ЛЕКЦИЯ 3

Некоторые замечательные пределы

Теорема 1 (первый замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (1)

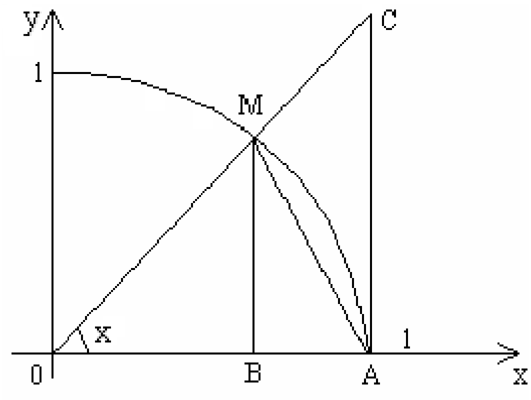

Рис. 1

▲ Пусть сначала $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Как видно из рис. 1, площадь треугольника OMA меньше площади сектора OMA, а последняя площадь меньше площади треугольника OCA. Площадь сектора с углом x находится по формуле $S = \dfrac{S\text{круга}}{2\pi}x = \dfrac{\pi r^2}{2\pi}x = \dfrac{1}{2}r^2 x$, значит, $\frac{1}{2}|OA||MB| < \frac{1}{2}|OA|^2 x < \frac{1}{2}|OA||CA|$. Здесь $|OA| = 1$, $|MB| = \sin x$, $|CA| = \text{tg } x \Rightarrow$ $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\text{ tg } x$, или $\sin x < x < \text{tg } x$.

Разделим все части последнего неравенства на $\sin x > 0$ (x находится в первой четверти):

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Все функции в последней формуле четные, значит, она справедлива и для $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$.

Теперь перейдем к пределу при $x\to 0$, применяя теорему 3: $\lim\limits_{x\to 0} 1=1$, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ будет равен 1, если мы сумеем доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ или, согласно определению предела функции, $\forall\ \varepsilon >0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x$, $|x| <\delta$ $|\cos x - 1| <\varepsilon \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} < \varepsilon$.

В этом определении x достаточно мало. Далее имеем в виду, что для $x\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\sin^2\frac{x}{2}$ <1. Так как при $y < 1$ $y^2 < |y|$, то $2\sin^2\frac{x}{2} < 2|\sin\frac{x}{2}| = 2|\sin\frac{|x|}{2}|$. Так как в первой четверти $\sin x < x$, то $2|\sin\frac{|x|}{2}| < 2\frac{|x|}{2} = |x|$. Теперь вместо выполнения неравенства $2\sin^2\frac{x}{2} < \varepsilon$ нам достаточно потребовать, чтобы $|x| < \varepsilon$ (тогда $2\sin^2\frac{x}{2} < |x| < \varepsilon$), значит, в качестве δ годится любое число: $\delta \le \varepsilon$ (тогда $|x| < \delta \le \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon$). ■

Примеры. Найти пределы функций.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1 \qquad (2)$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Результаты (2) – (3) можно использовать для вычисления других пределов.

Теорема 2 (второй замечательный предел для последовательностей).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (4)$$

▲ Пусть $\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Согласно известной формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + .. = a^n + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k,$$

поделив каждую скобку на n, представим a_n в виде суммы n+1 слагаемых:

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

При переходе от a_n к a_{n+1}, т.е. при замене n на $n+1$, знаменатели дробей возрастают, значит, разность $1-\frac{i}{n}$ становится больше, т.е. в нашей сумме увеличивается каждое слагаемое, и, кроме того, добавляется еще одно ($n+2$)ое неотрицательное слагаемое, значит, для $\forall n\in N$ $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ возрастает (отсюда, кстати, $a_n > a_1 = 2$).

Проверим, что эта последовательность ограничена сверху: заменим в последней сумме каждую скобку на большую величину 1, тогда

$$a_n < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot k} < 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Это есть сумма геометрической прогрессии с $n-1$ членами, в которой $q=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$a_n < 2 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} = 2 + \frac{1/2(1-(1/2)^{n-1})}{1-1/2} = 2 + (1-(1/2)^{n-1}) < 3 \Rightarrow \{a_n\}$ ограничена сверху.

Возрастающая, ограниченная сверху последовательность $\{a_n\}$ по теореме 1 имеет конечный предел. Обозначая этот предел буквой e, получим нужное нам равенство.

