

ЛЕКЦИЯ №26.

Переходные процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами.

Классический метод расчета переходных процессов.

Процессы в электрических цепях при переходе от одного установившегося состояния к другому.

Переходными называют процессы, возникающие в электрической цепи при переходе от одного установившегося состояния к другому (при выключении и включении цепи, при всяком изменении её параметров, при переключениях в схеме и т. п.). Изменения режима электрической цепи, связанные с переключениями, включениями, отключениями или изменением параметров цепи, называются коммутационными изменениями или просто коммутацией.

В линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами токи и напряжения в установившемся режиме (его иногда называют стационарным) определяются только видом действующих в цепи источников э.д.с. или источников тока. При постоянных или синусоидальных источниках токи, напряжения будут также постоянными или синусоидальными той же частоты.

Опыт показывает, что при переходе от одного установившегося состояния к другому (переходном процессе) токи и напряжения на участках могут в значительной степени превосходить токи и напряжения на этих же участках в установившемся режиме. Возникающие при этом сверхтоки и перенапряжения могут быть опасны с точки зрения чрезмерных электродинамических (реже тепловых) воздействий на отдельные части электроустановок или с точки зрения повреждения изоляции установки. Переходные процессы широко используются также при построении различных устройств автоматики, систем автоматического управления и вычислительной техники,

Для определения закона изменения во времени тока или напряжения на участке электрической цепи с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и ёмкости запишем в соответствии с законом Кирхгофа

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt,$$

где Ri - напряжение на активном сопротивлении;

$L \frac{di}{dt}$ - напряжение на индуктивности, равное, но противоположное по знаку

э.д.с. самоиндукции;

$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt$ - напряжение на ёмкости, определенное как отношение заряда $q = \int_{-\infty}^t idt$ к величине ёмкости C .

Пределы интегрирования приняты от $-\infty$ до t - времени рассмотрения процесса, чтобы учесть все, имевшиеся к началу отсчета времени заряды на ёмкости.

Для определения закона изменения тока во времени необходимо полное решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Оно образуется как сумма частного решения неоднородного уравнения, т.е. уравнения, содержащего заданные э.д.с. или заданные напряжения и общего решения однородного уравнения, которое получается при равных нулю заданных э.д.с. или напряжениях

$$i(t) = i_{np}(t) + i_{св}(t).$$

Второе слагаемое получено расчетом цепи, свободной от источников э.д.с. Поэтому общее решение называют свободным током (или напряжением). При отсутствии в цепи внешних источников э.д.с. ток $i_{св}(t)$ должен всегда затухать, т.е. при $t \rightarrow \infty$ ток $i_{св}(t) \rightarrow 0$, так как цепь всегда обладает сопротивлением, на котором преобразуется в тепловую имевшийся в начале запас энергии в электрическом поле ёмкости и магнитном поле индуктивности. При этом ток $i(t)$ стремится с течением времени к $i_{np}(t)$. Следовательно, частное решение $i_{np}(t)$ определяет ток установившегося режима и называется принужденным током (или напряжением).

Таким образом, при расчете простейшей неразветвленной цепи имеют место три режима.

Переходный режим - это состояние цепи, которое наблюдается в ней в течение некоторого (теоретически бесконечно большого) времени после коммутации. Его уравнение

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt.$$

По окончании переходного режима в цепи наступает принужденный режим, определяемый уравнением

$$u = Ri_{np} + L \frac{di_{np}}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_{np} dt.$$

Под таким режимом понимают состояние цепи, когда с переходным режимом можно уже не считаться. Принужденный режим, создаваемый источником постоянного или произвольного периодически изменяющегося напряжения (или тока) называют установившимся.

Свободный режим может быть получен вычитанием из уравнения переходного режима уравнения принужденного режима

$$0 = R(i - i_{np}) + L \frac{d}{dt}(i - i_{np}) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t (i - i_{np}) dt,$$

или

$$0 = Ri_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_{св} dt.$$

При расчете переходных процессов в линейных электрических цепях любой сложности составляются уравнения по первому и второму законам Кирхгофа, из которых затем можно исключить все неизвестные кроме одного. Получают одно дифференциальное уравнение, содержащее, например, ток $i(t)$ и его производные различных порядков. Порядок уравнения определяется конфигурацией цепи и характером ее элементов. Решение уравнения будет содержать постоянные интегрирования, число которых определяется порядком уравнения. Для их отыскания пользуются законами коммутации.

