ЗАНЯТИЕ 5.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

5.1 Непрерывность функции в точке

Определение 5.1.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:

1. существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2. этот предел равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

При определении предела подчёркивалось, что $f(x)$ может быть не определена в точке x_0, а если она определена в этой точке, то значение $f(x_0)$ никак не участвует в определении предела. При определении непрерывности принципиально, что $f(x_0)$ существует, и это значение должно быть равно

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Определение 5.1.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует положительное число δ, такое что для всех x из $\delta-$ окрестности точки x_0 (т.е. $|x - x_0| < \delta$) выполняется неравенство

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Здесь учитывается, что значение предела должно быть равно $f(x_0)$, поэтому, по сравнению с определением предела, снято условие проколотости $\delta-$окрестности $0 < |x - x_0|$.

Дадим ещё одно (равносильное предыдущим) определение в терминах приращений. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, эту величину будем называть приращением аргумента. Так как $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$, т.е. Δx – б.м. (бесконечно малая) величина. Обозначим $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, эту величину будем называть приращением функции, так как $|\Delta y|$ должно быть (при достаточно малых $|\Delta x|$) меньше произвольного числа $\varepsilon > 0$, то $\Delta y -$ тоже б.м. величина, поэтому

Определение 5.1.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Ещё одно равносильное определение на языке последовательностей:

Определение 5.1.4. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек области определения, сходящейся к $\boldsymbol{x}_0$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$.

Определение 5.1.5. Функция $f(x)$ не являющаяся непрерывной в точке x_0, называется разрывной в этой точке.

Определение 5.1.6. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

5.2. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 5.2.1. (О непрерывности суммы, произведения, частного). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (частное - в случае, когда $g(x_0) \neq 0$).

Теорема 5.2.2. (О переходе к пределу под знаком непрерывной функции). Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)$, равный x_0. Пусть точка $x_0 = \varphi(t_0)$ принадлежит области определения функции $y = f(x)$, и $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Тогда существует $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t))$, и $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f\left(\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)\right) = f(x_0)$.

Теорема 5.2.3. (О непрерывности суперпозиции непрерывных функций). Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке t_0. Пусть точка $x_0 = \varphi(t_0)$ принадлежит области определения функции $y = f(x)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.

5.3. Односторонняя непрерывность

Определение 5.3.1. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$ слева, если $\exists f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

Определение 5.3.2. Функция $\boldsymbol{f(x)}$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x_0}$ справа, если $\exists f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Определение 5.3.3. Если одно из этих условий не выполнено, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв, соответственно, слева или справа.

Если функция определена на отрезке $[a,b]$, то в левом конце отрезка $x_0=a$ можно говорить только о непрерывности справа, в правом конце $(x_0=b)-$ о непрерывности слева. Для внутренней точки отрезка функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа (доказать самостоятельно).

5.4. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 5.4.1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и монотонна на этом отрезке. Тогда $f(x)$ может иметь на этом отрезке только точки разрыва первого рода.

Следствие 1. Если множество значений монотонно возрастающей на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ полностью заполняет отрезок $[f(a),f(b)]$ (т.е. для $\forall y\in[f(a),f(b)]$ $\exists x\in[a,b]$ такой, что $f(x)=y$), то эта функция непрерывна, легко доказать теперь от противного. Если в точке x_0 имеется скачок, то $f(x)$ не может принимать значений, попадающих в интервал

$(f(x_0-0),f(x_0))$.

Теорема 5.4.2. (Об обращении функции в нуль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения **разных** знаков, то найдётся точка $c\in[a,b]$, в которой функция обращается в нуль: $f(c)=0,\ a<c<b$.

Теорема 5.4.3. (О промежуточном значении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, и в двух точках a и $b\ (a<b)$ принимает **неравные** значения $A=f(a)\neq B=f(b)$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдётся точка $c\in[a,b]$, в которой значение функции равно C: $f(c)=C$

.

Теорема 5.4.4. (Об ограниченности непрерывной функции на отрезке). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 5.4.5. (О достижении минимального и максимального значений). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке свои нижнюю и верхнюю грани.

Следствие 2. Из предыдущих теорем следует: множество значений непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции заполняет весь отрезок $[m,M]$, где $M=\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}=\max\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, а $m=\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}=\min\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$.

Теорема 5.4.6. (О непрерывности обратной функции). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$. Тогда на отрезке $[m,M]$ существует обратная функция $x=g(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) на $[m,M]$ и непрерывная.