Так как $2 \le a_n \le 3$, то $2 \le e \le 3$ (см. задачу выше). Можно показать, что e – иррациональное число и $e \approx 2{,}71828$. ■

Теорема 3 (второй замечательный предел для функций.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (5)$$

▲ Пусть сначала $x \to +\infty$. Для $\forall x > 1$ возьмем такое $n = n(x) \in N$, что $n \le x < n+1$ (это целая часть числа x), тогда $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Теперь пусть $x \to +\infty \Rightarrow n \to \infty$. Согласно теореме 2,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{e}{1} = e.$$

Тогда, по теореме 10 предыдущей лекции, существует $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пусть теперь $x \to -\infty$. В соответствии с теоремой 11 предыдущей лекции, заменим $y = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right),$$

что по уже доказанному, равно $e \cdot 1 = e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. ■

Примеры. Найти следующие пределы:

1) $\alpha(x)$ – б.м., $x \to a \Rightarrow \lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, $\alpha(x)$ – б.м., $x \to a$ (6)

Решение: Сделав замену $\alpha(x) = \frac{1}{y}$, имеем: $\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$.

В частности, $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad (7)$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad (8)$$

Решение: используя непрерывность функции y = ln x (ниже будет показано, что именно для непрерывных функций символы предела и функции можно менять местами), имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{(7)}{=} \ln e = 1.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad (9)$$

Решение: сделав замену $y = e^x - 1$, $x = \ln(1+y)$, и, используя непрерывность функции $y = e^x$, имеем: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} 1 : \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$.

Результаты (6) – (9) можно использовать для вычисления других пределов.

Сравнение бесконечно малых

Определение 1. Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – две б.м. функции, $x \to a$. Эти б.м. называются б.м. *одного порядка* при $x \to a$, если $\exists \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b$, $b \ne 0$, $b \ne \infty$. Если $b=1$, то б.м. называются *эквивалентными* при $x \to a$ (обозначение: $\alpha \sim \beta$, $x \to a$). Если $b=0$, то α называется б.м. *более высокого порядка*, чем β при $x \to a$ (обозначение: $\alpha = o(\beta)$, $x \to a$).

Для нахождения ряда пределов бесконечно малые удобно заменять на их эквивалентные.

Теорема 4 (о пределе отношения бесконечно малых).

Пусть $f(x)\sim\alpha(x)$, $x\to a$, $g(x)\sim\beta(x)$, $x\to a$ и $\exists\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=b\ \Rightarrow\ \exists\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$, т.е. при вычислении пределов отношения бесконечно малые можно заменять на им эквивалентные.

▲ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\dfrac{\beta(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{g(x)}=1\cdot b\cdot 1=b$. ■

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{e^{2x^2}-1}$. Согласно предыдущим примерам 2) и 3), $\ln(1+3x^2)\sim 3x^2$ и $e^{2x^2}-1\sim 2x^2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{e^{2x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2x^2}=\dfrac{3}{2}$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Непрерывность функции в точке

Определение 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, или если

$$\exists\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{10}$$

По определению предела функции, это равенство равносильно тому, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon):\ \forall x\in U(x_0,\delta)\quad f(x)\in U(f(x_0),\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon):\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

По сравнению с определением предела функции здесь опущено условие $x\neq x_0$, так как при $x=x_0$ последнее неравенство заведомо верно.

Определение 2 равносильно условию $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$. Обозначим $x-x_0=\Delta x$–приращение аргумента, $f(x)-f(x_0)=\Delta y$ – приращение функции, соответствующее данному приращению аргумента, тогда определение непрерывности 1 можно записать в другом виде.

Определение 3 (равносильное определению 2). Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если $\exists$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, или, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Приведем основные свойства функций, непрерывных в точке:

Теорема 5 (ограниченность). Пусть $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда она ограничена при $x\to x_0$.

▲ Это есть частный случай теоремы 2 лекции 1 (функция, имеющая конечный предел в точке, ограничена в окрестности этой точки). ■

Теорема 6 (сохранение знака). Пусть $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ (<0) $\Rightarrow$ $f(x) > 0$ (<0) и в некоторой окрестности точки x_0 (см. рис.2).

