Поэтому должен сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, но это противоречит тому, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Другими словами, предположение неверно, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ не может сходиться, а значит, он расходится. Аналогично доказывается расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Проверим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. Это действительно так, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, а последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ определяются формулами (1.24).

Что и требовалось доказать.

Указанное в начале параграфа свойство условно сходящегося ряда следует из теоремы, которую приведем без доказательства. Его можно найти в [10] стр. 317.

Теорема 14. (Римана). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то каким бы ни было число L (конечным числом или одним из символов $+\infty, -\infty$), можно так переставить члены этого ряда, что последовательность частичных сумм получившегося ряда будет иметь своим пределом при $n \rightarrow \infty$ это число L .

Проиллюстрируем это свойство условно сходящегося ряда примером.

Пример 15. Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots \quad (1.26)$$

Его сумма равна $\ln 2$. Переместим его члены так, чтобы после одного положительного следовали два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots \quad (1.27)$$

Докажем, что сумма ряда от такого перемещения уменьшится вдвое.

Обозначим частичные суммы рядов (1.26) и (1.27) A_n и B_n соответственно. Тогда

$$B_{3m} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} A_{2m},$$

так что $B_{3m} \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$. Так как $B_{3m-1} = B_{3m} + \frac{1}{4m}$ и $B_{3m-2} = B_{3m} + \frac{1}{4m-2}$ стремятся к тому же пределу $\frac{1}{2} \ln 2$, то ряд (1.27) сходится и имеет суммой именно это число.

Рассмотрим еще один ряд, полученный из ряда (1.26), в котором после двух положительных членов следует один отрицательный:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} + \dots \quad (1.28)$$

Рассмотрим его частичную сумму:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k-2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) = A_{4m} + \frac{1}{2} A_{2m}. \end{aligned}$$

Поскольку $A_{2m} \rightarrow \ln 2$ и $A_{4m} \rightarrow \ln 2$, то $\tilde{B}_{3m} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2$. Так как $\tilde{B}_{3m-1} = \tilde{B}_{3m} + \frac{1}{2m}$ и $\tilde{B}_{3m-2} = \tilde{B}_{3m} + \frac{1}{2m} - \frac{1}{4m-1}$ тоже стремятся к пределу $\frac{3}{2} \ln 2$, то ряд (1.28) сходится и сумма его равна этому же числу $\frac{3}{2} \ln 2$.

Можно обобщить этот результат следующим образом: расположим члены ряда (1.26) в следующем порядке: сначала поместим p положительных и q отрицательных, потом снова p положительных и q отрицательных и т.д. Частичная сумма S_{2n} полученного таким образом ряда равна

$$S_{2n} = \ln \left(2 \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \right) + \alpha_n \quad (\alpha_n \rightarrow 0)$$

и стремится к пределу

$$\ln \left(2 \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \right).$$

К этому же пределу стремится и сумма S_{2n-1} . Значит ряд (1.27) будет иметь суммой это число $\ln \left(2 \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \right)$.

Как частный случай из этой формулы при $p=1$, $q=2$ получается сумма ряда (1.27), а при $p=2$, $q=1$ – сумма ряда (1.28).

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ получен из ряда (1.26) перестановкой членов так, что члены одного знака убывают по абсолютной величине, а среди первых n членов отношение числа положительных членов к числу отрицательных членов стремится к σ при $n \rightarrow \infty$. Можно доказать следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ln \sqrt{4\sigma}.$$

То есть если численность последовательных групп положительных и отрицательных членов изменять от группы к группе, то можно закон этого изменения подобрать так, чтобы для преобразованного ряда получить любую наперед заданную сумму (подробнее см. [10]). Установленный результат подчеркивает тот факт, что *неабсолютная сходимость* осуществляется лишь благодаря *взаимному погашению положительных и отрицательных членов*, и потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим, в то время как *абсолютная сходимость* основана на быстроте убывания этих членов, а от порядка их не зависит.

Задачи для самостоятельного решения.

126.–134. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$126. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$127. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$128. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)!}$$

$$129. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 2^n}{3^n + 1}$$

$$130. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

$$131. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+n}$$

$$132. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} \alpha}{n}$$

$$133. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+2)}$$

$$134. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$$

Глава 2. Функциональные ряды

§2.1 Сходимость функциональных рядов

Настоящая глава посвящена рядам, члены которых являются функциями некоторого независимого переменного. Дадим необходимые определения.

Определение 1. *Функциональным рядом* называется ряд, члены которого функции одной и той же переменной, заданные в некоторой области.

В общем виде функциональный ряд записывается следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (2.1)$$

где члены ряда $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ - функции. Множество чисел, на котором определены все члены ряда (2.1), назовем *областью определения функционального ряда* и обозначим через D .

В данной главе рассматриваются только функциональные ряды, поэтому в дальнейшем на протяжении всей главы под термином «ряд» будет подразумеваться «функциональный ряд».

Пусть $x = x_0$ из области определения ряда (2.1). Подставим $x = x_0$ в (2.1), тогда получим числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2.2)$$

Числовой ряд (2.2) исследуем на сходимость, используя признаки сходимости числовых рядов, рассмотренные в главе 1. Если числовой ряд (2.2) сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* ряда (2.1). Если числовой ряд (2.2) расходится, то точка x_0 называется *точкой расходимости* ряда (2.1).

Определение 2. Множество всех x , $x \in D$, при которых функциональный ряд (2.1) сходится, называется *областью сходимости* ряда.

По аналогии с числовыми рядами дадим определение суммы функционального ряда (2.1). Для этого определим частичные суммы.

Определение 3. Сумма первых n членов функционального ряда (2.1) называется *n-ой частичной суммой* ряда и обозначается $S_n(x)$:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Определение 4. Функция $S(x)$, заданная в области сходимости ряда (2.1) и определяемая равенством

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

называется *суммой функционального ряда* (2.1).

Приведем некоторые примеры нахождения области сходимости функциональных рядов.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

► Решение. Из теории числовых рядов известно, что при $x > 1$ ряд сходится, при $x \leq 1$ ряд расходится. Значит, $x \in (1, +\infty)$ – область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. ◀

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx$.

► Решение. Частичные суммы данного функционального ряда имеют вид:

$$S_1(x) = x; S_2(x) = x + 2x; \dots; S_n(x) = x + 2x + \dots + nx.$$

Таким образом, $S_n(x)$ представляет собой сумму n членов арифметической прогрессии с первым членом x и разностью x :

$$S_n(x) = \frac{2x + x(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_n(x) = \frac{nx(n+1)}{2}.$$

Тогда

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx(n+1)}{2} = \infty \text{ при } x \neq 0.$$

Значит, для любого $x \neq 0$ ряд расходится, то есть $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ – область расходимости ряда.

Если $x = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} nx = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ и ряд сходится, так как $S = 0$.

Таким образом, областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx$ является единственная точка $x = 0$. ◀

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 (1 - \cos 2x)^n}.$$

► Решение. 1) Члены данного функционального ряда определены при $1 - \cos 2x \neq 0$ или $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^3 (1 - \cos 2x)^n}{(n+1)^3 (1 - \cos 2x)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{1}{|1 - \cos 2x|} \right) =$$

$$= \frac{1}{|1 - \cos 2x|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = |0 < 1 - \cos 2x \leq 2| = \frac{1}{1 - \cos 2x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} =$$

$$= \frac{1}{1 - \cos 2x},$$

при этом функция $\frac{1}{1 - \cos 2x}$ неотрицательная, поэтому по признаку Даламбера (числовой) ряд сходится при

$$\frac{1}{1 - \cos 2x} < 1.$$

Решим данное неравенство. Перепишем его в виде:

$$\frac{\cos 2x}{1 - \cos 2x} < 0.$$

В области сходимости ряда

$$1 - \cos 2x > 0,$$

следовательно,

$$\cos 2x < 0.$$

Решение последнего неравенства можно записать в виде

$$\frac{\pi}{4} + \pi m < x < \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in Z.$$

Таким образом, ряд сходится на интервалах $\left(\frac{\pi}{4} + \pi m; \frac{3\pi}{4} + \pi m\right)$, $m \in Z$.

3) Для полного ответа на поставленный вопрос исследуем на сходимость ряд в граничных точках интервалов. При $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi m$ и $x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi m$ ($m \in Z$) исходный функциональный ряд становится числовым $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится по интегральному признаку Коши.

4) Окончательно получили, что область сходимости ряда:
 $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi m; \frac{3\pi}{4} + \pi m\right]$, $m \in Z$. ◀

Пример 4. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^n.$$

► **Решение.** 1) Члены данного функционального ряда определены при $x \neq -2$.
 2) Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right) = 2 \cdot \left| \frac{x+1}{x+2} \right|,$$

то согласно признаку Коши данный ряд сходится, если

$$2 \cdot \left| \frac{x+1}{x+2} \right| < 1.$$

Данное неравенство равносильно двойному неравенству:

$$-\frac{1}{2} < \frac{x+1}{x+2} < \frac{1}{2},$$

и имеет решение

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; +\infty \right) \\ x \in (-2; 0) \end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится при $x \in \left(-\frac{4}{3}; 0 \right)$.

3) В граничной точке интервала $x_1 = -\frac{4}{3}$ исходный функциональный ряд

принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{-\frac{4}{3} + 1}{-\frac{4}{3} + 2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (-1)^n \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Полученный знакочередующийся ряд расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1 \neq 0$.

В граничной точке интервала $x_2 = 0$ получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Этот ряд также расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$.

Итак, областью сходимости заданного ряда является $x \in \left(-\frac{4}{3}; 0 \right)$. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

135-138. Найти область сходимости функционального ряда по определению сходимости функционального ряда:

$$135. \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n. \quad 136. \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n\sqrt{x}}. \quad 137. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{10}{x^2} \right)^n. \quad 138. \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n(x+1)}$$

139-158. Найти область сходимости функционального ряда:

- 139.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{4^n}$
- 140.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$
- 141.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$
- 142.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$
- 143.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (x+2)^n}$
- 144.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n+1} \cdot x^n}$
- 145.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^3 + 4)(x-1)^{n+1}}$
- 146.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x}{x+2} \right)^{2n+1}$
- 147.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\frac{x}{3x+1} \right)^n$
- 148.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+2)}{n} \right)^n$
- 149.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^n$
- 150.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^n x}{n}$
- 151.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+x}{n} \right)^{n^2}$
- 152.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n+1}$
- 153.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2x)^{2n}}$
- 154.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2x - \frac{1}{x} \right)^n$
- 155.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$
- 156.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2}$
- 157.** $\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt[3]{\sin^n x}$
- 158.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^{2n} x}{n^2 + 2n}$

§2.2 Равномерная сходимость функциональных рядов

Понятие равномерной сходимости функциональных рядов тесно связано с понятием равномерной сходимости последовательности функций. Дадим определение равномерной сходимости последовательности функций.

Пусть последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (2.3)$$

в области D сходится к функции $f(x)$, то есть для любого $x \in D$ справедливо равенство

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Определение 5. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к функции $f(x)$ равномерно в области D , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, и для всех точек x , $x \in D$, справедливо неравенство:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

На рис.2.1 приведена геометрическая интерпретация определения равномерной сходимости последовательности функций. Рассмотрим график функции $f(x)$ и её « ε -полоску», тогда найдется номер N такой, что какую бы функцию $f_n(x)$, $n \geq N$, ни взяли, графики $f_n(x)$ будут попадать в эту « ε -полоску».

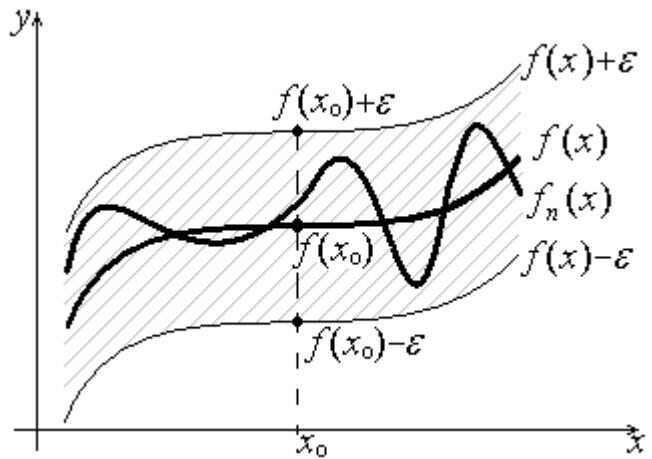


Рис.2.1

Пример 5. Исследовать на равномерную сходимость на $[0, 1)$ последовательность функций

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

► Решение. 1) Рассмотрим данную последовательность $f_n(x) = x^n$.

На отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$, эта последовательность сходится равномерно к функции $f(x) = 0$. Действительно, если $0 \leq x \leq q$, то $0 \leq x^n \leq q^n$, $n = 1, 2, \dots$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $q^n < \varepsilon$ для всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $x \in [0, q]$, $0 < q < 1$.

2) Рассмотрим последовательность $f_n(x) = x^n$ на полуинтервале $[0, 1)$. В этом случае равномерной сходимости нет (рис.2.2). Последовательность $f_n(x) = x^n$ на полуинтервале $[0, 1)$ может равномерно сходиться только к функции $f(x) = 0$. Но заметим, что при любом фиксированном натуральном n

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1.$$

То есть $f_n(x)$ сходится к $f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Следовательно, каково бы ни было $0 < \varepsilon < 1$, при фиксированном n найдётся x_ε , $0 < x_\varepsilon < 1$, такое, что $(x_\varepsilon)^n \geq \varepsilon$. Например, возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и

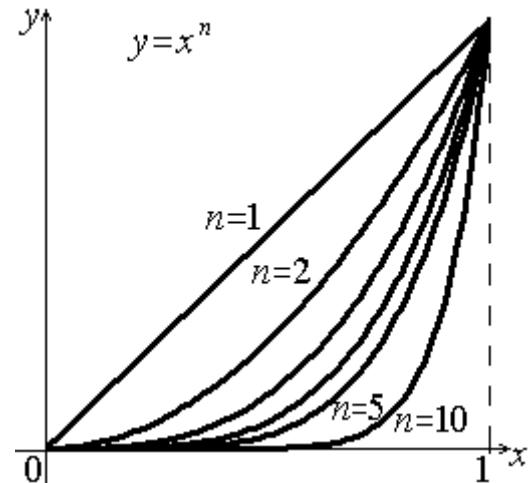


Рис.2.2

$x_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Тогда $x \in [0, 1)$ при любом натуральном n , при этом

$$|f_n(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Значит, последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, на множестве $[0, 1)$ сходится неравномерно. ◀

Определение 6. Функциональный ряд (2.1) называется *равномерно сходящимся* на множестве D к своей сумме $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно на множестве D к функции $S(x)$.

Пусть ряд (2.1) сходится в области D . Обозначим через $\varphi_n(x)$ разность между суммой ряда $S(x)$ и его частичной суммой $S_n(x)$, то есть

$$\varphi_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x),$$

функцию $\varphi_n(x)$ называют остатком ряда (2.1).

Если функциональный ряд (2.1) равномерно сходится на множестве D к своей сумме $S(x)$, то по определениям 5 и 6 получаем

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, всех $n \geq N(\varepsilon)$, $x \in D$. То есть

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

или

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, определение 6 равносильно следующему:

Определение 7. Ряд (2.1) называется *равномерно сходящимся* в области D , если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ не зависящий от x , $x \in D$, такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

В противном случае, ряд сходится неравномерно, то есть существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого номера $N(\varepsilon)$ найдутся $n > N(\varepsilon)$ и $x \in D$, при которых выполняется неравенство:

$$|\varphi_n(x)| \geq \varepsilon.$$

Пример 6. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$. Данный ряд сходится на интервале $(0; 1)$.

При этом, например, на интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ряд сходится равномерно, а на интервале $(0; 1)$ равномерной сходимости нет.

► 1) Докажем сходимость на интервале $(0;1)$.

Так как $S_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$ (сумма первых n членов геометрической прогрессии), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}.$$

Если $0 < x < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ и

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ при $x \in (0;1)$ сходится.

2) Покажем, что на интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ряд сходится равномерно. Оценим остаток ряда:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &= |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \begin{cases} \text{сумма бесконечной геометрической} \\ \text{прогрессии с первым членом} \\ x^{n+1} \text{ и знаменателем } x \end{cases} = \\ &= \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Поставим условие $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$, тогда $\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$ и $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

Возьмем $N(\varepsilon) = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$.

Так как при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ не зависящий от x , что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$, то на

интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится равномерно.

3) Покажем, что на интервале $(0;1)$ равномерной сходимости нет.

Возьмем любое $0 < \varepsilon < 1$ и рассмотрим $x_{\varepsilon} = \sqrt[n+1]{\varepsilon}$ ($0 < x_{\varepsilon} < 1$), тогда

$$|\varphi_n(x_{\varepsilon})| = \left| \frac{x_{\varepsilon}^{n+1}}{1 - x_{\varepsilon}} \right| = \frac{\varepsilon}{1 - \sqrt[n+1]{\varepsilon}} > \varepsilon,$$

что справедливо для любого номера n . Значит, на интервале $(0;1)$ у ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ равномерной сходимости нет. ◀

Замечание. Равномерная сходимость функционального ряда является более сильным требованием, чем просто сходимость. Как показано выше (пример 6), из сходимости не следует наличие равномерной сходимости. Если нет сходимости, то равномерной сходимости также нет. Действительно, из отсутствия сходимости следует, что не существует предельной функции для последовательности частичных сумм. Поэтому равномерной сходимости быть не может.

Пример 7. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x+n)(2x+n+1)}$ на $D = (0, +\infty)$.

► Решение. Члены исходного ряда представимы в виде:

$$u_n(x) = \frac{1}{(2x+n)(2x+n+1)} = \frac{1}{2x+n} - \frac{1}{2x+n+1}.$$

Тогда частичные суммы можно вычислять по формулам:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+2} \right) + \left(\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+3} \right) + \left(\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2x+4} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2x+n} - \frac{1}{2x+n+1} \right) = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+n+1} \right) = \frac{1}{2x+1}.$$

Таким образом, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x+n)(2x+n+1)}$ сходится.

Исследуем на равномерную сходимость данный функциональный ряд. При $x \in (0, +\infty)$ имеем:

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+n+1} - \frac{1}{2x+1} \right| = \frac{1}{2x+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Если $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, тогда $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Возьмем $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$.

Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ не зависящий от x , что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, то на $D = (0, +\infty)$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x+n)(2x+n+1)}$ сходится равномерно. ◀

Пример 8. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \sin nx}$ на $D = (-\infty, +\infty)$.

► Решение. Данный функциональный ряд при любом x из D удовлетворяет условиям признака Лейбница. Действительно

1) для любого $n = 1, 2, \dots$ справедливо

$$\frac{1}{2n + \sin nx} \geq \frac{1}{2(n+1) + \sin(n+1)x}$$

(так как $\frac{1}{2n + \sin nx} \geq \frac{1}{2n+1}$ и $\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2(n+1) + \sin(n+1)x}$);

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n + \sin nx} \right) = 0.$$

Таким образом, по признаку Лейбница ряд сходится, причем справедлива оценка

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + \sin kx} \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{2(n+1) + \sin(n+1)x} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Если $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$, тогда $n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$.

$$\text{Возьмем } N(\varepsilon) = \left[\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right] + 1.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ не зависящий от x , что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, то на $D = (-\infty, +\infty)$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \sin nx}$ сходится равномерно. ◀

Теорема 1. (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если функциональный ряд (2.1) равномерно сходится на множестве D , то последовательность его членов $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к нулю на множестве D .*

Доказательство. Пусть функциональный ряд (2.1) равномерно сходится на множестве D к функции $S(x)$. Тогда по определению 6 для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \in D$.

