Алгоритмы и анализ сложности
Конспекты по предмету(Графы)

Милов Данила

Оглавление

Глава 1

1.1 Потоки в сетях

Определение 1.1.1: Сеть

Пятёрка $N = (V, E, s, t, c)$, где:
(V, E) — ориентированный граф
$s \in V$ — источник, вершина, в которую не входят рёбра
$t \in V$ — сток, вершина, из которой не выходят рёбра
$c : E \longrightarrow R_+$ — прорускные способности рёбер.

Определение 1.1.2: Поток в сети f

Отображение f: E⟶R такое, что:

1. $0 \leqslant f(e) \leqslant c(e)$ для всех $e \in E$;
2. $\sum\{f(u,v) : (u,v) \in E\} = \sum\{f(v,u) : (v,u) \in E\}$ для $v \notin \{s,t\}$

(2) — закон Кирхгофа: величина потока f: $val(f) = \sum\limits_{(s,v)\in E} f(s,v)$

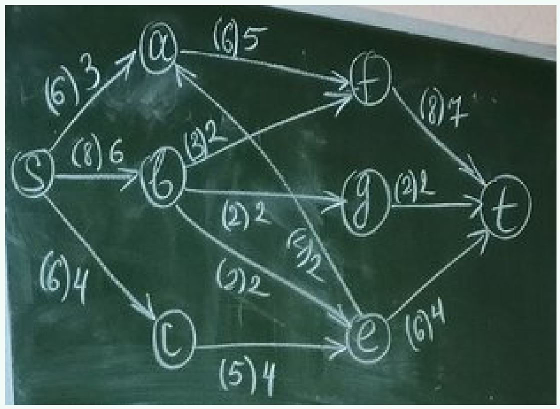
Определение 1.1.3: Максимальный поток

Поток с наибольшей величиной.

Пример 1.1.1 (Пример графа потоков в сетях)

Обозначения:

- число в скобках — пропускная способность,
- число без скобок — величина потока по ребру(поток по ребру).



$val(f) = 3 + 6 + 4 = 13$ — не максимальный поток.

Определение 1.1.4: Разрез в сети $N = (V, E, s, t, c)$

Множество $A \subseteq V$ такое, что $s \in A, t \notin A$.
Любое множество вершин, содержащее источник, но не содержащее сток.

Определение 1.1.5: P(A)

$A \subseteq V$(Не обязательно разрез)
$\mathrm{P(A)} = \{(u, v) : u \in A, v \in V \setminus A\}$ — все рёбра, выходящие из множества А наружу.

Определение 1.1.6: Пропускная способность разреза А

$$c(A, V \setminus A) = \sum_{(u,v) \in P(A)} c(u, v)$$

Определение 1.1.7: Минимальный разрез

Разрез с минимальной пропускной способностью.

Определение 1.1.8: Поток через разрез A

$$f(A, V\backslash A) = \sum_{(u,v)\in P(A)} f(u,v)$$

Пример 1.1.2

$A = \{s, a, b\}$
$P(A) = \{(a, f), (b, e), (b, f), (b, g), (s, c)\}$
$P(V/A) = \{(e, a)\}$
$c(A, V\backslash A) = 6 + 2 + 3 + 2 + 6 = 19$
$f(A, V\backslash A) = 5 + 2 + 2 + 2 + 4 = 15$
$f(V\backslash A, A) = 2$
$f(A, V\backslash A) - f(V\backslash A, A) = 15 - 2 = 13$

Пример 1.1.3

$B = \{s, e, f\}$
$P(B) = \{(s, a), (s, b), (s, c), (e, a), (e, t), (f, t)\}$
$P(V/B) = \{(b, e), (c, e), (a, f), (b, f)\}$
$c(B, V\backslash B) = 6 + 8 + 6 + 4 + 6 + 8 = 38$
$f(B, V\backslash B) = 3 + 6 + 4 + 2 + 4 + 7 = 26$
$f(V\backslash B, B) = 2 + 4 + 5 + 2 = 13$
$f(B, V\backslash B) - f(V\backslash B, B) = 26 - 13 = 13$

Предложение 1.1.1

Если $(u, v) \notin E$, то $c(u, v) = 0, f(u, v) = 0$

Лемма 1.1.1

$val(f) = f(A, V\backslash A) - f(V\backslash A, A)$ для любого потока или разреза A.

