Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого Институт компьютерных наук и технологий

Высшая школа киберфизических систем и управления

**Лабораторная работа 3**

Запуск программы определения собственных чисел методами Данилевского, Леверрье-Фадеева и Крылова в виде вторичных потоков

по дисциплине «Системное программное обеспечение автоматизированных систем управления»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил  студент гр.3532704/90501 |  | Загородский Н. Д. |
| Проверил  доцент |  | Ерофеев С. А. |

11.02.2023 г.

Санкт-Петербург

2023

**Содержание**

[Постановка задачи 3](#_Toc124505916)

[Программа определения собственных чисел методом Данилевского 12](#_Toc124505917)

[Техническое задание 12](#_Toc124505918)

[1. Перечень данных с их типизацией 12](#_Toc124505919)

[2. Перечень функций 13](#_Toc124505920)

[3. Функция CreateThread 15](#_Toc124505921)

[Алгоритм работы программы 17](#_Toc124505928)

[Тестирование 18](#_Toc124505929)

[Вывод 19](#_Toc124505930)

[Код программы 20](#_Toc124505931)

# Постановка задачи

Разработать программу определения собственных чисел методом Данилевского, Леверрье-Фадеева и Крылова. Программа должна запускаться в теле вторичного потока, создаваемого функцией CreateThread в порядке, заданном пользователем, используя критические секции и функции ожидания.

**Теоретическое описание задачи**

Ненулевой вектор , который при умножении на некоторую квадратную матрицу  превращается в самого же себя с числовым коэффициентом , называется **собственным вектором** матрицы . Число  называют **собственным значением** или **собственным числом** данной матрицы.

**Метод Данилевского**

Суть метода А.М. Данилевского состоит в преобразовании исходной матрицы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

в подобную ей матрицу Фробениуса

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

по формуле с помощью матриц подобия B. При этом

что означает совпадение характеристических уравнений подобных матриц.

С помощью метода математической индукции можно доказать, что характеристическое уравнение матрицы P имеет вид:

Предположим, что n = 2, тогда .

Допустим, что при n = k и возьмем n = k + 1.

Тогда

что доказывает данное утверждение.

Подводя итог, первая строка матрицы P определяет коэффициенты характеристического уравнения матрицы А.

По методу А.М. Данилевского переход от матрицы А к подобной ей матрице Р осуществляется с помощью n – 1 преобразований подобия, последовательно преобразующих строки матрицы А, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы Р.

В первую очередь, при допущении, что , строится матрица путем замены в единичной матрице порядка n элементов n – 1 строки на значения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |
|  |  | (4) |

Умножим справа матрицу А на матрицу

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (5) | |
| где | . | | | (6) |

Обратная матрица будет выглядеть следующим образом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

Пусть , значит . Умножение слева матрицы С на матрицу не изменяет последнюю строку С, поэтому матрица имеет вид

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |
| где | . | (9) |

Полученная матрица подобна матрица А и имеет одну преобразованную строку. Первый этап процесса на этом завершен.

На втором этапе, предполагая, что , строим матрицу , заменив в единичной матрице порядка n элементы n – 2 строки на значения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |
|  |  | (11) |

Затем, взяв в качестве матрицы А матрицу и проведя вычисления по формулам (6) и (9), получим матрицу с двумя преобразованными строками. Над матрицей проделываются те же операции. Продолжая этот процесс, мы получим матрицу Фробениуса

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

если все n – 1 промежуточных преобразований возможны.

Из формулы (12) очевидно, что неособенная матрица подобия при преобразовании А к Р может быть записана как

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (13) |

Процесс А.М. Данилевского происходит без каких-либо осложнений, если элементы матриц, на которые производится деление в формулах (3) и (10), отличны от нуля. Рассмотрим исключительные случаи, когда это требование нарушается.

Предположим, что при преобразовании матрицы А в матрицу Фробениуса Р после нескольких шагов получена матрица

т.е. оказалось, что .

Тогда продолжать преобразование по методу А.М. Данилевского нельзя. Здесь возможны два случая.

1) Пусть , где m < k – 1. Тогда этот элемент выдвигаем на место нулевого элемента , т.е. переставляем (k – 1)-й и m-й столбцы матрицы D и, одновременно, переставляем ее (k – 1)-ю и m-ю строки. Можно доказать, что полученная новая матрица D’ будет подобна прежней. К новой матрице применяем метод А.М. Данилевского.

2) Пусть , где m = 1, 2, … , k – 1, тогда D имеет вид

(D’) (F)

(0) (D’’)

В таком случае для матрицы D, разбитой на четыре клетки . При этом матрица уже приведена к форме Фробениуса и

Остается применить метод А.М. Данилевского к матрице .

**Метод Леверье – Фаддеева**

Метод Леверье состоит в нахождении коэффициентов    характеристического многочлена

(1)

Для изложения метода введем понятие о следе матрицы. Под следом матрицы Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание понимают сумму диагональных элементов этой матрицы:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Обозначим через  след матрицы  Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание Тогда справедливы соотношения, известные под названием формул Ньютона:



или

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст, коллекция картинок

Автоматически созданное описание(2)

Первый коэффициент находится как Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание. Остальные из рекуррентного соотношения (2).