Оценим значение $|u_n(x)|$:

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| = \\ &= |(S_n(x) - S(x)) - (S_{n-1}(x) - S(x))| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S_{n-1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Если ряд (2.1) равномерно сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ не зависящий от x такой, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$|u_n(x)| < \varepsilon,$$

что и означает равномерную сходимость последовательности функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, к нулю на множестве D .

Что и требовалось доказать.

Обратное утверждение данной теоремы неверно, то есть из равномерной сходимости членов $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, не следует равномерная сходимость функционального ряда (2.1). Как показывает пример 9, условия теоремы 1 не являются достаточными, то есть если последовательность членов ряда $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к нулю на множестве D , то это вовсе не означает, что функциональный ряд (2.1) сходится равномерно на множестве D .

Пример 9. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ на множестве

$D = (-\infty; +\infty)$. Покажем, что общий член ряда равномерно сходится к нулю, но сам ряд не имеет равномерной сходимости.

► 1) Докажем равномерную сходимость $u_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ к нулю.

По определению 5:

$$|u_n(x) - 0| = \left| \frac{1}{n+x^2} - 0 \right| = \frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Если $\frac{1}{n} < \varepsilon$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Значит, можно взять $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, удовлетворяющий условиям определения 5, и последовательность $u_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ равномерно сходится к нулю.

2) Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ не только не имеет равномерной сходимости, но и является расходящимся при любом $x \in (-\infty; +\infty)$.

Действительно, при любом фиксированном x получаем числовой ряд, члены которого положительны. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$, используя интегральный признак Коши:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{t+x^2} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{t+x^2} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{d(t+x^2)}{t+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\ln(t+x^2) \Big|_1^a \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} (\ln(a+x^2) - \ln(1+x^2)) = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln(a+x^2) - \ln(1+x^2) = \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ не сходится ни в одной точке, а это означает, что нельзя говорить и о равномерной сходимости. ◀

Теорема 2 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). *Функциональный ряд (2.1) равномерно сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ и любом p при любом $x \in D$ выполняется условие:*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x).$$

1) Необходимость.

Пусть функциональный ряд (2.1) равномерно сходится, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ не зависящий от x такой, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε данное неравенство выполняется, если взять $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, что также верно:

$$|S_{n+p}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| &= \left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right| = \left| S_{n+p}(x) - S(x) - (S_n(x) - S(x)) \right| < \\ &< \left| S_{n+p}(x) - S(x) \right| + \left| (S_n(x) - S(x)) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, из равномерной сходимости ряда (2.1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ и любого номера p выполняется условие:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

2) Достаточность.

Пусть выполняется условие (2.4) теоремы.

При любом фиксированном значении $x \in D$ ряд (2.1) является числовым. Из неравенства (2.4) и критерия Коши сходимости числовой последовательности вытекает сходимость последовательности $S_n(x)$ в каждой точке $x \in D$ к предельной функции $S(x)$.

Возьмем некоторое значение $\varepsilon > 0$ и найдем $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ такое, что для всех $n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и всех натуральных p будет выполнено неравенство:

$$\left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксировав произвольный номер $n > N(\varepsilon)$ и произвольную точку $x \in D$, перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty$, при этом $S_{n+p}(x)$ будет сходиться к предельной функции $S(x)$:

$$\left| S(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это означает, что функциональный ряд (2.1) сходится равномерно.

Что и требовалось доказать.

Приведём пример доказательства равномерной сходимости функционального ряда с помощью критерия Коши.

Пример 10. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n \sqrt{1+nx^2}}$ на $[0; 2]$.

► Решение. Воспользуемся критерием Коши:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x}{3^k \sqrt{1+kx^2}} \right| \leq \left| \text{так как } 0 \leq x \leq 2 \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{2}{3^k} = \left| \begin{array}{l} \text{сумма членов} \\ \text{геом. прогрессии} \end{array} \right| =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p}{1 - \frac{1}{3}} \leq 2 \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^n}.$$

Если $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, тогда $n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon}$. Значит, можно взять $N(\varepsilon) = \left\lceil \log_3 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.

По критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n \sqrt{1+nx^2}}$ равномерно сходится на $[0; 2]$. ◀

Из критерия Коши, в частности, следует, что функциональный ряд (2.1) сходится неравномерно на множестве D , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого номера $N(\varepsilon)$ найдутся натуральные $n > N(\varepsilon)$ и p , а также найдется значение $x \in D$, что выполняется неравенство:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \geq \varepsilon.$$

Приведём пример ряда, который сходится в некоторой области D , но не имеет равномерной сходимости в этой области.

Пример 11. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{5^n x}$ на

$$D = (0; +\infty).$$

► **Решение.** 1) При любом фиксированном $x \in (0; +\infty)$ имеем числовой ряд, который сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} \sin \frac{1}{5^{n+1} x}}{3^n \sin \frac{1}{5^n x}} \right| = \left| \text{при } n \rightarrow \infty \right| \left| \sin \frac{1}{5^n x} \sim \frac{1}{5^n x} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} \cdot \frac{1}{5^{n+1} x}}{3^n \cdot \frac{1}{5^n x}} \right| = \frac{3}{5} < 1.$$

2) Для исследования на равномерную сходимость воспользуемся критерием Коши, согласно которому имеем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} 3^k \sin \frac{1}{5^k x} \right| = \left| 3^{n+1} \sin \frac{1}{5^{n+1} x} + 3^{n+2} \sin \frac{1}{5^{n+2} x} + \dots + 3^{n+p} \sin \frac{1}{5^{n+p} x} \right|.$$

Возьмем $n = p$, $x = \frac{1}{5^n}$, тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} 3^k \sin \frac{1}{5^k x} \right| = \left| 3^{n+1} \sin \frac{1}{5} + 3^{n+2} \sin \frac{1}{5^2} + \dots + 3^{2n} \sin \frac{1}{5^n} \right| > 3^{n+1} \sin \frac{1}{5} \geq 9 \sin \frac{1}{5}.$$

Если взять $\varepsilon = 9 \sin \frac{1}{5}$, то получаем при любом n

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} 3^k \sin \frac{1}{5^k x} \right| > \varepsilon.$$

Следовательно, равномерной сходимости нет.

То есть, на $D = (0; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{5^n x}$ сходится неравномерно. \blacktriangleleft

Задачи для самостоятельного решения.

159.-164. Исследовать по определению равномерную сходимость функциональных рядов:

$$159. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n \arcsin x}} \text{ на } D = \left[\frac{1}{2}; 1 \right].$$

$$160. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \text{ на } D = [-1; 1].$$

$$161. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n}} \text{ на } D = [1; +\infty).$$

$$162. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[4]{n}} \text{ на } D = (0; 1].$$

$$163. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \cos nx} \text{ на } D = (-\infty; +\infty).$$

$$164. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 e^{nx}} \text{ на } D = (0; +\infty).$$

165.-170. С помощью признака Коши исследовать равномерную сходимость функциональных рядов:

$$165. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} \cdot e^{-\frac{n^2}{x}} \text{ на } D = (0; +\infty).$$

$$166. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2 x^2} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{n}} \text{ на } D = (0; 1).$$

$$167. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \text{ на } D = [0; 2\pi].$$

$$168. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ на } D = (-1; 1).$$

$$169. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4 x^4} \text{ на } D = (0; +\infty).$$

$$170. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x} \text{ на } D = (0; +\infty).$$

§2.3 Признак Вейерштрасса

Ряд (2.1) *мажорируется* на множестве D числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, если для любого x из множества D и любого натурального n справедливо равенство:

$$|u_n(x)| \leq a_n. \quad (2.5)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также называют *мажорантным* рядом для (2.1) или *мажорантой*.

Теорема 3. (Признак Вейерштрасса). *Если функциональный ряд (2.1)*

мажорируется на множестве D сходящимся числовым рядом, то функциональный ряд (2.1) равномерно сходится на множестве D .

Доказательство. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon$$

или, в силу неотрицательности a_n ,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Оценим остаток ряда (2.1):

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \begin{cases} \text{условие} \\ \text{теоремы} \end{cases} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \begin{cases} \text{из сходимости} \\ \text{ряда} \end{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \varepsilon.$$

Получили, что из сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует равномерная сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример применения признака Вейерштрасса для исследования равномерной сходимости функциональных рядов.

Пример 12. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{(n+x^2)^3}$ на

множестве $D = (-\infty; +\infty)$.

► Решение. Исследуем равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса. Найдем числовой ряд, мажорирующий исходный ряд.

При любых n и x имеет место оценка:

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{(n+x^2)^3} \right| < \frac{\frac{\pi}{2}}{(n+x^2)^3} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^3},$$

значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^3}$ мажорирует исходный ряд.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^3} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

сходится по интегральному признаку Коши.

Таким образом, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg nx}{(n+x^2)^3}$ сходится равномерно на множестве $D = (-\infty; +\infty)$. ◀

Рассмотрим ещё один признак равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 4. *Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве D и $v(x)$ - ограниченная на D функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v(x) \cdot u_n(x)$ равномерно сходится на множестве D .*

Доказательство. Функция $v(x)$ ограничена на D , следовательно, $|v(x)| < M$, где M – некоторое положительное число. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ не зависящий от x такой, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &< \varepsilon \\ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε данное неравенство справедливо, если в роли ε взять $\frac{\varepsilon}{M}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Оценим остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v(x) \cdot u_n(x)$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v(x) \cdot u_k(x) \right| = |v(x)| \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

То есть для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v(x) \cdot u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, имеет место равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v(x) \cdot u_n(x)$.

Что и требовалось доказать.

Пример 13. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x}$ равномерно сходится на интервале

$$\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

► Решение. Имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x} = \frac{1}{2+x} \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Так как на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция $v(x) = \frac{1}{2+x}$ ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно (см. пример 6), значит, по теореме 4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x}$ равномерно сходится на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

171.-184. С помощью признака Вейерштрасса доказать равномерную сходимость функциональных рядов на заданном интервале:

171. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ на $(0, +\infty)$.

172. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n x}{2^n}$ на $(-\infty, +\infty)$.

173. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2 x + nx^2}}$ на $[1, +\infty)$.

174. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n^2 \sqrt{n+2}}\right)$ на $[0, 4]$.

175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{x^3 + n^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ на $[0, 1]$.

176. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(1 + \ln^2 nx)}$ на $[1, +\infty)$.

177. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx + 2}{\sqrt{n^5 + x^2}}$ на $(-\infty, +\infty)$.

178. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n^3 \sqrt[n]{n}}$ на $(-\infty, +\infty)$.

179. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^2 n^6}$ на $(-\infty, +\infty)$.

180. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x^n + x^{-n})}{\sqrt{n!}}$ на $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

181. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ на $[0, +\infty)$.

182. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^2}$ на $(-\infty, +\infty)$.

183. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{e^x + n^2}}$ на $[-10, 10]$.

184. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 (3x)^{2n}}{4x^2 + 5n + 2}$ на $\left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right]$.

§2.4 Пochленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов

Рассмотрим некоторые свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 5. (о непрерывности суммы равномерно сходящихся функциональных рядов). Пусть

- 1) Функциональный ряд (2.1) равномерно сходится на множестве D ;
- 2) Все функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны в точке $x_0 \in D$,

тогда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. При любом $x \in D$ имеем

$$S(x) = S_n(x) + \varphi_n(x).$$

В частности, при $x = x_0$

$$S(x_0) = S_n(x_0) + \varphi_n(x_0).$$

Так как функциональный ряд (2.1) равномерно сходится на D , то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при всех $x \in D$ и $n > N(\varepsilon)$. Очевидно, что также справедливо

$$|\varphi_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если n фиксировано, то $S_n(x)$ является суммой конечного числа функций, непрерывных в точке x_0 , поэтому $S_n(x)$ также непрерывна в точке x_0 , а значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= |S_n(x) + \varphi_n(x) - S_n(x_0) - \varphi_n(x_0)| \leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + \\ &\quad + |\varphi_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

если $|x - x_0| < \delta$.

Следовательно, $S(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Что и требовалось доказать.

Пример 14. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2 + x^4} \text{ на множестве } (-\infty; +\infty).$$

► Решение. 1) Докажем, что данный ряд равномерно сходится.

Очевидно, что $0 < \arcsin \frac{1}{n^2 + x^4} < \arcsin \frac{1}{n^2}$.

Пусть $a_n = \arcsin \frac{1}{n^2}$. Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который

сходится по интегральному признаку Коши. При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения числовых рядов ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2}$$

также сходится.

Значит, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2 + x^4}$ сходится равномерно на множестве $(-\infty; +\infty)$.

2) Функции $u_n(x) = \arcsin \frac{1}{n^2 + x^4}$ непрерывны на множестве $(-\infty; +\infty)$ для любых $n = 1, 2, \dots$

3) По теореме 5 функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2 + x^4}$ непрерывна. ◀

Условие равномерной сходимости функционального ряда (2.1) в теореме 5 существенно. В доказательство этого приведём следующий пример.

Пример 15. Исследовать на непрерывность сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ на множестве $D = [0, 1]$.

► Решение. Все члены ряда $u_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны на отрезке $D = [0, 1]$, то есть выполняется второе условие теоремы 5.

Найдем сумму ряда $S(x)$ по определению. Частичные суммы ряда имеют вид:

$$S_n(x) = x - x^2 + x^2 - x^3 + \dots + x^n - x^{n+1} = x - x^{n+1}.$$

Найдём предел частичных сумм при $n \rightarrow \infty$:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - x^{n+1}) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}.$$

Предельная функция $S(x)$ разрывна в точке $x_0 = 1$. Это связано с тем, что нарушаются первое условие теоремы 5, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ не является равномерно сходящимся на $D = [0, 1]$.

Действительно, оценим остаток ряда

$$|\varphi_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x^k - x^{k+1}) \right| = \begin{cases} \text{сумма бесконечной} \\ \text{геометрической прогрессии} \end{cases} =$$

$$= \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} - \frac{x^{n+2}}{1-x} \right| = \left| \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x} \right| = |x^{n+1}|.$$

Так как остаток ряда $\varphi_n(x) = x^{n+1}$ при $x < 1$ стремится к нулю неравномерно (пример 5 главы 2), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ не имеет равномерной сходимости на $D = [0, 1]$. ◀

Заметим также, что условие равномерной сходимости в теореме 5 является достаточным, но не является необходимым для непрерывности суммы ряда. Например, ряд из примера 15 на множестве $D = [0, 1)$ будет иметь непрерывную сумму $S(x) = x$, хотя сходится неравномерно.

Выясним, когда функциональные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Теорема 6. (о почленном интегрировании функциональных рядов). Пусть

1) Функциональный ряд (2.1) равномерно сходится на $[a, b]$;

2) Все функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны на $[a, b]$,

тогда функциональный ряд можно почленно интегрировать на $[a, b]$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Из условий теоремы следует, что $S(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$ (согласно теореме 5), а значит, $S(x)$ – интегрируема на $[a, b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и по значению $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ найдем номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (\text{для любого } x \in [a; b]).$$

Это сделать возможно, так как из условия равномерной сходимости следует, что $S_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на $[a, b]$.

Рассмотрим оценку:

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx \right| = \left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n u_k(x) \right) dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x)) dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Получили, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx &= \int_a^b S(x) dx \\ \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx &= \int_a^b S(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$.

Что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть выполнены условия теоремы 6. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt$ при $x \in [a; b]$. Из доказательства теоремы 6 следует, что этот функциональный ряд сходится равномерно на $[a, b]$ к $\int_a^x S(t) dt$ и, в частности, имеет место равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt = \int_a^x S(t) dt.$$

Пример 16. Доказать, что функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ непрерывна при $x \in [\ln 2; \ln 3]$ и вычислить $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) dx$.

► Решение. 1) Оценим $u_n(x)$ при $x \in [\ln 2; \ln 3]$:

$$|u_n(x)| = |n e^{-nx}| = \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{e^{n \ln 2}} = \frac{n}{2^n}.$$

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

3) По признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ равномерно сходится на $[\ln 2; \ln 3]$.

4) Функции $u_n(x) = ne^{-nx}$ непрерывны при любом $n = 1, 2, \dots$

5) По теореме 5 функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ непрерывна и по теореме 6 получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{n} \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-nx} d(-nx) \right) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-nx} \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n \ln 3} - e^{-n \ln 2} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{сумма бесконечной} \\ \text{геом. прогрессии} \end{array} \right| = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Теорема 7. (о почленном дифференцировании функциональных рядов).

Пусть

1) Функциональный ряд (2.1) сходится на $[a, b]$;

2) Все функции $u_n(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$ и $u'_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$;

3) Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$,

тогда

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

то есть функциональный ряд можно почленно дифференцировать на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. По теореме 5 функция $T(x)$

непрерывна на $[a, b]$, так как по условию $u'_n(x)$ - непрерывны и $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Функция $T(x)$ непрерывна, следовательно, интегрируема, при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ можно интегрировать почленно от a до x :

$$\int_a^x T(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x u'_n(t) dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = \begin{cases} \text{ряды сходятся} \\ \text{по условию теоремы} \end{cases} = S(x) - S(a).$$

Получили, что

$$S(x) = S(a) + \int_a^x T(t)dt.$$

Данная функция непрерывна и $S'(x) = T(x)$, так как $\int_a^x T(t)dt$

дифференцируем по теореме Ньютона-Лейбница как функция верхнего предела [10, стр.115], то есть

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

при $x \in [a; b]$.

Что и требовалось доказать.

Пример 17. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ дифференцируема

при $x \in R$.

► Решение. 1) При $x \in R$ и $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\left| \frac{\cos nx}{n^{5/2}} \right| < \frac{1}{n^{5/2}}.$$

При этом числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ сходится по интегральному признаку Коши. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ сходится равномерно.

2) Функции $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ дифференцируемы для любых $n = 1, 2, \dots$ и

$$u'_n(x) = -\frac{n^2 \sin nx + \frac{5}{2} \cos nx}{n^{7/2}}.$$

3) Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin nx + \frac{5}{2} \cos nx}{n^{7/2}}$ сходится

равномерно по признаку Вейерштрасса, так как

$$\left| \frac{n^2 \sin nx + \frac{5}{2} \cos nx}{n^{7/2}} \right| < \frac{4}{n^{3/2}}$$

и ряд $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится по интегральному признаку Коши.

4) Условия теоремы 7 выполняются, следовательно, функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ дифференцируема при $x \in R$ и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin nx + \frac{5}{2} \cos nx}{n^{7/2}}. \blacktriangleleft$$

Пример 18. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

► Решение. 1) Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x| \cdot (n+1)}{n} = |x|,$$

то по признаку Даламбера ряд сходится, если

$$\begin{aligned} |x| &< 1 \\ -1 &< x < 1. \end{aligned}$$

При $x = -1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по

признаку Лейбница.

При $x = 1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится как гармонический ряд.

Область сходимости ряда: $-1 \leq x < 1$.

2) Функции $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$ дифференцируемы на $[-1; 1)$ и $u'_n(x) = x^{n-1}$ непрерывны на $[-1; 1)$, $n = 1, 2, \dots$

3) Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ сходится равномерно на $[-\delta; \delta]$

при любом $0 \leq \delta < 1$ (но имеет неравномерную сходимость на $[-1; 1)$, см. пример 6 этой главы). Действительно,

$$|\varphi_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{сумма бесконечной} \\ \text{геом. прогрессии} \end{array} \right| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right| \leq \left| \begin{array}{l} -\delta \leq x \leq \delta, \\ 1-\delta \leq 1-x \leq 1+\delta \end{array} \right| \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}.$$

Если $\frac{\delta^n}{1-\delta} < \varepsilon$, то возьмем $N(\varepsilon) = [\log_{\delta}(1-\delta)\varepsilon] + 1$.

4) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ на множестве $[-\delta; \delta]$ выполняются условия теоремы 7,

поэтому

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \left| \begin{array}{l} \text{сумма бесконечной} \\ \text{геом. прогрессии} \end{array} \right| = \frac{1}{1-x}.$$

5) Так как $S'(x) = \frac{1}{1-x}$, то, интегрируя, получаем

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-t| \Big|_0^x = -\ln(1-x). \quad \blacktriangleleft$$

§2.5 Степенные ряды. Теорема Абеля

Рассмотрим наиболее важный для приложений частный случай функциональных рядов – степенные ряды.

Определение 8. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (2.6)$$

называется *степенным рядом*, где $a_0, a_1 \dots$ – действительные или комплексные числа, называемые *коэффициентами степенного ряда*, x_0 – действительное или комплексное число.

Область сходимости степенного ряда есть непустое множество, потому что степенной ряд (2.6) сходится, по крайней мере, в одной точке $x = x_0$.

Замена $X = x - x_0$ приводит ряд вида (2.6) к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, поэтому без

ограничения общности можно рассматривать только степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2.7)$$

Общий вид области сходимости степенного ряда является простым следствием нижеследующего свойства рядов этого класса.

Теорема 8 (Абеля). Если степенной ряд (2.7) сходится в точке $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$), то он сходится при любых x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$. Если же степенной ряд (2.7) расходится в точке $x = x_2$, то он также расходится при любом x , удовлетворяющем неравенству $|x| > |x_2|$.

Доказательство. 1) По условию теоремы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ сходится. Значит, общий член ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n x_1^n) = 0$. Последовательность $a_n x_1^n$ является бесконечно малой, значит, она ограничена, и существует число M , $M > 0$, такое, что

$$|a_n x_1^n| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Возьмем произвольное значение x такое, что $|x| < |x_1|$ и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Оценим n -ый член этого ряда

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n,$$

то есть

$$0 \leq |a_n x^n| \leq M \cdot q^n,$$

где $\left| \frac{x}{x_1} \right| = q$, $0 < q < 1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится как геометрическая

прогрессия со знаменателем $0 < q < 1$. Таким образом, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится. Значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно для любых x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$.

2) Докажем вторую часть теоремы.

Предположим обратное, то есть что существует точка $x = x_3$, для которой $|x_3| > |x_2|$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ сходится. По теореме Абеля, если ряд сходится при $x = x_3$, то он сходится при любых x таких, что $|x| < |x_3|$, то есть и при $x = x_2$ ($|x_2| < |x_3|$). Получили противоречие, так как по условию теоремы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ расходится. Значит, предположение неверно.

Что и требовалось доказать.

§2.6 Область сходимости степенного ряда

Как уже отмечалось ранее, точка $x = 0$ принадлежит области сходимости степенного ряда.

Из теоремы Абеля вытекает, что для степенного ряда (2.7) существует число $R \geq 0$ такое, что для любых x , удовлетворяющих $|x| < R$, ряд сходится, а для любых x , удовлетворяющих $|x| > R$, ряд расходится.

Определение 9. Если степенной ряд (2.7) абсолютно сходится в интервале $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$ ($R \geq 0$ - число или $+\infty$), то $|x| < R$ называется *интервалом сходимости степенного ряда* (2.7), а R – *радиусом сходимости ряда* (2.7).

В частности, если $R = 0$, то область сходимости ряда состоит из одной точки $x = 0$. Если $R = +\infty$, то ряд сходится во всех точках числовой прямой.

Если $0 < R < +\infty$, то интервал сходимости $(-R; R)$ необязательно совпадает с областью сходимости степенного ряда, так как в граничных точках $x = \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. При $R = +\infty$ интервал сходимости $(-\infty; +\infty)$ совпадает с областью сходимости ряда.

Замечание. Для степенного ряда (2.6) интервалом сходимости является область, определяемая неравенством $|x - x_0| < R$, то есть $(x_0 - R; x_0 + R)$.

§2.7 Вычисление радиуса сходимости степенного ряда методами Даламбера и Коши

Для нахождения интервала сходимости степенного ряда (2.7) можно непосредственно пользоваться признаком Даламбера или радикальным признаком Коши как в общем случае для функциональных рядов (§2.1 главы 2). Но также интервал сходимости можно легко получить, зная радиус сходимости. Можно найти радиус сходимости ряда (2.7), используя признак Даламбера. Справедлива нижеследующая теорема, которая позволяет вычислить радиус сходимости ряда.

Теорема 9. Если для степенного ряда (2.7) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, то радиус сходимости степенного ряда (2.7) равен значению этого предела:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

(2.8)

Доказательство. Для исследования абсолютной сходимости ряда (2.7) рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ и применим для исследования его сходимости признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Возможны 3 случая.

1) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = 0$ для любого x .

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1$, то для любого x ряд сходится. Это означает, что радиус сходимости ряда $R = +\infty$.

В этом случае формула (2.8) верна, так как

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = +\infty.$$

2) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ и $x \neq 0$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = +\infty$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| > 1$ для любого $x \neq 0$, то ряд расходится при $x \neq 0$. То

есть радиус сходимости ряда равен нулю.

В этом случае формула (2.8) также верна, так как

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = 0.$$

3) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, $0 < l < +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot l$. Ряд сходится,

если $|x| \cdot l < 1$, следовательно, при x , удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{1}{l}$. При

этом ряд расходится, если $|x| \cdot l > 1$, то есть при $|x| > \frac{1}{l}$. По определению 9 число

$\frac{1}{l}$ является радиусом сходимости. Значит,

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Что и требовалось доказать.

Найдем радиус сходимости ряда (2.7), используя признак Коши.

Теорема 10. *Если для степенного ряда (2.7) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, то радиус сходимости степенного ряда (2.7) равен значению этого предела:*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(2.9)

Доказательство. Для исследования абсолютной сходимости ряда (2.7) рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ и применим радикальный признак Коши для исследования его сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Возможны 3 случая.

1) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = 0$ для любого x . Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$, то для любого x ряд сходится. Это означает, что радиус сходимости ряда $R = +\infty$.

В этом случае формула (2.9) верна, так как

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = +\infty.$$

2) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ и $x \neq 0$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = +\infty$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ для любого $x \neq 0$, то ряд расходится при $x \neq 0$. Это означает, что радиус сходимости ряда равен нулю.

В этом случае формула (2.9) также верна, так как

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = 0.$$

3) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, $0 < l < +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot l$. Ряд сходится, если

$|x| \cdot l < 1$, следовательно, при x , удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{1}{l}$. При этом

ряд расходится, если $|x| \cdot l > 1$, то есть при $|x| > \frac{1}{l}$. По определению 9 число $\frac{1}{l}$ является радиусом сходимости. Значит,

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Что и требовалось доказать.

Для определения области сходимости степенного ряда нужно:

- 1) Вычислить радиус сходимости по формулам (2.8) или (2.9);
- 2) Найти интервал сходимости ряда;
- 3) Исследовать сходимость ряда в каждой граничной точке интервала сходимости.

Пример 19. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{(n+2)!}$.

► **Решение.** 1) Вычислим радиус сходимости R данного ряда по формуле (2.8):

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+2)!} : \frac{1}{(n+3)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n+3)}{(n+2)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3) = \infty. \end{aligned}$$

2) Так как $R = \infty$, то интервалом сходимости заданного ряда является $(-\infty; +\infty)$. При этом областью сходимости этого ряда также является $(-\infty; +\infty)$. ◀

Пример 20. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-7)^n}{3^n - 2^n}$.

► **Решение.** 1) Вычислим радиус сходимости R данного ряда по формуле (2.8):

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{3^n - 2^n} : \frac{(n+1)!}{3^{n+1} - 2^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(3^{n+1} - 2^{n+1})}{(3^n - 2^n) \cdot (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 3^{n+1} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)}{3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \cdot n!(n+1)} = \left| \left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow 0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

2) Так как $R = 0$, то интервал сходимости заданного ряда не содержит ни одной точки, а областью сходимости этого ряда является единственная точка, определяемая из условия $x - 7 = 0$, то есть $x = 7$. ◀

Пример 21. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(x-5)^n}{3n+4}$

► Решение. 1) Вычислим радиус сходимости R данного ряда по формуле (2.8):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n n}{3n+4} : \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3(n+1)+4} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3n+7)}{(3n+4)(n+1)} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 7}{3n^2 + 7n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{3n^2} = 1.$$

2) $R = 1$, интервалом сходимости заданного ряда являются значения x , удовлетворяющие неравенству:

$$|x - 5| < 1$$

то есть

$$-1 < x - 5 < 1$$

или

$$4 < x < 6.$$

Следовательно, $(4; 6)$ - интервал сходимости данного ряда.

3) Исследуем сходимость данного степенного ряда в граничной точке $x_1 = 4$. При $x = 4$ первоначальный ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(-1)^n}{3n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} n}{3n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3n+4}.$$

Данный ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Значит, при $x = 4$ заданный степенной ряд расходится.

4) Исследуем сходимость данного степенного ряда в граничной точке $x_2 = 6$. При $x = 6$ первоначальный ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot 1^n}{3n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+4}.$$

Полученный знакочередующийся ряд расходится по признаку Лейбница

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+4} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Следовательно, при $x = 6$ заданный степенной ряд также расходится.

5) Таким образом, областью сходимости степенного ряда является $x \in (4; 6)$.

Для данного ряда интервал сходимости и область сходимости совпадают. ◀

Пример 22. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^{n^3} x^n$.

► Решение. 1) Вычислим радиус сходимости R данного ряда по формуле (2.9):

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^3}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{\frac{3 \cdot 1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{\frac{1}{n^2}}} = \\
&= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n+5}\right)^{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-3}{n+5}\right)^{\frac{-3n^2}{n+5}}\right)} = \left| \begin{array}{l} \text{второй} \\ \text{замечательный} \\ \text{предел} \end{array} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-3n^2}{n+5}}} = \\
&= \frac{1}{e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n)} = \infty.
\end{aligned}$$

2) $R = \infty$, значит интервалом сходимости заданного ряда является $(-\infty; +\infty)$. При этом областью сходимости этого ряда также является $(-\infty; +\infty)$. \blacktriangleleft

Задачи для самостоятельного решения.

185-223. Найти область сходимости степенного ряда (При решении задач можно использовать формулу Стирлинга: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ при $n \rightarrow \infty$):

185. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^n}$

188. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^n}{n!}$

191. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^{n+1}}$

194. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n^3}$

197. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x-5)^{2n}}{\sqrt{2^n}(3n-1)}$

200. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n+2}$

203. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2^n \cdot \sqrt{n+3}}$

186. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-3)!}$

189. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{(n+1)! \cdot 4^{n+2}}$

192. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(2x)^n}{n!}$

195. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)(x-3)^n}{n^2 \cdot 3^n}$

198. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n^2}(x+4)^n}{3n-1}$

201. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

204. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)^n} x^n}{n!}$

187. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n \cdot \sqrt{n+10}}$

190. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-2)^n}{2n+1}$

193. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-1)^n}{7^{n+1}}$

196. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(n+3)!}{2^{n-1}}$

199. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{6^{n-1} \cdot n^3}$

202. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n(n+1)}{8^n}$

205. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} (x+2)^n$

$$206. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} (x-3)^n$$

$$209. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+5)^n}{n \cdot \ln n}$$

$$212. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{4^n + 5^n}$$

$$215. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{\ln^n n}$$

$$218. \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$$

$$221. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^n}$$

$$207. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1} + 2}$$

$$210. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$$

$$213. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$$

$$216. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n (x+1)^n}{n!}$$

$$219. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{n^2} x^n$$

$$222. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^{n^2}}{n^n}$$

$$208. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$$

$$211. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3x)^{3n}}{n^4 + 4n}$$

$$214. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(x-5)}{7n+1}\right)^n$$

$$217. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{3n^2+2}\right)^n (4x-1)^n$$

$$220. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}}\right)^{2n} (x+7)^n$$

$$223. \sum_{n=1}^{\infty} 7^{n^2} (x+4)^{n^2}$$

§2.8 Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Вопрос о равномерной сходимости степенных рядов решается достаточно просто с помощью нижеследующей теоремы.

Теорема 11. Если степенной ряд (2.7) имеет радиус сходимости $R > 0$, тогда он равномерно сходится на $[-r; r]$, где r - произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < r < R$.

Доказательство. Возьмем точку $x = x_0$ такую, что $r < |x_0| < R$. В этой точке ряд (2.7) сходится, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, поэтому последовательность ограничена:

$$|a_n x_0^n| < M, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если $|x| \leq r$, то

$$|a_n x^n| \leq |a_n r^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{r}{x_0}\right|^n < M \cdot q^n,$$

$$\text{где } q = \left|\frac{r}{x_0}\right| < 1.$$

При этом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n$ является суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем q , $q < 1$, значит, сходится.

Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на $[-r; r]$ мажорируем сходящимся рядом.

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно сходится на $[-r; r]$.

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим свойства степенных рядов, связанные с непрерывностью, почленным интегрированием и дифференцированием.

Теорема 12. *Если степенной ряд (2.7) имеет радиус сходимости $R > 0$, тогда сумма ряда непрерывна в интервале $(-R; R)$.*

Доказательство. По теореме 9 степенной ряд (2.7) равномерно сходится на $[-r; r]$, где $0 < r < R$. При этом $u_n = a_n x^n$, $n = 0, 1, \dots$, являются непрерывными функциями в любой точке $x_0 \in (-R; R)$. По теореме 5 получаем, что $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна при $x \in (-R; R)$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 13. *Если степенной ряд (2.7) имеет радиус сходимости $R > 0$, то в интервале сходимости $(-R; R)$ функция $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда (2.7), причем радиусы сходимости полученных рядов также равны R .*

Доказательство. 1) Ряд, составленный из производных членов ряда (2.7), имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Проверим выполнение условий теоремы 7 для ряда (2.7).

1. При $x \in (-R; R)$ степенной ряд сходится по условию теоремы.

2. Функции $u_n(x) = a_n x^n$, $n = 0, 1, \dots$, дифференцируемы на интервале $(-R; R)$ и производные $u'_n(x) = (a_n x^n)' = n a_n x^{n-1}$ непрерывны на интервале $(-R; R)$.

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ мажорируем на любом отрезке $[-r; r]$, где $0 < r < R$.

Действительно, возьмем точку $x = x_0$ такую, что $r < |x_0| < R$. В этой точке ряд (2.7) сходится, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, поэтому последовательность ограничена:

$$|a_n x_0^n| < M, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если $|x| \leq r$, то

$$|na_n x^{n-1}| \leq |na_n r^{n-1}| = n |a_n x_0^{n-1}| \cdot \left| \frac{r}{x_0} \right|^{n-1} < n \cdot \frac{M}{|x_0|} \cdot q^{n-1},$$

где $q = \left| \frac{r}{x_0} \right| < 1$.

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{M}{|x_0|} \cdot q^{n-1}$ сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \frac{M}{|x_0|} \cdot q^n}{n \cdot \frac{M}{|x_0|} \cdot q^{n-1}} = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = q < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ на $[-r; r]$ мажорируем сходящимся рядом.

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ равномерно сходится.

Таким образом, все условия теоремы 7 выполняются, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать, то есть

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

2) По условию теоремы ряд (2.7) имеет радиус сходимости $R > 0$. Вычислим R_1 - радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$:

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R.$$

Значит, $R_1 = R$.

3) Получили, что сумма $S(x)$ ряда (2.7) внутри интервала сходимости непрерывна и дифференцируема. При этом функция $S'(x)$ является суммой степенного ряда с тем же интервалом сходимости $(-R; R)$, значит, функцию $S'(x)$ также можно дифференцировать. По индукции легко получить, что

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-(k-1)) x^{n-k},$$

то есть ряд (2.7) можно почленно дифференцировать любое число раз, при этом

радиусы сходимости получаемых степенных рядов также равны R .

Что и требовалось доказать.

Пример 23. Вычислить сумму ряда $\frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + \dots$

► Решение. Имеем степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4n-2}$.

1) Найдём интервал сходимости данного ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)-1}}{4(n+1)-2} : \frac{x^{2n-1}}{4n-2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}(4n-2)}{(4n+2)x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2(4n-2)}{4n+2} = \\ = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{4n+2} = x^2.$$

Тогда $x^2 < 1$, то есть $-1 < x < 1$.

2) По теореме 13 в интервале сходимости $(-1; 1)$ функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4n-2}$

имеет производную, которую можно получить почленным дифференцированием ряда:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{4n-2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \dots = \begin{cases} \text{сумма бесконечной} \\ \text{геометрической} \\ \text{прогрессии} \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x^2)}.$$

3) Так как $S(x) = \int_0^x S'(t) dt$, то

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t^2)} dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|_0^x = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Таким образом, $\frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} + \dots = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$. ◀

Теорема 14. Если степенной ряд (2.7) имеет радиус сходимости $R > 0$, то в интервале сходимости $(-R; R)$ функцию $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно интегрировать, причем для любого $x \in (-R; R)$ справедливо:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Радиус сходимости полученного ряда также равен R .

Доказательство. 1) Проверим выполнение условий теоремы 6 для ряда (2.7).

1. По теореме 9 степенной ряд (2.7) равномерно сходится на $[-r; r]$, где $0 < r < R$.

2. Функции $u_n(x) = a_n x^n$, $n = 0, 1, \dots$, непрерывны при $x \in (-R; R)$.

Условия теоремы 6 выполняются, значит, ряд (2.7) можно почленно интегрировать при $x \in (-R; R)$, то есть

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

2) Вычислим R_2 – радиус сходимости полученного ряда:

$$R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{n+1} : \frac{a_{n+1}}{n+2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R.$$

Таким образом, радиусы рядов (2.7) и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ равны.

Что и требовалось доказать.

Пример 24. Вычислить сумму ряда $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \dots$

► Решение. Имеем степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$.

1) Найдём радиус сходимости данного ряда по (2.8):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+3} = 1.$$

Тогда интервал сходимости: $-1 < x < 1$.

2) По теореме 14 в интервале сходимости $(-1; 1)$ функцию $S(x)$ можно интегрировать:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (n+1)(n+2)t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n+1} t^{n+1} \Big|_0^x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = S_1(x).$$

Полученный ряд является степенным и по теореме 14 сходится при $x \in (-1; 1)$, а значит, его можно ещё раз проинтегрировать:

$$\int_0^x S_1(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (n+2)t^{n+1} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+2} t^{n+2} \Big|_0^x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = S_2(x).$$

3) Вычислим сумму $S_2(x)$ полученного ряда:

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \begin{cases} \text{сумма бесконечной} \\ \text{геометрической} \\ \text{прогрессии} \end{cases} = \frac{x^2}{1-x}.$$

4) Так как $S_1(x) = (S_2(x))'$, то $S_1(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$.

При этом $S(x) = (S_1(x))'$, значит $S(x) = \left(\frac{2x - x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Таким образом, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \dots = \frac{2}{(1-x)^3}$. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

224-227. Используя дифференцирование, вычислить сумму степенного ряда:

224. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$, $-1 < x < 1$.

225. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{5^n (2n+1)}$.

226. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n+1}}{n^2+n}$, $-4 < x < -2$.

227. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}(1+x^n)}{n}$, $-1 < x < 1$.

228-235. Используя интегрирование, вычислить сумму степенного ряда:

228. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^{2n+1}$.

229. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-2)^n$.

230. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$.

231. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n$.

232. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n)x^n$.

233. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{2^n} x^{n+1}$.

234. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)(3n+2)x^{3n}$.

235. $\sum_{n=0}^{\infty} (4n+3)x^{2n}$.

§2.9 Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производные всех порядков. Рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 называется степенной ряд следующего вида:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (2.10)$$

Очевидно, что ряд Тейлора функции $f(x)$ всегда сходится в точке x_0 , причем его сумма в этой точке равна $f(x_0)$.

Теорема 15. Представление функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 сходящимся к этой функции степенным рядом $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $|x - x_0| < R$, $R > 0$, единственно и является рядом Тейлора.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится, радиус сходимости $R > 0$, то по теореме 13 функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0 , причем

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots; \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots; \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots; \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x - x_0)^{n-2} + \dots; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

При $x = x_0$ получаем

$$f(x_0) = a_0; \quad f'(x_0) = a_1; \quad f''(x_0) = 2a_2; \quad \dots; \quad f^{(n)}(x_0) = n!a_n; \quad \dots$$

или

$$a_0 = f(x_0); \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}; \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}; \quad \dots$$

Таким образом, степенной ряд функции $f(x)$ совпадает с рядом Тейлора данной функции в точке x_0 .

Что и требовалось доказать.

Пример 25. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x + 3)$ функцию $f(x) = e^{2x}$.

► Решение. Функция $f(x) = e^{2x}$ непрерывна и бесконечно дифференцируема при $x \in (-\infty; +\infty)$. Найдём производные:

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad f''(x) = 4e^{2x}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, \quad \dots$$

Так как $x_0 = -3$, то найдём значения функции и производных при $x = -3$:

$$f(-3) = e^{-6}, \quad f'(-3) = 2e^{-6}, \quad f''(-3) = 4e^{-6}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(-3) = 2^n e^{-6}, \quad \dots$$

Таким образом, получаем разложение в ряд Тейлора:

$$e^{2x} = e^{-6} + \frac{2e^{-6}}{1!}(x + 3) + \frac{4e^{-6}}{2!}(x + 3)^2 + \dots + \frac{2^n e^{-6}}{n!}(x + 3)^n + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^{-6}}{n!} (x+3)^n.$$

Найдем область сходимости данного ряда. По формуле (2.8) вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n e^{-6}}{n!} : \frac{2^{n+1} e^{-6}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty.$$

Получили, что областью сходимости полученного ряда Тейлора является $x \in (-\infty; +\infty)$. ◀

Заметим, что если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема, то $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора. Однако, ряд Тейлора для $f(x)$ может сходиться лишь в одной точке $x = x_0$, то есть ряд Тейлора не представляет функцию $f(x)$. Приведем пример функции, ряд Тейлора которой сходится в каждой точке $x \in R$, но не к заданной функции.

Пример 26. Данна функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

► Данная функция является бесконечно дифференцируемой, причем при $x_0 = 0$ имеем $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится для любых $x \in R$ и

$S(x) = 0$. Но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то есть не существует окрестности, в которой функция $f(x)$ представляется рядом Тейлора. ◀

Представим формулу Тейлора в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член.

Разложимость числовой функции $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Действительно,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right),$$

тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

или $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = f(x) - f(x),$

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$

Установить возможность разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора помогает нижеследующая теорема 16.

Теорема 16. Если существует число $M > 0$ такое, что при $-R \leq x \leq R$ выполняется $|f^{(n)}(x)| < M$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора для $x \in [-R; R]$.

Доказательство. Как известно ([10], [11]), остаточный член формулы Тейлора может быть представлен в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

где ξ – некоторая точка, заключенная между x_0 и x ($\xi \in (x_0, x)$), x – произвольная точка из окрестности точки x_0 . Тогда при $x \in [-R; R]$ имеем

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot R^{n+1},$$

то есть $0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot R^{n+1}.$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{(n+1)!} \cdot R^{n+1}.$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M \cdot R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ при любом $R > 0$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Таким образом, функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора при $x \in [-R; R]$.

Что и требовалось доказать.

Частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$ называется *рядом Маклорена*

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (2.11)$$

Рассмотрим разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.

I. Показательная функция $f(x) = e^x$.

Функция $f(x) = e^x$ определена и бесконечно дифференцируема при всех

$x \in R$, имеет производные:

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x.$$

При $x \in [-R; R]$ справедлива оценка

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^R, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Значит, $f(x) = e^x$ разложима в ряд Маклорена при $x \in [-R; R]$.

Вычислим значения функции и производных при $x = 0$:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1.$$

Таким образом, получаем разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.12)$$

Найдем область сходимости данного ряда. Радиус сходимости вычислим по формуле (2.8):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, областью сходимости ряда (2.12) является $x \in (-\infty; +\infty)$.

II. Тригонометрические функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$.

Функция $f(x) = \sin x$ определена и бесконечно дифференцируема при всех $x \in R$. Найдем производные данной функции:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{IV}(x) = \sin x, \quad \dots$$

Так как при $x \in [-R; R]$ справедлива оценка

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

то $f(x) = \sin x$ разложима в ряд Маклорена.

Вычислим значения функции и производных при $x = 0$:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{IV}(0) = 0, \quad \dots$$

Таким образом, получаем разложение:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.13)$$

Найдем область сходимости данного ряда:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} : \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3} (2n+1)!}{(2n+3)! x^{2n+1}} \right| = \\ &= x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Полученный результат всегда меньше 1, значит, ряд (2.13) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Аналогично можно получить разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.14)$$

Областью сходимости ряда (2.14) является $x \in (-\infty; +\infty)$.

III. Биномиальный ряд.

Биномиальным рядом называется степенной ряд функции $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α – некоторое вещественное число.

Найдем производные данной функции:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

При $x = 0$ имеем:

$$f(0) = 1,$$

$$f'(0) = \alpha,$$

$$f''(0) = \alpha(\alpha-1),$$

$$\dots,$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1),$$

Тогда биномиальный ряд имеет вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \quad (2.15)$$

Обоснованность нахождения данного разложения можно найти в [10], [11].

Для нахождения области сходимости ряда (2.15) вычислим радиус сходимости по формуле (2.8):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} : \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{\alpha}{n} - 1} \right| = 1.$$

Значит, интервал сходимости $|x| < 1$ или $-1 < x < 1$.

Сходимость биномиального ряда в точках $x = \pm 1$ зависит от показателя α . Не приводя дополнительных исследований заметим, что при $x = 1$ ряд сходится для $\alpha > -1$, при $x = -1$ для $\alpha > 0$.

Таким образом, область сходимости биномиального ряда:

$$x \in [-1; 1] \text{ при } \alpha > 0;$$

$$x \in (-1; 1] \text{ при } -1 < \alpha \leq 0;$$

$$x \in (-1; 1) \text{ при } \alpha \leq -1.$$

Часто при решении задач используются частные случаи биномиального разложения при $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (2.17)$$

Ряды (2.16) и (2.17) сходятся при $x \in (-1; 1)$.

IV. Логарифмическая функция $f(x) = \ln(1+x)$.

Функция $f(x) = \ln(1+x)$ определена и бесконечно дифференцируема при $x \in (-1; +\infty)$. Найдем производные данной функции:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)(-2) \cdot \dots \cdot (-(n-1))}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \dots$$

Так как

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \right| = \frac{(n-1)!}{|1+x|^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{|1+x|^n} = \infty,$$

то не можем воспользоваться теоремой 16.

Рассмотрим разложение в биномиальный ряд (2.16), которое справедливо при $x \in (-1; 1)$. Так как при $x > -1$ имеет место равенство

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x),$$

то по теореме 14 при $x \in (-1; 1)$ получаем:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Таким образом,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (2.18)$$

На основании теоремы 14 ряд (2.18) сходится при $x \in (-1; 1)$. Заметим, что

при $x = 1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, который сходится по признаку Лейбница как знакочередующийся ряд. Следовательно, областью сходимости ряда Маклорена для функции $f(x) = \ln(1+x)$ является $x \in (-1; 1]$.

V. Обратные тригонометрические функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ определена и бесконечно дифференцируема при $x \in R$. Найдем производные данной функции:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \dots$$

Производные $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, не являются ограниченными функциями, поэтому для нахождения ряда Маклорена воспользуемся биномиальным разложением (2.16), взяв x^2 вместо x :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

которое справедливо при $x^2 < 1$, то есть $x \in (-1; 1)$.

Так как

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x,$$

то по теореме 14 при $x \in (-1; 1)$ получаем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (2.19)$$

На основании теоремы 14 ряд (2.19) сходится при $x \in (-1; 1)$. При $x = \pm 1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, который сходится по признаку Лейбница как знакочередующийся ряд. Следовательно, областью сходимости ряда Маклорена для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ является $x \in [-1; 1]$.

Используя, что $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, можно записать разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \operatorname{arcctg} x$:

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (2.20)$$

которое также справедливо при $x \in [-1; 1]$.

VI. Гиперболические функции $f(x) = \operatorname{ch} x$ и $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Так как $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, то для разложения в ряд

Маклорена гиперболических функций воспользуемся разложением показательной функции (2.12):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

Данные разложения справедливы при $x \in R$.

Тогда получаем:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots + \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.21)$$

Для $f(x) = \operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \dots - (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1!} + \frac{2x^3}{3!} + \dots + \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

То есть,

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.22)$$

Полученные разложения справедливы при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 27. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(5 + x^2)$.

► Решение. Воспользуемся разложением (2.18), предварительно преобразовав подлогарифмическое выражение:

$$\begin{aligned} \ln(5 + x^2) &= \ln\left(5\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)\right) = \ln 5 + \ln\left(1 + \frac{x^2}{5}\right) = \ln 5 + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{5}\right)^3 - \\ &- \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\left(\frac{x^2}{5}\right)^{n+1} + \dots = \ln 5 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 5^2}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 5^3}x^6 - \dots + \\ &+ \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 5^{n+1}}x^{2n+2} + \dots = \ln 5 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 5^{n+1}}x^{2n+2}. \end{aligned}$$

Найдем область сходимости данного ряда:

$$-1 < \frac{x^2}{5} \leq 1$$

или

$$x^2 \leq 5,$$

следовательно,

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \text{ — область сходимости этого ряда.} \blacktriangleleft$$

Пример 28. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 2^{x^3}$.

► Решение. Преобразуем выражение функции:

$$f(x) = 2^{x^3} = e^{\ln 2^{x^3}} = e^{x^3 \ln 2}.$$

Воспользуемся разложением (2.12), подставляя вместо аргумента x выражение $x^3 \ln 2$:

$$e^{x^3 \ln 2} = 1 + x^3 \ln 2 + \frac{(x^3 \ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x^3 \ln 2)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2 \cdot x^{3n}}{n!}.$$

Область сходимости данного ряда: $x \in (-\infty; +\infty)$. \blacktriangleleft

Пример 29. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$.

► Решение. Преобразуем выражение функции:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin 2x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x.$$

С помощью разложений (2.13) и (2.14), подставляя вместо аргумента x выражение $2x$, получаем:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2x}{1!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{2\sqrt{3} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

Область сходимости данного ряда: $x \in (-\infty; +\infty)$. ◀

Пример 30. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{x^2 - x - 8}{(x-1)(x+2)}$

а) по степеням x ; б) по степеням $(x-3)$.

► Решение. Преобразуем выражение функции, выделив целую часть и разложив правильную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{x^2 - x - 8}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2 - x - 8}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2 + x - 2 - 2x - 6}{x^2 + x - 2} = 1 + \frac{-2x - 6}{(x-1)(x+2)}.$$

Представим полученную правильную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{-2x - 6}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

тогда

$$\frac{-2x - 6}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Приравняем числители:

$$-2x - 6 = x(A + B) + 2A - B.$$

Получаем систему для нахождения коэффициентов A и B :

$$\begin{cases} A + B = -2 \\ 2A - B = -6 \end{cases}$$

$$\text{Откуда } A = -\frac{8}{3}, \quad B = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, функция $f(x) = \frac{x^2 - x - 8}{(x-1)(x+2)}$ представима в виде:

$$f(x) = 1 - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

а) По формулам (2.16) и (2.17) разложим функции $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ и

$$f_2(x) = \frac{1}{x+2}:$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots) = -1 - x - x^2 - \dots - x^n - \dots;$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \dots + (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^n + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}} + \dots$$

Следовательно, для функции $f(x)$ получаем разложение:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{8}{3} \cdot \left(-1 - x - x^2 - \dots - x^n - \dots \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}} + \dots \right) = \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3} x^n + (-1)^n \frac{x^n}{3 \cdot 2^n} \right) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} \right) x^n. \end{aligned}$$

Область сходимости ряда для $f_1(x)$: $-1 < -x < 1$ или $x \in (-1; 1)$. Область сходимости ряда для $f_2(x)$: $-1 < \frac{x}{2} < 1$ или $x \in (-2; 2)$. Значит, область сходимости ряда для $f(x)$: $x \in (-1; 1)$.

б) По формуле (2.16) разложим функции $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ и $f_2(x) = \frac{1}{x+2}$, предварительно преобразовав их:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2+x-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x-3}{2} + \left(-\frac{x-3}{2} \right)^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{x-3}{2} \right)^n + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{x-3}{2^2} + \frac{(x-3)^2}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}} + \dots; \\ f_2(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5+x-3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{x-3}{5} + \left(-\frac{x-3}{5} \right)^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{x-3}{5} \right)^n + \dots \right) = \frac{1}{5} - \frac{x-3}{5^2} + \frac{(x-3)^2}{5^3} + \dots + (-1)^n \frac{(x-3)^n}{5^{n+1}} + \dots. \end{aligned}$$

Следовательно, для функции $f(x)$ получаем разложение:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x-3}{2^2} + \frac{(x-3)^2}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}} + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{x-3}{5^2} + \frac{(x-3)^2}{5^3} + \dots + (-1)^n \frac{(x-3)^n}{5^{n+1}} + \dots \right) = \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{2(x-3)^n}{3 \cdot 5^{n+1}} - \frac{8}{3} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}} \right) = 1 + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (x-3)^n. \end{aligned}$$

Область сходимости ряда для $f_1(x)$: $-1 < \frac{x-3}{2} < 1$ или $x \in (1; 5)$.

Область сходимости ряда для $f_2(x)$: $-1 < \frac{x-3}{5} < 1$ или $x \in (-2; 8)$. Значит,

область сходимости ряда для $f(x)$: $x \in (1; 5)$. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

236.-247. Разложить функцию $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

$$236. f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$237. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = -2.$$

$$238. f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = -1.$$

$$239. f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad x_0 = 5.$$

$$240. f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$$

$$241. f(x) = e^{-3x}, \quad x_0 = -4.$$

$$242. f(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad x_0 = 2.$$

$$243. f(x) = 5^x, \quad x_0 = 3.$$

$$244. f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$245. f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}, \quad x_0 = 1.$$

$$246. f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{3}.$$

$$247. f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}, \quad x_0 = -3.$$

248.-269. Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд, найти область сходимости полученного ряда:

$$248. f(x) = e^{6x}.$$

$$249. f(x) = e^{-\frac{x^3}{2}}.$$

$$250. f(x) = \sin 3x.$$

$$251. f(x) = \cos \frac{x^2}{3}.$$

$$252. f(x) = \ln(1 + 5x^5).$$

$$253. f(x) = \ln \left(1 - \frac{x}{3} \right).$$

$$254. f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

$$255. f(x) = \frac{1}{1-x^3}.$$

$$256. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$257. f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$258. f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x.$$

$$259. f(x) = \sqrt[4]{x} \cos \sqrt{x}.$$

$$260. f(x) = \ln(x^2 + x - 2).$$

$$261. f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1).$$

$$262. f(x) = \ln(x^3 + 4x^2 + 3x + 12).$$

$$263. f(x) = \ln \frac{x^2 + 4}{x + 5}.$$

$$264. f(x) = \sin^2 3x.$$

$$265. f(x) = \cos^2 \frac{x}{3}.$$

$$266. f(x) = \cos^4 x.$$

$$267. f(x) = \sin^4 \frac{x}{4}.$$

$$268. \ f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

$$269. \ f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 4x\right).$$

§2.10 Применение рядов для приближенных вычислений

Степенные ряды широко используются при решении различных задач. Приведем примеры, демонстрирующие применение степенных рядов.

I. Приближенное вычисление значения функции

Пример 31. Вычислить с точностью 0,001 значение $\ln 1,3$.

► Решение. Возьмем ряд (2.18), который сходится к $\ln(1+x)$ при $x \in (-1; 1]$. Так как $1,3 = 1 + 0,3$, то, полагая $x = 0,3$, получим ряд для вычисления $\ln 1,3$ с любой точностью:

$$\begin{aligned}\ln 1,3 &= \ln(1+0,3) = 0,3 - \frac{0,3^2}{2} + \frac{0,3^3}{3} - \frac{0,3^4}{4} + \frac{0,3^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{0,3^{n+1}}{n+1} + \dots \approx \\ &\approx 0,3 - 0,045 + 0,009 - 0,002 + 0,0004 - \dots\end{aligned}$$

По свойству знакочередующегося сходящегося ряда остаток ряда меньше его первого члена по абсолютной величине. Поэтому, чтобы определить количество членов разложения для достижения требуемой точности, необходимо найти член ряда такой, что $|a_n| < 0,001$. Таким образом, для вычисления приближенного значения достаточно взять сумму первых четырех слагаемых, то есть:

$$\ln 1,3 \approx 0,3 - 0,045 + 0,009 - 0,002 = 0,262. \blacktriangleleft$$

Пример 32. Вычислить с точностью 0,001 значение $\sqrt[3]{10}$.

► Решение. Воспользуемся разложением (2.15). Ряд (2.15) сходится к $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ при $x \in [-1; 1]$, поэтому предварительно преобразуем подкоренное выражение:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{10} &= \sqrt[3]{8+2} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{2}{8}\right)} = 2\sqrt[3]{1+0,25} = 2(1+0,25)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1+\frac{1}{3} \cdot 0,25 + \right. \\ &+ \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0,25^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 0,25^3 + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot 0,25^4 + \dots \left.\right) = \\ &= 2 + \frac{0,5}{3} - \frac{2 \cdot 0,25^2}{9} + \frac{10 \cdot 0,25^3}{81} - \frac{20 \cdot 0,25^4}{243} + \dots \approx 2 + 0,167 - 0,014 + 0,002 - 0,000 + \dots\end{aligned}$$

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления приближенного значения достаточно взять сумму первых четырех слагаемых, то есть:

$$\sqrt[3]{10} \approx 2 + 0,167 - 0,014 + 0,002 = 2,155. \blacktriangleleft$$

II. Приближенное вычисление значения интеграла

Пример 33. Найти разложение в степенной ряд интеграла $\int (\sqrt{x} + 1)e^{x^3} dx$.

► Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, используя (2.12):

$$(\sqrt{x} + 1)e^{x^3} = \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \left(1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2!} + \dots + \frac{(x^3)^n}{n!} + \dots \right) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{13}{2}}}{2!} + \dots + \\ + \frac{x^{\frac{3n+1}{2}}}{n!} + \dots + 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \dots + \frac{x^{3n}}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n} + x^{\frac{3n+1}{2}}}{n!}.$$

Полученный степенной ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$, тогда по теореме 14 этот ряд можно интегрировать, причем:

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n} + x^{\frac{3n+1}{2}}}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{x^{3n} + x^{\frac{3n+1}{2}}}{n!} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{\frac{3n+3}{2}}}{3n+\frac{3}{2}} \right) + C.$$

Таким образом,

$$\int (\sqrt{x} + 1)e^{x^3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{\frac{3n+3}{2}}}{3n+\frac{3}{2}} \right) + C = x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{14}x^7 + \\ + \frac{1}{15}x^{\frac{15}{2}} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{n!(3n+1)} + \frac{x^{\frac{3n+3}{2}}}{n!\left(3n+\frac{3}{2}\right)} + \dots + C. \blacktriangleleft$$

Пример 34. Вычислить с точностью 0,0001 значение интеграла

$$\int_0^{0,5} (x^4 - 1) \cos \frac{x^2}{3} dx.$$

► Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, используя (2.14):

$$(x^4 - 1) \cos \frac{x^2}{3} = (x^4 - 1) \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x^2}{3} \right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{x^2}{3} \right)^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{3} \right)^{2n} + \dots \right) = x^4 - \frac{1}{2!} \frac{x^8}{3^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^{12}}{3^4} - \frac{1}{6!} \frac{x^{16}}{3^6} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{4n+4}}{3^{2n}} + \dots - 1 + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{3^2} - \frac{1}{4!} \frac{x^8}{3^4} -$$

$$+\frac{1}{6!} \frac{x^{12}}{3^6} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{4n}}{3^{2n}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot 3^{2n}} (x^{4n} + x^{4n+4}).$$

Полученный ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$. Проинтегрируем его:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} (x^4 - 1) \cos \frac{x^2}{3} dx &= \int_0^{0,5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot 3^{2n}} (x^{4n} + x^{4n+4}) \right) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot 3^{2n}} \int_0^{0,5} (x^{4n} + x^{4n+4}) dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot 3^{2n}} \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \frac{x^{4n+5}}{4n+5} \right) \Big|_0^{0,5} \right) = \\ &= \left(\frac{0,5^5}{5} - \frac{1}{2! \cdot 3^2} \frac{0,5^9}{9} + \frac{1}{4! \cdot 3^4} \frac{0,5^{13}}{13} - \dots \right) + \left(0,5 - \frac{1}{2! \cdot 3^2} \frac{0,5^5}{5} + \frac{1}{4! \cdot 3^4} \frac{0,5^9}{9} + \dots \right) \approx \\ &\approx (0,0063 - 0,000 + \dots) + (0,5 - 0,0003 + 0,000 + \dots). \end{aligned}$$

Получили сумму двух знакочередующихся рядов. По свойству знакочередующихся сходящихся рядов для вычисления приближенного значения в первой сумме достаточно взять одно слагаемое, а во второй – сумму двух слагаемых, тогда имеем:

$$\int_0^{0,5} (x^4 - 1) \cos \frac{x^2}{3} dx \approx 0,0063 + 0,5 - 0,0003 = 0,5060. \blacktriangleleft$$

III. Вычисление пределов

Пример 35. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^4}$, используя разложение в

степенной ряд.

► Решение. При $x \rightarrow 0$ получаем $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos x + x^2 - 2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$, таким образом, имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для вычисления предела воспользуемся разложением (2.14), тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + x^2 - 2}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{360} + \dots + x^2 - 2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{12} - \frac{x^2}{360} + \dots \right) = \frac{1}{12}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

IV. Решение дифференциальных уравнений

Пример 36. Найти решение дифференциального уравнения $y'' = x^2 y' - 4y + 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

► **Решение.** Решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения будем искать в виде разложения в ряд Тейлора:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

На основании начальных условий имеем $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Вычислим $y''(0)$:

$$y''(0) = \left. (x^2 y' - 4y + 2x) \right|_{x=0} = 0 \cdot y'(0) - 4y(0) + 2 \cdot 0 = -4.$$

Так как

$$y''' = (y'')' = \left. (x^2 y' - 4y + 2x)' \right|_{x=0} = 2xy' + x^2 y'' - 4y' + 2,$$

то

$$y'''(0) = 2 \cdot 0 \cdot y'(0) + 0 \cdot y''(0) - 4y'(0) + 2 = -8 + 2 = -6.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} y^{iv}(0) &= (y''')' \Big|_{x=0} = (2xy' + x^2 y'' - 4y' + 2)' \Big|_{x=0} = (2y' + 2xy'' + 2xy'' + x^2 y''' - 4y'') \Big|_{x=0} = \\ &= 2y'(0) + 4 \cdot 0 \cdot y''(0) + 0 \cdot y'''(0) - 4y''(0) = 20. \end{aligned}$$

И так далее можем найти производные любого порядка. Таким образом, получаем

$$y = 1 + \frac{2}{1!} x + \frac{-4}{2!} x^2 + \frac{-6}{3!} x^3 + \frac{20}{4!} x^4 + \dots$$

$$\text{или } y = 1 + 2x - 2x^2 - x^3 + \frac{5}{6} x^4 + \dots$$

Полученный ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$. ◀

Задачи для самостоятельного решения.

270-287. Пользуясь разложением в степенной ряд, приближенно вычислить значение функции с заданной точностью ε :

270. \sqrt{e} , $\varepsilon = 10^{-3}$.

271. $\frac{1}{e}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

272. $\sin 18^\circ$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

273. $\cos 1^\circ$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

274. $\sin 9^\circ$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

275. $\cos 10^\circ$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

276. $\sqrt[5]{1,2}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

277. $\sqrt[4]{17}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

278. $\sqrt[3]{1,004}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

279. $\sqrt[3]{0,992}$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

280. $\sqrt[3]{1,12}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

281. $\sqrt[6]{67}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

282. $\ln 1,5$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

283. $\ln 5$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

284. $\arctg 0,5$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

285. $\operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$, $\varepsilon = 10^{-4}$. **286.** $\operatorname{ch} 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$. **287.** $\operatorname{sh} 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

288-308. Вычислить интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд:

288. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}} dx$

289. $\int_0^2 \cos \sqrt{x} dx$

290. $\int_0^{0,5} \operatorname{arctg} x^2 dx$

291. $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$

292. $\int_0^{2/3} x^2 \ln(1-x^6) dx$

293. $\int_0^{0,5} xe^{-x} dx$

294. $\int_0^{0,6} x^2 \operatorname{arctg}(2x^2) dx$

295. $\int_0^1 \sin x^2 dx$

296. $\int_0^1 x^3 \cos x^3 dx$

297. $\int_0^{0,7} \frac{\sin x^2}{x} dx$

298. $\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3} dx$

299. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} e^{\frac{x}{2}} dx$

300. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

301. $\int_0^{0,5} \cos \frac{x^2}{4} dx$

302. $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx$

303. $\int_0^{0,125} \sqrt[3]{x} \cos^2 x dx$

304. $\int_{0,5}^1 \operatorname{arcctg} \frac{x^3}{4} dx$

305. $\int_0^{1,5} \frac{x - \sin x}{x} dx$

306. $\int_{-0,4}^0 x^2 \sqrt[4]{1+x^2} dx$

307. $\int_{-1/5}^0 \frac{1-\cos 5x}{x^2} dx$

308. $\int_{-1/3}^0 x \ln(1-2x^3) dx$

309-322. Вычислить пределы, используя разложения в степенной ряд:

309. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

310. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$

311. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{x}.$

312. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \operatorname{arctg} x^3}{x^9}.$

313. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos 2x}{x}.$

314. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{x}.$

315. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^4)}{x^4}.$

316. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3) - \ln 3}{x}.$

$$317. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{4x}.$$

$$319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x} - x^2}{\sin x^3}.$$

$$321. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}.$$

$$318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x^2 - 2 \sin x^2}{x^6}.$$

$$320. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - \sqrt[4]{16+x^3}}{e^{x^4} - 1}.$$

$$322. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

323-340. Найти четыре первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$323. y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$325. y' = 2y - y^3, \quad y(0) = 2.$$

$$327. y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$329. y' = x^3 - y^3, \quad y(0) = 1.$$

$$331. y' = x + 2x^2 + 3y^2, \quad y(0) = -2.$$

$$333. y'' = y + x^2 y', \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -3.$$

$$334. y'' = y \sin x + xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$335. y'' = y - y' + e^{3x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

$$336. y'' = \frac{x - y'}{y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

$$337. y'' = (2 - x^3)e^y + y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3.$$

$$338. y'' = 2y + y'e^x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -1.$$

$$339. y'' = 2 \cos x - yy' - 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$340. y'' = (x + 1) \sin(xy'), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Глава 3. Ряды Фурье

§3.1 Введение

Как уже отмечалось нами ранее, представление функции $f(x)$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки x_0 , т.е. в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (3.1)$$

позволяет решить некоторые сложные задачи. В частности, такое представление позволяет находить достаточно точно численные значения функции, установить ряд свойств функции (например, доказать формулы Эйлера), решать дифференциальные уравнения и т.д. Представление функции $f(x)$ в виде (3.1) позволяет решить перечисленные и другие задачи ещё и потому, что каждое из слагаемых в правой части (3.1) представляет собой достаточно простую функцию. Сложная функция $f(x)$ представлена в виде суммы простейших функций

$$1, (x - x_0), (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n, \dots \quad (3.2)$$

Можно сказать, что представление функции в виде ряда (3.1) в какой-то мере сходно с разложением многочлена на множители или разложением дробно-рациональной функции на простейшие. Наряду с системой многочленов (3.2) нам хорошо известна система тригонометрических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (3.3)$$

В дальнейшем будет показано, что кроме представления функции $f(x)$ в виде (3.1) огромное значение имеет представление функции $f(x)$ в виде ряда по функциям (3.3), а именно в форме

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (3.4)$$

Ряд, стоящий в правой части (3.4) будем называть *тригонометрическим* рядом. Все функции (3.3) периодичны с периодом 2π , следовательно, все функции в правой части (3.4) периодичны, а это означает, что функции $f(x)$, представимые в виде (3.4), также периодичны с периодом 2π . Таким образом, тригонометрические ряды являются аппаратом для представления периодических функций с периодом 2π .

§3.2 Понятие ортогональности функций на отрезке.

Ортогональность тригонометрических функций

В этом параграфе дадим определение ортогональности функций на заданном отрезке и установим ортогональность тригонометрических функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Определение 1. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными* на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

В частности, $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a, b]$, ортогональна любой интегрируемой на $[a, b]$ функции. Исследуем ортогональность тригонометрических функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Установим первоначально следующее утверждение.

Лемма 1. Если k любое, отличное от нуля, целое число, то справедливы равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0 ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0 .$$

Доказательство. В самом деле

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 ,$$

аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k} [\cos k\pi - \cos(-k\pi)] = 0 .$$

Лемма доказана.

Сформулируем и докажем одно из основных утверждений параграфа.

Теорема 1. Любые две различные функции системы (3.3)

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \dots$

ортогональны на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. При доказательстве теоремы мы должны из системы функций (3.3) выбирать различные пары и вычислять интеграл от их произведения. Прежде всего отметим, что на основании леммы, единичная функция ортогональна всем остальным функциям. Рассмотрим все различные случаи выбора пар. Такими парами могут быть либо $\cos nx$ и $\cos mx$, либо $\sin nx$ и $\sin mx$, либо $\cos nx$ и $\sin mx$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

а) Пусть выбрана пара функций $\cos nx$ и $\cos mx$, $n \neq m$. Тогда, используя равенство

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx \right].$$

В силу леммы 1 оба слагаемых, стоящие справа в последнем равенстве, равны нулю, а это означает, что $\cos nx$ ортогонален $\cos mx$, $m \neq n$, на отрезке $[-\pi, \pi]$.

б) Пусть выбрана пара функций $\sin nx$ и $\sin mx$, тогда, применив формулу

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx \right].$$

По лемме 1 оба слагаемых из правой части последнего равенства равны нулю, т.е. функции $\sin nx$ и $\sin mx$, $n \neq m$, ортогональны на отрезке $[-\pi, \pi]$.

в) Если же выбрана пара $\cos nx$ и $\sin mx$, где n и m любые, в том числе и равные, то используя равенство

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx \right].$$

По лемме 1 оба интеграла справа равны нулю, т.е. функции $\sin mx$ и $\cos nx$ ортогональны на указанном отрезке, при любых целых m и n .

Из проведенных рассуждений следует, что какие бы пары из функций системы (3.3) мы не брали, интеграл от их произведения на промежутке от $-\pi$ до π равен нулю. Тем самым теорема доказана.

При доказательстве подпунктов а) и б) теоремы 1, нами предполагалось, что $m \neq n$. Выясним, что будет, если $m = n$. В этом случае имеет место утверждение.

Теорема 2. Для любого целого n , $n \neq 0$, выполняются равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi. \quad (3.5)$$

Доказательство. Воспользовавшись хорошо известными тригонометрическими тождествами

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx \right] = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx \right] = \pi,$$

так как по лемме 1

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx = 0.$$

Теорема доказана.

§3.3 Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье

Как было отмечено выше, если функция $f(x)$ представима в виде тригонометрического ряда (3.3), то она периодична с периодом 2π . Рассмотрим функцию $f(x)$ заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, периодичную с периодом 2π , которую можно представить в виде тригонометрического ряда. Найдем коэффициенты такого представления. Докажем утверждение, которое гарантирует единственность представления функции тригонометрическим рядом.

Теорема 3. *Если непрерывная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд, то коэффициенты этого ряда определяются единственным образом.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т.е. имеет место равенство (3.4). Перепишем это равенство ещё раз.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots$$

Проинтегрируем последнее равенство по отрезку $[-\pi, \pi]$, используя, что в нашем случае интеграл суммы равен сумме интегралов. Так как в правой части стоит бесконечное множество слагаемых, то приведенное утверждение нуждается в обосновании, которое следует из теоремы 2 главы 2. Итак

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \left[a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \right] + \left[a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx \right] + \dots$$

По лемме 1 все слагаемые в последнем равенстве, начиная со второго, равны нулю, а это означает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi$$

или

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (3.6)$$

т.е. свободный член разложения (3.4) определяется единственным образом формулой (3.6).

Перейдем к нахождению остальных коэффициентов разложения (3.4). Для нахождения коэффициента a_k , $k = 1, 2, \dots$, умножим равенство (3.4) на $\cos kx$. В результате чего получим

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \cos kx &= \frac{a_0}{2} \cos kx + (a_1 \cos x \cdot \cos kx + b_1 \sin x \cdot \cos kx) + \dots \\ &\quad + (\underline{a_k \cos^2 kx} + b_k \sin kx \cos kx) + \dots \end{aligned}$$

Полученное равенство проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$, используя, что интеграл от ряда равен ряду от интегралов. Тогда по теореме 1 интегралы от всех слагаемых, за исключением выделенного подчеркиванием, равны 0, а по теореме 2 справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi \cdot a_k.$$

Отсюда следует, что

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots . \quad (3.7)$$

Аналогично доказывается, что коэффициенты b_k определяются формулой

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots , \quad (3.8)$$

т.е. коэффициенты a_k , b_k , $k = 1, 2, \dots$, разложения (3.4) определяются единственным образом формулами (3.7), (3.8).

Теорема доказана.

Введем следующее определение.

Определение 2. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$, то числа a_0 , a_k , b_k , $k = 1, 2, \dots$, полученные по формулам (3.6), (3.7), (3.8) называются *коэффициентами Фурье для функции $f(x)$* , а ряд с этими коэффициентами

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется *рядом Фурье для функции $f(x)$* .

На основании вышесказанного теорему 3 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 4. (единственности). *Если непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, то это обязательно ряд Фурье.*

Замечание. Из теоремы 3 не вытекает, что всякая непрерывная функция разлагается в ряд Фурье. Например, функция $f(x) = x$, на отрезке $[-\pi, \pi]$ не разлагается в тригонометрический ряд на этом отрезке, т.к.

$$f(-\pi) = -\pi \neq \pi = f(\pi),$$

а сумма тригонометрического ряда $S(x)$ в точках $\pm\pi$ должна иметь одинаковые значения. В следующем параграфе будут сформулированы утверждения, которые позволяют выйти из этой ситуации.

§3.4 Теоремы разложения

Сформулируем теорему, которая гарантирует разложение всякой дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции в ряд Фурье не на всем отрезке, а лишь в интервале $(-\pi, \pi)$. Если при этом функция удовлетворяет ещё условию

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad (3.9)$$

то разложение верно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Более точно справедливо утверждение.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$, в каждой точке этого отрезка имеет конечную производную $f'(x)$, то ряд Фурье этой функции сходится на всей оси, причем его сумма $S(x)$ равна $f(x)$ в точках $x \in (-\pi, \pi)$, и*

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

Замечание. В данной теореме речь идет лишь о точках из отрезка $[-\pi, \pi]$, однако, так как эта сумма 2π -периодична, то её значение на $[-\pi, \pi]$ определяет значение этой суммы в любой точке числовой оси.

Пример 1. Рассмотрим $f(x) = x$. Найти коэффициенты Фурье этой функции.

► **Решение.** Согласно (3.6)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Из формул (3.7) и (3.8) с помощью интегрирования по частям и леммы 1 имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \begin{cases} \cos nx dx = dv \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \\ u = x \\ du = dx \end{cases} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} x \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = 0, \quad (3.10)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right] \right] = -\frac{2 \cos n\pi}{n}.$$

Как хорошо известно, $\cos n\pi = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, отсюда и (3.10) получаем:

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Таким образом, функция $f(x) = x$ на интервале $(-\pi, \pi)$ представима в виде следующего тригонометрического ряда

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \quad (3.14)$$

Отметим, что в точках $x = \pm\pi$, согласно теоремы 5 сумма ряда (3.11) равна 0. График функции $S(x)$, которая определяется равенством (3.11) приведен на рис.3.1. Мы видим, что $S(x)$ – является разрывной функцией. ◀

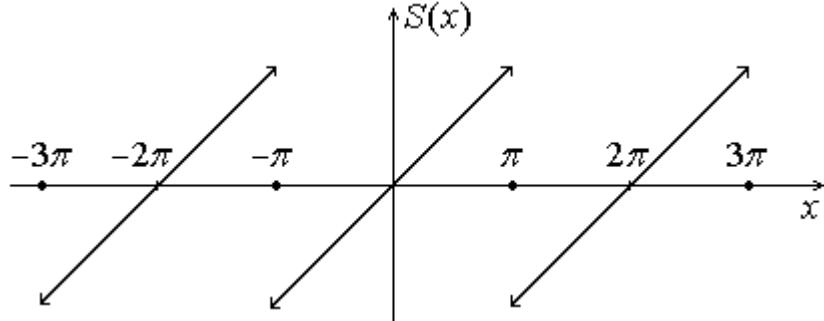


Рис.3.1

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Найти её коэффициенты Фурье.

► Решение. Вычислим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Интегрируя по частям, находим a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \left\{ x^2 \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \right\}.$$

Но согласно (3.10)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2\pi \cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n}$$

и, кроме того,

$$(x^2 \sin nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi^2 \sin n\pi - \pi^2 \sin(-n\pi) = 0.$$

Учитывая эти равенства, находим a_n :

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}.$$

Проведя аналогичные вычисления, находим, что $b_n = 0$. Окончательно разложение функции $f(x) = x^2$ на интервале от $-\pi$ до π имеет вид:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) \quad (3.12)$$

Функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет условию (3.9), следовательно, формула (3.12) верна на отрезке $[-\pi, \pi]$. В частности, при $x = \pi$ имеем:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right).$$

Отсюда вытекает справедливость равенства:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (3.13)$$

Если умножить обе части равенства (3.13) на $\frac{1}{4}$, то получаем:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{24}.$$

Вычитая это равенство из (3.13), получим

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \blacktriangleleft$$

Функция $S(x)$, равная сумме ряда справа в формуле (3.12), является 2π -периодичной функцией и её график изображен на рис.3.2.