Доказательство: $\displaystyle\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{v\in V} f(v,u) = \begin{cases} val(f), \text{ если } u = s, \\ 0, \text{ если } u = s, \end{cases}$

$$\sum_{u\in A}\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in A}\sum_{v\in V} f(v,u) = val(f)$$

$u \in A, v \in A$ — слагаемые взаимно уничтожаются.
Тогда:

$$\sum_{u\in A}\sum_{v\in V\backslash A} f(u,v) - \sum_{u\in A}\sum_{v\in V\backslash A} f(v,u) = val(f)$$

$f(A, V\backslash A) - f(V\backslash A, A) = val(f)$ 😄

Следствие 1.1.1

$$val(f) = \sum_{v \in V} f(v, t)$$

Теорема 1.1.1 Форд, Фалкерсон

Величина любого потока в сети не превосходит пропускной способности минимального разреза.

Доказательство: A — разрез$(s \in A, t \notin A)$

$$val(f) = f(A, V\backslash A) - f(V\backslash A, A) \leqslant f(A, V\backslash A) = \sum_{e \in P(A)} f(e) \leqslant \sum_{e \in P(A)} c(e) = c(A, V\backslash A)$$ 😄

Определение 1.1.9: Увеличивающий путь относительно потока f из s в v

Последовательность вершин $(v_1, \ldots, v_n)$ такая, что:

1. $v_0 = s, v_n = v$
2. $(v_i, v_{i+1}) \in E$ или $(v_{i+1}, v_i) \in E$
3. если $(v_i, v_{i+1}) \in E$, то $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$
4. если $(v_{i+1}, v_i) \in E$, то $f(v_{i+1}, v_i) > 0$

Ребро e насыщенное, если $f(e) = c(e)$.
Ребро e непустое, если $f(e) > 0$.

Пример 1.1.4 (Примеры увеличивающих путей)

В графе из примера 1 увеличивающими являются пути:

$s \xrightarrow{(6)3} a \xrightarrow{(6)5} f \xrightarrow{(8)7} t$,

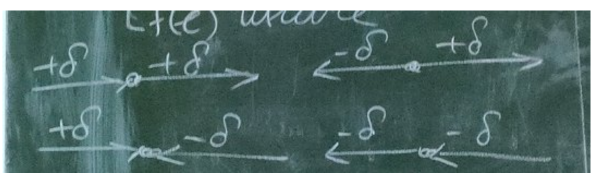
$s \xrightarrow{(6)3} a \xleftarrow{(4)2} e \xrightarrow{(6)4} t$.

В то время как путь $s \xrightarrow{(8)6} b \xrightarrow{(2)2} g \xrightarrow{(2)2} t$ увеличивающим не является.

Теорема 1.1.2
Следующие условия эквивалентны:

1. поток f максимальный
2. не существует увеличивающего пути относительно f
3. для некоторого разреза $A val(f) = c(A, V\backslash A)$.

