Теорема: (Достаточное условие безусловного минимума функции многих переменных) Пусть дана $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ она дважды непрервыно-дифференцируема. Для того, чтобы x^* являлась точкой безусловного локального минимума f достаточно чтобы

$$\nabla f(x^*) = 0$$

и матрица Гессе в этой точке была положительно определенной

$$H(x^*) > 0$$

. Ананлогично для максимума, но матрица Гессе тогда должна быть отрицательно определенной.

$$H(x^*) < 0$$

Док-во: Рассмотрим $x = x^* + h; ||h|| \to 0$. Т.к. говорим о n -мерном пространстве: $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$.

$$f(x^* + h) = f(x^*) + (\nabla f(x^*), h) + \frac{1}{2}(h, H(x^*)h) + o(h)$$

$$f(x^* + h) - f(x^*) = (\nabla f(x^*), h) + \frac{1}{2}(h, H(x^*)) + o(h)$$

Т.к. матрица Гессе положительно определлнная, градиент равен нулю и h стремится к нулю, тогда верно неравенство

$$f(x^* + h) - f(x^*) > 0$$

$$f(x^* + h) > f(x^*)$$

что и означает минимум. Аналогично для максимума. ч.т.д.

Теорема 7: Пусть x^* - стационарная точка. Дважды непрерывно-дифференцируема функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x^*. Если второй положительный дифференциал сохраняет свой знак

$$\forall \Delta x_i \in U_\delta(x^*) : d^2(x^*, \Delta x_1, ..., \Delta x_n) > 0$$

в некоторой окрестности, тогда x^* будет являться точкой безусловного локального минимума функции f. Аналогично, но если сохраняется отрицательный знак, то будет безусловный максимум. Аналогично, но если второй дифференциал - знакопеременная функция, то точка x^* не является точкой экстремума. (А будет седловая) Аналогично, если она меняет знак и может в окрестности принимать нулевое значение, то требуются дополнительные исследования.

0.1 Общая схема отыскания безусловного экстремума функции многих переменных

1. Найти критические точки, в которых градиент равен нулю.

$$\nabla f(x) = 0$$

Здесь будет система из n уравнений.

2. Анализируем выполнение достаточных условий экстремума с помощью матрицы Гессе $H(x^*) > 0($ или $< 0)$

3. Из всех точек, найденных в шагах 1 и 2, выбираем те, где значение функции наименьшее или наибольшее.

4. Находим значение функции в точке x^*.

Замечание: для определения положительной или отрицательной определенности матрицы Гессе можно использовать собственные числа матрицы вторых производных.

$$1)\ \forall i : \lambda_i > 0 \to x^* = \min x$$
$$2)\ \forall i : \lambda_i < 0 \to x^* = \max x$$

$$1)\ i = \overline{1, n} : \Delta_i > 0 \to x^* = \min x$$
$$2)\ (-1)^i \Delta_i > 0 \to x^* = \max x$$
$$3)\ (-1)^{i+1} > 0 \to x^* \text{ - седловая}$$
$$4)\ \exists \Delta_i = 0 \to \text{ нужны доп исследования}$$
$$5)\ \text{1-4 не выполняются - нет экстремумов}$$

Пример: $u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6yx - 2z + 1$ - проводим исследование.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 6y = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2 = 0$$

Решаем: $(2, -6, 1), (0, 0, 1)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 18x$$
$$\Delta_2 = 36x - 36$$
$$\Delta_3 = 72x - 72$$

Подставляем найденные ранее точки и определяем.

Домашнее задание:

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$