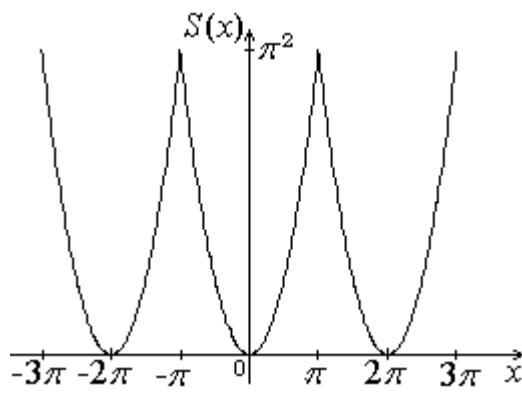


Рис.3.2

Теорема 5 допускает существенное обобщение. Пусть $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, а $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$. Если функция непрерывна в точке x_0 , то

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

При формулировке обобщения теоремы 5 нам потребуется понятие кусочно-дифференцируемой функции.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *кусочно-дифференцируемой* (*гладкой*) на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$.

Теорема 5.1. Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то во всех точках непрерывности её ряд Фурье сходится к значению функции, а в точке разрыва x_0 ряд сходится к значению

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

в точках π и $-\pi$, значение суммы ряда Фурье равно

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi + 0)}{2}.$$

Эта теорема дает нам возможность раскладывать в ряд и кусочно-непрерывные функции.

Пример 3. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ k, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

► Разложим эту функцию в ряд Фурье. Найдем коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^\pi = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} [\cos nx] \Big|_0^\pi = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right) \quad (3.14)$$

Согласно теореме 5.1 сумма правой части (3.14) на интервале $(-\pi, 0)$ равна 0, а на интервале $(0, \pi)$ равна 1. В частности, при $x = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} + \dots \right)$$

или $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

В точках разрыва $x=0$, $x=\pm\pi$ сумма ряда равна $\frac{1}{2}$. Особо следует отметить, что значение k , которое функция принимает, при $x=0$ никакой роли не играет, ибо изменение значения подинтегральной функции в одной точке не влияет на значение интеграла. На рис.3.3 приведен график суммы (3.14) для функции $f(x)$. ◀

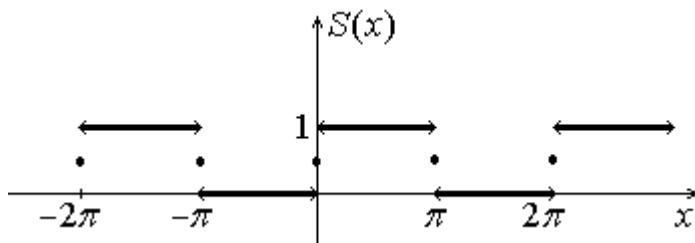


Рис.3.3

§3.5 Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

Напомним, что функция $f(x)$ называется чётной, если она определена на симметричном относительно точки $x=0$ интервале и не изменяется при изменении знака аргумента, т.е.

$$f(-x)=f(x),$$

и функция $f(x)$ называется нечётной, если она, будучи определенной на симметричном относительно точки $x=0$ интервале, меняет знак при изменении знака аргумента, т.е.

$$f(-x)=-f(x).$$

График чётной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис.3.4).

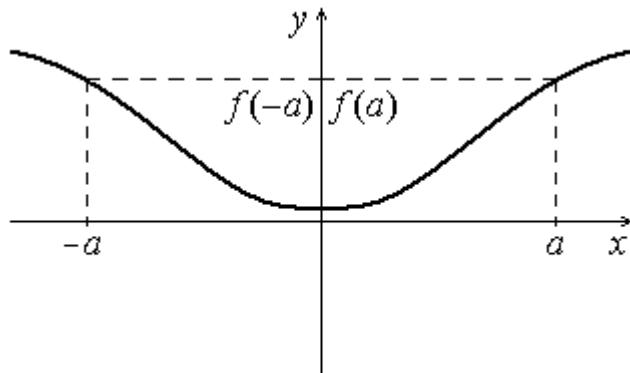


Рис.3.4

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (см. рис.3.5).

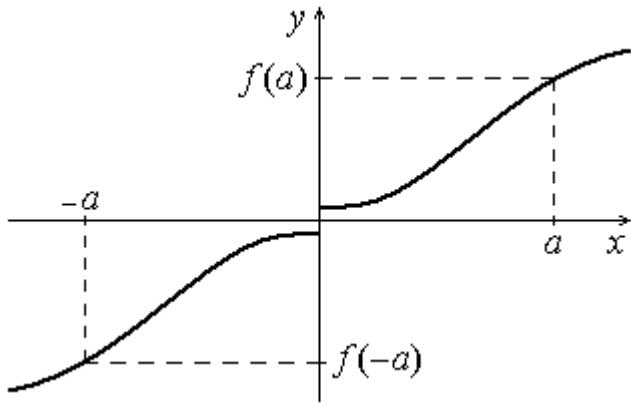


Рис.3.5

Совершенно очевидно, что произведение двух чётных либо двух нечётных функций является чётной функцией, а произведение чётной и нечётной функции является нечётной функцией.

В дальнейшем нам потребуется следующая формула

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx. \quad (3.15)$$

В самом деле, используя свойства интеграла, левую часть (3.15) можно представить в виде:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$$

но

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \begin{cases} t = -x \\ dx = -dt \\ t = 0; t = a \end{cases} = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt.$$

Так как переменную интегрирования можно обозначить любой буквой, то, заменяя t на x , из двух последних равенств получаем справедливость равенства (3.15). Используя это равенство, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 6. Если $f(x)$ чётная функция, то справедливо равенство

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx. \quad (3.16)$$

Если $f(x)$ нечётная функция, то выполняется равенство

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0. \quad (3.17)$$

Доказательство. Справедливость формул (3.16) и (3.17) вытекает из (3.15). Если $f(x)$ чётная, то $f(-x)=f(x)$, и из (3.15) имеем

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Если $f(x)$ нечётная, то $f(-x)=-f(x)$, и тогда из (3.15) получаем

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx = \int_0^a [f(x) - f(x)]dx = 0.$$

Теорема доказана.

Кроме того, формулы (3.16) и (3.17) геометрически очевидны. Суть дела состоит в симметрии графика функции для чётной функции – это симметрия графика относительно оси ординат, для нечётной – симметрия графика относительно начала координат. Разложение чётной и нечётной функции имеет свои особенности, которые можно сформулировать в виде следующих утверждений.

Теорема 7. Чётная функция при разложении в ряд Фурье содержит только косинусы, т.е. имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^a f(x)dx, \quad (3.18)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^a f(x) \cos nx dx. \quad (3.19)$$

Доказательство. При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье, коэффициенты этого ряда находятся по формулам (3.6), (3.7), (3.8), согласно которым

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Функции $f(x)$ и $f(x) \cdot \cos nx$ – чётные, тогда по теореме 6, мы имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Функция $f(x) \cdot \sin nx$ – нечётная, тогда по той же теореме при любом $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

Отсюда следует, что в разложении в ряд Фурье чётной функции содержатся только косинусы и коэффициенты ряда Фурье находятся по упрощенным формулам (3.18), (3.19).

Теорема доказана.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 8. Нечётная функция при разложении в ряд Фурье содержит только синусы и имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3.20)$$

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично предыдущему.

§3.6 Разложение функции, заданной на части промежутка $[-\pi, \pi]$

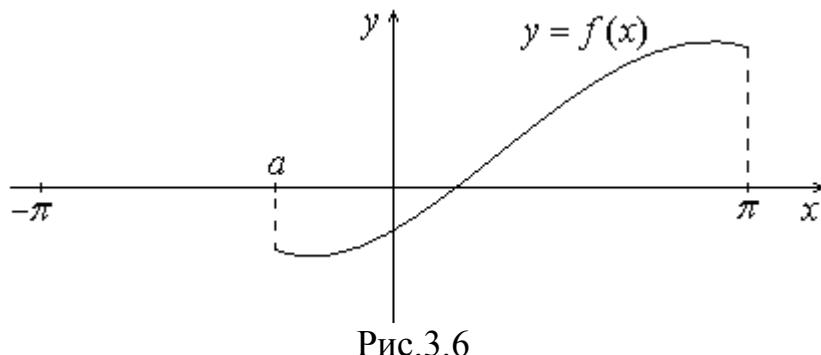
Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, \pi]$, где $-\pi < a < \pi$. Предполагается, что $f(x)$ дифференцируема на заданном отрезке, и рассматривается вопрос о построении тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

который на отрезке $[a, \pi]$ сходится к функции $f(x)$. Для решения поставленной задачи возьмем произвольную дифференцируемую функцию $g(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, a]$, и определим новую функцию $F(x)$ на интервале $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & -\pi \leq x < a \\ f(x), & a \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (3.21)$$

Функции $f(x)$ и $F(x)$ приведены на нижеследующих рис.3.6 и рис.3.7.



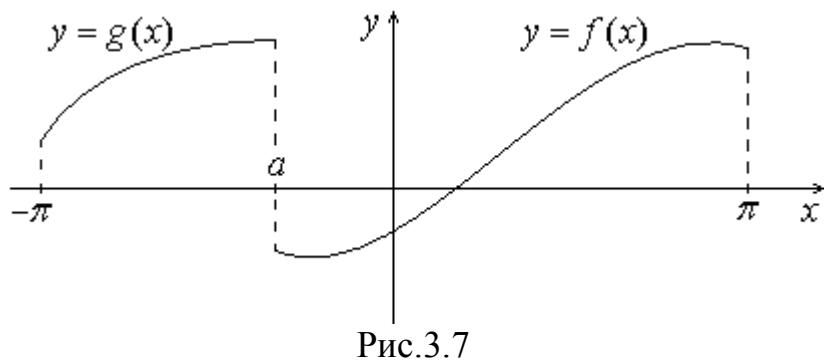


Рис.3.7

На интервале $(-\pi, \pi)$ функция $F(x)$ разлагается в ряд Фурье. Во всех точках непрерывности этот ряд сходится к значению функции $F(x)$, а в точке разрыва $x = x_0$ он сходится к значению

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Так как при $x \in (a, \pi)$ функция $F(x)$ совпадает с функцией $f(x)$, то для этих x полученный ряд Фурье сходится к функции $f(x)$. Тем самым, поставленная задача решена. В силу того, что функцию $g(x)$ можно выбрать бесконечным числом способов, то и число рядов Фурье, которые решают эту задачу также бесконечно много, при этом выбор функции $g(x)$ определяет коэффициенты ряда Фурье. Например, для a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_a^{\pi} f(x) dx.$$

Подставляя различные функции $g(x)$, получим различные значения коэффициента a_0 , так же и для коэффициентов $a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$. Таким образом, функция, заданная на более коротком, чем отрезок $[-\pi, \pi]$, промежутке, допускает бесконечное число разложений в тригонометрический ряд, и, следовательно, в этом случае отсутствует теорема единственности.

Наиболее интересным является случай, когда число a равно 0, тогда функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, \pi]$. В этом случае можно взять функцию $g(x)$ таким образом, чтобы функция $F(x)$, определенная равенством (3.21) была либо чётной, либо нечетной. Если функция $F(x)$ четная, то она разлагается только по косинусам, это разложение имеет вид:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (3.22)$$

В разложении (3.22) коэффициенты a_0, a_1, a_2, \dots находятся по уже известным нам формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

В этом случае равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

верно на всем отрезке $[0, \pi]$.

Если же функция $F(x)$, определенная соотношением (3.21), является нечетной, и при этом $f(0) \neq 0$, то в точке $x=0$ функция $F(x)$ имеет разрыв первого рода. В этом случае получим разложение $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (3.23)$$

где коэффициенты b_n находятся по формулам

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Отметим, что в этом случае формула (3.23) верна при $x \in (0, \pi)$.

Окончательно имеем: *Функцию $f(x)$, заданную и дифференцируемую на отрезке $[0, \pi]$, можно бесконечным числом способов разложить в тригонометрический ряд. В частности, её можно разложить только по косинусам (см. 3.22), либо только по синусам (см. 3.23).*

На ниже приведенных рисунках рис.3.8 и рис.3.9, даны графики функции $F(x)$ для случая, когда $F(x)$ чётная и когда $F(x)$ нечетная.

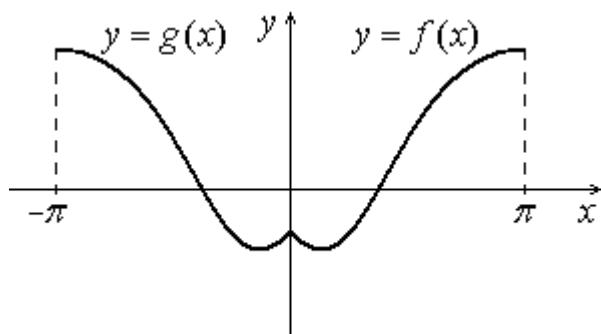


Рис. 3.8 Функция $F(x)$ – чётная.

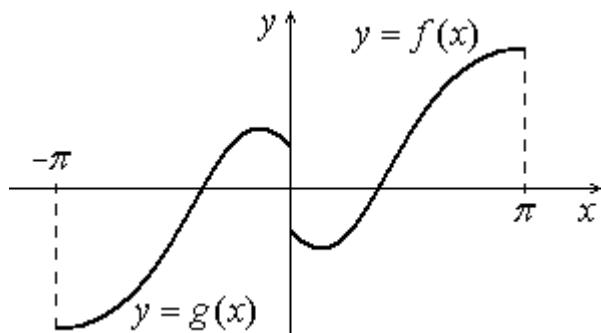


Рис. 3.9 Функция $F(x)$ – нечётная.

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = x$ по косинусам на отрезке $[0, \pi]$.

► Решение. В этом случае

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \left(x \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx dx \right) = \frac{2}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

Отсюда имеем справедливость равенства на отрезке $[0, \pi]$:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

В частности, при $x = 0$ имеем

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \blacktriangleleft$$

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = x$ по синусам на интервале $[0, \pi]$.

► Решение. В этом случае коэффициенты b_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi n} \left[x \cos nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[\pi \cdot \cos n\pi - \frac{1}{n} \cdot \sin nx \Big|_0^\pi \right] = \frac{2}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Разложение при $x \in [0, \pi]$ имеет вид:

$$x = -2 \sin x + \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x + \dots \blacktriangleleft$$

§3.7 Разложение функции заданной на промежутке $[a, a + 2\pi]$

Теория рядов Фурье излагалась нами ранее в предположении, что функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$. Вместо этого отрезка в силу периодичности функции $f(x)$ можно рассматривать любой другой отрезок длины 2π . Число 2π является периодом для любой из выписанных ниже функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots$$

Для установления справедливости этого высказывания, докажем ряд вспомогательных утверждений.

Теорема 9. Если функция $f(x)$ периодична с периодом 2π , то выполняется равенство

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

m.e. $\int_a^{a+2\pi} f(x)dx$ не зависит от числа a .

Доказательство. Используя свойства интегралов, а именно свойство аддитивности определенного интеграла, имеем

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx. \quad (3.24)$$

Рассмотрим последний интеграл в правой части (3.24), и сделаем замену $t = x - 2\pi$, получим

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_0^a f(t+2\pi)dt = \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(t)dt.$$

А это означает, что первый и третий интегралы в правой части (3.24) равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, следовательно, их сумма равна нулю, и поэтому из (3.24) имеем:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Непосредственно из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. Две любые функции системы

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$$

взаимно ортогональны на любом отрезке длины 2π . Кроме того, для любого a имеют место равенства:

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2 nx dx = \int_a^{a+2\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

Отсюда следует, что всю теорию тригонометрических рядов можно перенести с отрезка $[-\pi, \pi]$ на отрезок $[a, a+2\pi]$.

В частности справедливо утверждение.

Теорема 10. Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0, 2\pi]$, то равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx,$$

справедливо на интервале $[0, 2\pi]$. В точках $x=0, x=2\pi$ ряд сходится и его сумма равна

$$\frac{f(0) + f(2\pi)}{2}.$$

Рассмотрим пример.

Пример 6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

► Решение. Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n}.$$

Следовательно, если $x \in [0, 2\pi]$, то справедливо равенство

$$x = \pi - 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right). \quad (3.25)$$

В частности, при $x = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

В точках $x = 0, x = 2\pi$ сумма ряда справа (3.25) равна π . График суммы изображен на нижеследующем рисунке 3.10. ◀

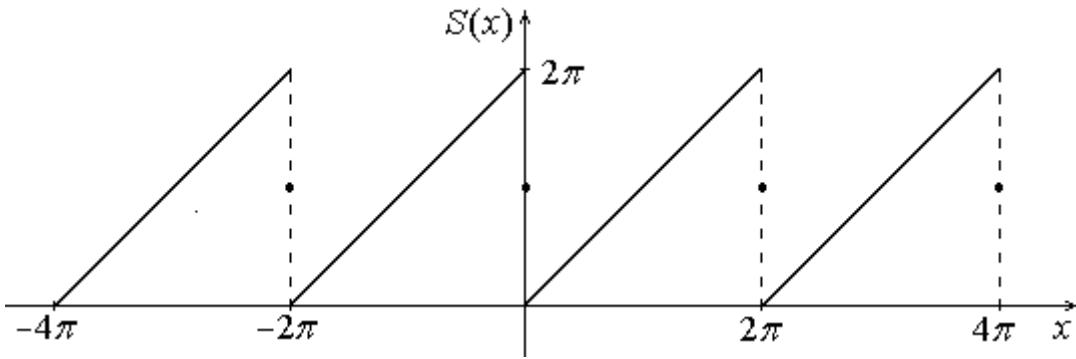


Рис.3.10

§3.8 Разложение в ряд Фурье периодичной функции с периодом $2l$

В этом параграфе мы научимся раскладывать в ряд Фурье функции периодические с периодом $2l$.

Рассмотрим периодичную функцию $f(x)$ с периодом $2l$, заданную и дифференцируемую на отрезке $[-l, l]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Функция $g(t)$ уже задана и дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и периодична с периодом 2π . В самом деле

$$g(t+2\pi) = f\left[\frac{l(t+2\pi)}{\pi}\right] = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = g(t).$$

Из всего выше сказанного следует, что функция $g(t)$ разлагается в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$, т.е. на этом интервале имеет место равенство

$$g(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

или, учитывая, что $t = \frac{\pi x}{l}$, имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (3.26)$$

В точках $x = \pm l$, значение правой части соотношения (3.26) вычисляется по формуле

$$\frac{f(-l) + f(l)}{2}.$$

Выведем формулы для вычисления коэффициентов $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$ ряда Фурье (3.25). Согласно формулам (3.6), (3.7), (3.8) получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) dt = \begin{vmatrix} \frac{lt}{\pi} = x \\ dx = \frac{l}{\pi} dt; dt = \frac{\pi}{l} dx \\ t = -\pi \Rightarrow x = -l \\ t = \pi \Rightarrow x = l \end{vmatrix} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

Итак, коэффициент a_0 находится по формуле:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (3.27)$$

Вычислим a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt = \left| t = \frac{\pi x}{l} \right| = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Окончательно имеем

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.28)$$

Аналогично находим b_n :

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.29)$$

Итак, если функция определена и непрерывна на отрезке $[-l, l]$, и дифференцируема на интервале $(-l, l)$, то она на интервале $(-l, l)$ представима

рядом Фурье (3.26), коэффициенты которого находятся по формулам (3.27), (3.28), (3.29).