Доказательство: 1)⇒2) От противного.
$(s = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = t)$ — увеличивающий путь.
$e_i = (v_i, v_{i+1})$
$$\Delta(e_i) = \begin{cases} c(e_i) - f(e_i), & \text{если } e_i \text{ — прямое ребро} \\ f(e_i), & \text{если } e_i \text{ — обратное ребро} \end{cases}$$
$\Delta(e_i) > 0$
$\delta = min\{\Delta(e_i) : 0 \leqslant i \leqslant k-1\}$
$\delta > 0$
f' — новый поток
$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \delta, & \text{если е — прямое ребро} \\ f(e) - \delta, & \text{если е — обратное ребро} \\ f(e), \text{иначе} \end{cases}$$



$val(f') = val(f) + \delta$
f — не максимальный. Противоречие.
2)⇒3)
$A = \{v \in V :$ существует увеличивающий путь из s в $v\}$
A — разрез, так как $t \notin A$(по условию)
(u, v) — прямое ребро $\Rightarrow f(u, v) = c(u, v)$
(u, v) — обратное ребро $\Rightarrow f(u, v) = 0$
Иначе можно продлить увеличивающий путь
$$var(f) = f(A, V\backslash A) - f(V\backslash A, A) = \sum_{e \in P(A)} f(e) - \sum_{e \in P(V\backslash A)} f(e) =$$
$$= \sum_{e \in P(A)} c(e) = c(A, V\backslash A)$$

3)$\Rightarrow$1) По теореме 1.

Теорема 1.1.3 Форд, Фалкерсон

Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

Доказательство: A — минимальный разрез
f — максимальный поток
$val(f) \leqslant c(A, V \backslash A)$ — по теореме 1
Если $val(f) < c(A, V \backslash A)$, то f не максимальный по теоремме 2.
Следовательно, $val(f) = c(A, V \backslash A)$

Предложение 1.1.2 Структуры данных в алгоритме Форда-Фолкенсона

- $L(v)$ — предшественник v в увеличивающем пути.
- $\delta(v)$ — величина дополнительного потока из s в v.
- Q — очередь вершин.
- Вершины пронумерованы числами 1,2,...

Algorithm 1 ПРОСМОТРЕТЬ

Ввод: v
Вывод: ничего

<u>**для всех**</u> $(v, u) \in E$
    <u>**если**</u> $L(u) = 0$ и $f(v, u) < c(v, u)$ <u>**то**</u>{
        $L(u) = v$;
        $\delta(u) = min\{\delta(v), c(v, u) - f(v, u)\}$;
        ДОБАВИТЬ(Q, u);
    }
}
<u>**для всех**</u> $(v, u) \in E$
    <u>**если**</u> $L(u) = 0$ и $f(u, v) > 0$ <u>**то**</u>{
        $L(u) = -v$;
        $\delta(u) = min\{\delta(u), f(u, v)\}$;
        ДОБАВИТЬ(Q, u);
    }
}