1. В любой ветви с индуктивностью ток (и магнитный поток) в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел непосредственно перед коммутацией, и далее начинает изменяться именно от этого значения.

Принято записывать это правило в виде

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

где $i(0_-)$ - означает величину тока непосредственно перед моментом коммутации;

$i(0_+)$ - означает величину тока непосредственно после момента коммутации.

2. В любой ветви с емкостью напряжение (и заряд) на ней в момент коммутации сохраняет то же значение, которое оно имело непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем изменяется именно от этого значения.

Таким образом, для ветви с емкостью

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости законов, рассмотрим сначала ветвь с индуктивностью. Если допустить возможность скачка тока в ней, то напряжение на зажимах индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

было бы в момент скачка тока равно бесконечности и в цепи не удовлетворялся бы второй закон Кирхгофа (так как не может быть источников э.д.с. бесконечно большой величины).

При допущении скачка напряжения на емкости ток в ней в момент скачка

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

был бы равен бесконечности и в цепи, всегда обладающей сопротивлением, также

не будет удовлетворяться второй закон Кирхгофа.

С энергетической стороны невозможно скачкообразное изменение энергии магнитного поля индуктивности

$$W_M = \frac{Li^2}{2}$$

и электрического поля ёмкости

$$W_C = \frac{Cu_C^2}{2},$$

так как при этом потребуются источники энергии бесконечно большой мощности (при этом $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \infty$), что лишено физического смысла.

Из законов коммутации следуют три важных вывода.

1. При переходе цепи от одного состояния к другому мгновенному протеканию переходного процесса мешают только индуктивности и ёмкости. Поэтому переходные процессы наблюдаются только в электрических цепях, содержащих либо емкости, либо индуктивности, либо индуктивности и ёмкости. При наличии в цепи только активных сопротивлений переход от одного установившегося состояния к другому происходит мгновенно, т.е. не наблюдается переходного процесса.

2. При отсутствии тока в индуктивности в момент коммутации после коммутации при $t = 0_+$ он также равен нулю. Поэтому такая индуктивность подобна разрыву в цепи в месте ее включения в момент коммутации.

3. При отсутствии напряжения на ёмкости в момент коммутации после коммутации при $t = 0_+$ оно также равно нулю. Поэтому такая ёмкость в момент включения может считаться закороченной.

Определение закона изменения токов и напряжений с помощью интегрирования дифференциальных уравнений описанным выше способом и называют классическим методом расчета переходных процессов.

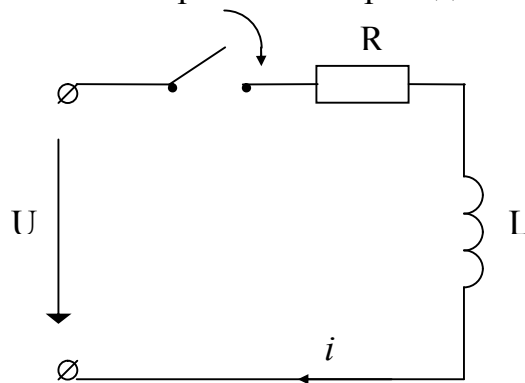
ЛЕКЦИЯ №27.

Расчет переходных процессов в простых цепях
при постоянных и синусоидальных Э.Д.С.

Переходные процессы в цепи с последовательным
соединением R и L .

1. Включение цепи на постоянное напряжение.

Приняв положительное направление переходного тока, запишем для цепи



уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$U = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Ток переходного режима

$$i = i_{np} + i_{св}.$$

В принужденном режиме $i_{np} = const$, поэтому $\frac{di_{np}}{dt} = 0$ и уравнение принимает вид

$$U = Ri_{np},$$

т.е.

$$i_{np} = \frac{U}{R}.$$

Для свободного режима

$$0 = L \frac{di_{св}}{dt} + Ri_{св}.$$

Характеристическое уравнение

$$pL + R = 0,$$

откуда

$$p = -\frac{R}{L}.$$

Поэтому

$$i_{св} = A e^{pt} = A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Ток переходного режима

$$i = i_{np} + i_{св} = \frac{U}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Постоянную интегрирования определим на основе первого закона коммутации:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

поэтому при $t = 0$ и $i = 0$, так как до коммутации в цепи тока не было.

