Учебники

1. Пантелеев А.В., Летова Т.А "Методы оптимизации в примерах и задачах" - основной
2. "Сборник задач по математике методы оптимизации" редакция Ефимова
3. Моисеев "Методы оптимизации"
4. Понтрягин "Математическая теория оптимальных процессов"
5. Сеидова, Калайдина ""

Методы оптимизации имеют два направления:

1. Методы оптимальности функции - делится еще на условная и безусловную оптимизации.
2. Методы оптимальности функционалов - делится на вариационное исчисление на оптимальное управление.

Безусловная оптимизация делится на

1. Методы нахождения минимума функции многих переменных
2. Методы нахождения минимума функции одной переменной

Условная оптимизация делится на

1. Линейное программирование
2. Нелинейное программирование

Нелинейное программирование делится на

1. Квадратичное
2. Выпуклое

Будем рассматривать сначала безусловную оптимизацию с функциями одной переменной.

Chapter 1

Безусловная оптимизация

1.1 Одномерный поиск

1.1.1 Классический алгоритм

1. Постановка задачи. Пусть дана функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и требуется найти минимум этой функции на этом отрезке.

   Замечание: задача нахождения максимума функции сводится к задаче поиска минимума заменой $f(x)$, потому рассматриваем только задачи минимума. Замена будет иметь вид: $g(x) = -f(x)$ - и ищем теперь минимум $g(x)$.

   Теорема (необх. и дост. условие (безусловной оптимизации) экстремума функции одной переменной) : Точка x^* - локальный минимум (или максимум). Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в точке x^* имела локальный минимум (или максимум) на (a,b) неоходимо, чтобы $f'(x^*) = 0$.

   Достаточно, что если $f^{(n)}(x^*) \neq 0$, где эта производная имеет нечетный порядок ($n = 2k+1, k = 0,1,2,...$), то в точке x^* нет ни минимума ни максимума.

   Если $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ и в точке x^* имеет четный порядок ($n = 2k, k = 1,2,...$), то в точке x^* имеем минимум, если $f^{(n)}(x^*) > 0$, или максимум, если меньше нуля.

   Док-во: Необходимое условие: От противного: Предположим, что точка x^* - точка минимума (максимума). Проверяем:

   $$f'(x^*) \neq 0$$

Два случая:

$$f'(x^*) > 0$$
$$\forall x \in U_{\Delta h}(x^*) : x = x^* + \Delta h$$
$$\Delta h \to 0$$

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x - x^*) + ...+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*) + o(x - x^*)^n$$

$$f(x) - f(x^*) = f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*)^2$$
$$f'(x^*)\Delta h = f(x) - f(x^*)$$
$$f'(x^*) > 0; \Delta h < 0; f(x) - f(x^*) < 0$$

Пришли к противоречию

$$f(x) < f(x^*)$$

Т.к. x^* - точка минимума, то должно было быть

$$f(x) > f(x^*)$$

Аналогично при $f'(x) < 0$ берем $\Delta h > 0$.

Достаточность - доказать самостоятельно. Ч.т.д.

1.1.2 Классический алгоритм нахождения глобального минимума

1. Вычисляем $f'(x)$
2. Решаем уравнение $f'(x) = 0$ (необходимое условие) - находим стационарные точки.
3. В стационарных точках используем достаточное условие и определяем точки локального минимума (максимума).
4. Вычисляем значение функции в этих точках и выбираем точку, где значении функции меньше (больше) всего - обозначим итог x_1 .
5. В точках, где производная не существует (критические точки), вычисляем значение функции.
6. Выбираем наименьшую (наибольшую) точку среди критических - обозначим итог x_2.
7. Вычисляем значение функции на концах отрезка $[a, b]$ и выбираем наименьшее (наибольшее) из них - обозначим итог x_3.

8. Ищем минимум из x_1, x_2, x_3 - получим итог x^* - точку глобального минимума (максимума).

Пусть дан цилиндр с радиусом основания R и высотой H. Задана полная площадь цилиндра S. Найти максимальный объем цилиндра.

$$V = \pi R^2 H$$

$$S = 2S_1 + S_2 = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

$$H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}$$

$$V = \pi R^2 \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}(S - 2\pi R^2)$$

$$V' = \frac{1}{2}(S - 2\pi R^2) + \frac{R}{2}(-4\pi R) = \frac{1}{2}(S - 6\pi R^2)$$

$$S - 6\pi R^2 = 0$$

$$R = \pm\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

$$R > 0; R = +\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

$$V'' = -6\pi R < 0 \text{ - имеем точку максимума}$$

$$\frac{2R}{H} = ? \text{ - выяснить}$$