

#初等数论

#解析数论

#组合数学

完美数(又称**完全数**),即一个数等于其所有真因子之和的数,对我们来说是不陌生的.例如众所周知的例子 $6 = 1 + 2 + 3$.在本文中,我们将此类经典定义的完美数称为**一般完美数**,并且在不引起歧义时仍简称为**完美数**.

1. 一般完美数

✍ 定义 1.1 (完美数).

完美数是满足 $\sigma(n) = 2n$ 的正整数, 其中 $\sigma(n)$ 是约数和函数.

有关完美数的研究是久远而丰富的,最早可以追溯到公元前六世纪的Pythagoras时代.而Pythagoras,作为一个众所周知的数字神秘主义者,也因此给了完美数以完美的名字.(尽管6在后世和666这个象征"恶魔"的数字脱不了干系,但是那是后话.)有关完美数更详尽的知识,参见[完全数-数学百科](#).

2. 积性完美数

积性完美数的性质

然而,仍然举6的例子,我们很容易就能发现不仅 $6 = 1 + 2 + 3$, 还有 $6 = 1 \times 2 \times 3$. 同时,如果再仔细看看其他数,就能发现还有 $8 = 1 \times 2 \times 4$, 等等.这也就是说,不仅存在真因子之和为自身的数,还存在真因子之积为自身的数.对于这样的数,我们暂且称其为**积性完美数**.

✍ 定义 2.1 (积性完美数).

如果一个数的所有真因子之积为自身,那么我们就称其为**积性完美数**.

例如 $6 = 1 \times 2 \times 3$, $8 = 1 \times 2 \times 4$, $10 = 1 \times 2 \times 5$ 等等都是积性完美数的例子.

一个很自然的想法,这样的积性完美数有什么性质?如果抛去因子里1这样不影响乘积结果的数,那么可以发现举例的积性完美数都可以写为两个数之积.更进一步地,如果

我们用因子的**个数**来统计,这是不是说一个数是积性完美数当且仅当它因子个数为4呢?

② 问题 2.2 (积性完美数的因子为4).

一个数是否是积性完美数当且仅当它因子个数为4?

我们做点准备工作,然后试着来证明它.首先,我们定义**因子个数函数**.

🔪 定义 2.3 (因子个数函数).

对于任意自然数 n ,记它的正约数的数目为 $d(n)$,我们就称 $d(n)$ 为**因子个数函数**,简称为**因子个数**.

由**算术基本定理**,任何一个大于1的整数 n 都可以被唯一分解为质数的乘积,形式如:

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \times \cdots \times p_k^{a_k},$$

其中 $p_i, i = 1, 2, \dots, k$ 为素数, $a_i, i = 1, 2, \dots, k$ 为正整数.

那么基于上式分解,有 n 的任何一个因子 m 都具有以下形式:

$$m = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times p_3^{b_3} \times \cdots \times p_k^{b_k},$$

其中,每个指数 b_i 满足 $0 \leq b_i \leq a_i$.更进一步地,对于 p_i ,指数 b_i 有 $a_i + 1$ 种选择 $(0, 1, \dots, a_i)$.

那么根据乘法原理, n 的总的因子个数就是这些选择的乘积.即我们有:

$$d(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1).$$

更完整的因子个数函数的详情,参见[除数函数的Wiki页面](#).

一个有意思的推论是,一个整数 n 的因子个数 $d(n)$ 是奇数,当且仅当 n 是一个完全平方数.

🔪 推论 2.4

一个整数 n 的因子个数 $d(n)$ 是奇数,当且仅当 n 是一个完全平方数.