Получим

$$0 = \frac{U}{R} + A e^{-\frac{R}{L} \cdot 0},$$

т.е.

$$A = -\frac{U}{R}.$$

Тогда

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

и обозначив $\frac{L}{R} = \tau$, получим

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = i_{np} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где τ - постоянная времени.

Размерность этой величины

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

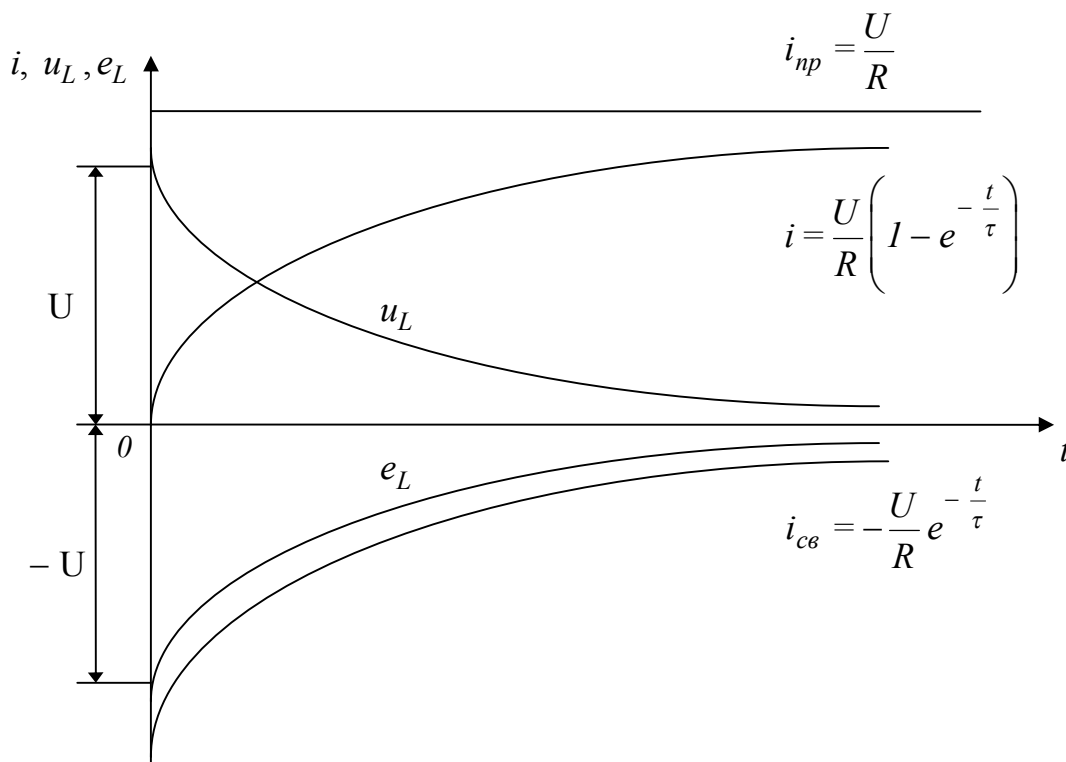
Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \left(\frac{U}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = U e^{-\frac{t}{\tau}},$$

соответственно э.д.с. самоиндукции

$$e_L = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

По полученным уравнениям построены графики переходного процесса. В момент включения ток нарастает с максимальной скоростью. По мере увеличения тока скорость его нарастания падает. При $t = \infty$ ток достигает установившегося значения. Практически обычно спустя доли секунды ток почти точно равен установившемуся.



Через $t = \tau$

$$i(\tau) = i_{np}(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = i_{np}(1 - \frac{1}{e}) \approx 0,63 i_{np},$$

при $t = 3\tau$ - $i(3\tau) \approx 0,95 i_{np}$.