5.5. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

5.5.1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1, \\ 2-x^2, & 1<x\le 2. \end{cases}$

Решение. Функция непрерывна при $0\le x<1$ и при $1<x\le 2$, а так как $f(1-0)=f(1+0)=f(0)=1$, то функция непрерывна и при $x=1\Rightarrow$ Функция непрерывна на всей числовой оси.

5.5.2. Построить пример функции, определенной для всех значений x и непрерывной только при $x=0$.

Решение. Функция $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x-\text{рационально}, \\ -x, \text{ если } x-\text{иррационально} \end{cases}$

будет непрерывна при $x=0$ и разрывна во всех остальных точках, т.к. $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, следовательно функция непрерывна при $x=0$.

Пусть $x=x_0-$любое рациональное число. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=x_0$, если x стремясь к x_0 принимает рациональные значения, и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-x_0$, если x стремясь к x_0 принимает иррациональные значения. Но т.к. $x_0\ne -x_0$, то функция разрывна в точке x_0 $\Rightarrow$

функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x, \text{ если } x-\text{рационально}, \\ -x, \text{ если } x-\text{иррационально} \end{cases}$ непрерывна только при $x=0$.

5.5.3. При каком значении числа a функция $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ a+x, & x\geq 0 \end{cases}$

будет непрерывной?

Решение. Очевидно, что функция $f\left(x\right)$ непрерывна при $x<0$ и при $x>0$, а так как $f\left(+0\right)=1$, $f\left(-0\right)=a$, $f\left(0\right)=a$, то функция $f\left(x\right)$ будет непрерывной и в точке $x=0$, если $a=1$.

5.5.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 0,2\cdot\left(2x^2+3\right), & -\infty<x\leq 1, \\ 6-5x, & 1<x<3 \\ x-3\ , & 3\leq x<\infty \end{cases}$$

Решение. На интервалах $\left(-\infty,1\right)$, $\left(1,3\right)$ и $\left(3,\infty\right)$ функция непрерывна. Поэтому разрывы возможны только в точках $x=1$и $x=3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. В точке $x=1$ имеем: $f\left(1-0\right)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{5}\left(2x^2+3\right)=1$, $f\left(1+0\right)=\lim\limits_{x\to 1+0}\left(6-5x\right)=1$, поэтому в точке $x=0$ функция непрерывна. Рассмотрим точку $x=3$: $f\left(3-0\right)=\lim\limits_{x\to 3-0}\left(6-5x\right)=-9$ и $f\left(3+0\right)=\lim\limits_{x\to 3+0}\left(x-3\right)=0$, поэтому в точке $x=3$ функция терпит разрыв первого рода (односторонние пределы в точке $x=3$конечны, но не равны между собой). Скачок функции в точке разрыва $x=3$ равен $f\left(3+0\right)-f\left(3-0\right)=0-\left(-9\right)=9$.

5.5.5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} 4\cdot 3^x, & x<0, \\ 2a+x, & x\geq 0 \end{cases}$

Решение. Так как $f\left(-0\right)=4$, а $f\left(+0\right)=2a$, то равенство

$f\left(-0\right)=f\left(+0\right)=f\left(0\right)$ будет выполнено, если положить $2a=4$, т.е. $a=2$.

5.5.6. При каком значении числа a функция $f(x)=\begin{cases} x+a, & x\geq 5, \\ x^2-3x, & x<5 \end{cases}$

будет непрерывной?

Решение. Областью определения функции является все множество действительных чисел, причем по обе стороны точки x = 5 функция является элементарной, то есть непрерывной. Для обеспечения непрерывности в точке $x = 5$ поставим условие $5 + a = 25 - 15 \Rightarrow a = 5$.

5.5.1. Каким числом можно доопределить функцию $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение. Найдем предел данной функции в точке $x = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \Rightarrow$

если принять $f(0) = 3$, функция станет непрерывной точке $x = 0$.

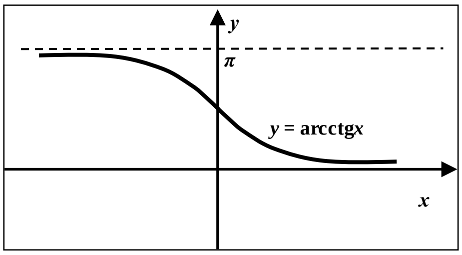
5.5.8. Каким числом можно доопределить функцию $f(x) = x \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение. При $x \to 0$ $\lim_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow x - б.м.$, $\left| \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right| \le 1 \Rightarrow \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ – ограниченная функция.