证:

证明很简单,只需要注意到 $d(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1)$ 是奇数当且仅

当 $a_i + 1, i = 1, 2, \dots, k$ 都是奇数,也就说明 a_i 都是偶数,也就说明 n 是完全平方数.□

推论2.4等价于:如果 n 不是完全平方数,那么 $d(n)$ 是偶数.那么,此时我们就可以把 n 的因子完美地两两配对为 $d(n)/2$ 组.因为如果 k 是 n 的一个因子,那么 n/k 也必然是 n 的一个因子,并且 $k \times (n/k) = n$.受此启发,我们有这样的一个推论:整数 n 的因子之积为 $n^{\frac{d(n)}{2}}$.

推论 2.5

任何大于1的整数 n ,设其所有正因子组成的集合为 D ,因子个数为 $d(n)$,那么 D 中所有元素的乘积 $P(n)$ 等于 $n^{\frac{d(n)}{2}}$.

证:

设 n 的所有因子为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{d(n)}$,则有 $P(n) = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{d(n)}$.

而因为若 a_i 是一个因子,那么 n/a_i 也是一个因子,故实际上集合

$\{n/a_1, n/a_2, n/a_3, \dots, n/a_{d(n)}\}$ 只是对原集合 D 的一个重排.

则我们可以把 $P(n)$ 写为:

$$P(n) = \frac{n}{a_1} \times \frac{n}{a_2} \times \dots \times \frac{n}{a_{d(n)}},$$

整理得:

$$P(n)^2 = n^{d(n)},$$

因此:

$$P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} \quad (\text{取正值根, 因所有因子为正}).$$

□

准备工作做得差不多了,现在我们回到积性完美数上.我们接下来证明一个数是积性完美数当且仅当它因子个数为4.

定理 2.6 (积性完美数的因子个数).

一个整数 $n > 1$ 是积性完美数,当且仅当 $d(n) = 4$.

证:

设 $P'(n)$ 为 n 的所有真因子的乘积,显然一个整数是积性完美数当且仅当 $P'(n) = n$.我们的目标是证明对整数 $n > 1$,有 $P(n) = P'(n) \times n \iff d(n) = 4$.

必要性:

由定义,有 $P'(n) = n$,故 $P(n) = n^2$,则 $P(n) = n^2 = n^{\frac{d(n)}{2}}$.

又因为 $n > 1$,故 $2 = \frac{d(n)}{2} \Rightarrow d(n) = 4$.必要性证毕.

充分性:

因为 $d(n) = 4$,故 $P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}} = n^2$.又因为 $P(n) = P'(n) \times n$,故 $P'(n) = n$,充分性证毕.

□

既然我们知道了一个数是积性完美数是有4个因子的数,那么什么样的数有4个因子呢?

回到算术基本定理,我们有:

$$d(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1),$$

要使这个乘积为4,只有两种可能:

1. $n = p^3$,其中 p 是质数.
2. $n = p \times q$,其中 p, q 是两个不同的素数.这种情况下,我们称 n 为**半素数**.

综上,我们完整地解决了积性完美数的分类问题.可见积性完美数与一般完美数相比是非常简单的,这是因为数论中加性的问题通常更复杂,参考整数的拆分.

积性完美数的类比与拓展

积性完美数是一类挺有意思的对象.既然我们已经找到了积性完美数的结构,我们就可以用它来做些文章,并且仿照构造它的过程进行类比.

积性完美数的密度

比如,我们知道完美数是非常少的,那么积性完美数呢?这个问题其实就归结到了 p^3 和半素数的密度问题.我们先定义**计数函数**,然后通过研究它们的**渐进密度**来回答它.

定义 2.7 (计数函数).

对集合 $A \subseteq \mathbb{N}$,其**计数函数**定义为: $A(n) =$ 集合 A 中 $\leq n$ 的元素个数.

定义 2.8 (渐进密度).

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是自然数的子集. A 的**渐进密度**定义为以下极限(若存在):

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n}$$

其中 $|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|$ 表示 A 中不超过 n 的元素个数.
故渐进密度也等价为:

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$$

例如,对于偶数集 $A = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$,有 $d(A) = 0.5$ 成立.

