积性完美数

检查更新 25-08-02

#初等数论 #解析数论 #组合数学

完美数(又称**完全数**),即一个数等于其所有真因子之和的数,对我们来说是不陌生的.例如众所周知的例子 $6=1+2+3$.在本文中,我们将此类经典定义的完美数称为**一般完美数**,并且在不引起歧义时仍简称为**完美数**.

1. 一般完美数

定义 1.1 (完美数).

完美数是满足 $\sigma(n)=2n$ 的正整数, 其中$\sigma(n)$是约数和函数.

有关完美数的研究是久远而丰富的,最早可以追溯到公元前六世纪的Pythagoras时代.而Pythagoras,作为一个众所周知的数字神秘主义者,也因此给了完美数以完美的名字.(尽管6在后世和666这个象征"恶魔"的数字脱不了干系,但是那是后话.)
有关完美数更详尽的知识,参见完全数-数学百科.

2. 积性完美数

积性完美数的性质

然而,仍然举6的例子,我们很容易就能发现不仅$6=1+2+3$,还有$6=1\times2\times3$.同时,如果再仔细看看其他数,就能发现还有$8=1\times2\times4$,等等.这也就是在说,不仅存在真因子之和为自身的数,还存在真因子之积为自身的数.对于这样的数,我们暂且称其为**积性完美数**.

定义 2.1 (积性完美数).

如果一个数的所有真因子之积为自身,那么我们就称其为**积性完美数**.

例如$6=1\times2\times3, 8=1\times2\times4, 10=1\times2\times5$等等都是积性完美数的例子.

一个很自然的想法,这样的积性完美数有什么性质?如果抛去因子里1这样不影响乘积结果的数,那么可以发现举例的积性完美数都可以写为两个数之积.更进一步地,如果

我们用因子的**个数**来统计,这是不是说一个数是积性完美数当且仅当它因子个数为4呢?

问题 2.2 (积性完美数的因子为4).

一个数是否是积性完美数当且仅当它因子个数为4?

我们做点准备工作,然后试着来证明它.首先,我们定义**因子个数函数**.

定义 2.3 (因子个数函数).

对于任意自然数n,记它的正约数的数目为$d(n)$,我们就称$d(n)$为**因子个数函数**,简称为**因子个数**.

由**算术基本定理**,任何一个大于1的整数n都可以被唯一分解为质数的乘积,形式如:

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \times \cdots \times p_k^{a_k},$$

其中$p_i, i = 1, 2, \cdots, k$为素数,$a_i, i = 1, 2, \cdots, k$为正整数.
那么基于上式分解,有n的任何一个因子m都具有以下形式:

$$m = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times p_3^{b_3} \times \cdots \times p_k^{b_k},$$

其中,每个指数b_i满足$0 \leq b_i \leq a_i$.更进一步地,对于p_i,指数b_i有$a_i + 1$种选择$(0, 1, \cdots, a_i)$.
那么根据乘法原理,n的总的因子个数就是这些选择的乘积.即我们有:

$$d(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1).$$

更完整的因子个数函数的详情,参见除数函数的Wiki页面.

一个有意思的推论是,一个整数n的因子个数$d(n)$是奇数,当且仅当n是一个完全平方数.

推论 2.4

一个整数n的因子个数$d(n)$是奇数,当且仅当n是一个完全平方数.

证:
证明很简单,只需要注意到$d(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1)$是奇数当且仅

当$a_i+1, i=1,2,\cdots,k$都是奇数,也就说明a_i都是偶数,也就说明n是完全平方数.□

推论2.4等价于:如果n不是完全平方数,那么$d(n)$是偶数.那么,此时我们就可以把n的因子完美地两两配对为$d(n)/2$组.因为如果k是n的一个因子,那么n/k也必然是n的一个因子,并且$k\times(n/k)=n$.受此启发,我们有这样的一个推论:整数n的因子之积为$n^{\frac{d(n)}{2}}$.

推论 2.5

任何大于1的整数n,设其所有正因子组成的集合为D,因子个数为$d(n)$,那么D中所有元素的乘积$P(n)$等于$n^{\frac{d(n)}{2}}$.

证:
设n的所有因子为$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{d(n)}$,则有$P(n)=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{d(n)}$.
而因为若a_i是一个因子,那么n/a_i也是一个因子,故实际上集合$\{n/a_1,n/a_2,n/a_3,\cdots,n/a_{d(n)}\}$只是对原集合$D$的一个重排.
则我们可以把$P(n)$写为:

$$P(n)=\frac{n}{a_1}\times\frac{n}{a_2}\times\cdots\frac{n}{a_{d(n)}},$$

整理得:

$$P(n)^2=n^{d(n)},$$

因此:

$$P(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}\quad(\text{取正值根，因所有因子为正}).$$

□

准备工作做得差不多了,现在我们回到积性完美数上.我们接下来证明一个数是积性完美数当且仅当它因子个数为4.

