ЛЕКЦИЯ 1

Обозначения:
▲и ■ означают соответственно начало и конец доказательства теоремы;
$\Rightarrow$ – «из предложения a следует предложение b »;
$a \Leftrightarrow b$ – «предложения a и b равносильны: из a следует b и из b следует a »;
$\forall$ – означает «для любого», «для всякого»;
$\exists$ – «существует», «найдется»;
: – «имеет место», «такое что»;
$A \cup B$ – объединение множеств, т.е. множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B;
$A \cap B$ – пересечение множеств, т.е. множество всех элементов, принадлежащих A и B одновременно;
$x \in X$ ($x \notin X$) – элемент x, принадлежащий (не принадлежащий) множеству X ;
$\varnothing$ – пустое множество, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента;
запись $A = \{a, b, c, ...\}$ означает, что множество A состоит из элементов $a, b, c, ...$;
последовательность $a_n, n = 1, 2, 3, ...$ будет обозначаться как $\{a_n\}$;
факториал числа: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n,\ 0! = 1$; сумма чисел $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

Некоторые свойства множества действительных чисел

Множество действительных чисел будем обозначать как R.
Множество R является *непрерывным*, т.е. если $X \subset R,\ Y \subset R$ два любые непустые числовые множества такие, что для всех элементов $x \in X,\ y \in Y$ выполняется неравенство $x \le y$, то существует некоторое число $a \in R$, такое, что $x \le a \le y,\ x \in X, y \in Y$.

Абсолютная величина (модуль) действительного числа: ($|a|$): $|a| = a$, если $a \ge 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Докажем, что $|a + b| \le |a| + |b|$; $|a - b| \ge |a| - |b|$.

▲ $a \le |a|,\ b \le |b| \ \Rightarrow\ a + b \le |a| + |b|$; $-a \le |a|, -b \le |b| \ \Rightarrow\ -(a + b) \le |a| + |b|$;
так как $|a + b| = a + b$ или $|a + b| = -(a + b)$, то отсюда $|a + b| \le |a| + |b|$.
$|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b| \ \Rightarrow\ |a - b| \ge |a| - |b|$. ■

Определение 1. Множество $X \subset R$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если все члены x множества X меньше или равны (больше или равны) некоторому числу b. Множество X, ограниченное сверху и снизу, называется просто *ограниченным*.

Определение 2. Пусть множество X ограничено сверху. Наименьшее из чисел, ограничивающих X сверху, называется *верхней гранью* множества X и обозначается $sup\ X = \sup\limits_{x \in X} x$. Пусть множество X ограничено снизу. Наибольшее из чисел, ограничивающих X снизу, называется *нижней гранью* множества X и обозначается $inf\, X = \inf\limits_{x \in X} x$.

Если верхнюю грань множества X уменьшить, то она уже не будет ограничивать X сверху; или если нижнюю грань множества X увеличить, то она уже не будет ограничивать X снизу. Поэтому определение 2. равносильно следующему определению:

Определение 3. Число b называется верхней гранью множества, если
а) $\forall x \in X \ \ x \le b$; б) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in X: \ x > b - \varepsilon$.
Число а называется нижней гранью множества, если
а) $\forall x \in X \ \ x \ge a$; б) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in X: \ x < a + \varepsilon$.

Теорема 1. Всякое ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

▲ Пусть A ограничено сверху, $A \neq \varnothing$ (т.е. A не является пустым множеством), B – множество всех чисел, ограничивающих A сверху, следовательно, при $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ всегда будет верно следующее утверждение: $a \le b$. Тогда по свойству непрерывности множества R существует такое c такое, что $a \le c \le b$, $a \in A$, $b \in B$. Но это и означает, что с ограничивает A сверху ($c \ge a$) и является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих A сверху ($c \le b$). Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ■

Определение 4. Система числовых отрезков $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in$R, n = 1, 2, 3,… называется *системой вложенных отрезков*, если $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1$(рис.1).

Теорема 2. (принцип вложенных отрезков). Всякая система вложенных отрезков имеет хотя бы одну общую точку.