考虑到完美数的稀有性,我们猜测积性完美数也是非常稀少的.接下来我们就证明积性完美数的渐进密度为0.

定理 2.9 (积性完美数的渐进密度为0).

证:

由于积性完美数的结构简单且有限,我们只需分两种情况讨论即可.

Case 1. 定义计数函数 $C(x)$ 为不超过 x 的立方素数的个数:

$$C(x) = \{n \leq x \mid n = p^3, p \text{ is prime}\}$$

一个数 $n = p^3$ 不超过 x , 当且仅当 $p \leq x^{1/3}$.因此, $C(x)$ 就等于不超过 $x^{1/3}$ 的素数的个数. 我们用 $\pi(y)$ 表示不超过 y 的素数个数. 所以, 我们有:

$$C(x) = \pi(x^{1/3})$$

根据**素数定理**(当然,这个结论超出了本文范围,见^[1]的Theorem 6),我们知道 $\pi(y) \sim \frac{y}{\ln(y)}$. 将 $y = x^{1/3}$ 代入, 可得:

$$C(x) \sim \frac{x^{1/3}}{\ln(x^{1/3})} = \frac{3x^{1/3}}{\ln(x)}$$

故对于立方素数, 其密度为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{1/3}}{x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^{2/3} \ln(x)} = 0$$

这表明立方素数在自然数中的密度为0, 它们是非常稀有的.

Case 2. 定义计数函数 $\pi_2(x)$ 为不超过 x 的半素数的个数:

$$\pi_2(x) = \{n \leq x \mid n = pq, p < q \text{ are primes}\}$$

对这个函数的研究要复杂得多, 其结果由Landau在20世纪初给出(见^[2]的§56). 其精确的渐近形式是:

$$\pi_2(x) \sim \frac{x \ln(\ln(x))}{\ln(x)}$$

同样,这个结论的推导也超出了本文的范围,见^[1]中的Theorem 437.

那么,我们就可以计算半素数的渐近密度:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(\ln(x))}{x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0$$

这也表明半素数的密度同样为0.

而积性完美数是立方素数和半素数的并集.由于这两类数的密度都为0,因此积性完美数作为一个整体,在自然数中的渐近密度也为0.

□

尽管两者的密度都为0,但通过比较它们的计数函数 $C(x)$ 和 $\pi_2(x)$, 我们可以了解它们的增长速度. 当 x 很大时, $\frac{x \ln(\ln(x))}{\ln(x)}$ 的增长速度远快于 $\frac{3x^{1/3}}{\ln(x)}$. 这意味着, 在所有积性完美数中, **绝大多数都是半素数**, 而立方素数则要稀有得多.

积性亲和数

完美数是加性的,加性数论的研究中有很多有意思的概念,比如说**亲和数**(或**友爱数**),它指的是一对数中彼此的全部真因子之和与另一方相等.

定义 2.10 (亲和数).

对于 $n, m \in \mathbb{N}$, 若 $\sigma(m) - m = n$, $\sigma(n) - n = m$, 那么我们就称数对 (n, m) 是一对亲和数, 其中 $\sigma(n)$ 是约数和函数.

最有名的亲和数对可能是(220, 284), 还是Pythagoras, 他就曾经说过"朋友是你灵魂的倩影, 要像220与284一样亲密." 并且, 这一对亲和数也在众多和爱情与数学有关的艺术创作中反复出现, 比如电影**博士の愛した数式**(博士的爱情方程式).

我们仿照上述亲和数的概念, 定义**积性亲和数**.

定义 2.11 (积性亲和数).

对于 $n, m \in \mathbb{N}$, 若 $P'(n) = m, P'(m) = n$, 那么我们就称数对 (n, m) 是一对**积性亲和数**, 其中 $P'(n)$ 是 n 的真因子之积.

下面我们来看看积性亲和数有什么性质. 我们断言不存在 $n \neq m$, 使得 $P'(n) = m, P'(m) = n$, 并马上证明它.