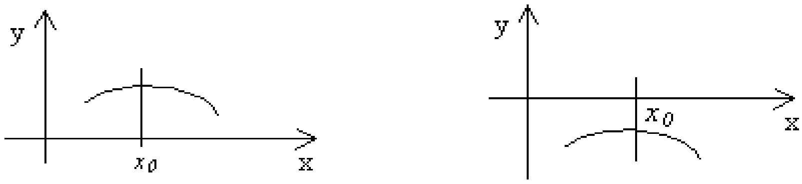

Рис.2

▲ Возьмем в определении непрерывности функции $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$ $\Rightarrow \exists\, \delta$: $\forall x \in U(x_0, \delta)$

$|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{|f(x_0)|}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \dfrac{|f(x_0)|}{2}$. Перенесем $f(x_0)$ в левую и правую части неравенства: $f(x_0) - \dfrac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \dfrac{|f(x_0)|}{2}$. Отсюда имеем:

если $f(x_0) > 0$, то $\forall x \in U(x_0, \delta)$ $f(x) > f(x_0) - \dfrac{f(x_0)}{2} = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$;

если $f(x_0) < 0$, то $\forall x \in U(x_0, \delta)$ $f(x) < f(x_0) - \dfrac{f(x_0)}{2} = \dfrac{f(x_0)}{2} < 0$. ■

Теорема 7 (арифметические операции над непрерывными функциями). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны функции $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) g(x)$ и (при $g(x_0) \neq 0$) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

▲ Все эти утверждения доказываются одинаково. Докажем только последнее из них. Согласно теореме 7 лекции 2 и определению 2,

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} \Rightarrow$ функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема 8 (непрерывность сложной функции). Пусть $z = f(\varphi(x))$ – сложная функция. Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z = f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 (проще говоря, если сложная функция составлена из двух непрерывных, то она сама непрерывна).

▲ $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = y_0$; $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$. По теореме 11 лекции 2 (здесь $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ допустимо) $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) = f(\varphi(x_0))$, что и означает непрерывность сложной функции $z = f(\varphi(x))$ в точке x_0. ■

Замечание. Полученное при доказательстве равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x))$ (оба этих предела равны $f(\varphi(x_0))$) было использовано в примерах предыдущей лекции.

Теорема 9 (непрерывность элементарных функций). Любая элементарная функция непрерывна во всех точках, где она определена

▲ Так как все элементарные функции получаются из основных элементарных функций путем арифметических операций и суперпозиций, а эти действия, по теоремам 7 и 8, сохраняют непрерывность, то нужно проверить непрерывность основных элементарных функций в точках их определения. Для некоторых из них по определению 3 имеем:

1) $y = c$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 0 = 0$;

2) $y = x$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0$;

3) $y = \sin x$: $|\Delta y| = |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right| = 2\left|\sin\dfrac{|\Delta x|}{2}\right|$;

$\forall x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ последнее *выражение* не превосходит $2\dfrac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \Rightarrow 0 \le |\Delta y| \le |\Delta x|$. По теореме «о двух милиционерах»: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} |\Delta x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} |\Delta y| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$;

4) $y = \cos x$: $|\Delta y| = |\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\dfrac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|$ и далее аналогично примеру 3). ■

Определение 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некотором интервале $(x_0-\delta, x_0)$ (или $(x_0, x_0+\delta)$). Эта функция называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-o} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0+o} f(x) = f(x_0)$).

Классификация точек разрыва

С учетом введенного выше понятия односторонних пределов, непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 равносильна выполнению условия

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0) \tag{11}$$

Определение 5. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой этой точки. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если эта функция не является непрерывной в точке x_0.

В точках разрыва функции $y = f(x)$ условие (11) не выполняется.

Определение 6. Точка разрыва x_0 функции $y = f(x)$ называется точкой разрыва *1-ого рода*, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

Определение 7. Точка разрыва 1-ого рода x_0 функции $y = f(x)$ называется *устранимой* точкой разрыва, если $f(x_0-0) = f(x_0+0)$.

В такой точке либо $f(x_0)$ не определена, либо $f(x_0-0) = f(x_0+0) \ne f(x_0)$. Если положить $f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$, то $f(x)$ станет непрерывной в точке x_0, т.е. разрыв можно устранить, изменив значение функции в одной точке.

Определение 8. Точка разрыва x_0 функции $y = f(x)$ называется точкой разрыва *2-ого рода*, если она не является точкой разрыва первого рода.

В такой точке хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ бесконечен или не существует.

Примеры.

