## ЛЕКЦИЯ 2

Бесконечно малые последовательности и функции и их свойства

**Определение 1.** Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ (б.м., $x\to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Т.е. $\{x_n\}$ – б.м. $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n| < \varepsilon$;

$y = f(x)$ – б.м., $x\to a$ $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x\in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $|f(x)| < \varepsilon$.

**Теорема 1.** Сумма двух бесконечно малых последовательностей (функций при $x\to a$) есть последовательность (функция при $x\to a$) бесконечно малая.

▲ 1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – б.м. Докажем, что $\{x_n + y_n\}$ – б.м., т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n + y_n| < \varepsilon$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$\exists\ N_1$: $\forall n > N_1$ $|x_n| < \varepsilon/2$ и $\exists\ N_2$: $\forall n > N_2$ $|y_n| < \varepsilon/2$,

$\Rightarrow \forall\ n > N = \max(N_1, N_2)$ $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

2. Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$ – б.м., $x\to a$. Докажем, что $y = f(x) + g(x)$ – б.м., $x\to a$, т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x\in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $|f(x) + g(x)| < \varepsilon$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\ \delta_1$: $\forall x\in \overset{0}{U}(a,\delta_1)$ $|f(x)| < \varepsilon/2$ и $\exists\ \delta_2$: $\forall x\in \overset{0}{U}(a,\delta_2)$ $|g(x)| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall x\in \overset{0}{U}(a, \min(\delta_1,\delta_2))$ $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ■

**Теорема 2.** Произведение бесконечно малой последовательности (функции при $x\to a$) на ограниченную последовательность (функцию при $x\to a$) есть последовательность (функция при $x\to a$) бесконечно малая.

▲ 1. Пусть $\{x_n\}$ – б.м., $\{y_n\}$ – ограниченная, $|y_n| \le M$. Докажем, что $\{x_n y_n\}$ – б.м., т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n y_n| < \varepsilon$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ N$: $\forall n > N$ $|x_n| < \varepsilon/M \Rightarrow \forall n > N$ $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$.

2. Пусть $f(x)$ – б.м., $x\to a$, $g(x)$ – ограниченная при $x\to a$, т.е. $\exists\ \delta_1$: $\forall x\in \overset{0}{U}(a, \delta_1)$ $|g(x)| \le M$. Докажем, что $f(x)g(x)$ – б.м., $x\to a$, т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x\in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $|f(x)g(x)| < \varepsilon$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta_2$ такое, что $\forall\ x\in \overset{0}{U}(x, \delta_2)$ $|f(x)| < \varepsilon/M \Rightarrow \forall\ x\in \overset{0}{U}(a, \min(\delta_1,\delta_2))$ $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$. ■

***Следствие 1.*** Произведение б.м. последовательностей (функций) есть последовательность (функция) б.м.

▲Так как бесконечно малая имеет конечным пределом 0, а любая последовательность или функция, имеющая конечный предел, ограничена, то можно применить теорему 4. ■

***Следствие 2.*** Произведение б.м. последовательности (функции) на постоянное число есть последовательность (функция) б.м.

▲Так как постоянное число можно рассматривать как ограниченную последовательность или функцию.■

***Следствие 3.*** Разность б.м. последовательностей (функций) есть последовательность (функция) б.м.

▲Для последовательностей: $x_n - y_n = x_n + (-1)\, y_n$, здесь $x_n$ – б.м. по условию, а $(-1)y_n$ – б.м. по следствию 2; значит, $x_n + (-1)\, y_n$ – б.м. по теореме 1; аналогично для функций: $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)\, g(x)$ и т.д.). ■

**Теорема 3.** Частное от деления бесконечно малой последовательности (функции при $x \to a$) на последовательность (функцию), имеющую (при $x \to a$) конечный и отличный от 0 предел, есть последовательность (функция при $x \to a$) бесконечно малая.

▲ $\dfrac{x_n}{y_n} = x_n \dfrac{1}{y_n}$, $\{x_n\}$– б.м. и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$; $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\dfrac{1}{g(x)}$, $f(x)$ – б.м. и $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \neq 0$

$\Rightarrow$ в силу теоремы 2, для доказательства теоремы достаточно показать ограниченность $\{\dfrac{1}{y_n}\}$ или ограниченность при $x \to a$ функции $\dfrac{1}{g(x)}$.

