ЗАНЯТИЕ 3
3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ.

3.1. Решение некоторых типовых задач, рассматриваемых в аудитории.

3.1.1. Доказать, что $f(x)=3x-2$ в точке $x=1$ имеет предел, равный 1, т.е. $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)=1$.

Решение. $\forall\varepsilon>0$ $|3x-2-1|=|3(x-1)|=3|x-1|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\varepsilon/3$, если взять $\delta\le\dfrac{\varepsilon}{3}$, то из $|x-1|<\delta\Rightarrow|(3x-2)-1|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

3.1.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+3}{2x+4}$.

Решение. Пользуясь теоремами о пределах для нахождения данного предела достаточно подставить в функцию предельное значение аргумента: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+3}{2x+4}=\dfrac{5\cdot1+3}{2\cdot1+4}=\dfrac{4}{3}$.

3.1.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{5x+3}{x^2-1}$. **Решение**. $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{5x+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{5\cdot1+3}{1-1}=\left|\dfrac{8}{0}\right|=\infty$

Предел отношения многочленов $P_n(x)$, $Q_m(x)$, содержащих неопределенность.

3.1.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента в функцию получается неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Следует разделить оба многочлена на $(x-3)$. Тогда, получаем

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

При вычислении $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ следует в числителе и знаменателе вынести и сократить наименьшую степень, а в случае $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ наибольшую.

Аналогичный прием применяется и при вычислении пределов некоторых иррациональных выражений.

3.1.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2-5}$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, которую можно раскрыть, вынося в числителе и в знаменателе x^3 или, используя предел 9 в таблице известных пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-2/x^2+3/x^3\right)}{x^3\left(1/x-5/x^3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x^2+3/x^3}{1/x-5/x^3}=\infty.$$

3.1.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+2x^3+x}{x^5+x^2+2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+2x^3+x}{x^5+x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6+2x^2+1}{x^4+x+2}=\dfrac{1}{2}$.

3.1.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

Решение. Приводя выражение к общему знаменателю, получим неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, далее воспользуемся пределом 9 в таблице известных пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\left\{\begin{matrix}\text{степень числителя } p=1\\ \text{степень знаменателя } q=2\end{matrix}\right\}=0.$$

Предел отношения некоторых иррациональных выражений

3.1.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(2x\sqrt{x}+x+1\right)}=1$.

3.1.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{2x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

3.1.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента в функцию также получается неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

В этом случае можно ее раскрыть:

а) умножением числителя и знаменателя на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2};$$

б) заменой переменной $\sqrt{x+1}=t\Rightarrow x=t^2-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

Применение первого замечательного предела

3.1.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Решение. Данную задачу можно свести к первому замечательному пределу, если сделать замену $y=x-\pi\Rightarrow x=y+\pi$. Тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{\sin 2(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 3y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{(2y)\sin 3y}{(3y)\sin 2y}=-\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{3y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{2y}{\sin 2y}=-\frac{3}{2}.$$

3.1.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx.$

Решение. Имеем неопределенность типа $0\cdot\infty$. Можно преобразовать данное выражение в неопределенность типа $\frac{0}{0}$ и свести задачу к первому замечательному пределу. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}$. Сделаем замену $y=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{tgy}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\cos y=1.$

Применение второго замечательного предела

3.1.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

Решение. Определяем, что этот предел содержит неопределенность типа 1^∞. ($\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)=1;\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$). Воспользуемся формулой (12) таблицы неопределенностей.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}\right)}=e^2.$$

Можно также решить данный пример, сведя его к второму замечательному пределу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1-x^2+4x-2}{x^2-4x+2}\right)^x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}}=e^2$$

3.2 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить пределы функций:

3.2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. 3.2.2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. 3.2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

3.2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}$. 3.2.5. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$. 3.2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 \mathrm{x}}$.

3.2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tgx}}$. 3.2.8. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

3.2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+a\sin bx\right)^{1/x}$ .3.2.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\mathrm{x}}$. 3.2.11. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{1-\mathrm{x}^2/\pi^2}$.

3.2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{\mathrm{x}^4}$. 3.2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(a+x\right)-\mathrm{lna}}{x}$.

Ответы: 3.2.1. $-2/5$; 3.2.2. -1; 3.2.3. $1/4$; 3.2.4. k; 3.2.5. $\sqrt{2}/2$; 3.2.6. $\sqrt{2}/8$; 3.2.1. 1; 3.2.8. 0, если $x\to\infty$; ∞, если $x\to-\infty$. 3.2.9. e^{ab} ; 3.2.10. $a-b$; 3.2.11. $\pi/2$; 3.2.12. $1/8$; 3.2.13. $1/a$.