▲ Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, следовательно, $a_m \le b_n$ (рис. 1), $m, n \in N$. Тогда по свойству непрерывности множества R существует такое $c \in R$, что выполняется неравенство $a_m \le c \le b_n$, $m,n \in N$, в частности, $a_n \le c \le b_n$, $n \in N$. ■

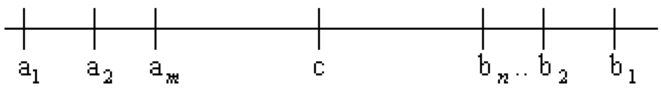

Рис. 1

Замечание. Для всякой системы вложенных отрезков, по длине стремящихся к 0, общая точка единственна.

▲ Пусть c_1 и c_2 – две общие точки и $c_1 \neq c_2$, тогда длина любого отрезка системы будет не меньше, чем $| c_2 - c_1 |$, что противоречит условию стремления к 0 длин отрезков. ■

Комплексные числа
(разбирается на практических занятиях)

Определение 5. Комплексным числом z называется пара действительных чисел x и y, которая обычно записывается в виде

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где i – некоторый символ. Число x называется действительной частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $x = \mathrm{Re}\, z$. Число y называется мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $y = \mathrm{Im}\, z$.

Определение 6. Два комплексных числа называются равными, если у них совпадают действительные и мнимые части.

Определение 7. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $z = x + iy$.

Определение 8. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа. Тогда:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$.

2) Для определения произведения $z_1 z_2$ формально перемножим их, используя обычные свойства действительных чисел и принимая, что $i^2 = i \cdot i = -1$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Последнее комплексное число и берется за определение произведения $z_1 z_2$. Из этого определения, в частности, следует, что $i^2 = ii = -1$ $(x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 1)$.

По определению $z^n = z \cdot z ... z$ (n раз). В частности $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, ...$

3) Для определения частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ также проведем формальные преобразования, домножая числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 - i^2 y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Это число и берется за определение частного $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Легко проверить, что введенные действия обладают обычными свойствами аналогичных действий над действительными числами. Отметим также, что

$$1)\ \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2. \quad 2)\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \quad 3)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Неравенств для комплексных чисел нет.

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Сопоставив комплексному числу $z = x + iy$ точку плоскости $0xy$ с координатами (x, y), мы получим взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости $0xy$, которую мы будем при этом называть комплексной плоскостью, а произвольную точку (x, y) обозначать также числом $z = x + iy$.

Определение 9. Полярные координаты r и φ точки (x, y) называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначаются $r = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z$.

На рис. 2 угол φ определяется с точностью до целого кратного 2π. Единственное значение аргумента, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ ($\arg z$ находится по любой из этих трех формул с учетом четверти комплексной плоскости, в которой лежит z).

Если же $z = 0$, то $r = 0$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$ – любой.

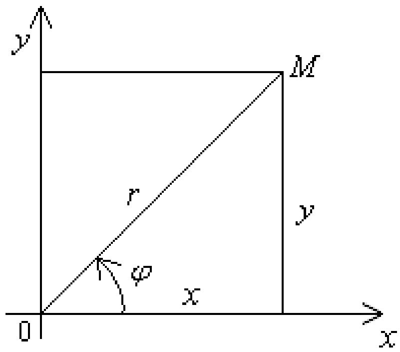

Рис. 2

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то $|z_2 - z_1| = |x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, т.е. $|z_2 - z_1|$ – это расстояние на комплексной плоскости между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), или между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Из рис. 2 видно, что для комплексного числа $z = x + iy$ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \Rightarrow$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Определение 10. Форма записи (2) называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда:

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1 r_2\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] =$
$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$, т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются;

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$
$= \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$
$= \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$, т.е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются;

в) из свойства а) следует, что если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\ldots\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т.е. при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на эту степень;

г) извлечение корня из комплексного числа

Определение 11. Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w, что $w^n = z$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, тогда, согласно свойству в),

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на число, кратное 2π, т.е.

$\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}; n\psi = \varphi + 2\pi k, \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k$ – любое целое число. Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (3)$$

В этой формуле достаточно брать $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1$, так как при следующих значениях k значения корня начнут повторяться.

Показательная форма комплексного числа

Введем понятие числа е в мнимой степени: положим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (4)$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*.