Как известно, произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая, поэтому $\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right) = 0$, то есть предел существует и конечен. Поэтому можно доопределить функцию так: $f(0) = 0$.

5.5.9. Каким числом можно доопределить функцию $f(x) = arcctg \frac{3}{x}$ при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение.



Найдем односторонние пределы данной функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to -0} arcctg \frac{3}{x} = \lim_{t \to -\infty} arcctg t = \pi \quad \left(t = \frac{3}{x} \right),$$

$$\lim_{x \to +0} arcctg \frac{3}{x} = \lim_{t \to +\infty} arcctg t = 0 \ne \lim_{x \to -0} arcctg \frac{3}{x}.$$

Следовательно, предел данной функции в точке $x = 0$ в обычном смысле не существует, поэтому добиться ее непрерывности в этой точке невозможно.

5.5.10. Определить значения параметров s и t, при которых функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1, \\ x^2+sx+t, & |x|>1 \end{cases}$$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если предел справа равен пределу слева и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$. Данная функция неэлементарная и на трех интервалах меняет свое аналитическое выражение: при $|x|\le 1$ $(-1\le x\le 1)$ задана функция вида x, на интервалах $|x|>1$ ($x>1$ и $x<-1$) функция имеет вид x^2+sx+t (см. схему на рис. 5.1).

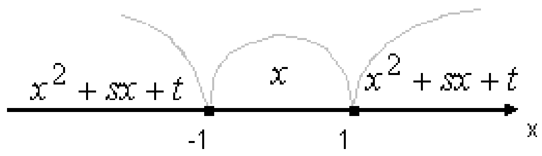


Рис. 5.1

Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to -1-0}\left(x^2+sx+t\right)=1-s+t$,

$$\lim_{x\to -1+0} x=-1,\ \lim_{x\to 1-0} x=1,\ \lim_{x\to 1+0}\left(x^2+sx+t\right)=1+s+t.$$

Так как для непрерывной функции выполняются условия

$$\lim_{x\to -1-0}\left(x^2+sx+t\right)=\lim_{x\to -1-0} x \text{ и } \lim_{x\to 1+0}\left(x^2+sx+t\right)=\lim_{x\to 1+0} x,$$

то, приравнивая значения односторонних пределов, получим систему

$$\begin{cases} 1-s+t=-1, \\ 1+s+t=1, \end{cases}$$ решив которую получим $s=1,\ t=-1$.

5.6 Точки разрыва и их классификация

Определение 5.6.1. Точка разрыва x_0 называется точкой устранимого разрыва, если существуют односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ и они равны между собой (т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$).

Определение 5.6.2. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода (иногда применяется термин «скачок»), если существуют односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, но они не равны между собой.

Определение 5.6.3. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует (в частности, он может быть бесконечным).

5.1. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

5.1.1. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

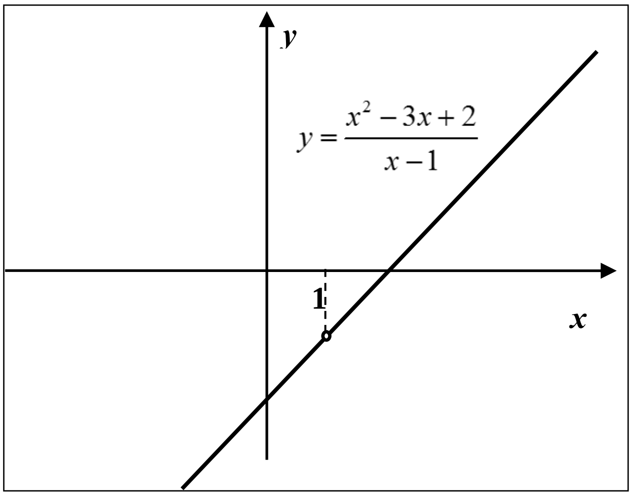


Рис. 5.2

Решение. Функция не определена при $x=1$, а для остальных значений аргумента может быть представлена как $y=x-2$. Следовательно,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=1-2=-1,$$

то есть $x=1$ – устранимая особенность.

5.1.2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{|x|}{x}$.