Можно со вполне достаточной точностью считать переходный процесс закончившимся при $t = 4.6 \tau$, когда ток $i(4.6\tau) \approx 0,99 i_{np}$. Часто переходный процесс учитывают до $t = 3\tau$.

Так как при $L = 0$ и $\tau = \frac{L}{R} = 0$, то ток устанавливается практически мгновенно. Таким образом постоянная времени характеризует быстроту достижения установившегося режима.

В момент включения все напряжение источника приложено к индуктивно-

сти $u_L(0) = U$, так как в этот момент она ведет себя подобно разрыву цепи. С ростом тока u_L уменьшается до нуля при установившемся режиме.

Энергия источника частью идет на увеличение энергии магнитного поля индуктивности $W_M = \frac{L i^2}{2}$, а частью преобразуется в тепловую на сопротивлении R $\left(W_R = \int_0^t i^2 R dt \right)$.

2. Включение цепи на синусоидальное напряжение.

Уравнение процесса имеет вид

$$u = Ri + L \frac{di}{dt},$$

где

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Решение аналогично случаю включения на постоянное напряжение:

$$i_{np} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

и

$$i_{св} = A e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Переходный ток

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

С учетом закона коммутации при $t = 0$: $i(0_+) = i(0_-) = 0$,

т.е.

$$0 = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) + A,$$

откуда

$$A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi).$$

Уравнение переходного тока

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на индуктивности

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt} = L \frac{U_m}{Z} \left[\omega \cdot \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{1}{\tau} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \\ &= U_m \left[\frac{\omega L}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{LR}{LZ} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \\ &= U_m \left[\sin\varphi \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \cos\varphi \cdot \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \end{aligned}$$

При $t = 0$, $i = 0$ и

$$u_L(0) = U_m \left[\sin\varphi \cdot \sin(\psi - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \cos\varphi \cdot \sin(\psi - \varphi) \right] = U_m \sin\psi,$$

т.е. в момент включения все напряжение источника приложено к индуктивности, а на активном сопротивлении $u_R(0) = 0$, так как в момент включения индуктивность ведет себя подобно разрыву цепи.

Анализ уравнения $i(t)$ показывает, что в период времени от $t = \frac{1}{4}T$ до $\frac{3}{4}T$

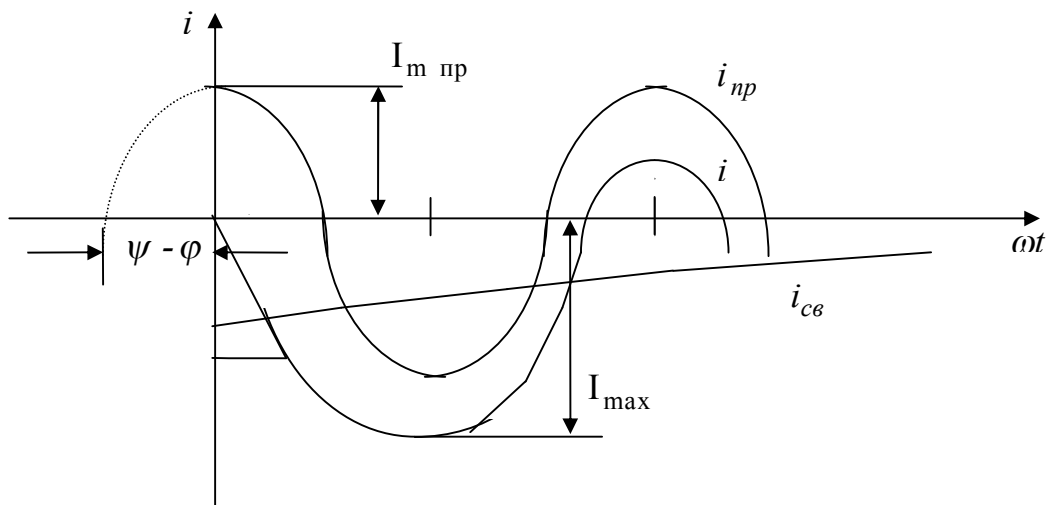
после включения ток может превышать амплитуду тока установившегося режима. Наибольшей величины он достигает, если в момент включения i_{np} имеет ампли-

тудное значение, т.е. $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, а постоянная времени цепи велика, т.е. свободный ток медленно затухает.

