Zadanie 1

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \overset{k_2-k_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{k_3-2k_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{k_1-2k_2}{=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \leftarrow L =$$

$$= \cancel{0}\ 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-1) = 1 \cdot 0 = 0$$

Wyznacznik macierzy jest równy zero, więc macierz jest osobliwa.

b) $A = \begin{pmatrix} 2{,}11 & -0{,}80 & 1{,}72 \\ -1{,}84 & 3{,}03 & 1{,}29 \\ -1{,}57 & 5{,}25 & 4{,}30 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2{,}11 & -0{,}80 & 1{,}72 \\ -1{,}84 & 3{,}03 & 1{,}29 \\ -1{,}57 & 5{,}25 & 4{,}30 \end{vmatrix} \overset{w_3-2{,}5w_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 2{,}11 & -0{,}80 & 1{,}72 \\ -1{,}84 & 3{,}03 & 1{,}29 \\ -6{,}845 & 7{,}25 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow L =$$

$$= (-6{,}845) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}80 & 1{,}72 \\ 3{,}03 & 1{,}29 \end{vmatrix} + (7{,}25) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2{,}11 & 1{,}72 \\ -1{,}84 & 1{,}29 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6{,}845)(-1{,}032 - 5{,}2116) + (-7{,}25)(2{,}7219 + 3{,}1648) =$$

$$= (-6{,}845)(-6{,}2436) + (-7{,}25)(5{,}8867) =$$

$$= 42{,}737442 - 42{,}678575 = 0{,}058867$$

Macierz jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$).

Wyznacznik jest bardzo mały i mocno różni się od wartości (największej) w macierzy, więc jest źle uwarunkowana c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{W_1+2W_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-2=4$$

Macierz A jest macierzą nieosobliwą ($\det A \neq 0$)

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right) - (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-2\right) = (2-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-2) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2) = (2-\lambda)\left(\lambda-(2-\sqrt{2})\right)\left(\lambda-(2+\sqrt{2})\right) = 0$$

współczynnik uwarunkowania

$$K_2 = \frac{2+\sqrt{2} \leftarrow \lambda_{max}}{2-\sqrt{2} \leftarrow \lambda_{min}} \approx 5{,}82843,$$

więc macierz jest dobrze uwarunkowana ($1 \leq K \leq 10$)

Dodatkowo macierz jest symetryczna i dodatnio określona.

d)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -18 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -18 & 13 \end{vmatrix} \overset{W_3-9W_2}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ -58 & 0 & -14 \end{vmatrix} \overset{W_2+\frac{2}{3}W_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 9\frac{2}{3} & 0 & 2\frac{1}{3} \\ -58 & 0 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9\frac{2}{3} & 2\frac{1}{3} \\ -58 & -14 \end{vmatrix} = (-3)\left(-135\tfrac{1}{3} + 135\tfrac{1}{3}\right) = (-3)\cdot 0 = 0$$

Wyznacznik jest równy 0, więc macierz jest osobliwa.

Zadanie 2

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 39 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 39 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 39 \end{vmatrix} + 25 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -(78 - 28) + 5 \cdot 35 - 25 \cdot 5 = -50 + 175 - 125 = 0$$

$$\det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot 0 = 0$$

b)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det L \cdot \det U = 2 \cdot 2 = 4$$

zadanie 3

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A\vec{x} = \vec{b}$$

$$L\vec{y} = \vec{b}$$

$$U\vec{x} = \vec{y}$$

- $Ly = b$

$$y_1 = 1$$

$$\frac{3}{2}y_1 + y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -\frac{5}{2}$$

$$1/2\, y_1 + 11/13\, y_2 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = \frac{47}{13}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{47}{13} \end{pmatrix}$$

- $U\vec{x} = \vec{y}$

$$\frac{32}{13}x_3 = \frac{47}{13} \Rightarrow x_3 = \frac{47}{32}$$

$$\frac{13}{2}x_2 - \frac{7}{2} \cdot \frac{47}{32} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{13}{32}$$

$$2x_1 - 3 \cdot \frac{13}{32} - \frac{47}{32} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{59}{32}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{59}{32} \\ \frac{13}{32} \\ \frac{47}{32} \end{pmatrix}$$