

Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Горайнова Алёна

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Теоретическое введение	6
4	Выполнение лабораторной работы	7
4.1	Построение модели	9
5	подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения	12
6	точка пересечения лодки и катера для 2 случая	13
7	Выводы	14
	Список литературы	15

Список иллюстраций

4.1	Траектория движения катера в 1 случае	10
4.2	Траектория движения катера и лодки	10
4.3	Траектория движения катера во 2 случае	11

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 15,5 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,5 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка А равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки Р такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки А [wiki:bash?].

4 Выполнение лабораторной работы

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Примем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = k$ – место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс – это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k - x}{4.5v}$ (во втором случае $\frac{k + x}{4.5v}$). Так как время одно и то

же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{4.5v} \text{ - в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k + x}{4.5v} \text{ - во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{11.4}{5,5}$ и $x_2 = \frac{11.4}{3,5}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость - это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , $r \frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{20.25v^2 - v^2} = \sqrt{19.25}v$$

Из чего можно вывести:

$$r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{19.25}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{19.25}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{15.5}{5.5} \end{cases} \quad (1)$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{15.5}{3.5} \end{cases} \quad (2)$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{19.25}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

4.1 Построение модели

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.1):



Рис. 4.1: Траектория движения катера в 1 случае

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.2):

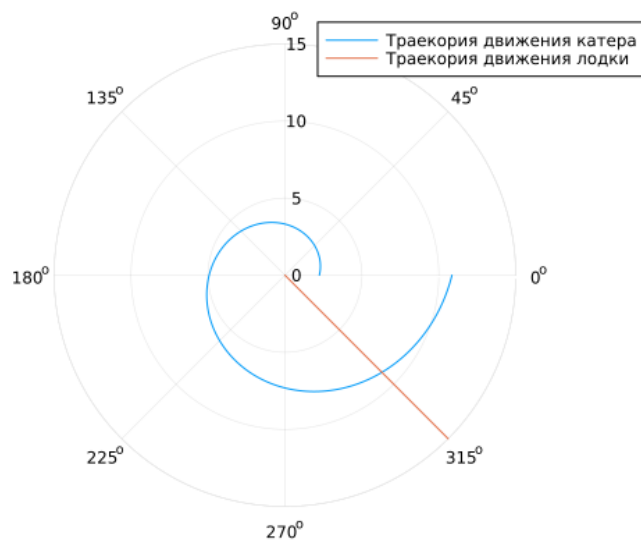


Рис. 4.2: Траектория движения катера и лодки

Теперь перейдем к решению в случае 2.

В результате получаем такой рисунок (рис. ??):

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.3):

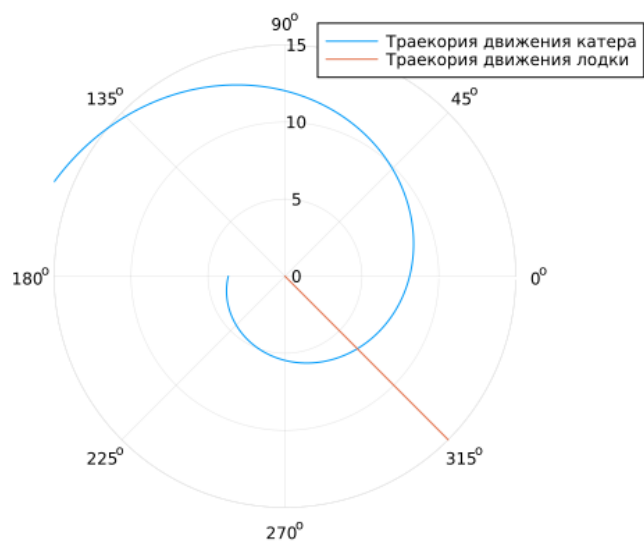


Рис. 4.3: Траектория движения катера во 2 случае

$$y_2(x) = \frac{114 \exp\left(\left(\frac{10x}{\sqrt{1581}}\right) + \left(\frac{10 \cdot \pi}{\sqrt{1581}}\right)\right)}{31}$$

**5 подставим в точное решение угол, под
которым движется лодка браконьеров
для нахождения точки пересечения**

$y_2(f_i - \pi_i)$

6 точка пересечения лодки и катера для 2 случая

6.651143558300665 ““

7 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

Список литературы