ЗАНЯТИЕ 4.

4. СРАВНЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Бесконечно малые функции и их сравнение

Определение 4.1. Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \text{ или } \lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0.$$

Если $\lim_{a\to 0}\alpha(x)=0$, то это значит, что для любого наперед заданного произвольно малого числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, будет удовлетворяться неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Например, функция $\alpha(x)=(x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x\to 1$, так как $\lim_{x\to 1}\alpha(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$.

Функция $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ есть бесконечно малая при $x\to\infty$, так как $\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

4.1.1.Основные свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций – функция бесконечно малая.
2. Произведение ограниченной функции (или константы) на функцию бесконечно малую - функция бесконечно малая.
3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций - функция бесконечно малая.

4.1.2. Сравнение бесконечно малых функций

Заметим, что частное двух бесконечно малых функций, может быть какой угодно функцией, даже – бесконечно большой.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые (б.м.) функции при $x\to a$.

Определение 4.1. Если $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ - б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Определение 4.2. Если $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ называют б.м. более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

Определение 4.3. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=q\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б.м. одного порядка малости.
Если $q=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными (или равносильными) б.м. и обозначают знаком $\sim$, т.е. $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Определение 4.4. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – не существует (конечный или бесконечный), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют несравнимыми б.м.

Пример. $\alpha(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ и $\beta(x)=x$ - б.м. при $x\to 0$. Но их отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\sin\frac{1}{x}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $x\to 0$.
В этом случае $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы.

Определение 4.5. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=q\neq 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ - б.м. $k-$го порядка малости относительно $\beta(x)$.

4.1.3. Связь бесконечно малых функций с функциями бесконечно большими

Теорема 4.1. Если функция $f(x)$- бесконечно-большая при $x\to a$, то функция $\alpha(x)=\frac{1}{f(x)}$ при $x\to a$ - будет бесконечно малой.

Теорема 4.2. Если $\alpha(x)$ - б.м. функция при $x\to a$ и в некоторой окрестности $(a-\delta,a+\delta)$ точки a(кроме, быть может, самой точки a) $\alpha(x)\neq 0$, то функция $f(x)=\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x\to a$.

4.1.4. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях

Теорема 4.3. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x),\beta_1(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to a$ и $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$; $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Теорема 4.4. Для того, чтобы две б.м. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность при $x\to a$ была бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем каждая из них.

Заметим, что теорема 4.3. имеет место не только для б.м. функций. Так, при вычислении предела частного двух функций полезна следующая обобщающая теорема

Теорема 4.5. Если при $x \to a$ и $f(x) \sim f_1(x)$; $g(x) \sim g_1(x)$, и существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ (конечный или бесконечный) то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Таблица наиболее известных эквивалентных б.м. функций при $x \to 0$

$\sin x \sim x$

$tgx \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$arctgx \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a$

$e^x - 1 \sim x$

$(1+x)^m - 1 \sim mx$

$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

4.1.5. О символе o (символ Ландау)

Пусть $f(x)$ определена на некотором интервале (a,b), содержащем точку a и $f(x) \neq 0$ в точках этого интервала, кроме может быть самой точки a. Тогда под символом $o(f(x))$, $x \to a$ (читают: «о малое от $f(x)$ при $x \to a$) понимают такую функцию, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$. Очевидно, таких функций будет не одна. Например, это будет и $(x-a) f(x)$ и $(x-a)^2 f(x)$ при $x \to a$ и т.д. Таким образом, $o(f(x))$ при $x \to a$ это собирательный образ множества всех функций, которые удовлетворяют условию $\lim\limits_{x \to a} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$. В частном случае, когда $f(x) = 1$, символ $o(1)$ выражает б.м. функцию при $x \to a$. Если

$f(x)$ - б.м. функция при $x \to a$, то $o\big(f(x)\big)$ будет представлять множество б.м. функций более высокого порядка малости при $x \to a$ по сравнению с $f(x)$.

