原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限の部分を C とする.C 上を動く点 $P(\cos \theta, \sin \theta) \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を考え,線分 OP と x 軸と曲線 C とで囲まれたおうぎ形の面積を $S_1(\theta)$ とし,点 P を通り C に接する直線と y 軸と曲線 C とで囲まれた部分の面積を $S_2(\theta)$ とする. $S_1(\theta)$ と $S_2(\theta)$ の小さいほうの値を $S(\theta)$ とおく. $\theta=0$ または $\frac{\pi}{2}$ のときは $S(0)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ とする.このとき,積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(\theta) \sin \theta d\theta$ を求めよ.