Trabajo Encargado - N° 003

Nelson Jhoel Quispe Velasco

3 de octubre de 2024

Métodos de Optimización

Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

Docente: Fred Torres Cruz
FINESI

Trabajo Encargado - N° 003

CASO 3
Ejercicio 3.2
Ejercicio 3.2
Enunciado: Demuestra que $x^2 + x + 1$ es $O(x^2)$ pero no $O(x)$.

Resolución:

Parte 1: Verificación de $O(x^2)$

1. **Definición de $O(x^2)$:** Una función $g(x)$ es $O(f(x))$ si existe una constante positiva C y un valor x_0 tal que para todo $x \geq x_0$:

$$|g(x)| \leq C \cdot |f(x)|$$

En este caso, $g(x) = x^2 + x + 1$ y $f(x) = x^2$.

2. **Demostración:** Queremos encontrar C y x_0 tales que:

$$x^2 + x + 1 \leq C \cdot x^2$$

Para $x \geq 1$:

- Evaluamos $x^2 + x + 1$:

$$x^2 + x + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

- Para $x \geq 1$:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

Entonces, podemos elegir $C = 3$ y $x_0 = 1$. Por lo tanto:

$$x^2 + x + 1 \leq 3x^2 \quad \text{para} \quad x \geq 1$$

3. **Conclusión de la Parte 1:** Esto muestra que $x^2 + x + 1$ es $O(x^2)$.

Parte 2: Verificación de que no es $O(x)$

1. **Definición de $O(x)$:** Queremos demostrar que no existe una constante positiva C tal que:

$$x^2 + x + 1 \leq C \cdot x$$

para x suficientemente grande.

2. **Reorganizando la Desigualdad:** Dividiendo ambos lados por x (asumiendo $x > 0$):

$$x + 1 + \frac{1}{x} \leq C$$

3. **Comportamiento Asintótico:**

- A medida que $x \to \infty$:

$$x + 1 + \frac{1}{x} \to \infty$$

Esto significa que, independientemente del valor de C, siempre habrá un valor de x tal que $x + 1 + \frac{1}{x} > C$.

4. **Conclusión de la Parte 2:** No se puede satisfacer la desigualdad para valores grandes de x, por lo que $x^2 + x + 1$ no es $O(x)$.

Conclusión General:

Resultado Final:

- $x^2 + x + 1$ es $O(x^2)$
- $x^2 + x + 1$ no es $O(x)$

Código Python en un recuadro
A continuación se muestra el código Python encerrado en un recuadro:

```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de las funciones
x = sp.symbols('x')
g = x**2 + x + 1  # g(x)
f1 = x**2         # f(x) = x^2
f2 = x            # f(x) = x

# Función para comprobar si g(x) es O(f(x))
def is_O(g, f, x0=1):
    limit_g = sp.limit(g / f, x, sp.oo)
    if limit_g.is_infinite:
        return False
    return limit_g < sp.oo

# Verificar O(x^2)
result_O_x2 = is_O(g, f1)
print(f"g(x) = x^2 + x + 1 es O(x^2): {result_O_x2}")

# Verificar O(x)
result_O_x = is_O(g, f2)
print(f"g(x) = x^2 + x + 1 es O(x): {result_O_x}")

# Gráfica
x_vals = np.linspace(0, 10, 400)  # Rango de x
g_vals = [g.subs(x, val) for val in x_vals]  # Evaluación de g(x)
f1_vals = [f1.subs(x, val) for val in x_vals]  # Evaluación de f(x) = x^2
f2_vals = [f2.subs(x, val) for val in x_vals]  # Evaluación de f(x) = x
```

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_vals, g_vals, label='g(x) = x^2 + x + 1', color='blue')
plt.plot(x_vals, f1_vals, label='f(x) = x^2', color='orange')
plt.plot(x_vals, f2_vals, label='f(x) = x', color='green')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5, ls='--')  # Eje horizontal
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5, ls='--')  # Eje vertical
plt.title('Comparación de funciones')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.ylim(-10, 120)  # Limitar el rango de y para mejor visualización
plt.show()
```

https://github.com/Neljhoel/trabajo-3-caso2-y3.git

Imagen en PDF

A continuación se muestra la imagen en formato PDF: