Méthodes numériques

Objectifs

Modéliser une situation physique.

Trajectoire d'un volant

On se fixe pour objectif de modéliser la trajectoire d'un volant de badminton ($m = 5,3$ g) dans le champ de pesanteur terrestre ($g = 9,81$ m.s^{-2}) à partir de l'étude d'une chronophotographie obtenue par pointage vidéo. La période d'échantillonnage (durée entre deux images) a été fixée à $T_e = 45$ ms. L'équation du mouvement sera résolue numériquement pour deux modèles de frottement fluide :

— un modèle linéaire pour une force de frottement de la forme $\vec{f} = -a\vec{v}$;

— un modèle quadratique de la forme $\vec{f} = -bv\vec{v}$, avec $v = ||\vec{v}||$;

les coefficients a et b sont phénoménologiques, ils ne sont pas connus a priori et dépendent entre autres de la forme du volant et de la façon dont il se déforme au cours de son mouvement.

Ces modèles seront comparés au tracé expérimental issu de la chronophotographie. Les positions successives du volant ont été repérées sur un ensemble d'images puis exportées au format texte dans le fichier `pointage.txt`.

Préparation

0. Importer les bibliothèques `numpy`, `maplotlib.pyplot` ainsi que le module `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`. Définir les variables globales `m`, `g` et `Te`.

1. Recopier les lignes suivantes dans le fichier python :

```
pointage = np.loadtext("pointage.txt",skiprows=1)
Xexp, Yexp = pointage[:,5], pointage[:,6]
x = Xexp - Xexp[0]
y = -(Yexp - Yexp[0])
```

Ouvrir le fichier `pointage.txt`, par exemple avec le bloc-notes, afin de l'observer. Afficher dans la console python les deux listes `Xexp` et `Yexp`. En déduire ce que font les trois premières lignes proposées ci-dessus. Que font les deux dernières lignes ?

2. Ecrire les instructions permettant d'afficher la trajectoire expérimentale.

Modélisation

Etude physique

— Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$ pour chaque modèle de frottement.

— Pour chaque modèle, montrer que la vitesse du volant tend vers une vitesse limite $\vec{V_{lim}}$ verticale. En déduire que la mesure de V_{lim} permet de déterminer a et b.

— En notant V_0 la norme du vecteur vitesse à l'instant initial, faisant un angle α avec l'horizontal, résoudre les équations différentielles pour chaque modèle.

— En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ pour chaque modèle. On rappelle que la position initiale coïncide avec l'origine du repère. En déduire l'équation de la trajectoire.

— Vérifier qu'on observe bien une asymptote verticale sur la fin de la trajectoire.

Estimation des coefficients de frottement

3. A partir des deux tableaux `numpy` de coordonnées `x` et `y`, estimer numériquement les valeurs de a et b. Les conserver sous forme de deux variables globales `a` et `b`. A partir de l'observation de la chronophotographie en annexe, indiquer ce qui limite la précision de l'estimation.

Estimation de la vitesse initiale

4. Pour pouvoir résoudre les équations du mouvement, il est nécessaire de connaître les composantes de la vitesse initiale $\vec{V_0}$ du volant. En adoptant la même démarche que pour la vitesse limite, déterminer numériquement `Vx0` et `Vy0`.

Méthode d'Euler

5. Implémenter deux fonctions `A_lin` et `A_quad` prenant comme arguments deux tableaux numpy `Vx` et `Vy` contenant les deux composantes du vecteur vitesse du volant et renvoyant deux tableaux numpy `Ax` et `Ay` avec les composantes de son vecteur accélération, respectivement pour le modèle des frottements linéaire et quadratique.

6. Écrire une fonction `euler_V` capable de résoudre l'équation du mouvement, c'est-à-dire de renvoyer trois tableaux de même taille `liste_t` (temps), `liste_Vx` et `liste_Vy` (composantes de la vitesse au cours du temps). Cette fonction prend comme seul argument une fonction `A` (accélération), pouvant être `A_lin` ou `A_quad`. On rappelle que toutes les autres variables, notamment les conditions initiales, sont définies comme des variables globales puisqu'il s'agit d'analyser la chronophotographie. Choisir un pas de temps `dt = Te/50`.

7. En s'inspirant de la méthode d'Euler, écrire une fonction `euler_OM` prenant pour arguments deux listes `Vx` et `Vy` contenant les composantes du vecteur vitesse et renvoyant deux listes `liste_X` et `liste_Y` contenant les composantes du vecteur position du volant. On rappelle qu'à l'instant initial le volant se trouve au point O.

8. En combinant les différentes fonctions, calculer puis représenter les trajectoires prévues par le modèle linéaire et par le modèle quadratique. Conclure sur le meilleur modèle.

9. L'auteur de l'étude indique une vitesse initiale $V_0 = 40$ m.s^{-1} formant un angle $\alpha = 52$ ° avec l'horizontale, et une vitesse limite $V_{lim} = 6,7$ m.s^{-1}. Remplacer vos valeurs estimées par celles de l'auteur afin de les tester. Commenter.

Résolution avec une bibliothèque

Pour analyser les performances de la méthode d'Euler, nous allons comparer les résultats de la section précédente à ceux obtenus en utilisant une fonction déjà implémentée dans une bibliothèque de calcul scientifique : la fonction `odeint` du module `scipy.integrate`.

10. Résoudre l'équation du mouvement du modèle quadratique avec odeint et comparer les résultats à ceux donnés par la méthode d'Euler en affichant les graphes.

Bon courage et bon travail ! ☺

Annexe