Используя (4), формулу (2) можно переписать следующим образом:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \qquad (5)$$

Определение 12. Последняя форма записи называется показательной формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами в показательной форме

При записи комплексных чисел в показательной форме сохраняются обычные свойства показательной функции действительного переменного. А именно, пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда, используя полученные выше результаты, имеем:

а) $z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

в) если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = (re^{i\varphi})^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$;

г) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \kappa = 0,1,2,\ldots,n-1.$

ФУНКЦИИ

Определение 1. Пусть X и Y – два произвольных множества. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y \in Y$, обозначаемый $f(x)$, и если каждый элемент $y \in Y$ при этом оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, то такое соответствие называется *функцией* и обозначается $y = f(x)$. Множество X называется *областью определения функции*, а множество Y – *областью ее значений*. Элемент y называется *образом элемента* x, а элемент x – *прообразом элемента* y (прообраз может быть и не один).

Примеры:

1) $X \subset R$, $Y \subset R$ – это действительные функции действительного переменного;
2) X – множество точек плоскости $0xy$, $Y \subset R$; это функции двух переменных;
3) X, Y – множества комплексных чисел; это функции комплексного переменного;
4) $X = N$ – множество натуральных чисел, $Y \subset R$ – такие функции называются *последовательностями*.

Определение 2. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений Y. Пусть для $\forall y \in Y$ существует только один прообраз $x \in X$. Обозначим этот прообраз $f^{-1}(y)$. Тогда функция, определенная на Y и ставящая в соответствие $\forall y \in Y$ его прообраз $x = f^{-1}(y)$, называется *обратной функцией* к f и обозначается f^{-1}.

Определение 3. Пусть заданы функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$, и область определения функции f содержит область значений функции φ. Тогда $\forall x \in X$ из области определения функции φ соответствует некоторый элемент $y = \varphi(x)$, а этому y соответствует некоторый элемент $z = f(y)$. Таким образом, $\forall x$ из области определения функции φ соответствует один элемент z. Такое соответствие, или функция, называется *сложной функцией*, или *суперпозицией функций* φ и f и обозначается $z = f(\varphi(x))$.

Далее будем рассматривать такие функции, что $X \subset R$, $Y \subset R$, и под словом «функция» (если не оговаривается что-либо другое) подразумевать именно их.

Определение 4. Основными элементарными функциями называются функции $y = c$, $y = x^{\alpha}$, $y = a^{x}$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Определение 5. Всякая функция, которая может быть явным способом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется *элементарной*.

Среди элементарных функций выделим *многочлены*, т.е. функции вида $P_n(x) = a_0 x^n + {}+a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$ (число n называется степенью многочлена; многочлены первой степени $y = ax + b$ называются также *линейными функциями*) и *рациональные функции (рациональные дроби)*, т.е. функции вида y = $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены (рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя $P(x)$ меньше степени знаменателя $Q(x)$).

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела последовательности и предела функции

Определение 6. Число a называется пределом последовательности $\{ x_n \}$, (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N, зависящий от ε, такой, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство $| x_n - a | < \varepsilon$. Или в краткой записи:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) :\ \forall\, n > N\ \ | x_n - a | < \varepsilon$.

Смысл состоит в том, что члены последовательности $\{x_n\}$ сколь угодно близки к пределу a, т.е. отличаются от него меньше, чем на любое наперед заданное число ε, если номера этих членов достаточно велики, т.е. больше, чем некоторый номер $N = N(\varepsilon)$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

▲ Проверим, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon)$: $\forall\, n > N\ \ \left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Значит, в качестве N можно взять любой номер, такой, что $N \ge \dfrac{1}{\varepsilon}$: если $n > N$, а $N \ge \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (также видно, что чем меньше ε, тем больше N). ■

Далее имеем: $| x_n - a | < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Определение 7. Интервал $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε-*окрестностью* точки a (или просто ее окрестностью и обозначается тогда $U(a)$). Множество $U(a, \varepsilon)\backslash\{a\}$ называется *проколотой* ε-*окрестностью* (или проколотой окрестностью) точки a и обозначается $\overset{o}{U}(a,\varepsilon)$ (или $\overset{o}{U}(a)$).