定理 2.6 (积性完美数的因子个数).

一个整数$n>1$是积性完美数,当且仅当$d(n)=4$.

证:
设$P'(n)$为n的所有真因子的乘积,显然一个整数是积性完美数当且仅当$P'(n)=n$.我们的目标是证明对整数$n>1$,有$P(n)=P'(n)\times n\iff d(n)=4$.

必要性:
由定义,有$P'(n)=n$,故$P(n)=n^2$,则$P(n)=n^2=n^{\frac{d(n)}{2}}$.
又因为$n>1$,故$2=\frac{d(n)}{2}\Rightarrow d(n)=4$.必要性证毕.

充分性:
因为$d(n)=4$,故$P(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}=n^2$.又因为$P(n)=P'(n)\times n$,故$P'(n)=n$,充分性证毕.
□

既然我们知道了一个数是积性完美数是有4个因子的数,那么什么样的数有4个因子呢?
回到算术基本定理,我们有:

$$d(n)=(a_1+1)\times(a_2+1)\times\cdots\times(a_k+1),$$

要使这个乘积为4,只有两种可能:

1. $n=p^3$,其中p是质数.
2. $n=p\times q$,其中p,q是两个不同的素数.这种情况下,我们称n为**半素数**.

综上,我们完整地解决了积性完美数的分类问题.可见积性完美数与一般完美数相比是非常简单的,这是因为数论中加性的问题通常更复杂,参考整数的拆分.

积性完美数的类比与拓展

积性完美数是一类挺有意思的对象.既然我们已经找到了积性完美数的结构,我们就可以用它来做些文章,并且仿照构造它的过程进行类比.

积性完美数的密度

比如,我们知道完美数是非常少的,那么积性完美数呢?这个问题其实就归结到了p^3和半素数的密度问题.我们先定义**计数函数**,然后通过研究它们的**渐进密度**来回答它.

定义 2.7 (计数函数).

对集合$A\subseteq\mathbb{N}$,其**计数函数**定义为:$A(n)=\text{集合}A\text{中}\leq n\text{的元素个数}.$

定义 2.8 (渐进密度).

设 $A\subseteq\mathbb{N}$ 是自然数的子集.A的**渐进密度**定义为以下极限(若存在):

$$d(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{|A\cap\{1,2,\ldots,n\}|}{n}$$

其中$|A\cap\{1,2,\ldots,n\}|$ 表示 A 中不超过 n 的元素个数.
故渐进密度也等价为:

$$d(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$$

例如,对于偶数集$A=\{2n|n\in\mathbb{N}\}$,有$d(A)=0.5$成立.
考虑到完美数的稀有性,我们猜测积性完美数也是非常稀少的.接下来我们就证明积性完美数的渐进密度为0.

定理 2.9 (积性完美数的渐进密度为0).

证:
由于积性完美数的结构简单且有限,我们只需分两种情况讨论即可.
Case 1. 定义计数函数 $C(x)$ 为不超过 x 的立方素数的个数:

$$C(x)=\{n\leq x\mid n=p^3,p\text{ is prime}\}$$

一个数$n=p^3$不超过 x, 当且仅当 $p\leq x^{1/3}$.因此, $C(x)$ 就等于不超过 $x^{1/3}$ 的素数的个数. 我们用 $\pi(y)$ 表示不超过 y 的素数个数. 所以, 我们有:

$$C(x)=\pi(x^{1/3})$$

根据**素数定理**(当然,这个结论超出了本文范围,见[1]的Theorem 6),我们知道 $\pi(y)\sim\frac{y}{\ln(y)}$. 将 $y=x^{1/3}$ 代入, 可得:

$$C(x)\sim\frac{x^{1/3}}{\ln(x^{1/3})}=\frac{3x^{1/3}}{\ln(x)}$$

故对于立方素数, 其密度为:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{1/3}}{x\ln(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^{2/3}\ln(x)}=0$$

这表明立方素数在自然数中的密度为0, 它们是非常稀有的.

