

Глава 1 Теория множеств

Тема 1 Множества и операции над ними

Занятие 1

- 1.1** Какой способ использован при задании множеств:
а) IVT = {множество групп факультета ИВТ}; б) P42 = {множество студентов группы П-42}? Верно ли, что: $P42 \in IVT$? $P42 \subset IVT$?
- 1.2** Перечислить все элементы множества $\{x \mid x - \text{целое и } x^2 < 49\}$.
- 1.3** Описать множество $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ при помощи характеристического свойства.
- 1.4** Перечислить все подмножества множества $\{a, b, c\}$.
- 1.5** Справедливо ли равенство: $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} = \{a, b, c\}$?
- 1.6** Пусть $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ – множество всех целых четных чисел; $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел. Определить, из каких чисел будут состоять множества: $E \cap N$, $E \cup N$, $E \setminus N$, $N \setminus E$?
- 1.7** Доказать, что $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.
- 1.8** Установить истинность или ложность каждого из следующих утверждений:
а) $\emptyset \subseteq \emptyset$; б) $\emptyset \subseteq A$, где A – произвольное множество; в) $\emptyset \subset \emptyset$;
г) $\emptyset \in \emptyset$; д) $\emptyset \in A$, где A – произвольное множество.
- 1.9** Определить количество элементов в каждом множестве:
а) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; б) $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; в) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$;
г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$; д) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- 1.10** Доказать, что если множества $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
- 1.11** Пусть даны множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Определить множества:
а) $A \cup C$; б) $A \cap B$; в) $(A \cap B) \cup C$; г) $A \setminus B$;
д) $U \setminus (A \cap B)$; е) $\bar{A} \cap \bar{B}$; ж) $A \cap (B \cup C)$; з) $A \Delta B$;
и) $(A \cup C) \setminus \bar{B}$; к) $B \Delta C$; л) $(A \setminus \emptyset) \cup (A \setminus A)$.
- 1.12** Определить, какие из следующих утверждений верны, а какие – нет:
а) $A \cap \emptyset = A$; б) $A \Delta A = \emptyset$; в) если $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$;
г) $A \setminus A = A$; д) $A \cup \emptyset = A$; е) если $A \cap B = A$, то $B \subseteq A$;
ж) $\underline{A} \setminus \emptyset = A$; з) $A \Delta \emptyset = A$; и) если $A \subseteq B$, то $A \cup B = A$;
к) $\underline{A} \times \bar{B} = \bar{A} \times \bar{B}$; л) $A \times \emptyset = A$; м) если $A \cup B = A$, то $B \subseteq A$.
- 1.13** Доказать, используя определения операций \cup и \cap , что для любых множеств A , B , C выполняется: а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; б) $(A \cap B) \cup A = A$;
в) $(A \cup B) \cap A = A$; г) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
- 1.14** Определить операции \cup , \cap , \setminus через: а) Δ , \cap ; б) Δ , \cup ; в) \setminus , Δ .
- 1.15** Доказать, что $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$. Проиллюстрировать графически.
- 1.16** Доказать, что $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Проиллюстрировать графически.
- 1.17** Пусть множества A , B , C удовлетворяют соотношениям: $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$.
Решить систему уравнений: $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$

Глава 1 Теория множеств

- 1.18** Пусть множества A, B, C удовлетворяют соотношениям: $B \subseteq A \subseteq C$. Решить систему уравнений: $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$.
- 1.19** Пусть множества A, B, C удовлетворяют соотношениям: $B \subseteq A \subseteq C$. Решить систему уравнений: $\begin{cases} A \setminus X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$.
- 1.20** Доказать аналитически, используя свойства операций над множествами, и проиллюстрировать графически:
- 1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$; 2) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
- 3) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$; 4) $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$;
- 5) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$; 6) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;
- 7) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$; 8) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
- 9) $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \cap C)$; 10) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
- 11) $A \cap B = (\bar{A} \cup B) \cap A$; 12) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
- 13) $A \Delta (A \Delta B) = B$; 14) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$;
- 15) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$; 16) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
- 1.21** Указать такие множества A, B, C что $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.
- 1.22** При каком условии на множества A, B, C выполняется $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$?
- 1.23** Пусть $A = \{a, b, c, d\}$. Какие из следующих классов множеств составляют разбиение или покрытие множества A ?
- а) $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$; б) $\{\{a, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b\}\}$; в) $\{\{a\}, \{c, d\}\}$; г) $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$.
- 1.24** Выписать все варианты непустых разбиений множества $A = \{a, b, c, d\}$.

Тема 2 Отношения

Занятие 2

- 1.25** Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Определить:
- а) $A \times B$; б) $B \times B$; в) $A \times \emptyset$; г) $B \times A$; д) $A \Delta B$.
- 1.26** Выяснить, справедливы ли равенства. Если нет – привести контрпример.
- а) $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$; б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
- в) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$; г) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
- д) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cup ((A \times D) \cap (B \times C)) \cup (B \times D)$.
- 1.27** Найти область определения и множество значений отношений:
- а) $\{(a, 1), (a, 2), (c, 1), (c, 2), (c, 4), (d, 5)\}$; б) $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$;
- в) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ и } x = y^2\}$; г) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{I} \text{ и } x^2 + y^2 \leq 16\}$.
- 1.28** Установить, какие из приведенных совокупностей элементов составляют разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Для тех, что составляют, перечислить элементы соответствующего отношения R , такого, что $aRb \Leftrightarrow a, b \in \text{одному } A_i$:
- а) $\{\{1, 2\}, \emptyset, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}\}$; б) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}\}$; в) $\{\{1, 7\}, \{3, 4, 6\}\}$;
- г) $\{\{1, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 6, 7\}\}$; д) $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$.
- 1.29** На плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Указать точки плоскости, соответствующие элементам отношения $R \subseteq \mathbf{N}^2$, если:
- а) $R = \{(x, y) \mid x \leq 6, y \leq 4, x > y\}$; б) $R = \{(x, y) \mid x \leq 10, y \leq 10, x \text{ делит } y\}$.