График $i(t)$ для этого случая изображен на рисунке. Примерно через половину периода ток

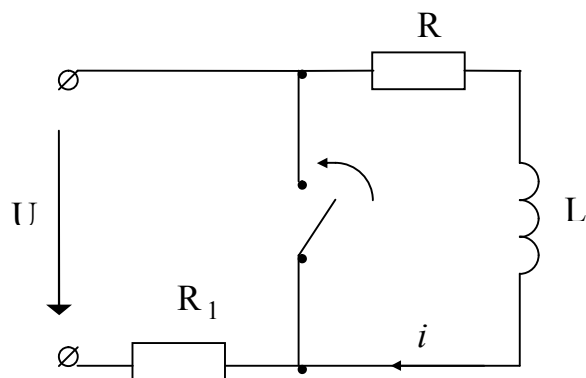
$$i_{max} \approx 2I_{m\ np}.$$

Так как свободный ток в момент включения равен по величине и противоположен по знаку принужденному, то возможен случай со свободным током, равным нулю. Это наблюдается при $i_{np}(0) = 0$. В цепи при этом сразу устанавливается принужденный режим. Очевидно, для этого необходимо, чтобы $\psi - \varphi = 0$ или $\psi - \varphi = \pi$.



3. Короткое замыкание цепи.

Для цепи, изображенной на рисунке,



запишем уравнение Кирхгофа

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Принужденный ток после коммутации равен нулю.

Характеристическое уравнение

$$Lp + R = 0$$

и

$$p = -\frac{R}{L}.$$

Решение исходного уравнения

$$i = i_{св} = A e^{-\frac{R}{L}t},$$

или, приняв $\frac{L}{R} = \tau$,

$$i = A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

С учетом закона коммутации для ветви с индуктивностью при $t = 0$

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{U}{R + R_I}$$

и

$$A = \frac{U}{R + R_I},$$

т.е.

$$i = \frac{U}{R + R_I} e^{-\frac{t}{\tau}} = I e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -LI \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI e^{-\frac{t}{\tau}} = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Энергия, выделенная на сопротивлении R за все время переходного процесса

$$W = \int_0^{\infty} R i^2 dt = R I^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I^2.$$

равна энергии, запасенной в цепи до коммутации.

Если до коммутации в цепи проходил переменный ток, то характер переходного процесса не изменяется, но $i(0)$ равно значению тока в момент короткого замыкания, т.е.

$$i(0) = \frac{U_m}{\sqrt{(R_I + R)^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\psi - \arctg \frac{\omega L}{R_I + R}\right).$$

На примере этого переходного процесса уточним понятие постоянной времени τ , используя графики процесса.

Математически это время, в течении которого свободный ток уменьшится в «е» раз:

$$i_{c\beta}(\tau) = i_{c\beta}(0) e^{-1} = \frac{i_{c\beta}(0)}{e} = \frac{A}{e}.$$

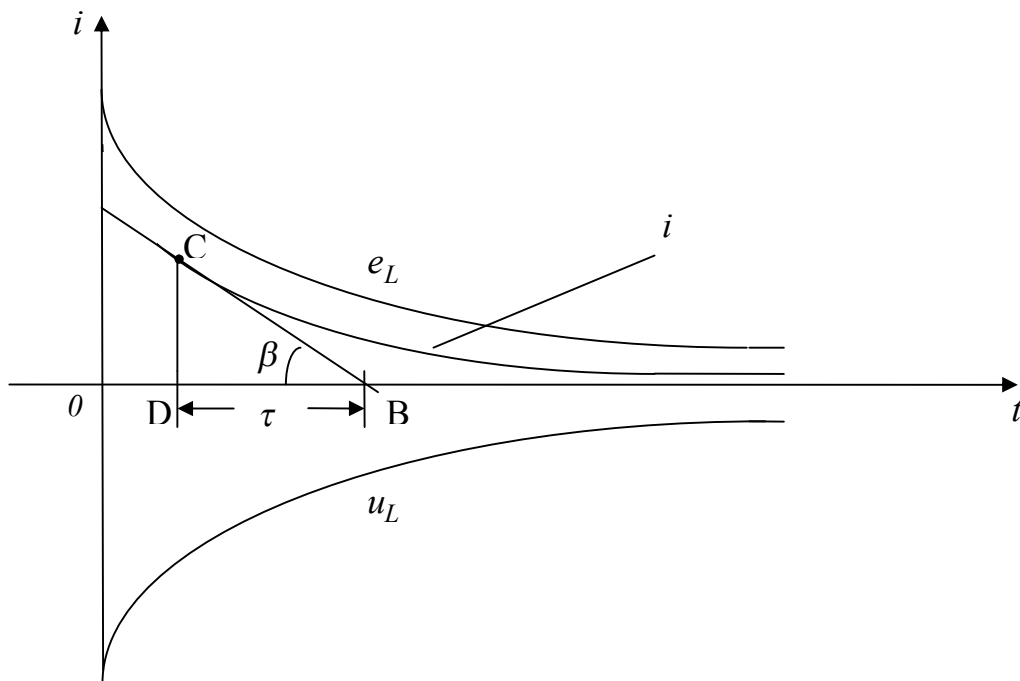
Графически τ может быть определена численно как длина подкасательной:

$$BD = CD \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{i_{c\beta}}{m_i \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{i_{c\beta} m_i}{-m_i \frac{di_{c\beta}}{dt} m_t} = \frac{i_{c\beta}}{\frac{di_{c\beta}}{dt} m_t} = \frac{\tau}{m_t}.$$

Величину, обратную постоянной времени

$$\alpha = \frac{1}{\tau}$$

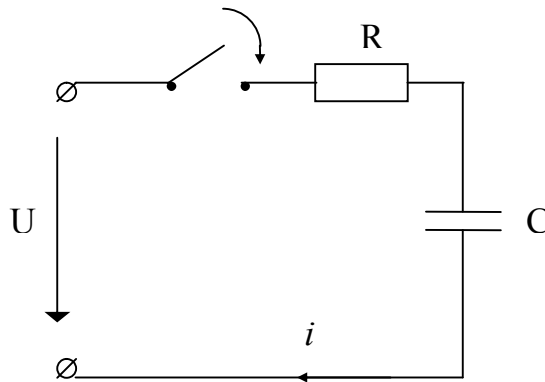
называют коэффициентом затухания цепи.



ЛЕКЦИЯ №28.

Переходные процессы в цепи с последовательным соединением
активного сопротивления и емкости.

1. Включение цепи на постоянное напряжение.



Уравнение Кирхгофа для такой цепи

$$U = Ri + u_C$$

содержит две неизвестные величины i и u_C , являющиеся функциями времени, и может быть решено как относительно тока, так и относительно напряжения на емкости. Рассмотрим решение для двух случаев (практически обычно удобнее решение относительно напряжения на емкости, для которого возможно непосредственное применение закона коммутации).

Выразим ток через напряжение на емкости:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}.$$

Тогда

$$U = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Принужденное значение с учетом

$$\left[\frac{du_C}{dt} \right]_{t=\infty} = 0$$

для напряжения на емкости

$$u_{C\text{ np}} = U.$$

Характеристическое уравнение

$$RCp + 1 = 0 \quad \text{и} \quad p = -\frac{1}{RC}.$$

Тогда

$$u_C = u_{C\ np} + u_{C\ cв} = U + A e^{pt}.$$

При $t = 0$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

Поэтому

$$0 = U + A$$

и

$$A = -U.$$

$$u_C = U(1 - e^{pt}) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

где $\tau = RC$ - постоянная времени цепи

Наконец, ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Выразим напряжение на емкости через ток:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Тогда

$$U = Ri + \frac{1}{C} \int i dt.$$

После дифференцирования

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}.$$

Принужденное значение тока

$$i_{np} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$Rp + \frac{1}{C} = 0$$

и

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

Поэтому

$$i = i_{np} + i_{cв} = A e^{pt} = A e^{-\frac{t}{RC}},$$

или, приняв $RC = \tau$,

$$i = A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Перепишем исходное уравнение при $t = 0$ с учетом закона коммутации

$$U = Ri(0) + u_C(0),$$

но

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

Тогда

$$U = Ri(0)$$

и

$$i(0) = \frac{U}{R}.$$

Отсюда вытекает, что при $t = 0$

$$\frac{U}{R} = A,$$

т.е.