Решение.

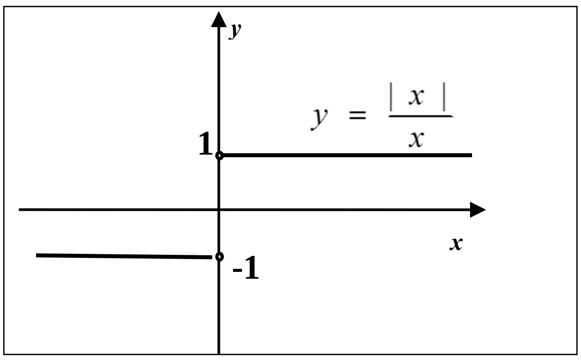


Рис. 5.3

Решение. Из определения модуля следует, что $y = 1$ при $x > 0$, $y = -1$ при $x < 0$, а при $x = 0$ функция не определена. При этом

$$\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=1,\quad \lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=-1.$$

Следовательно, $x = 0$ –точка разрыва 1-го рода.

5.1.3. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{x^2}$.

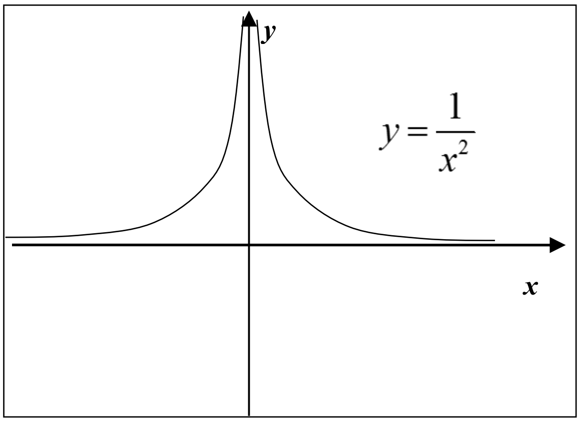


Рис. 5.4

Решение. Функция не определена при $x=0$, и

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

Поэтому $x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

5.1.4. Исследовать на непрерывность функцию $y=e^{\frac{1}{x}}$.

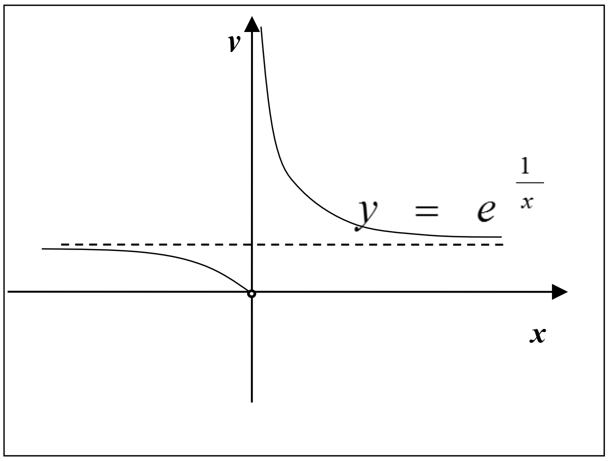


Рис. 5.5

Решение. $\lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=\infty,$

то есть правосторонний предел не является конечным. Значит, $x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

5.1.5. Исследовать на непрерывность функцию $y=\sin\frac{1}{x}$.

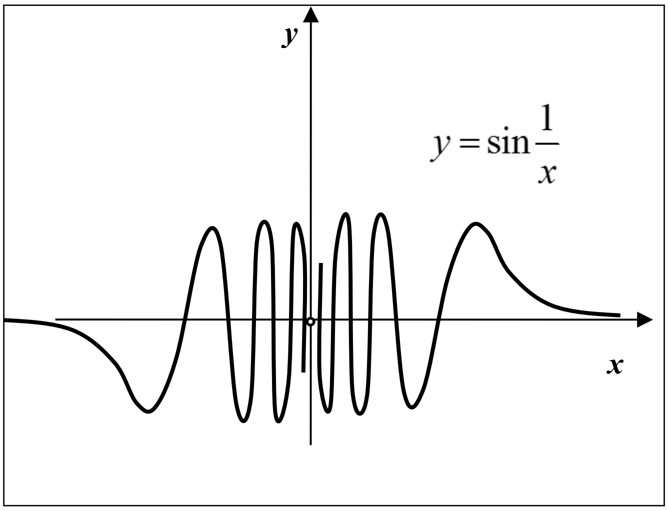


Рис. 5.6

Решение. Функция не определена при $x=0$ и не имеет предела при $x\to 0$. Следовательно, $x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

5.1.6. Найти количество точек разрыва функции $y=\frac{2x-3}{\log_2|x|}$.