Case 2. 定义计数函数 $\pi_2(x)$ 为不超过 x 的半素数的个数:

$$\pi_2(x)=\{n\leq x\mid n=pq,p<q\text{ are primes}\}$$

对这个函数的研究要复杂得多, 其结果由Landau在20世纪初给出(见[2]的§56). 其精确的渐近形式是:

$$\pi_2(x) \sim \frac{x\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$$

同样,这个结论的推导也超出了本文的范围,见[1]中的Theorem 437.
那么,我们就可以计算半素数的渐近密度:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi_2(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln(\ln(x))}{x\ln(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0$$

这也表明半素数的密度同样为0.
而积性完美数是立方素数和半素数的并集.由于这两类数的密度都为0,因此积性完美数作为一个整体, 在自然数中的渐近密度也为0.
□

尽管两者的密度都为0, 但通过比较它们的计数函数 $C(x)$ 和 $\pi_2(x)$, 我们可以了解它们的增长速度. 当 x 很大时, $\frac{x\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$ 的增长速度远快于 $\frac{3x^{1/3}}{\ln(x)}$. 这意味着, 在所有积性完美数中, **绝大多数都是半素数**, 而立方素数则要稀有得多.

积性亲和数

完美数是加性的,加性数论的研究中有很多有意思的概念,比如说**亲和数**(或**友爱数**),它指的是一对数中彼此的全部真因子之和与另一方相等.

定义 2.10 (亲和数).

对于$n, m \in \mathbb{N}$,若$\sigma(m) - m = n, \sigma(n) - n = m$,那么我们就称数对$(n, m)$是一对亲和数,其中$\sigma(n)$是约数和函数.

最有名的亲和数对可能是$(220, 284)$,还是Pythagoras,他就曾经说过"朋友是你灵魂的倩影,要像220与284一样亲密."并且,这一对亲和数也在众多和爱情与数学有关的艺术创作中反复出现,比如电影*博士の愛した数式*(博士的爱情方程式).

我们仿照上述亲和数的概念,定义**积性亲和数**.

定义 2.11 (积性亲和数).

对于$n, m \in \mathbb{N}$,若$P'(n) = m, P'(m) = n$,那么我们就称数对(n, m)是一对**积性亲和数**,其中$P'(n)$是n的真因子之积.

下面我们来看看积性亲和数有什么性质.我们断言不存在$n \neq m$,使得$P'(n) = m, P'(m) = n$,并马上证明它.

定理 2.12 (不存在非平凡的积性亲和数).

对于$n, m \in \mathbb{N}$,若$P'(n) = m, P'(m) = n$,则$n = m$.

证:
根据上文的结论,可以得到$P'(n) = n^{\frac{d(n)-1}{2}}$.则对于积性亲和数我们就有:

$$\begin{cases} P'(n) = n^{\frac{d(n)}{2}-1} = m & (1) \\ P'(m) = m^{\frac{d(m)}{2}-1} = n & (2) \end{cases}$$

将(2)代入(1),得到:

$$(m^{\frac{d(m)}{2}-1})^{\frac{d(n)}{2}-1} = m^{(\frac{d(m)}{2}-1)(\frac{d(n)}{2}-1)} = m^1$$

这意味着:

$$(\frac{d(m)}{2} - 1)(\frac{d(n)}{2} - 1) = 1$$

由于$d(n)$是整数,故这个方程唯一的整数解是:

$$\frac{d(m)}{2} - 1 = 1 \text{ 且 } \frac{d(n)}{2} - 1 = 1$$

故有$d(m) = d(n) = 4$.但是如果$d(n) = 4$,那么我们就有

$$P'(m) = m^{\frac{4}{2}-1} = m \Rightarrow n = m$$

故**不存在非平凡的积性亲和数**.□
同理,也不存在更长的**积性"社交数"链**.其中"**社交数**"是指一个这样的自然数组(a, b, c),其满足a的真因子之和等于b,而b的真因子之和等于c,c的真因子之和等于a.

既是完美数又是积性完美数的数

我们最后证明一个有意思的小问题来结束这一节.我们已经知道不仅$6 = 1 + 2 + 3$,还有$6 = 1 \times 2 \times 3$.那么,6是唯一的这样的数吗?

问题 2.13 (既是完美数又是积性完美数的数)

存不存在除了6以外其他的既是完美数又是积性完美数的数?

我们断言这样的数只有6,并且接下来证明它.
证:
我们分$n = p^3$和$n = pq$的情况讨论,其中p, q是不同的素数.
Case 1. 若$n = p^3$,则$\sigma(n) = 1 + p + p^2 + p^3 = 2p^3$.整理得$p^3 - p^2 - p - 1 = 0$,而对于素数$p$,$p^3 - p^2 - p = p(p^2 - p - 1)$显然不等于1.
Case 2. 若$n = pq$,则$\sigma(n) = 1 + p + q + pq = 2pq$,整理得$(p-1)(q-1) = 2$.对于素数$p, q$,该方程的解仅为$p - 1 = 1, q - 1 = 2$(或反过来).故$p = 2, q = 3$.
综上所述,6是唯一一个既是完美数又是积性完美数的数.□

看来,6这个数字的确是非常美丽.难怪Pythagoras会说"6象征着完满的婚姻以及健康和美丽"呢!