Определение 8 (равносильное определению 6).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) :\ \forall\, n > N\ \ x_n \in U(a, \varepsilon)$$

По аналогии даются определения бесконечных пределов последовательностей. Последовательности с такими пределами называются *бесконечно большими*. Например,

Определение 9.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0\ \exists\, N = N(M) > 0 :\ \forall\, n > N\ \ \ x_n > M$$

(смысл: члены последовательности сколь угодно велики, т.е. больше любого наперёд заданного числа M, если номера n этих членов достаточно велики, т.е. при номерах n, больших некоторого номера N);

Определение 10 (определение предела функции в точке по Коши). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой $\overset{0}{U}(a)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in \overset{0}{U}(a, \delta)\ \ f(x) \in U(b, \varepsilon)$. Или: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) : \forall\, x,\ 0 < | x - a | < \delta\ \ | f(x) - b | < \varepsilon$ (в этом определении x приближается к a, но не равен a).

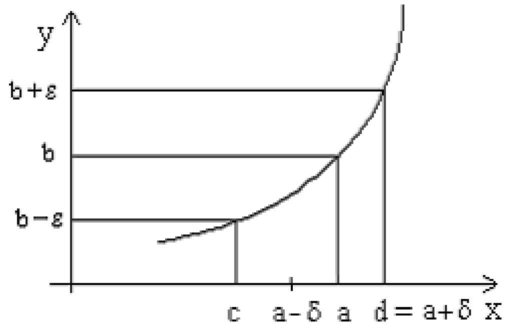

Рис. 1

Согласно определению, при $a - \delta < x < a + \delta$ график функции (рис. 1) лежит в полосе $b - \varepsilon < y < b + \varepsilon$. При определении δ отрезки $[c,a]$ и $[a,d]$, как правило, не равны друг другу. Чтобы не выйти за пределы полосы $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ надо исходить из ближайшего к a края отрезков c или d. При уменьшении ε, соответственно, уменьшается и δ.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} 10^{|x|} = 1$.

▲Проверим, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x,\ 0 < |x| < \delta \quad |10^{|x|} - 1| < \varepsilon$. Так как $10^{|x|} - 1 > 0$, то $10^{|x|} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 10^{|x|} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |x| < lg(1 + \varepsilon)$. Отсюда ясно, что в качестве δ можно взять любое $\delta \le lg(1 + \varepsilon)$. Тогда, если $|x| < \delta$, а $\delta \le lg(1 + \varepsilon)$, то $|x| < lg(1 + \varepsilon)$. ■

Определение 11. По аналогии с определением 10, запишем:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0\ \exists\ \delta = \delta(M) > 0$: $\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \quad |f\,x)| > M$; такие функции называются *бесконечно большими* при $x \to a$.

Односторонние пределы. Если $f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$ только с одной стороны (справа ($x > a$) или слева ($x < a$)), то b называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа или слева и обозначается:

$b = f(a + 0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $b = f(a - 0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (рис. 2).

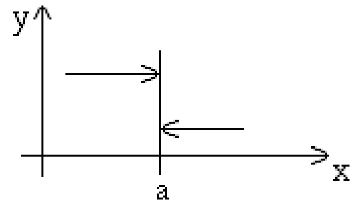

Рис. 2

Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то существует и $f(a + 0) = f(a - 0) = b$. Однако из существования обоих односторонних пределов $f(a + 0) = b_1$ *и* $f(a - 0) = b_2$ существование предела функции $f(x)$ в точке a следует только при $b_1 = b_2$. Т.е. функция имеет предел в некоторой точке тогда и только тогда, когда её односторонние пределы в этой точке существуют и совпадают.

В силу однотипности построения теории пределов последовательностей и функций, эти теории излагаются параллельно.

Единственность предела последовательности и функции

Теорема 1. Последовательность (функция) не может иметь более одного предела.

▲ 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_2$, $a_1 \neq a_2$. Выберем непересекающиеся окрестности $U(a_1)$ и $U(a_2)$. Согласно определению 8, $\exists\ N_1: \forall\ n > N_1\ x_n \in U(a_1)$ и $\exists\ N_2: \ \forall\ n > N_2$ $x_n \in U(a_2) \Rightarrow \forall\ n > \max(N_1, N_2)\ x_n \in U(a_1)$ и $x_n \in U(a_2)$.