Решение. Функция не существует при трех значениях аргумента: $x=0$ (знаменатель не существует) и $x=\pm1$ (он равен 0). Все три точки являются внутренними точками области определения и, поэтому, точками разрыва.

Исследуем характер точек разрыва:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-3}{\log_2|x|}=\lim\limits_{x\to 0}(2x-3)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\log_2|x|}=-3\cdot 0=0.$

Следовательно, $x=0$ – устранимая особенность.

2) *При* $x\to\pm1$ $|x|\to 1\Rightarrow \log_2|x|\to 0\Rightarrow \frac{1}{\log_2|x|}\Rightarrow\infty.$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{2x-3}{\log_2|x|}=\infty,$ и $x=\pm1$ – точки разрыва 2-го рода

$\Rightarrow$ 3 точки разрыва.

5.1.1. Среди функций 1) $f(x)=\frac{\cos x}{x}$, 2) $f(x)=\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$, 3) $f(x)=\frac{1}{(x-5)^2}$,

4) $f(x)=\frac{|2x+1|}{2x+1}$ точки разрыва 1-го рода имеют?

Решение. Найдем точки разрыва каждой функции и исследуем их характер.

1) Функция $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ не определена при x = 0. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, следовательно, единственная точка разрыва этой функции – это точка разрыва 2-го рода.

2) Функция $f(x)=\dfrac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$ не определена при x = 0 (заметим, что знаменатель основной дроби не равен нулю ни при каком значении x).

Найдем односторонние пределы $f(x)$ в точке x = 0:

$$\lim_{x\to -0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{-\infty}}=\frac{5}{1-0}=5;\quad \lim_{x\to +0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{+\infty}}=\frac{5}{-\infty}=0\neq 5.$$

Следовательно, x = 0 – точка разрыва 1-го рода.

3) Функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$ не определена при x = 5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2}=\infty$, следовательно, точка x = 5 – точка разрыва 2-го рода.

4) Функция $f(x)=\dfrac{|2x+1|}{2x+1}$ не определена при x = -0,5. При этом

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x+1}=1,\quad x>-0,5 \text{ и } =-\frac{2x+1}{2x+1}=-1, x<-0,5.$$

Таким образом, односторонние пределы в точке x = -0,5 равны соответственно 1 и -1, то есть эта точка – точка разрыва 1-го рода $\Rightarrow$ 2,4.

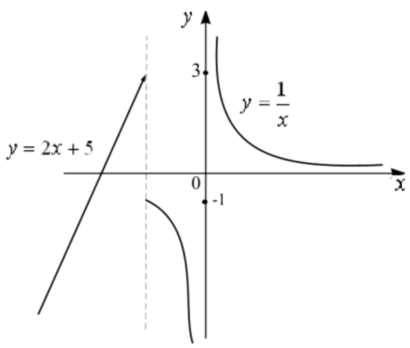


Рис. 5.7

5.1.8. Найти точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{при } -\infty<x<-1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{при } -1\le x<+\infty\end{cases}$$

и определить их характер.

Решение. Неэлементарная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$ (Рис. 5.7).

Так как $f(0-)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)= =\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$, $f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)= =\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$, то в точке $x=0$ функция терпит разрыв второго рода. Исследуем поведение функции в точках, где меняется аналитическое выражение функции:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(2x+5)=3,\ f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{1}{x}=-1.$$

Найденные односторонние пределы функции конечны, но не равны между собой, поэтому в точке $x=-1$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке разрыва равен

$$f(-1+0)-f(-1-0)=\lim_{x\to -1+0} f(x)-\lim_{x\to -1-0} f(x)=-4.$$

5.1.9. Найти точки разрыва функции $f(x)=\frac{|x-a|}{x-a}$ и определить их характер.