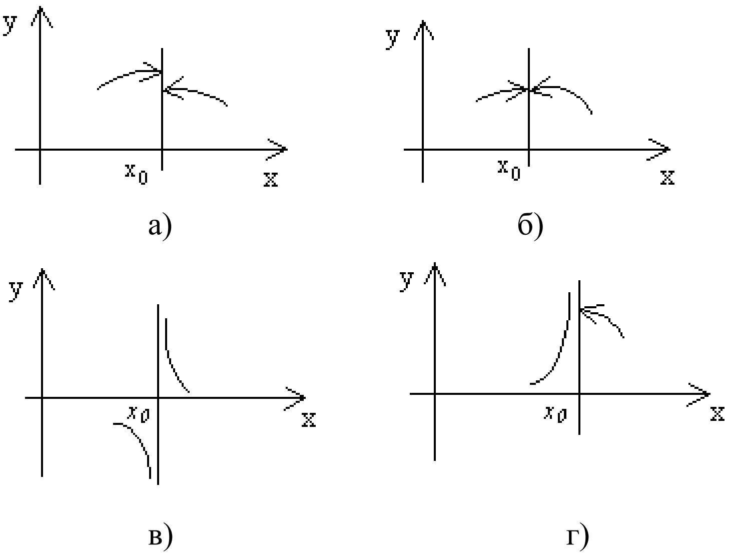

Рис.3

а) x_0 – точка разрыва первого рода, разрыв не устранимый; б) x_0 – устранимая точка разрыва; в), г) x_0 – точка разрыва второго рода.

"Исследовать функцию на непрерывность" означает, что нужно указать все точки разрыва функции, дать их классификацию и нарисовать схему графика функции в окрестностях точек разрыва.

Пример. Исследовать функцию на непрерывность: $y = \dfrac{x}{\sin x}$

Точки разрыва: $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$ (в остальных точках функция непрерывна по теоремам 7 и 9); $f(-0) = f(+0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow x = 0$ – устранимая точка разрыва; $f(\pi - 0) = +\infty$, $f(\pi + 0) = -\infty \Rightarrow x = \pi$ – точка разрыва второго рода; такими же будут все точки вида $x = \pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$.

Схема графика функции в окрестностях точек разрыва имеет вид (рис. 3):

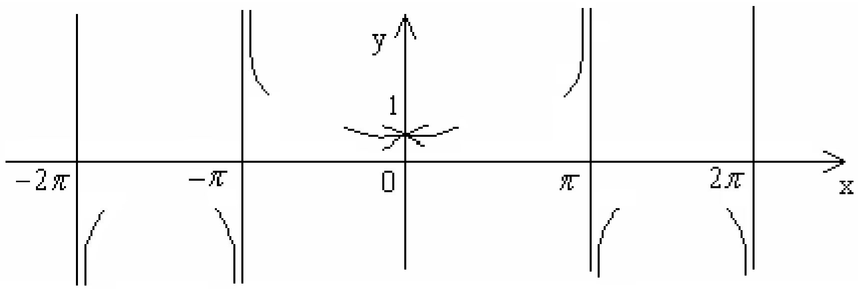

Рис. 4

Непрерывность функции на множестве

Определение 9. Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Далее речь будет идти о функциях, непрерывных на отрезке. При этом под непрерывностью на левом краю отрезка будет пониматься непрерывность справа, а под непрерывностью на правом краю отрезка будет пониматься непрерывность слева.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Приведем (для простоты) без доказательства три основных свойства:

Теорема 10. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда $f(x)$ ограничена на этом отрезке, т.е. $\exists\, M > 0$: $|f(x)| \le M$.

По этой теореме множество значений непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции f (x) ограничено, тогда по теореме 1 лекции 1 это множество имеет верхнюю и нижнюю грани $M = \sup\limits_{x\in\{a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Теорема 11. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ она достигает на этом отрезке своих верхней и нижней граней, т.е. $\exists\, x_0 \in [a,b]$ и $\overline{x}_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = M$ и $f(\overline{x}_0) = m$.

Теорема 12. $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ она принимает на этом отрезке любое промежуточное значение между m и M, т.е. если $c\in(m,M)$, то $\exists$ хотя бы одна точка $x_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = c$.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)\, f(b) < 0$ (т.е. на концах отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков), то существует хотя бы одна точка $x_0 \in (a,b)$: $f(x_0) = 0$.

▲ По условию m < 0, а M > 0 $\Rightarrow$ в теореме 8 в качестве точки c можно взять $c = 0$. ■

Данное следствие может применяться для приближенного решения уравнений, которые точно решить невозможно.

Пример. Найти корни уравнения $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.

$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ $\Rightarrow$ уравнение имеет корень $\in[0,1]$;
$f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1 = -3/8 < 0$ $\Rightarrow$ уравнение имеет корень $\in[1/2, 1]$;
$f(3/4) = 27/64 + 3/4 - 1 = 11/64 > 0$ $\Rightarrow$ уравнение имеет корень $\in[1/2,3/4]$ и т.д.
Таким способом находится корень уравнения с любой нужной точностью.