3. 一个可能的推广: 积性k-完美数

虽然积性完美数自身很简单,不过我们还可以模仿“k-完美数”($\sigma(n) = kn$)来定义一个新概念.

定义 3.1 (积性k-完美数).

如果一个整数 $n > 1$ 的所有真因子之积$P'(n) = n^k$, 我们就称之为**积性k-完美数**.

仿照定理2.6的方式,我们可以得到一个非常优美的条件:

$$d(n) = 2(k+1) \iff P'(n) = n^k.$$

这个推广将一个简单概念变得更有系统性.下面是k比较小时的积性k-完美数的例子.

k值	d(n)	因子结构	例子
$k = 1$	4	p^3, $p \times q$	6, 8...
$k = 2$	6	p^5, $p^2 \times q$	12, 32...
$k = 3$	8	p^7, $p^3 \times q$,$p \times q \times r$	24, 30, 128...
$k = 4$	10	p^9, $p^4 \times q$	48...

k值	d(n)	因子结构	例子
$k=5$	12	p^{11}, $p^5 \times q$, $p^3 \times q^2$, $p^2 \times q \times r$	96...
...	...	...	...

定义积性k-完美数后最大的问题就落在其因子结构上.而这其实就等价于寻找整数$N=2(k+1)$的**无序乘法分拆**.具体来说,积性k-完美数n的所有可能结构,与$N=2(k+1)$的所有乘法分拆一一对应.

定义 3.2 (整数的乘法分拆).

对于一个大于 1 的整数 N, 我们将 N 表示为一组大于 1 的整数的乘积 (不考虑顺序),

$$N = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_m, \quad f_i > 1$$

称这样的一组数 $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ 为 N 的一个乘法分拆.

一个整数 N 的不同乘法分拆的个数, 通常用函数 $f(N)$ 表示.

结构与分拆的对应关系

如果一个数 n 的素数分解为 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$, 那么它的因子个数为:

$$d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_m+1)$$

令 $d(n) = N = 2(k+1)$, 并设 $f_i = a_i + 1$, 我们就得到了 N 的一个乘法分拆 $N = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_m$.

因此,**寻找所有积性k-完美数的素数结构,等价于寻找 $N=2(k+1)$ 的所有乘法分拆.**

示例 3.3 ($k=5$ 时$2(k+1)$的乘法分拆与积性k-完美数的因子结构).

当 $k=5$ 时, 我们需要研究 $N = 2(5+1) = 12$ 的所有乘法分拆.

1. **分拆为 1 个因子 ($m=1$):**
   - $12.$
   - 对应 $f_1 = 12$, 推出 $a_1 = f_1 - 1 = 11.$
   - 结构: p^{11} (如 2^{11}).
2. **分拆为 2 个因子 ($m=2$):**
   - $6 \times 2.$

- 对应 $\{f_1, f_2\} = \{6, 2\}$, 推出 $\{a_1, a_2\} = \{5, 1\}$.
- 结构: $p^5 q$ (如 $2^5 \cdot 3$).
- 4×3.
- 对应 $\{f_1, f_2\} = \{4, 3\}$, 推出 $\{a_1, a_2\} = \{3, 2\}$.
- 结构: $p^3 q^2$ (如 $2^3 \cdot 3^2$).

3. **分拆为 3 个因子 ($m = 3$):**
   - $3 \times 2 \times 2$.
   - 对应 $\{f_1, f_2, f_3\} = \{3, 2, 2\}$, 推出 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 1, 1\}$.
   - 结构: $p^2 qr$ (如 $2^2 \cdot 3 \cdot 5$).

因为 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 > 12$, 所以不可能分拆为 4 个或更多因子.

综上, 对于 $k = 5$, 积性5-完美数共有 4 种不同的素数结构: p^{11}, $p^5 q$, $p^3 q^2$ 和 $p^2 qr$.
♣

言而总之,对于任意给定的 k, 我们都可以通过以下步骤确定所有 k-积性完美数的结构:

1. 计算目标因子数 $N = 2(k+1)$.
2. 找出整数 N 的所有无序乘法分拆 $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. 这一步是问题的组合核心.
3. 每一个乘法分拆 $\{f_1, \ldots, f_m\}$ 都对应一类 k-积性完美数的结构, 其素数指数集为 $\{f_1 - 1, \ldots, f_m - 1\}$.

综上,我们便从一个简单的概念牵引出了更多的有意思的概念.不过正如Descartes曾预言的那样:"能找出完全数是不会多的,好比人类一样,要找一个完美人亦非易事."这篇文章也不能被称为完美.在不久的将来或许还有可以补充的地方.

参考文献

1. Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press. (Original work published 1938)
2. Landau, E. (1909). *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. B. G. Teubner.