1. Пусть в определении 1 $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2} \Rightarrow \exists N$: $\forall n > N$ $|y_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$. Но $|y_n - b| = |b - y_n| \geq$ $\geq |b| - |y_n| \Rightarrow \forall n > N$ $|b| - |y_n| < \dfrac{|b|}{2} \Leftrightarrow |y_n| > \dfrac{|b|}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{|y_n|} < \dfrac{2}{|b|} \Rightarrow \{\dfrac{1}{y_n}\}$ – ограничена.

2. В определении 1 возьмем $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2} \Rightarrow \exists\, \delta > 0$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $|g(x) - b| < \dfrac{|b|}{2}$. Но $|g(x) - b| = |b - g(x)| \geq |b| - |g(x)| \Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $|b| - |g(x)| < \dfrac{|b|}{2} \Leftrightarrow |g(x)| > \dfrac{|b|}{2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|b|} \Rightarrow \dfrac{1}{g(x)}$ ограничена. ■

Связь существования предела с бесконечно малыми. Основные теоремы о пределах

**Теорема 4.** Для того чтобы предел последовательности (функции при $x \to a$) был равен некоторому числу $b$, необходимо и достаточно, чтобы эту последовательность (функцию) можно было представить в виде суммы этого числа $b$ и бесконечно малой последовательности (функции при $x \to a$).

Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow x_n = b + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – последовательность б.м.;

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – функция б. м., $x \to a$.

▲ *Необходимость.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n - b| < \varepsilon$. Положим $x_n - b = \alpha_n$, $x_n = b + \alpha_n$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|\alpha_n| < \varepsilon \Rightarrow \{\alpha_n\}$ – б.м.

*2.* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $|f(x) - b| < \varepsilon$. Положим $f(x) - b = \alpha(x)$, $f(x) = b + \alpha(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $|\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \alpha(x)$ – б.м., $x \to a$.

*Достаточность.*

1. $x_n = b + \alpha_n$, $\{\alpha_n\}$– б.м. $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N\ \ |\alpha_n| < \varepsilon$. Но $\alpha_n = x_n - b\ \Rightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N\ \ |x_n - b| < \varepsilon$, но это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ (см. выше).

2. $f(x) = b + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ – б.м., $x \to a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ \ |\alpha(x)| < \varepsilon$. Но $\alpha(x) = f(x) - b \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ \ |f(x) - b| < \varepsilon$, но это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (см. выше). ■

**Теорема 5.** Предел суммы двух последовательностей (функций) равен сумме пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют.

▲ 1.Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow$по теореме 4 (необходимость) $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б.м. Сложим оба этих равенства: $x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$. В этой формуле $a + b$ – число, $\alpha_n + \beta_n$ – б.м. по теореме 1 $\Rightarrow$ по теореме 4 (достаточность) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow$ по теореме 4 (необходимость) $f(x) = b + \alpha(x)$, $g(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м., $x \to a$. Сложим оба этих равенства: $f(x) + g(x) = (b + c) + (\alpha(x) + \beta(x))$. В этой формуле $b + c$ – число, $\alpha(x) + \beta(x)$ – б.м. по теореме 1 $\Rightarrow$ по теореме 4 (достаточность) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b + c$. ■

**Теорема 6.** Предел произведения двух последовательностей (функций) равен произведению пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют.

▲ 1.Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow$по теореме 4 (необходимость) $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б.м. Перемножим эти равенства: $x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n)$. В этой формуле $ab$ – число, а выражение $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$ – б.м. по теоремам 1 и 2 и их следствиям $\Rightarrow$ по теореме 4 (достаточность) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow$ по теореме 4 (необходимость) $f(x) = b + \alpha(x)$, $g(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м., $x \to a \Rightarrow f(x)g(x) = bc + (b\beta(x) + c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x))$. В этой формуле $bc$ – число, а выражение $b\beta(x) + c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ – б.м. по по теоремам 1 и 2 и их следствиям $\Rightarrow$ по теореме 1 (достаточность) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$. ■

***Следствие 1.*** Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

▲ По теореме 6 $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = \lim\limits_{n\to\infty} c \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ( так как $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ – см. задачу 3) предыдущей лекции. Так же $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = \lim\limits_{x\to a} c \cdot \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$. ■

***Следствие 2.*** Предел разности двух последовательностей (функций) равен разности пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют.

