Недостаток метода Фибоначчи: при неудачном выборе количества чисел Фибоначчи.

Chapter 1

Метод золотого сечения

$$\mathcal{F}_N = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^N - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^N}{\sqrt{5}}$$

- формула Бине.

$$x_0 = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{F}_{N-2}}{\mathcal{F}_N} = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Таким образом переходя к предельному соотношению чисел Фибоначчи используемых в методе Фибоначчи мы приходим к методу золотого сечения.

Определение: Точка x_0 будет производить золотое сечение отрезка, если отношение длины всего отрезка к длине большей его части равно отношению длин большей части отрезка к меньшей его части.

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - x_0} = \frac{b_0 - x_0}{x_0 - a_0}$$

$$y_0 = b_0 + a_0 - x_0$$

Алгоритм метода золотого сечения полностью совпадает с алгоритмом метода Фибоначчи исключая то, что в качестве внутренних точек будем выбирать точки золотого сечения.

Метод золотого сечения также сводится к последовательному уменьшению отрезка локализации на основании анализов значении функции в двух точках. Причем, в отличии от метода дихотомии, на первой итерации требуется вычисление двух точек, а на каждой последующей - только одной. Условие окончания стандартные - длина отрезка локализации не должна превышать удвоенной точности.

$$x_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0)$$
$$y_0 = b_0 + a_0 - x_0$$

Если $f(x_0) < f(y_0)$, то $x^* \in [a_0, y_0] = [a_1, b_1]$. Если $f(x_0) \geq f(y_0)$, то $x^* \in [x_0, b_0] = [a_1, b_1]$.

Новый отрезок локализации содержит одну из найденных точек x_0 или y_0.

Также как и у метода Фибоначчи количество вычислений сокращается вдвое и каждая новая итерация потребует расчетов только одного нового значения функции.

Для нахождения отрезка $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ проверяем те же условия: $f(x_i) < f(y_i)$ (тогда $x^* \in [a_i, y_i] = [a_{i+1}, b_{i+1}]$) или $f(x_i) \geq f(y_i)$ (тогда $x^* \in [x_i, b_i] = [a_{i+1}, b_{i+1}]$).

Условия окончания:

$$|b_{i+1} - a_{i+1}| \leq 2\varepsilon$$

В качестве приближенного значения считаем

$$x^* \approx \frac{b_{i+1} + a_{i+1}}{2}$$

1.1 Сходимость метода золотого сечения

Сходимость этого метода оределяется по следующим формулам:

$$R(N) = (1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})^N$$

где N - количество вычислений функций.

Chapter 2

Сравнительный анализ методов

Основное достоинство метода дихотомии: простота реализации. Метод численно устойчив.

Основное достоинство метода Фибоначчи: при одном и том же количестве вычислений функций дает наименьший отрезок локализации.

Метод золотого сечения достаточно прост для программирования и численно устойчив, если после некоторого количества шагов k произвести пересчет x_k по формуле

$$x_k = a_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_k - a_k) \tag{*}$$

в силу того, что используем иррациональное выражение, из-за чего через некоторое количество шагов накапливается погрешность, которую и стоит сбрасывать формулой $(*)$.

Недостатки методов:

К недостатками метода дихотомии относится необходимость вычисления на каждой итерации двух значений функции, тогда как в методах Фибоначчи и золотого сечения достаточно вычисления только одного значения. Таким образом общее количесво итераций для нахождения минимума будет больше по сравнению с остальными методами.

Метод Фибоначчи численно неустойчив при неправильно заданном N. Поэтому для численной реализации нахождения минимума он обычно не применяется, а используется для определения наименьшего отрезка локализации при заданном количестве вычислений функции.

Метод золотого сечения дает отрезок локализации длина которого будет больше соответсвующего отрезка в методе Фибоначчи на 15 процентов.

Комбинированный метод золотого сечения и метод последовательной параболической интерполяции используются для минимизации функции одной переменной в пакетах прикладных программ, например в MATLAB.