$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} s^{(k)}$$

Пусть есть $x^{(0)}$ - точка начального приближения, $\delta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и кол-во шагов N.

1. $\nabla f(x^{(0)})$
2. $||\nabla f(x^{(0)})|| < \delta$ - если выполняется, то закончили $x^* = x^{(0)}$, иначе продолжаем
3. $x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha^{(0)} \nabla f(x^{(0)})$
4. $f(x^{(1)}) = f(x^{(0)} - \alpha^{(0)} \nabla f(x^{(0)})) = g(\alpha^{(0)})$ и при помощи одномерных методов находим $\alpha^{(0)}$ где $g(\alpha^{(0)}) = \min$.
5. вычисляем $x^{(1)}$
6. $||x^{(1)} - x^{(0)}|| < \varepsilon_1, |f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})| < \varepsilon_2$
7. $||x^{(1)} - x^{(0)}|| < \varepsilon_1; |f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})| < \varepsilon_2$ проверяем для $x^{(2)}$, если верно, то $x^* = x^{(2)}$
8. Если $k < N$, то продолжаем алгоритм с 1-ого пункта, если $k \geq N$, то $x^* = x^{(2)}$

Для определения, является ли найденная точка x^* точкой минимума, проводим дополнительные исследования (можно проверить вторую производную, например).

Если функция имеет несколько локальных минимумов, то сравниваем их все.

Сходимость зависит от начального приближения - оно определит кол-во итераций.

0.1 Метод сопряженных градиентов (Флетчера-Ривса)

$s^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$, а потом $s^{(k)} = -\nabla f(x^{(k-1)}) + \beta^{(k-1)} s^{(k-1)}$, где

$$\beta^{(k-1)} = \frac{||\nabla f(x^{(k)})||^2}{||\nabla f(x^{(k-1)})||^2}$$

Метод Флетчера-Ривса сходится за 2 итерации для функций 2-ух переменных. Остальные шаги - такие же как и у метода наискорейшего градиентного спуска.

В алгоритме этого метода не будет проверки на кол-во шагов.

Для n переменных число итераций должно не превышать размерность матрицы Гессе.

Сходимость не зависит от начального приближения.

0.2 Метод Ньютона

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} s^{(k)}$$

где берем $\alpha^{(k)} = 1$ и $s^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)})\nabla f(x^{(k)})$. Условие окончания будут $||\nabla f(x^{(k)})|| < \delta$ и $||x^{(1)} - x^{(0)}|| < \varepsilon_1, |f(x^{(1)} - f(x^{(0)}))| < \varepsilon_2$

В алгоритме не будет проверки по количеству шагов.

Дома: исследовать сходимость метода Ньютона для начального приближения $x^{(0)}$. (Нарисовать геометрическую интерпретацию, исследовать сходимость, когда метод не сходится)

Зависит от начального приближения.

0.3 Метод Ньютона-Равсона

Это улучшение метода Ньютона - метод Ньютона не всюду сходится из-за $\alpha^{(k)} = 1$. Потому мы будем строить функцию $g(\alpha^{(k)}) \to$ min (минимум ищем с помощью методов первого порядка) .

Все остальное - как в методе Ньютона.

Критерии окончания такие же как и в предыдущих методах.

Не зависит от начального приближения.

Дома: Самостоятельно численно исследовать сходимость Ньютона-Равсона.

Chapter 1

Нелинейное программирование и методы условной оптимизации

Ранее искали минимум $f(x) : E^n \to R$ на всей области определения.

Теперь ищем минимум на некоторой $U \subset E^n, U \neq E^n$ - в таком случае методы относятся к методам условной оптимизации.

Важным частным случаем задач с ограничениями будет являться задача линейного программирования в котором целевая функция будет линейной, а допустимое множество U будет конечным пересечением замкнутых полупространств.

В общей задаче нелинейного программирования допустимое множество U задается конечной системой равенств и неравенств.

$$U = \{x \in E^n : \varphi_1(x) \geq 0, ..., \varphi_k(x) \geq 0, \varphi_{k+1}(x) = 0, ..., \varphi_p(x) = 0\}$$

Т.е. задаются p функций, для которых заданы k неравенств (как строгие так и не строгие) и $p - k$ равенств.

Если $U = E^m$ ($n > m$), то можно говорить об безусловной оптимизации m переменных.