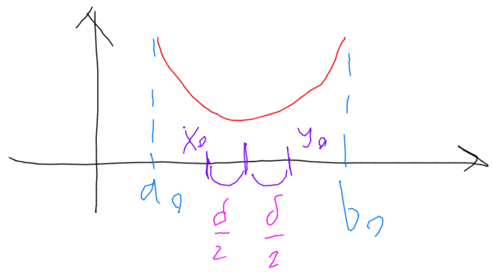
0.1 Метод дихотомии

$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}}(x)$

Метод дихотомии - это метод деления отрезка почти пополам. Найдем минимум на $[a_0, b_0]$.



Суть метоода в последовательном уменьшении отрезка локализации. Задаем количество шагов N и точность $\varepsilon > 0$. Задаем также

$$x_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}$$
$$y_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}$$

1. Если $f(x_0) < f(y_0)$, тогда $x^* \in [a_0, y_0]$ и обозначаем $a_1 = a_0, b_1 = y_0$
2. Если $f(x_0) > f(y_0)$, тогда $x^* \in [x_0, b_0]$ и обозначаем $a_1 = x_0, b_1 = b_0$

таким образом $x^* \in [a_1, b_1]$. Тогда

$$b_1 - a_1 = y_0 - a_0 = b_0 - x_0 = b_0 - \frac{a_0 + b_0 - \delta}{2} = \\ = \frac{b_0 - a_0 + \delta}{2}$$

Если отрезок локализации оказывается достаточно велик, т.е.

$$|b_1 - a_1| < 2\varepsilon$$

тогда повторяем этот же алгоритм, пока не найдем $[a_i, b_i]$

$$|b_i - a_i| < 2\varepsilon$$

И тогда в качестве ответа берем

$$x^* = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Сходимость метода дихотомии относительно уменьшения отрезка локализации находится по формуле:

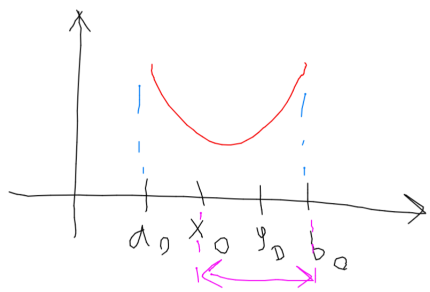
$$R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$$

где N - количество вычислений функции.

Неудобно то, что нужно вычислять две точки в середине отрезка. Вполне возможно, что для более конкретных функций есть методы которые требуют меньше вычислений.

0.2 Метод Фибоначчи

Ищя минимум на том же отрезке $[a_0, b_0]$ для функции $f(x)$ мы будем искать отрезок локализации с помощью чисел Фибоначчи $\mathcal{F}_1 = 1, \mathcal{F}_2 = 1, \dots$.



Метод Фибоначчи также как и метод дихотомии заключаеся в последовательном уменьшении отрезка локализации на основе анализов значения функции в двух точках, поиск продолжаем до тех пор, пока длина отрезка неопределенности не станет меньше заданной точности. Отличие от метода дихотомии в правиле выбора этих двух точек, выбирая одну точку, вторая уже будет известна, как вычисленная ранее.

$$x_0 = a_0 + \frac{\mathcal{F}_{N-2}}{\mathcal{F}_N}(b_0 - a_0)$$
$$y_0 = a_0 + \frac{\mathcal{F}_{N-1}}{\mathcal{F}_N}(b_0 - a_0)$$

Выбираем следующий отрезок

1. Если $f(x_0) < f(y_0)$, то $x^* \in [a_0, y_0]$ и обозначаем $a_1 = a_0, b_1 = y_0$
2. Если $f(x_0) \geq f(y_0)$, то $x^* \in [x_0, b_0]$ и обозначаем $a_1 = x_0, b_1 = b_0$

Будут выполнены равенства (дома просчитать)

$$b_1 - a_1 = y_0 - a_0 = b_0 - x_0$$

и тогда доказать самостоятельно

$$b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)\frac{\mathcal{F}_{N-1}}{\mathcal{F}_N}$$

отрезок локализации помимо точки минимума будет содержать одну из найденных точек x_0 или y_0.

Если взяли отрезок $[a_0, y_0]$ то

$$x_1 = a_1 + \frac{\mathcal{F}_{N-3}}{\mathcal{F}_{N-1}}(b_1 - a_1)$$

В общем виде $[a_i, b_i]$

$$x_{i+1} = a_{i+1} + \frac{\mathcal{F}_{N-i-3}}{\mathcal{F}_{N-i-1}}(b_{i+1} - a_{i+1})$$

Аналогично если берем отрезок $[x_i, b_i]$

$$y_{i+1} = a_{i+1} + \frac{\mathcal{F}_{N-i-2}}{\mathcal{F}_{N-i-1}}(b_{i+1} - a_{i+1})$$

Замечание: после вычисления y_{i+1} или x_{i+1} удобно пользоваться формулой

$$x_{i+1} = a_{i+1} + b_{i+1} - y_{i+1}$$

чтобы не делать громоздких вычислений.

После N вычислений получаем отрезок локализации на котором лежит наш минимум $x^*_{\text{min}} \in [a_{N-1}, b_{N-1}]$ и длина этого отрезка равна

$$\frac{b_0 - a_0}{\mathcal{F}_N} \leq 2\varepsilon \qquad (*)$$

отсюда можно найти число, которое при указанной точности должно превышать число Фибоначчи.

Когда дойдем до первого и второго числа Фибоначчи получим $x_n = y_n$ - в этом случае надо ввести новую бесконечно малую переменную $\alpha > 0$ (назовем ее числом различимости) для выбора нового отрезка локализации

$$[y_n, y_n + \alpha]$$

Середину этого отрезка будем называть минимумом

$$x^* = y_n + \frac{\alpha}{2}$$

Поиск заканчивается также как и в прежнем методе, когда длина отрезка меньше чем

$$|b_n - a_n| \leq 2\varepsilon$$

Середину отрезка будем выводить как ответ.

Замечание: если число N выбрано неудачно и метод Фибоначчи останавливается но минимум с заданной точностью еще не найден, то в этом случае необходимо задать правильно число Фибоначчи по указанной формуле $(*)$.

Сходимость метода Фибоначчи относительно уменьшения начального интервала неопределенности будет считаться по формуле:

$$R(N) = \frac{1}{\mathcal{F}_N}$$

где N - количество вычислений функции.

Преимущество этого метода в отличие от прежнего: сходится быстрее и нужно вычислять меньше внутренних точек (одну, не две).