▲ Применяя теорему 5 и следствие 1, имеем:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + (-1)\,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty}(-1)\,y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + (-1)\lim\limits_{n\to\infty} y_n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) + (-1)\,g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a}(-1)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) +$

$+ (-1)\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$. ■

**Теорема 7.** Предел отношения двух последовательностей (функций) равен отношению пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют и предел знаменателя отличен от 0.

▲1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow$ по теореме 4 (необходимость)

$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б.м. $\Rightarrow$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{ab+b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}.$$

По теореме 3 последняя дробь есть б.м., так как ее числитель, согласно предыдущему, б.м. и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b(b+\beta_n) = b\lim\limits_{n\to\infty}(b+\beta_n) = b(b+0) = b^2 \neq 0$, теперь по теореме 4 (достаточность, $\frac{a}{b}$ – число) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow$ по теореме 4 (необходимость)

$f(x) = b + \alpha(x), g(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м., $x\to a \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)} = \frac{b}{c} + \left(\frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)} - \frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c} + \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c(c+\beta(x))}.$$

По теореме 3 последняя дробь есть б.м., так как ее числитель – б.м. и $\exists \lim\limits_{x\to a} c(c+\beta(x)) =$

$= c\lim\limits_{x\to a}(c+\beta(x)) = c^2 \neq 0 \Rightarrow$ по теореме 4 (достаточность, $\frac{b}{c}$ – число) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$. ■

*Замечания.*

1) Теоремы о пределах функций справедливы и при $a = \infty$.

2) В теоремах о пределах последовательностей и функций допускаются и бесконечные пределы, если это имеет смысл: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$; $\infty\cdot\infty = \infty$; $b\cdot\infty = \infty$ $(b\neq 0)$; $\frac{b}{\infty} = 0$ $(b\neq\infty)$; $\frac{b}{0} = \infty$ $(b\neq 0)$.

3) $(+\infty) + (-\infty)$; $0\cdot\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ и т.д. – это так называемые *неопределенности* (т.е. случаи, где основные теоремы о пределах сразу не применимы).

*Примеры* раскрытия неопределенностей.

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 4n - 7} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^2}} = \frac{2}{3}$ ($\frac{\infty}{\infty}$; делим почленно на $n^2$).

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 9x + 8} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+6)(x-1)}{(x-8)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+6}{x-8} = -1$ ($\frac{0}{0}$; выделяем множитель $x-1$).

**Определение 2.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для всех $n \in N$ выполняется следующее условие: $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$); последовательность называется *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

**Теорема 8.** Любая ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет конечный предел. Любая ограниченная снизу невозрастающая последовательность имеет конечный предел. Или, объединяя эти утверждения: любая ограниченная монотонная последовательность имеет конечный предел.

▲ Пусть $\{x_n\}$ – неубывающая и ограниченная сверху последовательность. Докажем, что существует конечный предел этой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. По теореме 1 лекции 1 существует верхняя грань ограниченного сверху множества значений этой последовательности $sup\ \{x_n\} = a$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим произвольную окрестность точки $a$ $U(a,\varepsilon)$ и докажем, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в эту окрестность. По определению верхней грани $x_n \leq a$ и существует $n_0$ такое, что $x_{n_0} > a - \varepsilon$. Тогда при $n > n_0$ $x_n > x_{n_0} > a - \varepsilon$, а это и означает, что $x_n \in U(a,\varepsilon)$. ■

**Определение 3.** Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел.

**Определение 4.** Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ называется любое бесконечное подмножество членов этой последовательности $\{x_{n_k}\}$, $k = 1, 2, 3,\ldots$

**Теорема 9 (Больцано–Вейерштрасса).** У любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

▲ Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограниченна. Тогда существует отрезок $[\alpha,\beta]$ такой, что для любого номера $n \in N$ все $x_n$ принадлежат этому отрезку (рис. 1). Разделим этот отрезок пополам. Пусть $[\alpha_1, \beta_1]$ – та половина, которая содержит бесконечное число членов исходной последовательности (если обе половины такие, то берем любую из них). Выберем произвольный $x_{n_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$. Разделим $[\alpha_1, \beta_1]$ пополам. Пусть $[\alpha_2, \beta_2]$ – та половина, которая содержит бесконечное число членов исходной последовательности (если обе половины такие, то берем любую из них). Выберем произвольный $x_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$ с номером $n_2 > n_1$. Разделим $[\alpha_2, \beta_2]$ пополам и т.д.