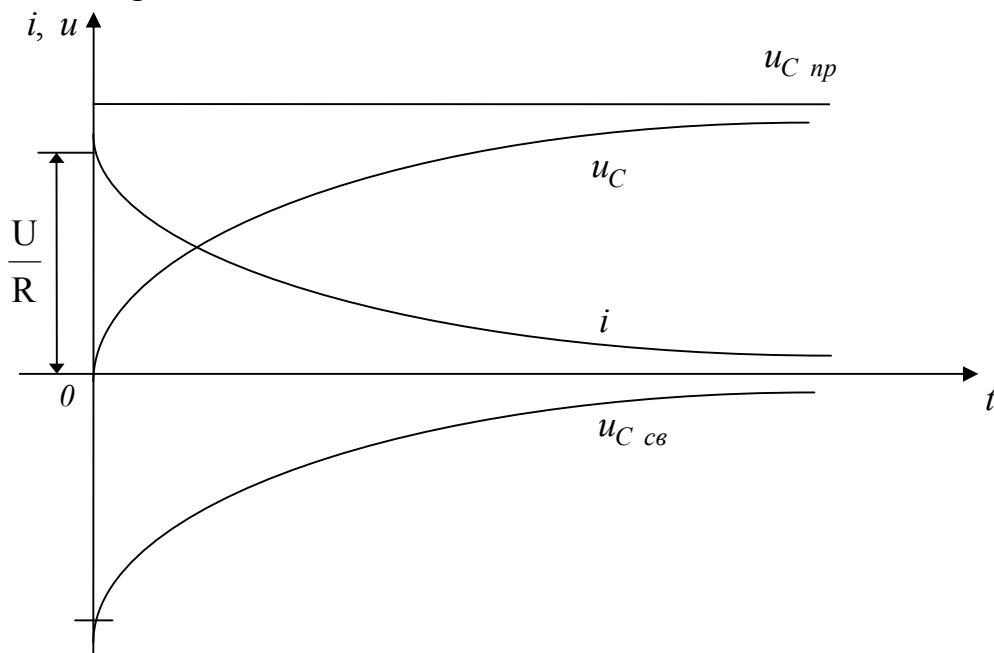
$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на конденсаторе

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{U}{R} \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{U}{RC} (-\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^t = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Пределы интегрирования взяты от 0 до t , так как до коммутации на емкости не было зарядов.

Из полученных уравнений непосредственно видно, что в момент включения зарядный ток цепи максимален и численно равен $\frac{U}{R}$, т.е. емкость в момент включения как бы закорочена.



На рисунке изображены графики переходного процесса.

С энергетической стороны процесс интересен тем, что половина энергии источника переходит в тепловую на сопротивлении R , а вторая половина запасается в электрическом поле емкости:

$$W_{уст} = \int_0^{\infty} U i dt = \int_0^{\infty} (u_R i + u_C i) dt = \int_0^{\infty} R i^2 dt + \int_0^U C u_C du_C,$$

но $\int_0^U C u_C du_C = \frac{CU^2}{2} = W_C$ - энергия электрического поля емкости,

$$W_{уст} = \int_0^{\infty} U i dt = \int_0^U U C du_C = CU^2 - \text{энергия, отданная источником,}$$

тогда энергия, преобразованная в тепловую

$$W_R = W_{уст} - W_C = \frac{CU^2}{2} = W_C.$$

Между полученными зависимостями для u_C в цепи $R - C$ и для i в цепи $R - L$ наблюдается полная аналогия. Напомним, что подобные цепи называются дуальными.

2. Включение цепи на переменное синусоидальное напряжение.

Пусть к цепи приложено напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Дифференциальное уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа

$$u = R i + u_C,$$

или после подстановки $i = C \frac{du_C}{dt}$

$$u = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Принужденное напряжение на емкости

$$u_{C \text{ пр}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cdot \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}),$$

или

$$u_{C \text{ пр}} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Переходное напряжение

$$u_C = u_{C\text{ np}} + u_{C\text{ св}} = u_{C\text{ np}} + A e^{-\frac{t}{RC}}.$$

(характеристическое уравнение такое же, что и при включении на постоянное напряжение).