Это означает, что все члены $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера N_1, попадут в изображённую на чертеже окрестность точки a_1, а с некоторого другого номера N_2, попадут в изображенную на чертеже окрестность точки a_2 (рис. 3). Тогда, начиная с большего из этих номеров, все члены последовательности должны попасть в обе окрестности сразу, чего быть не может.

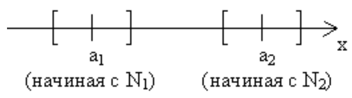

Рис. 3

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$, $b_1 \neq b_2$. Выберем непересекающиеся окрестности $U(b_1)$ и $U(b_2)$. По определению 10, $\exists\ \delta_1: \forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_1)\ f(x) \in U(b_1)$ и $\exists\ \delta_2: \forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_2)$ $f(x) \in U(b_2) \Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a, \min(\delta_1, \delta_2))\ f(x) \in U(b_1)$ и $f(x) \in U(b_2)$, чего быть не может. ■

Ограниченность последовательностей и функций, имеющих конечный предел

Определение 12. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если множество ее значений является ограниченным сверху (снизу). Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на некотором множестве, если множество ее значений на этом множестве является ограниченным сверху (снизу). Функция $y = f(x)$ называется ограниченной при $x \to a$ сверху (снизу), если она ограниченна сверху (снизу) в некоторой проколотой окрестности точки a. Ограниченные сверху и снизу последовательности и функции называются просто ограниченными.

Таким образом, $\{x_n\}$ ограничена $\Leftrightarrow\ \exists\ M > 0:\ \forall n \in N\ |x_n| \leq M$.

Замечание. Для этого достаточно, чтобы последнее неравенство выполнялось $\forall n > m$, где m - некоторое число: если для $\forall n > m\ |x_n| \leq M$, то взяв в качестве M_1 максимальное из чисел $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|, M$, найдем, что $\forall\ n \in N\ |x_n| \leq M_1$.

$f(x)$ ограничена при $x \to a \Leftrightarrow \exists\ M > 0$ и $\delta > 0$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta)\ |f(x)| \leq M$.

Теорема 2. Если последовательность (функция) имеет конечный предел, то она ограничена (при $x \to a$).

▲ 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ N > 0: \forall\ n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$. Но $|x_n - a| \geq |x_n| - |a| \Rightarrow \forall n > N\ |x_n| - |a| < \varepsilon,\ |x_n| < |a| + \varepsilon$. Взяв $M = |a| + \varepsilon$, получаем ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta > 0: \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta$ $|f(x) - b| < \varepsilon$. Но $|f(x) - b| \geq |f(x)| - |b| \Rightarrow \forall\ x,\ 0 < |x - a| < \delta\ |f(x)| - |b| < \varepsilon,\ |f(x)| < |b| + \varepsilon$, что (при $M = |b| + \varepsilon$) и означает ограниченность функции $y = f(x)$ при $x \to a$. ■

Задачи. Доказать, что

1) $x_n \le b$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow a \le b$ ($x_n \ge b$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow a \ge b$);

2) $f(x) \le c,\ c \in \overset{0}{U}(a)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow b \le c$ ($f(x) \ge c,\ c \in \overset{0}{U}(a)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow b \ge c$).

3) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ и $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

▲1) $x_n \le b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Будем доказывать методом "от противного". Пусть $a > b$. Рассмотрим окрестность $U(a)$ такую, что $\forall x \in U(a)$ ($x \ge b$). Согласно определению 8, $\exists N$: $\forall n > N$ $x_n \in U(a) \Rightarrow x_n \ge b$, что противоречит условию (рис. 4). Аналогично рассматриваются остальные случаи примеров 1) и 2).

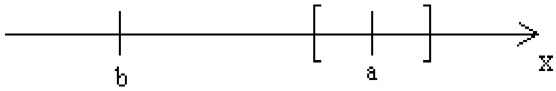

Рис. 4

3) Здесь очевидно, что $N \ge 0$ и $\delta \ge 0$ можно взять любыми числами. ■