Недостатки алгоритма:

1. Нужно решать
$$f'(x) = 0$$
и иногда решение такого уравнение может быть сложным или невозможным.

2. Количество критических точек может быть так велико, что последовательное их нахождение не очень.

3. Функция f может быть не дифференцируема.

4. Функция не задана аналитически.

Рассмотрим численные методы одномерного поиска - которые используются при наличии вышеперчисленных проблем.

0.1 Унимодальные функции

Функция $f(x)$ называется унимодальной на $[a_0, b_0]$ если f непрерывна на $[a_0, b_0]$ и

1. f на $[a_0, b_0]$ имеет единственную точку минимума x^*

2. f монотонно убывает на $[a_0, x^*)$ и монотонно возрастает на $(x^*, b_0]$

на отрезке $x^* \in [\alpha, \beta] \subset [a_0, b_0]$
$$f^* = \min_{[\alpha,\beta]} f(x)$$

Лемма: Основные свойства унимодальной функции. Пусть f является унимодальной на $[a, b]$ и пусть $x, y \in [a, b]$ так, что $a < x < y < b$. Тогда

1. Если $f(x) < f(y)$, то $x^* \in [a, y)$

2. Если $f(x) > f(y)$, то $x^* \in (x, b]$

3. Если $f(x) = f(y)$, то $x^* \in (x, y)$

Доказательство: Пункты 2 и 3 - самостоятельно. Пункт 1 - от противного. Предположим, что $f(x) < f(y)$, но $x^* \notin [a, y)$, но тогда верно $x^* \in [y, b]$.

Но тогда по определению $f(x) > f(y) > f(x^*)$ - противоречие. Ч.Т.Д.

Использование унимодальных функций позволяет уменьшить отрезок поиска.

Отсюда вытекает определение: Любой отрезок содержащий точку минимума называется отрезком локализации точки минимума, или интервалом неопределенности.

Рассмотрим задачу поиска минимума f на $[a, b]$ с заданной точностью ε. Найдем $x^*_{\text{пр}}$ такую что

$$|x^* - x^*_{\text{пр}}| < \varepsilon$$
$$x^* - \varepsilon < x^*_{\text{пр}} < x^* + \varepsilon$$

Должны найти отрезок длиной 2ε.
Выбираем отрезки $[a_i, b_i]$ до тех пор пока $b_i - a_i = 2\varepsilon$, при этом полагаем

$$x^*_{\text{пр}} = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Например:
$$f(x) = x^2 - 10x + 1,\; x \in (-100, 100)$$

0.2 Алгоритм Свена

Найдем отрезок локализации для f

1. $$\forall x_0, t > 0\text{- величина шага}$$
2. $k = 0$
3. $f(x_0 - t); f(x_0 + t); f(x_0)$
4. Условие окончания
   (a) если $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$ то нач. инт-л неопред. найден $[x_0 - t, x_0 + t]$
   (b) если $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$ то $f(x)$ - не унимодальная на $[x_0 - t, x_0 + t]$ тогда выбираем другую x_0.
   (c) Если условия окончания не выполняются, то переходим к пункту 5
5. Задим Δ следующим образом
   (a) $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$ тогда $\Delta = t, a_0 = x_0, x_1 = x_0 + t, k = 1$
   (b) $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$ тогда $\Delta = -t, b_0 = x_0, x_1 = x_0 - t, k = 1$
6. Найти следующую точку
   $$x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$$
7. Проверяем условие убывания функции

(a) Если $f(x_{k+1}) < f(x_k), \Delta = t$ то $a_0 = x_k, k = k + 1$
если $f(x_{k+1}) < f(x_k), \Delta = -t$ то $b_0 = x_k, k = k + 1$

(b) Если $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ процедура завершается при $\Delta = t, b_0 = x_{k+1}$ или $\Delta = -t, a_0 = x_{k+1}$ и тогда $[a_0, b_0]$ - искомый отрезок.

Пример:

$$f(x) = (x - 5)^2$$

1. Зададим $x_0 = 1, t = 1$
2. $k = 0$
3. $f(0) = 25, f(1) = 16, f(2) = 9$
4. $f(0) > f(1) > f(2)$
5. $f(0) > f(1) > f(2), \Delta = t = 1, a_0 = x_0 = 1, k = 1, x_1 = x_0 + t = 1 + 1 = 2$
6. $x_2 = x_1 + 2\Delta = 4$ а потом $x_3 = x_2 + 2\Delta = 8$
7. $f(x_2) = 1 < f(x_1) = 9, \Delta = 1, a_0 = x_1 = 2, k = 2$ и потом

Решить самостоятельно $f(x) = x^2 + Bx + C$ где B - дата рождения и C - номер группы