ЗАНЯТИЕ 1

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1.1. Комплексные числа в алгебраической форме

1.1.1. Определение комплексного числа. Комплексным числом z называется пара действительных чисел x и y, которая записывается в виде $z = x + iy$, где i – некоторый символ. Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \mathrm{Re}\, z$. Число y называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается $y = \mathrm{Im}\, z$.

Два комплексных числа называются равными, если у них совпадают действительные и мнимые части.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу z.

1.1.2. Арифметические операции. Действия над комплексными числами вводятся следующим образом: пусть $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, тогда результатом каждого действия будет новое комплексное число, определенное следующим образом:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

3) Для определения произведения $z_1 z_2$ формально перемножим их, используя обычные свойства действительных чисел и принимая, что $i^2 = i \cdot i = -1$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Последнее комплексное число и берется за определение произведения $z_1 z_2$.

По определению $z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ (n раз). В частности, $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \ldots$

4) Для определения частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ также проведем формальные преобразования, умножая числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2-i^2y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Это число и берется за определение частного $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Введенные действия над комплексными числами обладают обычными свойствами аналогичных действий над действительными числами.

Отметим также, что множество комплексных чисел не является упорядоченным (т.е. неравенств для комплексных чисел нет).

Выпишем также свойства, связанные с операцией сопряжения:

$$1)\ \overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}. \qquad 2)\ \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}. \qquad 3)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

1.1.4. Геометрическое изображение комплексных чисел. Сопоставив комплексному числу $z = x + iy$ точку плоскости $0xy$ с координатами (x, y), мы получим взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости $0xy$, которую будем при этом называть комплексной плоскостью. А произвольную точку (x, y) обозначать также числом $z = x + iy$.

1.1.5. Определение. Полярные координаты r и φ точки (x, y) называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа $z = x + +iy$ и обозначаются $r=|z|$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

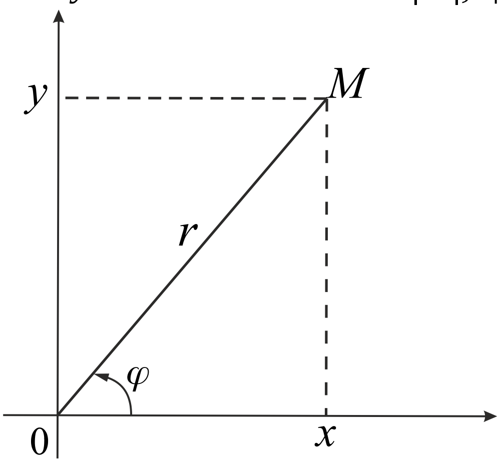

Рисунок 7.1

На рисунке 1.1 $r=|\overline{OM}|$, а φ – угол, отсчитываемый от положительного направления оси $0x$ до вектора $\overline{OM}$, определяемый с точностью до целого кратного 2π. Для $z\neq 0$ единственное значение аргумента, принадлежащее промежутку $(-\pi,\pi]$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$.

Из рисунка 1.1 видно, что $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{|z|}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{|z|}$, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}$. Аргумент

φ находится по любой из этих трех формул с учетом четверти комплексной плоскости, в которой лежит z. Если же $z = 0$, то для этого числа $r = 0$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$ – любой.

Замечание. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$|z_2 - z_1| = |x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, т.е. $|z_2 - z_1|$ – это расстояние на комплексной плоскости между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), или между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

1.2.1. Определение. Из рисунка 1.1 следует, что для $z = x + iy$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \Rightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Эта форма записи называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

1.2.2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда:

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются;

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$, т. е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются;

в) если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot \ldots \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т.е. при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на эту степень.

1.2.3. Извлечение корня из комплексного числа. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w, что $w^n = z$. Из этого определения следует, что $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$. В этой формуле достаточно брать $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, т. к. при следующих значениях k значения корня начнут повторяться, т. е. всего существует n различных корней n-й степени из комплексного числа.