Глава 1 Теория множеств

- 1.30** Представить заданное бинарное отношение R на множестве A списком пар; построить его графически; выписать область определения и область значений: $A=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{(x,y) \mid \text{остаток от деления } y \text{ на } x \text{ равен } 1\}$.
- 1.31** Пусть $A=\{1,2,3,4\}$, отношения $R_1, R_2 \subseteq A^2$: $R_1=\{(x,y) \mid 2x \leq y\}$, $R_2=\{(x,y) \mid x+3y \text{ четно}\}$. Построить R_1 , R_2 , $R=R_2 \circ R_1$, области определения и области значений всех трех отношений.

Занятие 3

- 1.32** Даны множества: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{6,7,8,9\}$, $C = \{10,11,12,13\}$; отношения: $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$: $R = \{(1,7), (4,6), (5,6), (2,8)\}$, $S = \{(6,10), (6,11), (7,10), (8,13)\}$. Определить: а) R^{-1} и S^{-1} ; б) $S \circ R$; в) $R^{-1} \circ S^{-1}$; г) $S^{-1} \circ S$ и $S \circ S^{-1}$.
- 1.33** Определить, являются ли указанные отношения на множестве \mathbb{N} рефлексивными, транзитивными, симметричными, антисимметричными?
а) $\{(m,n) \mid m \text{ и } n \text{ взаимно просты}\}$; б) $\{(m,n) \mid m \text{ делится на } n\}$;
в) $\{(m,n) \mid m - n = 3\}$; г) $\{(m,n) \mid (m + 2 \cdot n) \text{ кратно } 3\}$.
- 1.34** Определить на множестве $\{a,b,c\}$ отношение:
а) эквивалентности; б) частичного порядка;
в) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;
г) рефлексивное, транзитивное, не симметричное;
д) симметричное, транзитивное, не рефлексивное.
- 1.35** Отношение $R \subseteq A^2$, $A=\{a,b,c\}$. Определить, является ли отношение рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным, используя свойства матриц бинарного отношения.
а) $R=\{(a,a), (b,b), (c,c)\}$; б) $R=\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (b,c)\}$;
в) $R=\{(a,a), (a,b), (c,c), (c,b)\}$; г) $R=\{(a,b), (b,c), (a,c), (b,a), (c,b), (c,a)\}$;
- 1.36** Является ли каждое из приведенных ниже отношений $R \subseteq A^2$ отношением эквивалентности? Если да – построить классы эквивалентности:
а) $A=\mathcal{P}(M)$, если $M=\{a,b,c,d\}$, sRt , если s и t имеют одинаковую мощность;
б) $A=\mathbb{Z}$, $R=\{(a,b) \mid a+b=0\}$; в) $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, aRb , если $a+b > 0$;
г) $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, aRb , если $a+b$ четное;
д) $A=\mathbb{Z}$, $R=\{(a,b) \mid \exists k \in \mathbb{Z} \mid a-b=5k\}$;
е) $A=\{\text{мн-во прямых на плоскости}\}$, nRm , если прямые n и m пересекаются;
ж) $A=\{\text{мн-во прямых на плоскости}\}$, nRm , если прямые n и m параллельны.
- 1.37** Пусть $C = \{1,2,3\}$ и X – булево множество C с заданным на нем отношением частичного порядка \subseteq . Определить: (если возможно) а) точную верхнюю грань для подмножества $X \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$;
б) подмножество X , для которого точной верхней гранью является $\{1,3\}$;
в) точную нижнюю грань для X и подмножеств из а) и б).
- 1.38** Пусть X – множество с заданным на нем отношением частичного порядка \subseteq . Определить максимальные и минимальные элементы; точные верхнюю и нижнюю грани (если возможно):
а) $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$;
б) $X = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Глава 1 Теория множеств

- 1.39** Пусть $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Найти область определения и область значений следующих функций:
 а) $f(x)=x^2+4$; б) $f(x)=\sqrt{x-2}$; в) $f(x)=1/\sqrt{x-2}$; г) $f(x)=1/(x^2+4)$.
- 1.40** На множестве $\{0,1,2,3,4,5\}$ задать функцию:
 а) не инъективную; б) биективную.
- 1.41** Для функций f и g , заданных на множестве действительных чисел, найти $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:
 а) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x + 3$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $g(x) = x^2 + 3$;
 в) $f(x) = 1/x$; $g(x) = 2 \cdot x + 3$;
- 1.42** Выяснить, какие из следующих функций, у которых область определения и область значений совпадает с действительной числовой осью, являются инъективными, сюръективными, имеют обратную функцию:
 а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = x^2 + 4$; в) $f(x) = x^3 + 6$; г) $f(x) = x + |x|$; д) $f(x) = x(x-2)(x+2)$.
- 1.43** На множестве \mathbf{N} задать функцию: а) не инъективную; б) инъективную, но не сюръективную; в) сюръективную, но не биективную; г) биективную.
- 1.44** Используя принцип математической индукции, доказать:
- а) неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ и $a > -1$, $a \in \mathbf{R}$;
- б) $\forall n \in \mathbf{Z}, n > 0 \quad n^3 - n$ делится на три;
- в) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$;
- г) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;
- д) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$; е) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$.