 **定理 2.12 (不存在非平凡的积性亲和数).**

对于 $n, m \in \mathbb{N}$, 若 $P'(n) = m, P'(m) = n$, 则 $n = m$.

根据上文的结论, 可以得到 $P'(n) = n^{\frac{d(n)-1}{2}}$. 则对于积性亲和数我们就有:

$$\begin{cases} P'(n) = n^{\frac{d(n)-1}{2}} = m & (1) \\ P'(m) = m^{\frac{d(m)-1}{2}} = n & (2) \end{cases}$$

将(2)代入(1), 得到:

$$(m^{\frac{d(m)-1}{2}})^{\frac{d(n)-1}{2}} = m^{(\frac{d(m)-1}{2})(\frac{d(n)-1}{2})} = m^1$$

这意味着:

$$(\frac{d(m)}{2} - 1)(\frac{d(n)}{2} - 1) = 1$$

由于 $d(n)$ 是整数, 故这个方程唯一的整数解是:

$$\frac{d(m)}{2} - 1 = 1 \text{ 且 } \frac{d(n)}{2} - 1 = 1$$

故有 $d(m) = d(n) = 4$. 但是如果 $d(n) = 4$, 那么我们就有

$$P'(m) = m^{\frac{4}{2}-1} = m \Rightarrow n = m$$

故**不存在非平凡的积性亲和数**. \square

同理, 也不存在更长的**积性"社交数"链**. 其中**"社交数"**是指一个这样的自然数组 (a, b, c) , 其满足 a 的真因子之和等于 b , 而 b 的真因子之和等于 c , c 的真因子之和等于 a .

既是完美数又是积性完美数的数

我们最后证明一个有意思的小问题来结束这一节. 我们已经知道不仅 $6 = 1 + 2 + 3$, 还有 $6 = 1 \times 2 \times 3$. 那么, 6是唯一的这样的数吗?

② 问题 2.13 (既是完美数又是积性完美数的数)

存不存在除了6以外其他的既是完美数又是积性完美数的数?

我们断言这样的数只有6,并且接下来证明它.

证:

我们分 $n = p^3$ 和 $n = pq$ 的情况讨论,其中 p, q 是不同的素数.

Case 1. 若 $n = p^3$,则 $\sigma(n) = 1 + p + p^2 + p^3 = 2p^3$.整理得 $p^3 - p^2 - p - 1 = 0$,而对于素数 $p, p^3 - p^2 - p = p(p^2 - p - 1)$ 显然不等于1.

Case 2. 若 $n = pq$,则 $\sigma(n) = 1 + p + q + pq = 2pq$,整理得 $(p - 1)(q - 1) = 2$.对于素数 p, q ,该方程的解仅为 $p - 1 = 1, q - 1 = 2$ (或反过来).故 $p = 2, q = 3$.

综上所述,6是唯一一个既是完美数又是积性完美数的数.□

看来,6这个数字的确是非常美丽.难怪Pythagoras会说"6象征着完满的婚姻以及健康和美丽"呢!

3. 一个可能的推广: 积性 k -完美数

虽然积性完美数自身很简单,不过我们还可以模仿" k -完美数"($\sigma(n) = kn$)来定义一个新概念.

🔗 定义 3.1 (积性 k -完美数).

如果一个整数 $n > 1$ 的所有真因子之积 $P'(n) = n^k$, 我们就称之为**积性 k -完美数**.

仿照定理2.6的方式,我们可以得到一个非常优美的条件:

$$d(n) = 2(k + 1) \iff P'(n) = n^k.$$

这个推广将一个简单概念变得更有系统性.下面是 k 比较小时的积性 k -完美数的例子.

k值	d(n)	因子结构	例子
$k = 1$	4	$p^3, p \times q$	6, 8...
$k = 2$	6	$p^5, p^2 \times q$	12, 32...
$k = 3$	8	$p^7, p^3 \times q, p \times q \times r$	24, 30, 128...
$k = 4$	10	$p^9, p^4 \times q$	48...

k值	d(n)	因子结构	例子
$k = 5$	12	$p^{11}, p^5 \times q, p^3 \times q^2, p^2 \times q \times r$	96...
...