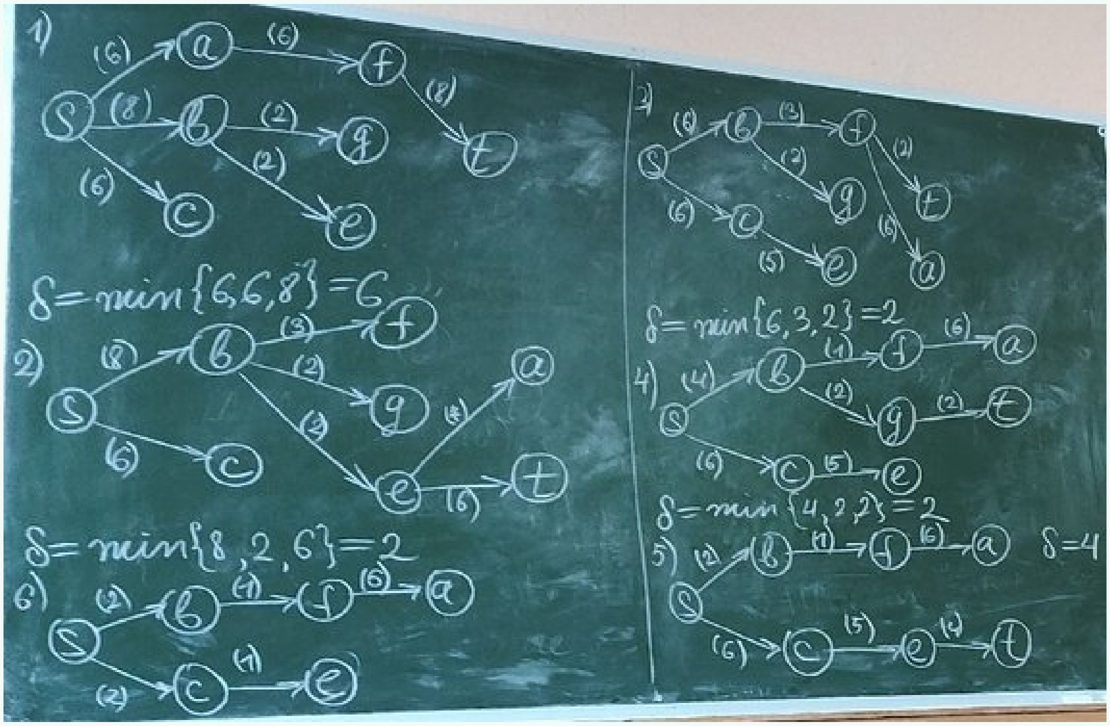
Algorithm 2 Форда-Фолкерсона

Ввод: сеть $N = (V, E, s, t, c)$

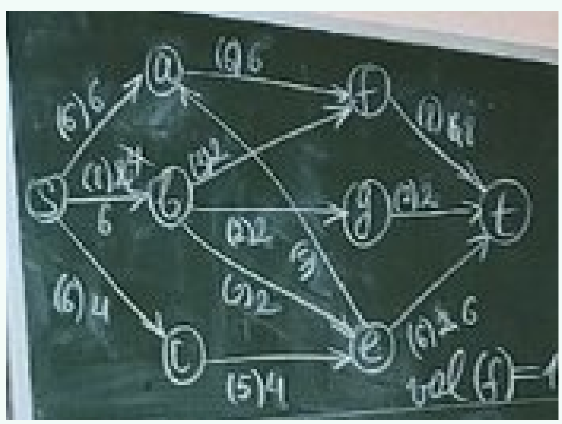
Вывод: максимальный поток f в N

```
готово = "нет"
для всех e ∈ E
    f(e) = 0;
}
пока готово = "нет" {
    для всех v ∈ V\{s}
        L(v) = 0; δ(v) = 0;
    }
    L(s) = s; δ(s) = ∞;
    Добавить(Q,s);
    пока Q ≠ ∅ {
        v =НАЧАЛО(Q);
        УДАЛИТЬ(Q, v);
        ПРОСМОТРЕТЬ(v);
    }
    если L(t) ≠ 0 то{
        v = t;
        пока v ≠ s {
            u = L(v);
            если u > 0 то{
                f(u, v) = f(u, v) + δ(t);
            то
                f(v, u) = f(v, u) − δ(t);
            }
            v = |u|
        }
    то
        готово = "да";
    }
}
```

Пример 1.1.5 (Пример применения алгоритма Форда-Фолкерсона)
Применить алгоритм к сети из примера 1.
Шаги алгоритма:

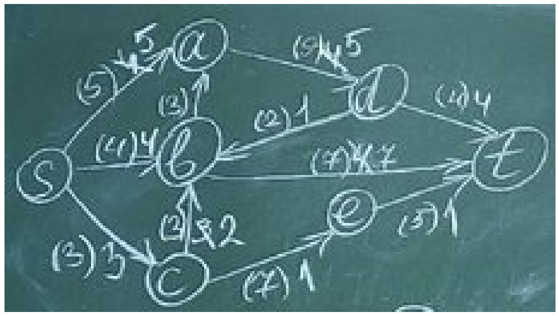


Итоговый граф потоков:



Вопрос 1: Применить алгоритм Форда-Фолкерсона

Исходный граф(после зачёркиваний новые значения, получаемые на шагах алгоритма):



Шаги алгоритма: