ЗАНЯТИЕ 2

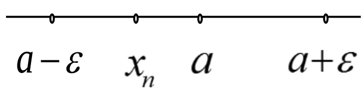
2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2.1 Предел последовательности

В основе математического анализа лежит важнейшее понятие предела переменной величины. Рассмотрим это понятие на простейшем случае, когда переменной величиной является функция целочисленного аргумента, т.е. числовая последовательность.

Пусть задана некоторая бесконечная числовая последовательность $\{x_n\}$. Изобразив ее члены точками на числовой прямой, в некоторых случаях можно заметить, что с возрастанием номера членов последовательности эти точки начинают все ближе и ближе «подбираться» к одной точке, изображающей некоторое постоянное число «a» (не обязательно являющееся членом последовательности), т.е. расстояние на числовой прямой между числом «a» и членами последовательности становится все меньше. Известно, что расстояние на числовой прямой между точками, изображающими числа x и a, равно $|x-a|$, $|x-a| = \begin{cases} x-a, если\ x \ge a \\ a-x, если\ x < a \end{cases}$.

Определение 2.1. Число a называют пределом бесконечной числовой последовательности $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать такой номер M, зависящий от ε $\left(M = M(\varepsilon)\right)$, начиная с которого все члены x_n с номерами большими $M\ (n > M)$, будут удовлетворять неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ (т.е. окажутся в ε - окрестности точки a).



На языке логико-математической символики это определение записывают:

$$x_n = f(n), n \in N; \lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M\left(M = M(\varepsilon)\right): n > M \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения и соотношения

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n;$ например, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$;

$(n+1)! = n!(n+1)$;

$C_n^m = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$; например, $C_{10}^3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$

2.2 Предел функции

Несмотря на тот факт, что последовательность – частный случай функции (функция целочисленного аргумента), определение предела функции в общем смысле будет несколько другим, так как аргумент x у функции $y=f(x)$ может стремиться к любому числу (тогда как у последовательности n стремится только к ∞). Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может самой точки a.

Определение 2.2. Число b называют пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если для всякого числа $\varepsilon>0$ (как бы мало оно ни было) можно указать такое число $\delta(\delta=\delta(\varepsilon))>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon): 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$,

т.е. $x\in(a-\delta,a+\delta)\Rightarrow f(x)\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$, это геометрически означает, что для аргументов, попавших в $\delta-$окрестность точки a, значения функции попадают в $\varepsilon-$окрестность точки b.

Рассмотрим понятия односторонних пределов функции.

Определение 2.3. Если $y=f(x)$ стремится к пределу b при $x\to a$ только с одной стороны (справа $(x>a)$ или слева $(x<a)$), то b называют пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ справа или слева и обозначают:

$b=f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $b=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Существует понятие о бесконечном пределе, хотя это и означает отсутствие предела как числа.

Определение 2.4. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, если для любого числа $M>0$ можно указать такое число $\delta(\delta=\delta(M))>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)|>M$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta=\delta(M): 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$$

Приведите в качестве иллюстраций к ниже приведенным равенствам графики функций $f(x)$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty; \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

Приведенные выше определения пределов не являются рабочими правилами для их отыскания. Поэтому, рекомендуется использовать следующие основные теоремы о пределах переменных величин, а также известные пределы, их следствия и некоторые распространенные приемы алгебраических преобразований, например, освобождение от иррациональности в знаменателе или в числителе дроби и др.

Теоремы о пределах

Теорема 2.1 $\lim\limits_{x \to a} c = c, c - const$,

Теорема 2.2 $\lim\limits_{x \to a} \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$,

Теорема 2.3 $\lim\limits_{x \to a} \left(f_1(x) \cdot f_2(x) \right) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$,

Теорема 2.4 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$.

При этом предполагается, что пределы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ существуют.

Таблица известных пределов

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел).

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x = e$, $e \approx 2{,}71828...$ (второй замечательный предел).

Следствия из первого и второго замечательных пределов (3 – 6)

3. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arc}\,tgx}{x} = 1$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x + 1)}{x} = 1$.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^k}{a^x} = 0 \ (a > 1)$.

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_{p-1}x+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_{q-1}x+b_q}=\begin{cases}0, \text{если } p<q\\ \infty, \text{если } p>q\\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{если } p=q\end{cases}$

10. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

11. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=\infty;\ \lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty.$

Условные, но вполне понятные символические выражения $\dfrac{\to 0}{\to 0};\dfrac{\to\infty}{\to\infty};(\to 1)^{\to\infty};(\to\infty-\to\infty);(\to 0\cdot\to\infty);\left(\to 0^{\to 0}\right);(\to\infty)^{\to 0}$ - обозначают кратко $\dfrac{0}{0};\dfrac{\infty}{\infty};1^{\infty};(\infty-\infty);(0\cdot\infty);0^0;\infty^0$ и называют неопределенностями.