При обращении с символом $o\big(f(x)\big)$ полезно иметь в виду следующие правила.

$$o\big(cf(x)\big) = o\big(f(x)$$
$$o\big(f(x)\big) \cdot o\big(g(x)\big) = o\big(f \cdot g\big)$$
$$o\big(f(x)\big) + o\big(g(x)\big) = o\big(f(x)\big)$$
$$o\Big(o\big(f(x)\big)\Big) = o\big(f(x)\big)$$

Пользуясь таблицей эквивалентных б.м. функций и теоремой 4.4, можно получить полезные формулы, справедливые при $x \to 0$

$$\sin(x) = x + o(x)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x)$$
$$tg(x) = x + o(x)$$
$$e^x = 1 + x + o(x)$$
$$\ln(1+x) = x + o(x)$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + o(x)$$

Эти формулы называют асимптотическими, поскольку эти равенства имеют место лишь при $x \to 0$.

4.2. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

4.2.1. Доказать утверждение $\sin x^3 = o\big(x^2\big)$ при $x \to 0$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3} = 0$, ч.т.д.

4.2.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+x^2\big)}{\sin^3 3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o\left(x^2\right)}{\left(3x+o\left(3x\right)\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\dfrac{6o\left(3x\right)}{x}+\dfrac{o^2\left(3x\right)}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{9}$.

Обратите внимание, что в случае разности бесконечно малых, отдельные слагаемые менять на эквивалентные при вычислении предела отношения в общем случае нельзя.

Такая замена может привести к неправильному результату.

4.2.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Решение. Если использовать эквивалентности из таблицы известных эквивалентностей, то при $x\to 0$, получим

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$, что неправильно.

Если записать $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x+o_1\left(x\right)\right)-\left(x+o_2\left(x\right)\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o_1\left(x\right)-o_2\left(x\right)}{x^3}$, то видно, что последний предел не обязательно равен нулю, так как числитель не является бесконечно малой более высокого порядка, чем x^3.

На самом деле $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx\left(1-\cos x\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

4.2.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin 3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\sin 3x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{3x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{6\cdot 2}=0.$

4.2.5. Определить порядок относительно x функции $f\left(x\right)=\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$, бесконечно малой при $x\to 0$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-1-2\sqrt{x}-x}{x^k\left(\sqrt{1+2x}+1+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-2\sqrt{x}}{x^k}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{x^k}=-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{x^k}=-1$$ при $k=\frac{1}{2}$; в других случаях предел равен 0 или ∞.

Таким образом, порядок малости функции относительно x равен $\frac{1}{2}$.

4.2.6. Исходя из эквивалентности при $x\to0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{1}{2}x$, вычислить приближенно $\sqrt{1632}$.

Решение. Представим $\sqrt{1632}=\sqrt{1600+32}=40\sqrt{1+\frac{32}{1600}}$.

Так как $\sqrt{1+x}\sim1+\frac{x}{2}$, $40\sqrt{1+\frac{32}{1600}}\approx40\left(1+\frac{16}{1600}\right)=40(1+0.01)=40,4$.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.3.1. Исходя из эквивалентности при $x\to0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{x}{2}$, вычислить приближенно: а) $\sqrt{105}$; б) $\sqrt{0,021}$.

Вычислить пределы функций:

4.3.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 4.3.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 4.3.4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;

4.3.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$. 4.3.6. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; 4.3.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Определить порядок относительно x данной функции, бесконечно малой при $x\to0$

4.3.8. $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$; 4.3.9. $\ln\left(1+\sqrt{x\sin x}\right)$; 4.3.10 $\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$; 4.3.11. $e^{\sin x}-1$;

4.3.12. $\sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

Ответы: 4.3.1. а) 10,25; б) 0,145; 4.3.2. $1/2$; 4.3.3. $3/4$; 4.3.4. ∞; 4.3.5. -1;

4.3.6. $\sqrt{e}$; 4.3.1. $3/2$; 4.3.8. $1/3$; 4.3.9. 1; 4.3.10. 2; 4.3.11. 1; 4.3.12. 1.