定义积性 k -完美数后最大的问题就落在其因子结构上.而这其实就等价于寻找整数 $N = 2(k+1)$ 的**无序乘法分拆**.具体来说,积性 k -完美数 n 的所有可能结构,与 $N = 2(k+1)$ 的所有乘法分拆一一对应.

定义 3.2 (整数的乘法分拆).

对于一个大于 1 的整数 N , 我们将 N 表示为一组大于 1 的整数的乘积 (不考虑顺序),

$$N = f_1 \cdot f_2 \cdots f_m, \quad f_i > 1$$

称这样的一组数 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 为 N 的一个乘法分拆.

一个整数 N 的不同乘法分拆的个数, 通常用函数 $f(N)$ 表示.

结构与分拆的对应关系

如果一个数 n 的素数分解为 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$, 那么它的因子个数为:

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_m + 1)$$

令 $d(n) = N = 2(k+1)$, 并设 $f_i = a_i + 1$, 我们就得到了 N 的一个乘法分拆 $N = f_1 \cdot f_2 \cdots f_m$.

因此,寻找所有积性 k -完美数的素数结构,等价于寻找 $N = 2(k+1)$ 的所有乘法分拆.

示例 3.3 ($k = 5$ 时 $2(k+1)$ 的乘法分拆与积性 k -完美数的因子结构).

当 $k = 5$ 时, 我们需要研究 $N = 2(5+1) = 12$ 的所有乘法分拆.

1. 分拆为 1 个因子 ($m = 1$):

- 12.
- 对应 $f_1 = 12$, 推出 $a_1 = f_1 - 1 = 11$.
- 结构: p^{11} (如 2^{11}).

2. 分拆为 2 个因子 ($m = 2$):

- 6×2 .

- 对应 $\{f_1, f_2\} = \{6, 2\}$, 推出 $\{a_1, a_2\} = \{5, 1\}$.
- 结构: p^5q (如 $2^5 \cdot 3$).
- 4×3 .
- 对应 $\{f_1, f_2\} = \{4, 3\}$, 推出 $\{a_1, a_2\} = \{3, 2\}$.
- 结构: p^3q^2 (如 $2^3 \cdot 3^2$).

3. 分拆为 3 个因子 ($m = 3$):

- $3 \times 2 \times 2$.
- 对应 $\{f_1, f_2, f_3\} = \{3, 2, 2\}$, 推出 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 1, 1\}$.
- 结构: p^2qr (如 $2^2 \cdot 3 \cdot 5$).

因为 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 > 12$, 所以不可能分拆为 4 个或更多因子.

综上, 对于 $k = 5$, 积性5-完美数共有 4 种不同的素数结构: p^{11} , p^5q , p^3q^2 和 p^2qr .



言而总之, 对于任意给定的 k , 我们都可以通过以下步骤确定所有 k -积性完美数的结构:

1. 计算目标因子数 $N = 2(k + 1)$.
2. 找出整数 N 的所有无序乘法分拆 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. 这一步是问题的组合核心.
3. 每一个乘法分拆 $\{f_1, \dots, f_m\}$ 都对应一类 k -积性完美数的结构, 其素数指数集为 $\{f_1 - 1, \dots, f_m - 1\}$.

综上, 我们便从一个简单的概念牵引出了更多的有意思的概念. 不过正如Descartes曾预言的那样: "能找出完全数是不会多的, 好比人类一样, 要找一个完美人亦非易事." 这篇文章也不能被称为完美. 在不久的将来或许还有可以补充的地方.

参考文献

1. Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press. (Original work published 1938)
2. Landau, E. (1909). *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. B. G. Teubner.