Решение. Функция $f(x)=\frac{|x-a|}{x-a}=\begin{cases} 1, & x>a, \\ -1, & x<a, \end{cases}$ следовательно, функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=a$. Так как $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=1$, $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-1$, то в точке $x=a$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке разрыва $x=a$ равен

$$f(a+0)-f(a-0)=\lim_{x\to a+0} f(x)-\lim_{x\to a-0} f(x)=1-(-1)=2.$$

5.1.10. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей независимой переменной. Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x-1, x<0, \\ x^2-1, 0\le x\le 1, \\ 2, x>1. \end{cases}$$

Решение. Функция $y_1=x-1$ непрерывна для $x<0$, функция $y_2=x^2-1$ непрерывна в каждой точке из $[0,1]$, функция $y_3=2$ непрерывна в каждой точке интервала $(1,\infty)$. Точки, в которых функция может иметь разрыв, это точки $x=0$ и $x=1$, где функция меняет свое аналитическое выражение.

Исследуем точку $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} y = \lim\limits_{x\to 0-0}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0}(x^2-1) = -1$, $y(0) = -1 \Rightarrow$ точка $x=0$ есть точка непрерывности функции $y(x)$.

Исследуем точку $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0}(x^2-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y = \lim\limits_{x\to 1+0} 2 = 2$, $y(1) = 0$.

Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой. По определению, исследуемая точка – точка разрыва первого рода. Величина скачка функции в точке разрыва $x=1$ равен $d = \left|\lim\limits_{x\to 1+0} y - \lim\limits_{x\to 1-0} y\right| = |2-0| = 2$.

Сделаем схематический чертеж

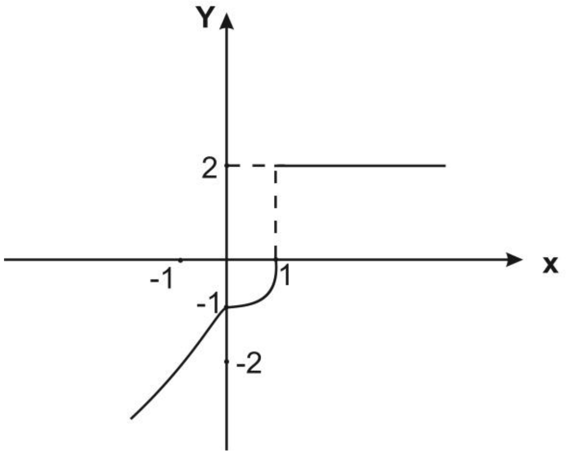


Рис. 5.5

5.8. Задачи для самостоятельного решения

5.8.1. Функция $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-3}$ не определена при $x=3$. Как следует доопределить функцию в точке $x=3$, чтобы она стала непрерывной?

5.8.2. Функция $f(x) = arctg\dfrac{1}{x-1}$ не определена при $x=1$. Можно ли доопределить функцию в точке $x=1$ так, чтобы она стала непрерывной?

5.8.3. Подобрать числа a и b такие, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax, & 0\le x\le 1, \\ 2+bx, & 1< x\le 2 \end{cases}$, б) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x\le 0, \\ ax+b, & 0<x<1, \\ \sqrt{x}, & x\ge 1. \end{cases}$

5.8.4. Функция $f(x)$ не определена при $x=0$. Определить значение $f(0)$ так, чтобы функция стала непрерывной при $x=0$, если:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, б) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{2tgx}$

Найти точки разрыва функции и установить их характер:

5.8.5. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. **5.8.6.** $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. **5.8.1.** $f(x)=\dfrac{1}{\lg|x|}$.

5.8.8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$. **5.8.9.** $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$. **5.8.10.** $f(x)=3^{\frac{2}{1+x}}$.

5.8.11. $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$. **5.8.12.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<0,\\ (x+2)^2, & 0\le x\le 1,.\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$

Ответы. **5.8.1.** $y(3)=6$. **5.8.2.** нет. **5.8.3.** а) $a=0$, $b=-1$. б)$a=2$, $b=-1$ **5.8.4.** а) $f(0)=3/2$. б) $f(0)=1/2$.

5.8.5. $x=0-$ устранимый разрыв; **5.8.6.** $x=0-$ разрыв 2-го рода; **5.8.1.** $x=0-$ устранимый разрыв, $x=\pm1-$ разрыв 2-го рода; **5.8.8.** $x=0-$ разрыв 1-го рода; **5.8.9.** $x=0-$ разрыв 1-го рода; **5.8.10.** $x=-1-$ разрыв 2-го рода; **5.8.11.** $x=3-$ устранимый разрыв, $x=-3-$ разрыв 2-го рода; **5.8.12.** $x=0$ и $x=1-$разрывы 1-го рода.