Таким образом, процесс вычисления сводится к последовательному вычислению степеней матрицы *A*, затем к вычислению их следов и, наконец, к решению рекуррентной системы (2).

В методе Фаддеева предлагается вместо следов степеней   ![Изображение выглядит как стрела

Автоматически созданное описание](data:image/png;base64,iVBORw0KGgoAAAANSUhEUgAAADcAAAAcCAMAAADybteBAAAAAXNSR0IArs4c6QAAAARnQU1BAACxjwv8YQUAAAA8UExURf///wEBAQICAgUFBQwMDBoaGh4eHj4+Pl5eXm9vb5+fn7m5ufv7+83NzVZWVl9fX2ZmZlhYWEhISAAAAB8jBk4AAAAUdFJOU/////////////////////////8AT0/nEQAAAAlwSFlzAAAh1QAAIdUBBJy0nQAAAIBJREFUOE/tkUsKgDAMBRsQBcUi3v+wNq+xn2yadN1ZyCR0qGgAlMCD8mwlF/5QAnf4n/eG5TjLBjNROtie1UDtoIf4kKaDR/ERbYfhER/QdZhO8Yb+EFArHi/xCm9VqDc83+IFXuoLTcTJLoXG76WYvC6Y/2sH0SvmYvYlF4sQPnp2ARvrx3aHAAAAAElFTkSuQmCC)  вычислить последовательно следы некоторых других матриц   ![Изображение выглядит как стрела

Автоматически созданное описание](data:image/png;base64,iVBORw0KGgoAAAANSUhEUgAAADcAAAAcCAMAAADybteBAAAAAXNSR0IArs4c6QAAAARnQU1BAACxjwv8YQUAAAA8UExURf///wEBAQICAgUFBQwMDBoaGh4eHj4+Pl5eXm9vb5+fn7m5ufv7+83NzVZWVl9fX2ZmZlhYWEhISAAAAB8jBk4AAAAUdFJOU/////////////////////////8AT0/nEQAAAAlwSFlzAAAh1QAAIdUBBJy0nQAAAIBJREFUOE/tkUsKgDAMBRsQBcUi3v+wNq+xn2yadN1ZyCR0qGgAlMCD8mwlF/5QAnf4n/eG5TjLBjNROtie1UDtoIf4kKaDR/ERbYfhER/QdZhO8Yb+EFArHi/xCm9VqDc83+IFXuoLTcTJLoXG76WYvC6Y/2sH0SvmYvYlF4sQPnp2ARvrx3aHAAAAAElFTkSuQmCC) , построенных следующим образом:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание  

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание  Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

…

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание  

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание  

Данный метод позволяет найти не только коэффициенты характеристического многочлена, но и дает возможность определить обратную матрицу и собственные векторы матрицы. Найдем собственные вектора матрицы *A*. Пусть собственные числа уже вычислены и при этом оказались различными. Построим матрицу



где  – матрицы, вычисленные в процессе нахождения коэффициентов характеристического многочлена, а Изображение выглядит как стрела

Автоматически созданное описание есть *k*-е собственное число матрицы *A*. Каждый столбец матрицы  состоит из компонент собственного вектора, принадлежащего собственному числу Изображение выглядит как стрела

Автоматически созданное описание.

**Метод Крылова**

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Систему линейных уравнений можно решить методом Халецкого или Гаусса, выберем второй вариант.

Чтобы из Pn(λ) = 0 найти λi надо решить характеристическое уравнение, для этого пользуемся следующим алгоритмом:

1. Методом Вестерфильда определяется радиус, в пределах которого лежит первый корень характеристического уравнения.
2. С помощью метода секущих вычисляется первый корень внутри радиуса, определенного на предыдущем шаге.
3. С помощью теоремы Безу понижается степень уравнения выделением линейного множителя, соответствующего известному вещественному корню.
4. Для многочлена пониженной степени, полученного на предыдущем шаге, методом Вестерфильда определяется радиус, в пределах которого лежит следующий корень характеристического уравнения.
5. С помощью метода секущих вычисляется следующий корень внутри радиуса, определенного на предыдущем шаге.
6. С помощью теоремы Безу понижается степень уравнения выделением линейного множителя, соответствующего вещественному корню, найденному на предыдущем шаге.
7. Пункты 4, 5, 6 повторяются до тех пор, пока многочлен не будет разложен на линейные множители, соответствующие всем найденным вещественным корням характеристического уравнения.

Теорема Вестерфильда: все корни (вещественные и комплексные) канонического многочлена ()

 (11)

лежат на комплексной плоскости в круге, радиус которого  не превосходит суммы двух наибольших из чисел

,

то есть

, (12)

где

,

а  – следующее по величине число в последовательности

.