В частности, если функция $f(x)$ – чётная, то её ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ содержит только косинусы и имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если же функция $f(x)$ – нечётная, то её ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ содержит только синусы и имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

§3.9 Приближение функции тригонометрическими многочленами

Напомним, что *тригонометрическим многочленом порядка n* называют сумму вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3.30)$$

где a_0, a_k, b_k – действительные числа при $k = 1, 2, \dots$. Этот параграф будет посвящен доказательству того, что если ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится в некоторой точке x , то функция $f(x)$ в этой точке может быть представлена с любой степенью точности её многочленом Фурье, т.е. частичной суммой $S_n(x)$ ряда Фурье

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Задачу, которую нам предстоит решить, можно сформулировать следующим образом. Зафиксируем n – порядок тригонометрического многочлена (3.30). Спрашивается, как следует выбрать коэффициенты a_0, a_k, b_k , $k = 1, 2, \dots, n$, чтобы многочлен $T_n(x)$ имел наилучшее приближение к функции $f(x)$?

Естественно, что здесь вопрос стоит о приближении на всем интервале $(-\pi, \pi)$, а не в какой-то отдельно взятой точке этого интервала. Для такой

постановки задачи приближения следует определить, что понимается под словами “наилучшее приближение”.

Если в качестве меры приближения взять разность по абсолютной величине между $f(x)$ и $T_n(x)$, т.е. $|f(x) - T_n(x)|$, то эта величина будет иметь различные значения для различных точек x из интервала $(-\pi, \pi)$. Если мы возьмем два различных тригонометрических многочлена $T_n^{(1)}(x)$ и $T_n^{(2)}(x)$, то в общем случае эта разность для одних точек будет меньше для $T_n^{(1)}(x)$, а для других для $T_n^{(2)}(x)$, и поэтому мы не можем однозначно сказать, какой из этих тригонометрических многочленов лучше, а какой хуже. Чтобы получить однозначность меры приближения, получаемой для различных тригонометрических многочленов, нужно оценивать эту меру некоторым числом. Такое число, естественно, выбирается далеко неоднозначно.

На то, как выбрать ту или другую оценку меры приближения, обычно влияют не столько принципиальные мотивы, сколько соображения практического характера.

На плоскости или в пространстве степень близости двух точек мы оцениваем расстоянием между ними.

В нашем случае, мы также должны разумным образом определить расстояние между функцией $f(x)$ и тригонометрическим многочленом $T_n(x)$. Совершенно очевидно, что это расстояние должно учитывать величину разности $f(x) - T_n(x)$ во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$. Таким разумным определением расстояния будет, например, верхняя грань величины $|f(x) - T_n(x)|$ на интервале $(-\pi, \pi)$, т.е. число

$$\rho_1(f, T_n) = \sup_{x \in (-\pi, \pi)} |f(x) - T_n(x)|. \quad (3.31)$$

Другим возможным определением может служить “среднее значение” той же самой величины:

$$\rho_2(f, T_n) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)| dx. \quad (3.32)$$

Однако более удобным, особенно для задач теории связи, оказывается определение расстояния между $f(x)$ и $T_n(x)$, как среднее значение квадрата разности $f(x) - T_n(x)$, т.е.

$$\rho(f, T_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx. \quad (3.33)$$

Преимущество расстояния, определяемого равенством (3.33), перед расстояниями, определяемыми равенствами (3.31), (3.32) – чисто практическое, а именно: для расчетов самого различного рода удобнее иметь дело с квадратами функций, чем с их абсолютными величинами.

В дальнейшем расстояние $\rho(f, T_n)$ между функцией $f(x)$ и тригонометрическим полиномом $T_n(x)$ будем определять по формуле (3.33). Это означает, что если

$$\rho(f, T_n^{(1)}) < \rho(f, T_n^{(2)}),$$

то многочлен $T_n^{(1)}(x)$ дает лучшее приближение функции $f(x)$, чем многочлен $T_n^{(2)}(x)$.

Наилучшее же приближение среди тригонометрических многочленов порядка n даёт тот многочлен $T_n(x)$ для которого расстояние $\rho(f, T_n)$ будет наименьшим.

Итак, наша задача состоит в том, чтобы найти многочлен $T_n(x)$, для которого величина $\rho(f, T_n)$ будет иметь наименьшее значение из всех возможных. Найти многочлен $T_n(x)$ – это означает найти его коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n$, т.е. всего $2n+1$ чисел, если многочлен определяется формулой (3.30). Задача состоит в том, чтобы найти значения этих $2n+1$ чисел, при которых величина $\rho(f, T_n)$ будет наименьшей. Возведем подинтегральное выражение в правой части (3.33) в квадрат, тогда величина $\rho(f, T_n)$ примет вид:

$$\rho(f, T_n) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x))^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx \right\}.$$

Многочлен $T_n(x)$ определим соотношением (3.30), а вместо $f(x)$ возьмем её разложение в ряд Фурье с коэффициентами a_n, b_n , используя формулы (3.6), (3.7), (3.8), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right) dx = \\ &= \pi \left(\frac{a_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k a_k + \beta_k b_k) \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Используя ортогональность тригонометрической системы (3.3) функций и формулы (3.5), имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx) \right) dx = \\ &= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + \beta_k^2) \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Из (3.33) с учетом (3.34), (3.35) получаем:

$$\rho(f, T_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k) + (\beta_k^2 - 2\alpha_k \beta_k) \right\},$$

но

$$\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k = (\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k + a_k^2) - a_k^2 = (\alpha_k - a_k)^2 - a_k^2,$$

$$\beta_k^2 - 2\beta_k b_k = (\beta_k - b_k)^2 - b_k^2.$$

Тогда из предыдущего соотношения получаем:

$$\begin{aligned} \rho(f, T_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + b_k^2) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^n (\beta_k - b_k)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Второе слагаемое в правой части равенства (3.36) не зависит от коэффициентов α_k, β_k , поэтому α_k, β_k надо выбирать так, чтобы минимизировать третье слагаемое в этом равенстве, т.е. чтобы наименьшее значение получила величина

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^n (\beta_k - b_k)^2 \right\} \quad (3.37)$$

Величина (3.37) обращается в нуль, когда $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$, при $k = 1, 2, \dots, n$, и больше нуля во всех остальных случаях. Таким образом, нами установлено, что наилучшее приближение получается тогда, когда в качестве коэффициентов многочлена $T_n(x)$ выбраны соответствующие коэффициенты ряда Фурье для функции $f(x)$. Отметим, что такое решение имеет место только в том случае, когда расстояние между функцией $f(x)$ и $T_n(x)$ определяется равенством (3.33). При другом определении расстояния мы получим другие значения a_k и β_k .

Приближения, в которых расстояния между двумя функциями оценивается как среднее значение квадрата их разности, принято называть *приближениями в среднем*. Полученный нами результат можно сформулировать в виде утверждения.

Теорема 11. *Из всех тригонометрических многочленов порядка n наилучшее приближение в среднем квадратичном для непрерывной функции дает многочлен Фурье*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$. При этом

$$\rho(f, T_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\}. \quad (3.38)$$

Так как $\rho(f, T_n) \geq 0$, то из соотношения (3.38) следует, что при любом n справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (3.39)$$

Правая часть неравенства (3.39) не зависит от n , следовательно, все частичные суммы ряда с положительными членами

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \quad (3.40)$$

ограничены при любом n , в том числе и при $n \rightarrow \infty$. Значит ряд (3.40) сходится, тем самым нами установлено ниже следующее.

Следствие. Квадраты коэффициентов Фурье непрерывной функции всегда образуют сходящийся ряд. В частности, отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Неравенство (3.39) называют *неравенством Бесселя*.

§3.10 Сходимость в среднем. Равенство Парсеваля

Рассмотрим равенство (3.38). Совершенно очевидно, что при увеличении числа n средняя квадратичная ошибка может только уменьшаться. Для читателя, решающего прикладные задачи, важно, что коэффициенты a_k , b_k , полученные при фиксированном n , останутся теми же и при больших значениях n , когда к уже известным добавятся новые. Вопрос, который является центральным в этой проблеме, состоит в следующем: можно ли увеличением n добиться того, чтобы средняя квадратичная ошибка $\rho(f, T_n)$ стала как угодно малой? При положительном ответе на этот вопрос должно выполняться равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = 0. \quad (3.41)$$

При выполнении равенства (3.41) говорят, что последовательность $T_n(x)$ частичных сумм ряда Фурье сходится в среднем к функции $f(x)$. При этом сходится и ряд (3.40) и его сумма равна

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (3.42)$$

Равенство (3.42) называется *равенством Парсеваля*.

Впервые, приведённые выше результаты, строго доказаны А.М.Ляпуновым, приведем без доказательства утверждение, носящее его имя.

Теорема Ляпунова. Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывна, тогда её многочлены Фурье

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

сходятся в среднем квадратичном к функции $f(x)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = 0,$$

при этом справедливо равенство

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Из теоремы следует, что любую функцию указанного типа, в частности любую непрерывную функцию, можно приблизить с любой степенью точности её многочленами Фурье. Эта теорема имеет много приложений. Отметим, что теорема Ляпунова справедлива для более широкого класса функций.

§3.11 Ряд Фурье в комплексной форме

Придадим ряду Фурье несколько другую форму, используя формулы Эйлера. Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и разлагается в ряд Фурье, тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.43)$$

В формуле (3.43) заменим $\cos nx$ и $\sin nx$ по формулам Эйлера, которые в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin nx &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \end{aligned}$$

Тогда равенство (3.43), после несложных преобразований примет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{inx} (a_n - ib_n) + e^{-inx} (a_n + ib_n) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Введем обозначения $C_n = a_n - ib_n$, $C_{-n} = a_n + ib_n$. Тогда (3.44) перепишется следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}. \quad (3.45)$$

Воспользовавшись формулами (3.7), (3.8), для нахождения a_n и b_n , имеем:

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx, \quad (3.46)$$

но числа C_n и C_{-n} комплексно сопряженные, т.е. $C_{-n} = \overline{C_n} = a_n + ib_n$, поэтому формула для $\overline{C_n}$ получается из формулы (3.46) для C_n , если в ней заменить индекс на $-n$, поэтому имеем

$$\overline{C_n} = C_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx.$$

При $n = 0$ из (3.46) находим значение коэффициента $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$. С

учетом введенных обозначений ряд (3.45) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{C_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx}.$$

Либо ещё короче:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \quad (3.47)$$

где

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx. \quad (3.48)$$

Ряд (3.47), коэффициенты которого находятся по формулам (3.48), называют *рядом Фурье в комплексной форме*.

Последовательность комплексных чисел C_n называют *спектральной последовательностью функции* $f(x)$; последовательность действительных чисел $|C_n|$ называют *амплитудным спектром функции* $f(x)$. Последовательность чисел $\varphi_n = -\arg C_n$ называют *фазовым спектром*. Очевидно, что $|C_{-n}| = |C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $\varphi_{-n} = -\varphi_n$. Комплексную форму ряда Фурье для интервала $(-l, l)$ также легко найти, и она имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n x}, \text{ где } C_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)e^{-i\omega_n x} dx \quad (3.49)$$

и

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Вывод формулы (3.49) аналогичен выводу равенства (3.47), если воспользоваться равенствами (3.27), (3.28), (3.29).

Пример 7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^x$ в интервале $[-\pi, \pi]$.

► Решение. Имеем

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)} dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{e^{x(1-in)}}{1-in} \right|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi(1-in)} (e^{\pi} e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi}) = \frac{(-1)^n}{\pi(1-in)} (e^{\pi} - e^{-\pi}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in}.$$

Если мы хотим перейти к обычной форме ряда Фурье, то, как уже говорилось, надо объединить слагаемые, отвечающие индексам n и $-n$:

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in} + (-1)^{-n} \frac{e^{-inx}}{1+in} &= (-1)^n \frac{e^{inx} + e^{-inx} + ni(e^{inx} - e^{-inx})}{1+n^2} = \\ &= (-1)^n \frac{2\cos nx - 2n\sin nx}{1+n^2}. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right) \right]. \blacktriangleleft$$

§3.12 Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам

Здесь будет рассмотрена задача о разложении функций в ряды по ортогональной системе функций. Решение данной задачи является обобщением разложения функции в тригонометрический ряд. Напомним, что система непрерывных на $[a, b]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортогональной, если для любых m и n таких, что $m \neq n$, выполняется равенство

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0,$$

а при $m = n$

$$R_n^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x) dx > 0.$$

Последнее неравенство говорит о том, что среди функций системы нет тождественно равных нулю.

Если каждую из функций умножить на $\frac{1}{R_n}$, то вновь полученные функции

$$\psi_n(x) = \frac{1}{R_n} \varphi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

образуют ортогональную систему и при этом

$$\int_a^b \psi_n(x) \cdot \psi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (3.50)$$

Систему функций $\psi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, назовем ортогональной нормированной системой.

Например, каждая из систем функций

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$$

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

ортогональна на интервале $(0, \pi)$.

Если функцию $f(x)$ в интервале (a, b) можно представить в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x), \quad (3.51)$$

то мы будем говорить, что $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по функциям $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$.

Как и ранее, для нахождения коэффициента C_k , обе части (3.51) умножим на $\psi_k(x)$ и проинтегрируем от a до b . Учитывая (3.50), получаем:

$$\int_a^b f(x) \cdot \psi_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int \psi_n(x) \psi_k(x) dx = C_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

Коэффициенты, определенные по формулам (3.52), называют коэффициентами Фурье, или коэффициентами разложения функции $f(x)$ относительно заданной ортонормированной системы.

Ряды вида (3.51), где коэффициенты разложения находятся по формулам (3.52), ещё называют обобщенными рядами Фурье. Эти ряды встречаются в теории связи, в математической физике, а также и в других отраслях науки.

§3.13 Интеграл Фурье в тригонометрической форме

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на бесконечном интервале и абсолютно интегрируемую на этом интервале, т.е. существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = I. \quad (3.53)$$

Кроме того, предположим, что на любом конечном интервале $(-l, l)$ эта функция разлагается в ряд Фурье, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right), \quad (3.54)$$

где коэффициенты a_k и b_k , находятся по известным формулам:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \quad (3.55)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt$$

Значения коэффициентов a_k и b_k , вычисленных по формулам (3.55), подставим в равенство (3.54). Получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi}{l} dt \right) \cos \frac{k\pi}{l} x + \\ &\quad + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l \left(f(t) \sin \frac{k\pi}{l} dt \right) \sin \frac{k\pi}{l} x = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{l} t \cos \frac{k\pi}{l} x + \sin \frac{k\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \right] dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta),$$

то последнее равенство примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} dt. \quad (3.56)$$

Выясним, какой предел имеет правая часть (3.56) при l , стремящемся к бесконечности. Для этого введем следующие обозначения

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad \Delta \alpha_k = \frac{\pi}{l}, \quad (3.57)$$

α_k изменяется в пределах от $\frac{\pi}{l}$ до бесконечности.

В этих обозначениях (3.56) перепишется так:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_k (t-x) dt \right) \Delta \alpha_k \quad (3.58)$$

Так как, согласно (3.53), выполнены неравенства

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2l} \cdot I,$$

то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt = 0,$$

т.е. первое слагаемое в (3.58) с ростом l стремится к нулю. Рассмотрим более внимательно второе слагаемое. При любом фиксированном l это выражение является интегральной суммой относительно переменного α . При $l \rightarrow \infty$, величина $\Delta \alpha_k \rightarrow 0$, следовательно, вся сумма стремится к интегралу по α с бесконечными пределами. Данные рассуждения нуждаются в уточнении. При заданных нами ограничениях на функцию $f(x)$ они верны. Таким образом, при $l \rightarrow \infty$ равенство (3.58) примет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\alpha(t-x)) dt \right) d\alpha. \quad (3.59)$$

Выражение, стоящее справа в формуле (3.59), называют *интегралом Фурье* для функции $f(x)$. Уточним, что правая часть (3.59) равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности и равна значению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в точках разрыва.

Воспользовавшись формулой косинуса разности, преобразуем интеграл, стоящий в правой части (3.59), получим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\alpha t) dt \right) \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(\alpha t) dt \right) \sin(\alpha x) d\alpha. \quad (3.60)$$

В силу абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ на $(-\infty, \infty)$ каждый из выписанных в (3.60) интегралов существует.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (3.60):

1. Пусть $f(x)$ – чётная.

Тогда $f(t) \cdot \cos(\alpha t)$ – чётная, а $f(t) \cdot \sin(\alpha t)$ – нечётная и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\alpha t) dt &= 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\alpha t) dt, \\ \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(\alpha t) dt &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае формула (3.60) принимает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t) \cos(\alpha t) dt \right) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (3.61)$$

2. Если же $f(x)$ – нечётная, то аналогично получаем:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin(\alpha t) dt \right) \sin(\alpha x) d\alpha. \quad (3.62)$$

Отметим, что в случае, когда функция $f(x)$ определена только в интервале $(0, \infty)$, то её можно представить как по формуле (3.61), так и по формуле (3.62).

Следует уточнить, что формулы (3.61) и (3.62) справедливы в точках непрерывности.

Если в формуле (3.61) положить

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt,$$

то (3.61) примет вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (3.63)$$

Функцию $F(\alpha)$ называют *косинус–преобразованием Фурье* для функции $f(x)$. Формула (3.63) задает *обратное косинус–преобразование*. На основании формулы (3.62) можно записать равенства:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\alpha t) d\alpha, \quad (3.64)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha. \quad (3.65)$$

Функцию $\Phi(\alpha)$, определенную равенством (3.64), называют *синус–преобразованием*.

§3.14 Интеграл Фурье в комплексной форме

Рассмотрим интеграл Фурье, определяемый равенством (3.59). Функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt$$

является чётной относительно α , поэтому формулу (3.59) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha \quad (3.66)$$

С другой стороны, функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt$$

является нечётной относительно α и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = 0 . \quad (3.67)$$

В соотношении (3.67) интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right) d\alpha .$$

Умножим равенство (3.67) на $-\frac{i}{2\pi}$ и прибавим к правой части (3.66).

Получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \alpha(t-x) - i \sin \alpha(t-x)) dt \right] d\alpha \quad (3.68)$$

Но согласно формулам Эйлера

$$(\cos \alpha(t-x) - i \sin \alpha(t-x)) = e^{-i\alpha(t-x)}. \quad (3.69)$$

Учитывая (3.69), равенство (3.68) перепишем в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right] e^{i\alpha x} d\alpha . \quad (3.70)$$

Обозначим через $C(\alpha)$ внутренний интеграл в соотношении (3.70), т.е.

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt . \quad (3.71)$$

С учётом (3.71) равенство (3.70) запишется так

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \cdot e^{i\alpha x} d\alpha .$$

Полученная формула является аналогом ряда Фурье в комплексной форме для функций, заданных на конечном интервале. В силу этого α также будем называть, как и прежде, волновым числом, учитывая, что здесь α изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, и спектр волновых чисел является непрерывным спектром. Функцию $C(\alpha)$ называют *спектральной плотностью* или *спектральной функцией*.

Равенство (3.70) также часто переписывают в виде двух равенств

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (3.72)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (3.73)$$

Функцию $F(\alpha)$, определяемую равенством (3.72) называют *преобразованием Фурье* для функции $f(x)$. Функция $f(x)$, определенная

равенством (3.73), называется *обратным преобразованием Фурье* для функции $F(\omega)$. Функция $F(\omega)$ и $C(\omega)$ отличаются на множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

§3.15 Теорема Котельникова о квантовании непрерывного сигнала по времени

В этом параграфе мы дадим некоторые применения изложенной выше теории рядов Фурье и интегралов Фурье для преобразования непрерывных сигналов, с целью передачи этих сигналов по цифровым каналам связи.

Непрерывный сигнал задан и определен во всех точках области определения. Применение всех видов импульсной модуляции связано с дискретизацией сигнала по времени или ещё говорят с квантованием по времени. При процедуре квантования исходный сигнал заменяется другим сигналом, и поэтому следует ответить на вопрос: «Какие условия нужно выполнять, чтобы исходный сигнал можно было передать сколь угодно точно?». Приведенная ниже теорема Котельникова дает одно из возможных решений поставленной задачи.

