有关多少的思考

检查更新 25-08-02

这篇文章启发自以下的一个思考.

思考 1

完全平方数和素数，谁更"多"?

常规来看，完全平方数和素数都是自然数的子集，那么自然地，我们需要对比这两个集的势，也就是说，通过建立一一对应的方式来比较集合的大小.

但是，为什么构造一一对应映射是一个**合理的**操作呢? 更进一步地，讨论势时，我们**具体**在讨论什么?

第一个问题可以举出这样的例子:

例 1（自然数和整数一样"多"）

我们已知能通过自然数对 (a, b) 给出一个 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ 的映射，这告诉我们能把自然数和整数对应起来，或者，更直接地，给出如下映射:

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 &
\end{array}
$$

这可以形式性地写成:

$$
a_n = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & n\ is\ even \\ \frac{n+1}{2}, & n\ is\ odd \end{cases}
$$

或

$$
a_n = a_{n-1} + (-1)^{n-1}n,\ n\in\mathbb{N}
$$

很明显这是一个自然数到整数的一一对应. 这也就是说，任给一个自然数，我们都能找到一个唯一的整数与之对应，所以整数和自然数是一样多的.

♣

例 1告诉我们通过构造一一对应的映射来确定集合的大小是合理的.

第二个问题稍微有些棘手，我们举下面的这一个例子来说明:

☰ 例 2 (实数比自然数"多")

已知这样的说法是不行的: 任给第 n 个自然数，可以找到 $(0,1)$ 中的"第 n 个元素"与之对应，也即 $(0,1)$ 和 $\mathbb{N}$ 建立不起来一个一一映射. 这个论断可以用 Cantor 对角法证明，在这里不多赘述.

有没有更根本一点的原因? 我想可以这样解释:

因为 $(0,1)\subset\mathbb{R}$，而回忆我们为了绕过 Russell 悖论所采取的对集合论的巧妙修改: 我们不说 $\{x : x\text{满足某种性质}\}$ 是一个集合，而说 $\{x\in X : \text{满足某种性质}\}$ 是一个集合，其中 X 是一个已有的集合. 这样，通过限制 x 属于的集合的性质，我们构造了"性质更好"的集合. 那么，$(0,1)$ 可以写成 $\{x\in\mathbb{R} : x\in(0,1)\}$，即我们讨论 $(0,1)$ 中数的性质时，首先讨论的是其作为实数的性质. 既然实数集在通常意义上不是良序集，且自然数集是良序集，那么建立起这两个集合之间的一一对应映射就根本无从谈起.

♣

所以，例 2 告诉我们在讨论"势"的时候，实际上我们在讨论集合**背后的**集合的性质.

实际上还可以举出一个诡异的谬误，对于 Dirichlet 函数，去找它的"第一个间断点"，"第二个间断点"... 最后得出结论间断点至多可数，所以它们在做Riemann 积分时可去，所以 Dirichlet 函数 Riemann 可积! 而这当然是不可能的. 因为 Dirichlet 函数在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续，每个间断点都是一个实数，上述讨论当然不成立.

综上，我们可以构造一一映射对比两个集合的"大小"，而且，既然完全平方数构成的集合和素数构成的集合是自然数集的子集，它们的性质应当是类似的，这保证了对比的"可行性".

很明显，可以给出如下映射:

$$a_n = n^2,\quad n\in\mathbb{N}$$

作为自然数到完全平方数的一一映射，说明自然数和完全平方数等势.

同时，根据 Wilson 定理，可以给出这样一个Willans公式(Willans 1964; Havil 2003, pp. 168-169):

$$p_n = 1+\sum_{i=1}^{2^n}\left\lfloor\left(\frac{n}{\sum_{j=1}^{i}\left\lfloor\cos^2\left(\pi\frac{(j-1)!+1}{j}\right)\right\rfloor}\right)^{\frac{1}{n}}\right\rfloor,\quad n\in\mathbb{N}$$

虽然非常复杂，但是它确实给出来了一个 $\mathbb{N}\to\mathbb{P}$ 的一一映射，其中 $\mathbb{P}$ 是素数集.

既然完全平方数和素数都和自然数等势，所以它们相互等势，所以它们是一样"多"的.

问题似乎到这里就结束了，但所谓"温故而知新"，还有没有什么方法可以证明这个论断? 答案自然是有，取它们的倒数再来求和.

但到了这里我们又要问了，为什么取倒数再求和可以证明一个集合的大小?

大概可以这样理解:
设存在一个集合 A= $\{x \in X : x = a_n, n \in \mathbb{N}_+\}$，对它其中的元素取倒数求和，记做 s，我们有

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

如果能通过一定的分析，得到

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^p} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

那么通过级数的 p-判别法和比较判别法，我们就能得到 s 是否收敛.
回忆 p-判别法的收敛条件，当且仅 $p > 1$ 时 p-级数收敛.这在暗示我们:**如果一个这样的级数收敛，那么它的通项公式 a_n 至少为O(n^p)**，其中 $p > 1$. 这是什么意思呢? 把它对应到数轴上来，也就是说这个级数的通项公式在数轴上"插值"时间隔至少为 Δn^p，更进一步地，它在数轴上的"稀疏程度"可以用 Δn^p 来刻画，其中 Δ 代表差分.

著名的 Basel 问题告诉我们

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

而调和级数却有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

表明 n^2 的稀疏程度是少于 n 的，这符合我们的直观.

但是，考虑所有素数的倒数和时，我们有

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right) &= \ln\left(\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-1}}\right) = \sum_{p}\ln\left(\frac{1}{1-p^{-1}}\right) = \sum_{p}-\ln(1-p^{-1}) \\
&= \sum_{p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}+\dots\right) = \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+\sum_{p}\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{4p^2}+..\right. \\
&< \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+\sum_{p}\frac{1}{p^2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots\right) = \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+\left(\sum_{p}\frac{1}{p(p-1)}\right) \\
&= \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+C
\end{aligned}
$$

其中 $p \in \mathbb{P}$. 当 n 逐渐增大时，上式左边趋于无穷大，所以素数的倒数和发散.
这告诉我们，素数在数轴上的疏密程度，实际上，是比完全平方数"更密"的，也就是说，素数比完全平方数更"多".