Теорема Безу:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеМетод секущих (хорд):

# Программа определения собственных чисел

### Техническое задание

## Перечень данных с их типизацией

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Таблица 1 – Перечень переменных | | | | |
| № | Название переменной | Описание переменной | Диапазон значений переменной | Тип переменной | Объем памяти переменной, байт |
| 1 | n | Размерность матрицы | От -2147483648 до 2147483647 | int | 4 |
| 2 | def | Исходная матрица | 1,7E +/- 308 | vector<vector<double>> | 8 |
| 3 | f | Матрица A | double\*\* |
| 4 | b | Матрица B | vector<double> |
| 5 | P | Коэффициенты полинома |
| 6 | roots | Корни полинома – собственные значения |
| 7 | kb | Счетчик | От -2147483648 до 2147483647 | int | 4 |

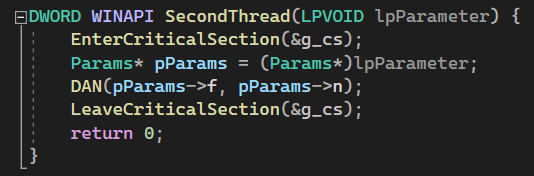
## Перечень функций

Таблица 3 – Перечень функций

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Функция | Описание функции | Входные переменные |
| 1 | double\*\* new2DArray | Создание матрицы размера n | n - размер матрицы |
| 2 | double\*\* cr\_b | Вычисление матрицы Bo | o – номер матрицы, n - размер матрицы, f – матрица A или D |
| 3 | void print2DArray | Вывод матрицы | n - размер матрицы,  arr - матрица |
| 4 | double\*\* MultiplyWithOutAMP | Перемножение матриц | n - размер матрицы,  mtrx - первая матрица,  tmtrx - вторая матрица |
| 5 | double\*\* inv | Инвертирование матрицы | N - размер матрицы,  A - матрица |
| 6 | double f | Полином для вычисления собственных чисел | coefs – коэффициенты матрицы P (первая строка матрицы Фробениуса) |
| 7 | vector<double> bz | Понижение степени с помощью теоремы Безу | coefs – коэффициенты матрицы P (первая строка матрицы Фробениуса  root – найденный корень полинома |
| 8 | double secant | Метод секущих | a и b – абциссы концов хорды (равны радиусу),  coefs – коэффициенты матрицы P (первая строка матрицы Фробениуса |
| 9 | double find\_radius | Вычисление радиуса | coefs – коэффициенты матрицы P (первая строка матрицы Фробениуса) |
| 10 | vector<double> root\_finder | Функция для нахождения корней полинома | coefs – коэффициенты матрицы P (первая строка матрицы Фробениуса) |

## Критические секции и функции ожидания

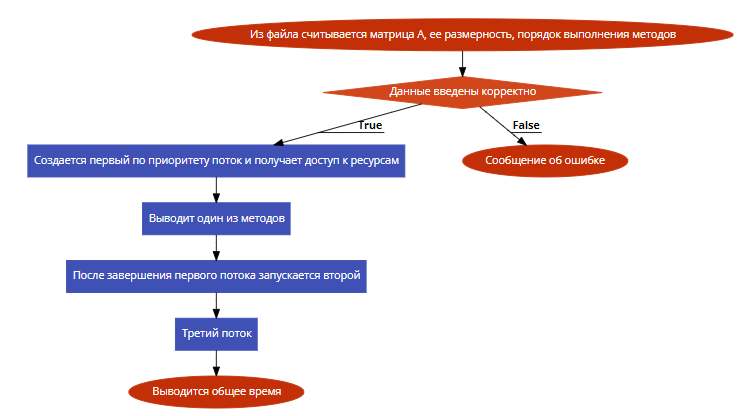
**Критическая секция** (Critical Section) — это участок кода, в котором поток (thread) получает доступ к ресурсу (например переменная), который доступен из других потоков. Объект критическая секция обеспечивает синхронизацию. Этим объектом может владеть только один поток, что и обеспечивает синхронизацию.



**Функции ожидания** позволяют потоку блокировать собственное выполнение. Функции ожидания не возвращаются до тех пор, пока не будут выполнены указанные условия. Тип функции ожидания определяет набор используемых критериев. При вызове функции ожидания проверяется, выполнены ли критерии ожидания.



# Алгоритм работы программы



# Тестирование

Пользователь вводит размерность матрицы и саму матрицу в txt файл, при некорректно введенных данных, программа либо будет выводить сообщение, либо будет воспринимать некорректную часть матрицы как нули:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст, оранжевый, снимок экрана

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

# Вывод

В ходе выполнения работы была разработана программа определения собственных чисел методом Данилевского, Леверрье-Фадеева и Крылова в среде разработки Visual Studio. Программа запускается в теле вторичного потока, создаваемого функцией CreateThread в порядке, заданном пользователем, используя критические секции и функции ожидания. Ошибки и прочие исключения обрабатываются успешно.