Будем предполагать, что преобразование Фурье $F(\omega)$ данного сигнала $x(t)$ является финитной функцией, т.е. существует число $\omega_c > 0$, такое, что выполняются условия

$$\begin{aligned} F(\omega) &\neq 0, \quad 0 < \omega < \omega_c, \\ F(\omega) &= 0, \quad \omega > \omega_c. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Напомним, что

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.75)$$

Функцию $F(\omega)$, определенную равенством (3.75), называют также *спектром функции $x(t)$* . В этой терминологии ω_c – верхняя частота спектра.

Положим $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c}$.

Сформулируем и докажем основное утверждение данного параграфа.

Теорема Котельникова. *Всякий непрерывный сигнал $x(t)$, обладающий ограниченным спектром, представим в виде*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_c(t - k\Delta t)}{\omega_c(t - k\Delta t)}, \quad (3.76)$$

t.e. $x(t)$ полностью определяется своими дискретными значениями в моменты отсчёта, отстоящие друг от друга во времени на интервалы $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c}$.

Доказательство. Так как функция $F(\omega)$ задана на конечном интервале и непрерывна, то эту функцию можно разложить в ряд Фурье в комплексной форме, как это указывалось в параграфе 3.11, с периодом $T_\omega = 2\omega_c$. При этом получаем:

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\pi k \frac{\omega}{\omega_c}}, \quad (3.77)$$

где

$$C_k = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) e^{-i\pi k \frac{\omega}{\omega_c}} d\omega. \quad (3.78)$$

Как известно, обратное преобразование Фурье имеет вид

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.79)$$

Если разделить обе части последнего равенства на $\frac{\omega_c}{\pi}$ и, учитывая (3.57),

положить

$$\tau = -k\Delta t, \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_c},$$

то равенство (3.79) преобразуется к виду

$$\frac{\pi}{\omega_c} x(-k\Delta t) = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) e^{-i\pi k \frac{\omega}{\omega_c}} d\omega. \quad (3.80)$$

Согласно (3.78) правая часть (3.80) равна C_k , поэтому из (3.80) получаем:

$$\frac{\pi}{\omega_c} x(-k\Delta t) = C_k.$$

Подставляя полученное выражение для C_k в (3.77), имеем:

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} x(-k\Delta t) e^{i\pi k \frac{\omega}{\omega_c}}.$$

Это выражение для $F(\omega)$ подставим в равенство (3.79), получаем

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega\tau} d\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k\Delta t) \frac{\pi}{\omega_c} e^{i\omega k\Delta t}. \quad (3.81)$$

При наших ограничениях ряд Фурье и интеграл Фурье сходятся равномерно, поэтому можно изменить порядок интегрирования и

суммирования в последнем равенстве. Если при этом заменить τ на t и $-k$ на k , то равенство (3.81) запишется в виде:

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega(t-k\Delta t)} d\omega, \quad (3.82)$$

но

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \cos\omega(t-k\Delta t) d\omega + i \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sin\omega(t-k\Delta t) d\omega. \quad (3.83)$$

Так как

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sin\omega(t-k\Delta t) d\omega = 0,$$

и

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \cos\omega(t-k\Delta t) d\omega = \frac{2\sin\omega_c(t-k\Delta t)}{(t-k\Delta t)},$$

то (3.83) перепишем в виде

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \frac{2\sin\omega_c(t-k\Delta t)}{(t-k\Delta t)}.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (3.82), окончательно имеем

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin\omega_c(t-k\Delta t)}{\omega_c(t-k\Delta t)}.$$

Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы Котельникова следует, что функция, имеющая ограниченный спектр, определена на бесконечном промежутке и представляется в виде суммы бесконечного числа членов ряда, каждый из которых является функцией вида $Say = \frac{\sin y}{y}$. Функцию Say называют *функцией отсчётов* и её график имеет вид:

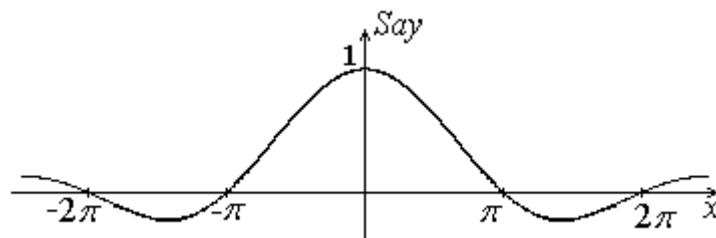


Рис. 3.11

Итак, если известны значения функции $x(t)$ в точках отсчета $k\Delta t$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то функцию $x(t)$ можно полностью восстановить для всех значений t посредством суммирования функций отсчетов с соответствующими коэффициентами.

Учитывая, что реальные сигналы всегда имеют конечную длительность, то непосредственное применение теоремы Котельникова затруднено. Наложив ряд ограничений, можно установить, что функция с неограниченным спектром также может быть приближена некоторым рядом Котельникова (3.76).

Задачи для самостоятельного решения.

341–349. Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$, определенные в интервале $(-\pi, \pi)$ следующими условиями:

$$341. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{при } 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{при } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$342. f(x) = x$$

$$343. f(x) = |x|$$

$$344. f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{при } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$345. f(x) = x^2$$

$$346. f(x) = |\sin x|$$

$$347. f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{при } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$348. f(x) = \sin ax$$

$$349. f(x) = \cos ax$$

350. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по косинусам.

351. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по синусам.

352. В промежутке $(-2, 2)$ разложить функцию $f(x) = 3x$ в ряд Фурье.

353. В промежутке $[-4, 4]$ разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -4 \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < 4 \end{cases}$ в ряд Фурье.

Фурье.

354. Задана функция $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$. Записать ряд Фурье в комплексной форме. Найти амплитудный спектр.

ОТВЕТЫ

1. не выполняется, ряд расходится. 2. не выполняется, ряд расходится.
3. выполняется. 4. не выполняется, ряд расходится. 5. выполняется. 6. не выполняется, ряд расходится. 7. не выполняется, ряд расходится.
8. выполняется. 9. не выполняется, ряд расходится. 10. не выполняется, ряд расходится. 11. выполняется.

12. расходится. 13. сходится. 14. сходится. 15. сходится. 16. расходится.
17. сходится.

18. расходится. 19. расходится. 20. сходится. 21. сходится. 22. расходится.
23. расходится. 24. расходится. 25. сходится. 26. сходится. 27. расходится.
28. сходится. 29. сходится. 30. сходится. 31. сходится.

32. сходится. 33. расходится. 34. сходится. 35. сходится. 36. расходится.
37. сходится. 38. сходится. 39. сходится. 40. сходится. 41. сходится. 42.
сходится. 43. сходится. 44. сходится. 45. сходится. 46. сходится.
47. сходится. 48. сходится. 49. расходится. 50. сходится. 51. расходится.
52. сходится. 53. сходится. 54. расходится. 55. расходится. 56. сходится при
любом α .

57. расходится. 58. расходится. 59. сходится. 60. расходится. 61. сходится
при $p > 1$. 62. сходится. 63. расходится. 64. расходится. 65. сходится.
66. сходится. 67. сходится. 68. сходится. 69. сходится. 70. расходится.
71. сходится. 72. расходится. 73. сходится. 74. сходится. 75. расходится.
76. сходится. 77. сходится. 78. сходится. 79. расходится. 80. расходится.
81. сходится. 82. сходится. 83. расходится. 84. сходится. 85. сходится.
86. сходится. 87. сходится. 88. сходится. 89. сходится.

108. сходится абсолютно. 109. сходится абсолютно. 110. расходится.
111. сходится абсолютно. 112. сходится абсолютно. 113. сходится абсолютно.
114. сходится абсолютно. 115. сходится абсолютно. 116. расходится.
117. сходится абсолютно. 118. сходится абсолютно. 119. условно сходится.
120. сходится абсолютно. 121. условно сходится. 122. сходится абсолютно.
123. условно сходится. 124. условно сходится. 125. условно сходится.

126. сходится абсолютно. 127. сходится условно. 128. сходится условно.
129. сходится абсолютно. 130. сходится условно. 131. сходится условно при
любом a , не равном целому отрицательному числу. 132. абсолютно сходится
при $|\alpha - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ (k – целое); условно сходится при $\alpha = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$. 133. сходится
условно. 134. сходится условно.

135. $-3 < x < 3$, $S(x) = \frac{3}{3-x}$.

136. расходится при любом $x \in R$.

137. $x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$, $S(x) = \frac{10}{x^2 - 10}$. **138.** $x > 1$, $S(x) = \frac{1}{1 - 3^{-(x+1)}}$.

139. $(-\infty; +\infty)$. **140.** $(-1; 1)$. **141.** $(0; +\infty)$. **142.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

143. $(-\infty; -3] \cup (-1; +\infty)$. **144.** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **145.** $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$.

146. $[-1; +\infty)$. **147.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **148.** $(-\infty; +\infty)$. **149.** $[0; +\infty)$.

150. $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **151.** $(-\infty; 0)$. **152.** $[-1; 1)$.

153. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **154.** $\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **155.** $[0, 1; 10)$.

156. $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$. **157.** $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **158.** $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

159. Равномерно сходится. **160.** Равномерно сходится. **161.** Равномерно

сходится. **162.** Равномерно сходится. **163.** Равномерно сходится.

164. Равномерно сходится. **165.** Сходится неравномерно. **166.** Сходится

неравномерно. **167.** Сходится неравномерно. **168.** Сходится неравномерно.

169. Сходится неравномерно. **170.** Сходится неравномерно.

185. $[-5; 1)$. **186.** $(-\infty; +\infty)$. **187.** $[-4; -2]$. **188.** $(-\infty; +\infty)$. **189.** $(-\infty; +\infty)$.

190. $\left[\frac{9}{5}; \frac{11}{5}\right)$. **191.** $[-2; 2)$. **192.** $(-\infty; +\infty)$. **193.** $(-6; 8)$. **194.** $[-2; 2]$. **195.** $(0; 6)$.

196. $x = 0$. **197.** $\left[5 - \frac{\sqrt{2}}{3}; 5 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. **198.** $x = -4$. **199.** $[2; 6]$. **200.** $[-1; 0)$.

201. $(-4; 4)$. **202.** $(-7; 9)$. **203.** $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. **204.** $(-\infty; +\infty)$. **205.** $x = -2$.

206. $\left(3 - \frac{e}{3}; 3 + \frac{e}{3}\right)$. **207.** $(-3; 3)$. **208.** $(-\infty; +\infty)$. **209.** $[-6; -4)$. **210.** $[-9; -7]$.

211. $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$. **212.** $(-7; 3)$. **213.** $(-3; 3)$. **214.** $(-2; 12)$. **215.** $(-\infty; +\infty)$.

216. $\left[-\frac{1}{e} - 1; \frac{1}{e} - 1\right)$. **217.** $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **218.** $x = 0$. **219.** $(-\sqrt{e}; \sqrt{e})$. **220.** $(-8; -6)$.

221. $[-1; 1]$. **222.** $[7; 9]$. **223.** $\left(-\frac{29}{7}; -\frac{27}{7}\right)$.

224. $\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)$. **225.** $\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}}$. **226.** $(-x-2) \ln(-x-2) + x + 3$.

227. $\ln(1+x^2 + x^3 + x^5)$. **228.** $\frac{9}{(3-x)^2}$. **229.** $\frac{1}{(3-x)^2}$. **230.** $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. **231.** $\frac{1}{(1-x)^4}$

$$232. \frac{4x - 2x^2}{(1-x)^3}. \quad 233. \frac{48x - 24x^2 + 4x^3}{(2-x)^3}. \quad 234. \frac{2 + 14x^3 + 2x^6}{(1-x^3)^3}. \quad 235. \frac{3 + x^2}{(1-x^2)^2}.$$

$$236. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n. \quad 237. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}. \quad 238. 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x+1)^n.$$

$$239. \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-5)^n. \quad 240. 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{3}{2} - n\right) \cdot (x-4)^n.$$

$$241. e^{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!} (x+4)^n. \quad 242. e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n n!}. \quad 243. 125 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 5}{n!} (x-3)^n.$$

$$244. \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((2n+1) \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} \right).$$

$$245. \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{(2n+1)! 3^{2n+1}} \left(3\sqrt{3}(2n+1)(x-1)^{2n} + \pi(x-1)^{2n+1} \right).$$

$$246. \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-2}}{(2n+1)!} \left((2n+1) \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n} - 2\sqrt{3} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \right).$$

$$247. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+2}} + \frac{4}{3} (-1)^n \right) \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x+3)^n. \quad 248. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad 249. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{3n},$$

$$x \in (-\infty; +\infty). \quad 250. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad 251. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^n (2n)!} x^{4n},$$

$$x \in (-\infty; +\infty). \quad 252. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^n}{n} x^{5n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{5}}, \frac{1}{\sqrt[5]{5}}\right]. \quad 253. -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}, \quad x \in [-3; 3].$$

$$254. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n, \quad x \in (-1; 1). \quad 255. \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$256. 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot x^{2n}, \quad x \in (-1; 1). \quad 257. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+0,5}, \quad x \in [0; 1].$$

$$258. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^{2n+1} + x^{2n+3}), \quad x \in (-1; 1). \quad 259. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{\frac{n+1}{4}}, \quad x \in [0; +\infty).$$

$$260. \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right) x^n, \quad x \in (-1; 1]. \quad 261. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left((-1)^{n-1} 2^n - 1 \right) x^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$262. \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^{2n}}{3^n} + \frac{x^n}{4^n} \right), \quad x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]. \quad 263. \ln \frac{4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^{2n}}{4^n} - \frac{x^n}{5^n} \right),$$

$$x \in [-2; 2]. \quad 264. \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 36^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad 265. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n)!} x^{2n},$$

$$x \in (-\infty; +\infty). \quad 266. \frac{3}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(2^{2n-1} + \frac{4^{2n-1}}{2} \right) x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$267. \frac{3}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad 268. \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right),$$

$$x \in (-\infty; +\infty). \quad \mathbf{269.} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{3} \cdot 2^{4n-1} x^{2n} - \frac{2^{4n+1}}{2n+1} x^{2n+1} \right), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

- 270.** 1,648. **271.** 0,3679. **272.** 0,30905. **273.** 0,999848. **274.** 0,156. **275.** 0,9848.
276. 1,0372. **277.** 2,0304. **278.** 1,001998. **279.** 0,99599. **280.** 1,0385.
281. 2,015329. **282.** 0,405. **283.** 1,609. **284.** 0,4637. **285.** 1,2490. **286.** 1,54308.
287. 3,6269. **288.** 0,899. **289.** 1,105. **290.** 0,042. **291.** 0,117. **292.** -0,003.
293. 0,090. **294.** 0,029. **295.** 0,310. **296.** 0,203. **297.** 0,242. **298.** 0,335.
299. 0,256. **300.** 0,161. **301.** 0,500. **302.** 0,072. **303.** 0,047. **304.** 0,727.
305. 0,175. **306.** 0,022. **307.** 2,432. **308.** 0,002. **309.** $\frac{1}{2}$. **310.** $\frac{1}{6}$. **311.** -3.
312. $\frac{1}{3}$. **313.** 1. **314.** $\frac{2}{5}$. **315.** 3. **316.** $\frac{1}{3}$. **317.** $-\frac{1}{4}$. **318.** $-\frac{7}{3}$. **319.** $-\frac{1}{3}$.
320. ∞ . **321.** $\frac{1}{2}$. **322.** 2.

$$\mathbf{323.} \quad y = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{324.} \quad y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \dots$$

$$\mathbf{325.} \quad y = 2 - 4x + 20x^2 - \frac{296}{3}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{326.} \quad y = 2x + 2x^2 + 2x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \dots$$

$$\mathbf{327.} \quad y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{328.} \quad y = -1 + 4x - 6x^2 + \frac{19}{3}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{329.} \quad y = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{330.} \quad y = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$\mathbf{331.} \quad y = -2 + 12x - \frac{143}{2}x^2 + \frac{1292}{3}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{332.} \quad y = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$\mathbf{333.} \quad y = 3 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{334.} \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots$$

$$\mathbf{335.} \quad y = 2 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{336.} \quad y = 1 + 4x - 2x^2 + \frac{7}{2}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{337.} \quad y = 2 - 3x + \frac{2e^2 - 3}{2}x^2 + \frac{-4e^2 - 3}{6}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{338.} \quad y = 5 - x + \frac{9}{2}x^2 + x^3 + \dots$$

$$\mathbf{339.} \quad y = 2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{120}x^6 + \dots$$

$$\mathbf{340.} \quad y = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \dots$$

$$\mathbf{341.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

$$\mathbf{342.} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$\mathbf{343.} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

$$\mathbf{344.} \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}$$

$$\mathbf{345.} \quad \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

$$\mathbf{346.} \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

$$\mathbf{347.} \quad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

$$\mathbf{348.} \quad \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{a^2 - n^2}.$$

$$\mathbf{349.} \quad \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} a \cos nx}{n^2 - a^2} \right).$$

$$350. \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} + \frac{24}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^4}.$$

$$351. 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}.$$

$$352. f(x) = \frac{12}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi x/2)}{1} - \frac{\sin \pi x/2}{2} + \frac{\sin(3\pi x/2)}{3} - \dots \right).$$

$$353. f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\cos(\pi x/4)}{1^2} + \frac{\cos(3\pi x/4)}{3^2} + \dots \right) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi x/4)}{1} - \frac{\sin(\pi x/2)}{2} + \dots \right).$$

$$354. f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{1-in}{1+n^2} e^{inx}; \quad |c_n| = \frac{\operatorname{sh}\pi}{n} \sqrt{1+n^2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.И.Архипов, В.А.Садовничий, В.Н.Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: «Высшая школа», 1999, 695 с.
2. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика. М.:Дрофа, 2004, т.2, 512 с.
3. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика. М.:Дрофа, 2004, т.3, 512 с.
4. В.А.Зорич. Математический анализ, часть II. М.: «Наука», 1984, 640 с.
5. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ, т.1., М.: Издательство московского университета, 1985, 660 с.
6. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ, т.2. Издательство московского университета, Москва, 1987, 358 стр.
7. Л.Д.Кудрявцев. Курс математического анализа. М.: Дрофа, 2004, 720 с.
8. С.М.Никольский. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001, 592 с.
9. А.М.Тер-Крикоров, М.И.Шабунин. Курс математического анализа. М.: Бином, 2009, 672 с.
- 10.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. Москва, «Наука», 1970. 800 с.
11. А.Я. Хинчин. Краткий курс математического анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957, 628 с.
- 12.Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1977, 385 с.
- 13.И.А.Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). Издательство «Факториал», Москва, 1996, 480 стр.
- 14.Н.М.Гюнтер, Р.О.Кузьмин. Сборник задач по высшей математике. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949, 224 с.
15. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Издательство: ЧеRo, 1997, 625 с.
16. О.Е.Дмитриева, Т.С. Мурзина, Л.А. Подмогаева, В.К.Трофимов. Сборник задач по математическому анализу 2-й семестр. Учебное пособие. Новосибирск, 2010, 85 с.
- 17.Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов, В.И.Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. М.: Физматлит, 2003, т.2, 505 с.

**Виктор Куприянович Трофимов
Татьяна Степановна Мурзина
Татьяна Эрнестовна Захарова**

ТЕОРИЯ РЯДОВ

Учебное пособие

Редактор Черных Г.Г.
Корректор Гончарова И.Л.

Подписано в печать 03.06.2013,
формат бумаги 60x84/16, отпечатано на ризографе, шрифт №10,
изд. л. 9,1, заказ № 54, тираж 100. СибГУТИ
630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86