1.3. Показательная форма комплексного числа

1.3.1. Определение. Введем понятие числа e в мнимой степени. Положим

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*.

Тогда $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Последняя форма записи называется *показательной формой* комплексного числа.

1.3.2. Действия над комплексными числами в показательной форме.

Оказывается, что при записи комплексных чисел в показательной форме сохраняются обычные свойства показательной функции действительного переменного. А именно, пусть $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, тогда

а) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

в) $z = re^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^ne^{in\varphi}$;

г) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

1.4. Решение типовых задач

1.4.1. Вычислите $\dfrac{1+2i}{4-3i}$.

Решение. $\dfrac{1+2i}{4-3i} = \dfrac{(1+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{4-6+i(8+3)}{16+9} = \dfrac{-2+11i}{25} = -\dfrac{2}{25} + i\dfrac{11}{25}$.

1.4.2. Вычислите $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{10}}{(-2\sqrt{3}+2i)^8}$.

Решение. Запишем числитель z_1 и знаменатель z_2 в тригонометрической форме: $|z_1| = \sqrt{2+2} = 2$, $|z_2| = \sqrt{12+4} = 4$; $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ и φ_1 – угол первой четверти $\Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$; $\sin\varphi_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ и φ_2 угол второй четверти $\Rightarrow \varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6}$. По формулам п. **1.2.2** получим

$$\frac{\left(2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{10}}{\left(4(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})\right)^{8}} = \frac{2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)}{2^{16}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)} =$$

$$=\frac{1}{2^6}\left(\cos(\frac{5\pi}{2}-\frac{20\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{2}-\frac{20\pi}{3})\right)=\frac{1}{2^6}\left(\cos(-\frac{25\pi}{6})+i\sin(-\frac{25\pi}{6})\right)=$$

$$=\frac{1}{2^6}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2^6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{128}\left(\sqrt{3}-i\right).$$

1.4.3. Найдите все значения $\sqrt[3]{8i}$.

Решение. Из формулы для нахождения $\sqrt[n]{z}$ (см. п. **1.3.2** г) имеем:

$$\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

$$k=0\Rightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i;$$

$$k=1\Rightarrow 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i;$$

$$k=2\Rightarrow 2\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i.$$

1.4.4. Решите уравнение $z^2-2z+4=0$.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения $az^2+2bz+c=0$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{1}=1\pm\sqrt{-3}=1\pm\sqrt{3}i.$$

1.4.5. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную двойным неравенством $1<|z|<2$.

Решение. Так как $|z|$ – это расстояние от точки $z(x,y)$ до точки 0, то искомая область является кольцом (без границы), как показано на рисунке 1.2.

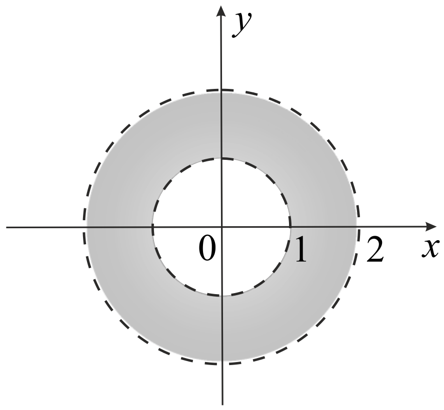

Рисунок 7.2

1.5. Задачи для самостоятельного решения

1.5.1. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$.

1.5.2. Вычислите $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$, используя тригонометрическую или показательную форму комплексного числа.

1.5.3. Извлечь корень $\sqrt[6]{-1}$.

1.5.4. Решите уравнение $z^2=\overline{z}$.

1.5.5. Решите уравнение $z^2+(3+2i)z+5+i=0$.

Ответы. 1.5.1. $r=1,\ \varphi=\frac{4\pi}{5}$. **1.5.2.** $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$. **1.5.3.** $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$, $z=\pm i$ (все варианты знаков). **1.5.4.** $z_1=0$, $z_2=1$, $z_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.5.5. $z_1=-1+i$, $z_2=-2-3i$.