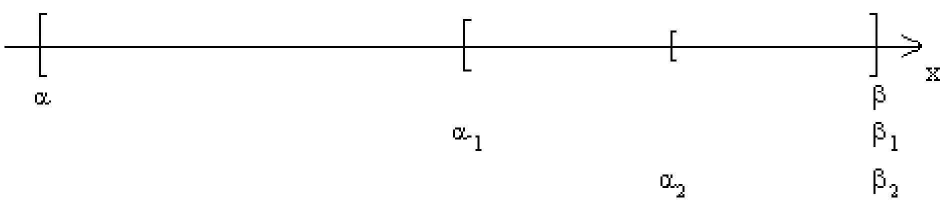


Рис. 1

Полученная система вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, по теореме 2 лекции 1 и замечанию к ней имеет единственную общую точку $a \in [\alpha_n, \beta_n]$ для всех n. Теперь докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Возьмем произвольную ε-окрестность точки a. Тогда существует отрезок $[\alpha_{k_0}, \beta_{k_0}]$, целиком лежащий в нашей окрестности. Тогда все следующие отрезки тоже будут лежать в этой окрестности. Значит, все точки $x_{n_k}$, у которых $k > k_0$, лежат в этой окрестности. Или: $\exists\, k_0 : \forall\, k > k_0\ [\alpha_k, \beta_k] \in U(a,\varepsilon) \Rightarrow \forall\, k > k_0\ \ x_{n_k} \in U(a,\varepsilon)$. ■

**Теорема 10 («о двух милиционерах»).**

1. Пусть $\{x_n\}$, $\{t_n\}$, $\{y_n\}$ – три последовательности и $\forall n \in N\ \ x_n \le t_n \le y_n$. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \Rightarrow$ существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$.

2. Пусть функции $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = g(x)$ определены в некоторой $\overset{0}{U}(a)$ и $\forall\, x \in \overset{0}{U}(a)$ $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \Rightarrow$ существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

▲ 1. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, N_1 : \forall\, n > N_1\ x_n \in U(a,\varepsilon)$; $\exists\, N_2 : \forall\, n > N_2\ \ y_n \in U(a,\varepsilon)$ $\Rightarrow\ \forall\, n > N = \max(N_1, N_2)\ \ x_n \in U(a,\varepsilon), y_n \in U(a,\varepsilon) \Rightarrow \forall\, n > N\ \ t_n \in U(a,\varepsilon)$.

2. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta_1 > 0:\ \forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_1)\ \ f(x) \in U(b,\varepsilon)$; $\exists\ \delta_2 > 0$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_2)\ \ g(x) \in U(b,\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ $f(x) \in U(b,\varepsilon)$, $g(x) \in U(b,\varepsilon) \Rightarrow$ $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ \ \varphi(x) \in U(b,\varepsilon)$. ■

*Замечание.* В случае функций теорема верна и при $a = +\infty$.

**Теорема 11 (о пределе сложной функции)**. Пусть дана сложная функция $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$, т.е. $z = f(\varphi(x))$. Пусть $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = c$ и $\lim\limits_{y\to c} f(y) = b$ и $\forall x \in \overset{0}{U}(a)\ (y \ne c) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x))$ $= b$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y\to c} f(y)$ – формула замены переменной).

▲ Докажем, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ \ z \in U(b,\varepsilon)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow \exists\ \sigma > 0:\ \forall y \in \overset{0}{U}(c,\sigma)\ \ z \in U(b,\varepsilon)$. Далее $\exists\ \delta > 0:\ \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ \ y \in \overset{0}{U}(c,\sigma)$ (при достаточно малом $\delta$ $y \ne c$ по условию) $\Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ \ y \in \overset{0}{U}(c,\sigma) \Rightarrow z \in U(b,\varepsilon)$. ■