Неопределенности

$\dfrac{0}{0};\dfrac{\infty}{\infty};(\infty-\infty);(0\cdot\infty);1^{\infty};0^0;\infty^0$

Для раскрытия неопределенности типа 1^{∞}

12. $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)=1;\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty\right)$

имеет место известное соотношение $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$.

Далее рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей (т.е. доведение их до вполне определенного ответа).

2.3. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории

2.3.1. Показать, что последовательность $-1,\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{16},\ldots\dfrac{(-1)^n}{n^2},\ldots$ имеет своим пределом нуль, определив для каждого $\varepsilon>0$ число $M=M(\varepsilon)$, такое, что $|x_n-a|<\varepsilon$ при всех $n>M(\varepsilon)$. Заполнить таблицу:

ε	$0{,}25$	$0{,}01$	$0{,}0025$
$M(\varepsilon)$			

Решение. Зададимся некоторым малым положительным числом ε (тем самым зададим окрестность точки 0) и определим, с какого номера все члены последовательности окажутся в ε-окрестности точки 0.

Имеем $\left|x_n - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Объявим искомым номером M ближайшее натуральное число, лежащее правее числа $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (или совпадающее с ним, если оно окажется целым). Тогда при $n \ge M$, т.е. при $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$,

следовательно, по определению $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

ε	$0,25$	$0,01$	$0,0025$
$M(\varepsilon)$	2	10	20

2.3.2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

Решение. Применяя теорему 2.2 и 2.4 о пределах и предел 9 из таблицы известных пределов, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+7} - \lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^3}{2+5n^3} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0.$$

2.3.3. Показать, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Решение. Из соотношений $0 < x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Видно, что последовательность зажата последовательностями, пределы которых равны нулю при $n \to \infty$, таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = 0$.

2.3.2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$.

Решение. Данную задачу можно решить и с помощью основных теорем о пределах. Имеем неопределенность типа $\infty-\infty$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$, применяя теорему 2.4, и предел 10 из таблицы известных пределов, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=0.$$

2.3.5. Показать, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, если $|q|<1$.

Решение. При $q=0$ это очевидно. Пусть $0<|q|<1$. Исходя из неравенства Бернулли (свойство С, раздел 2.2), запишем

$$\frac{1}{|q|^n}=\left(1+\left(\frac{1}{|q|}-1\right)\right)^n\geq 1+n\left(\frac{1}{|q|}-1\right)>n\left(\frac{1}{|q|}-1\right),$$ откуда следует, что

$$\left|q^n-0\right|=|q|^n<\frac{1}{n\left(\frac{1}{|q|}-1\right)}<\varepsilon\Rightarrow\ n>\frac{1}{\varepsilon\left(1/|q|-1\right)}=M\left(\varepsilon\right).$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

2.3.6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$. **Решение.** Пусть $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$, тогда

$0<x_n<\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}...\dfrac{2}{n}\leq 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0$ при $n\to\infty$ на основании примера 2.3.5.

Таким образом, последовательность зажата последовательностями, пределы которых при $n\to\infty$ равны нулю. По теореме 2.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

2.3.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$. **Решение.** Из оценки $0<\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{3}{n}...\dfrac{n}{n}\leq\dfrac{1}{n}$, верной для любого $n\in N$, следует, что последовательность $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ зажата последовательностями, имеющими предел ноль при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

2.3.8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на n^k, где $k-$наибольший показатель степени, из показателей степеней числителя и знаменателя. В данном примере $k=1$ $\left(\sqrt{n^3+2n-1} \sim n\right)$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}}{1+\dfrac{2}{n}}=1.$

2.3.9. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Решение. Применяя свойство факториала $(n+1)!=n!(n+1)$, запишем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)}=0$$

2.3.10. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

Решение. В числителе выражения стоит арифметическая прогрессия, сумма которой равна $1+2+3+...+n=n(n+1)/2$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}\right)\left(\dfrac{n+1}{n+2}-1\right)=$

$=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n+2)}=-\dfrac{1}{2}.$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

2.4.1. Доказать, что $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ стремится к 1 при $n\to\infty$. Начиная с какого n абсолютная величина разности между u_n и 1 не превышает 10^{-4}.

Вычислить пределы последовательностей:

2.4.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. 2.4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$. 2.4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

2.4.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$. 2.4.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

2.4.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+1}+\sqrt{n^3-2n^2+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$. 2.4.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

2.4.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$. 2.4.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$. 2.4.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

2.4.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{1/n}-1}{2^{1/n}+1}$.

Ответы: 2.4.2. ∞; 2.4.3. $15/17$; 2.4.4. 1; 2.4.5. 0; 2.4.6. 4; 2.4.1. 1; 2.4.8. 0; 2.4.9. 1; 2.4.10. $4/3$; 2.4.11. 1; 2.4.12. 0.