Применим закон коммутации

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

тогда

$$0 = U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + A,$$

откуда

$$A = -U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Переходное напряжение на емкости

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) - U_{Cm} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Переходный ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + \frac{C U_{Cm}}{RC} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Преобразуем выражение, учитывая, что

$$U_{Cm} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{I}{\omega^2 C^2}}} \cdot \frac{I}{\omega C}.$$

Получим

$$\begin{aligned} i &= \frac{\omega C U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{I}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + \frac{U_m}{\omega C R \sqrt{R^2 + \frac{I}{\omega^2 C^2}}} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}} = \\ &= \frac{U_m}{R} \left[\frac{R}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{\frac{I}{\omega C}}{Z} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \\ &= \frac{U_m}{R} \left[\cos \varphi \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \sin \varphi \cdot \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \end{aligned}$$

В момент включения $u_C(0) = 0$, а

$$i(0) = \frac{U_m}{R} [\cos \varphi \cdot \sin(\psi - \varphi) + \sin \varphi \cdot \cos(\psi - \varphi)] = \frac{U_m}{R} \sin \psi,$$

т.е. емкость как бы закорочена (с учетом $-\frac{I}{\frac{\omega C}{Z}} = \sin\varphi$).

Анализ полученных выражений показывает, что i и u_C могут превосходить максимальные значения этих величин в установившемся режиме. Величины сверхтоков и перенапряжений зависят от фазы включения и постоянной времени цепи $\tau = RC$, определяющих начальные значения свободных величин и скорость их убывания.

При включении в момент, когда принужденное напряжение на емкости равно нулю, т.е. $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$

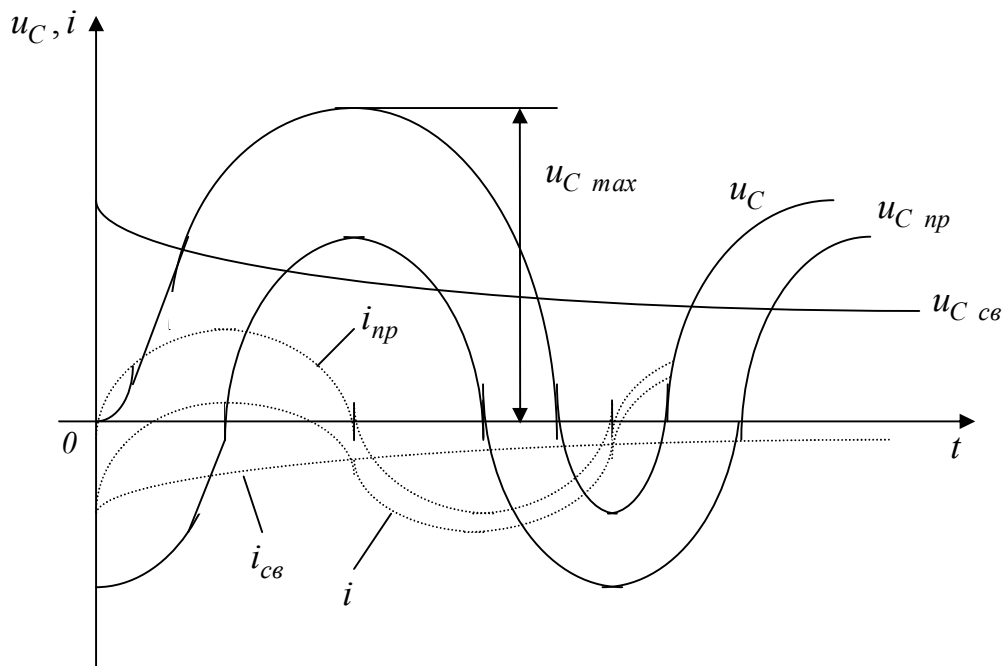
$$u_C = U_{Cm} \sin\omega t \quad \text{и} \quad i = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

т.е. в цепи сразу наступает принужденный режим.

При включении в момент, когда принужденное напряжение на емкости получает максимальное значение U_{Cm} , а принужденный ток равен нулю, т.е. $\psi - \varphi = 0$

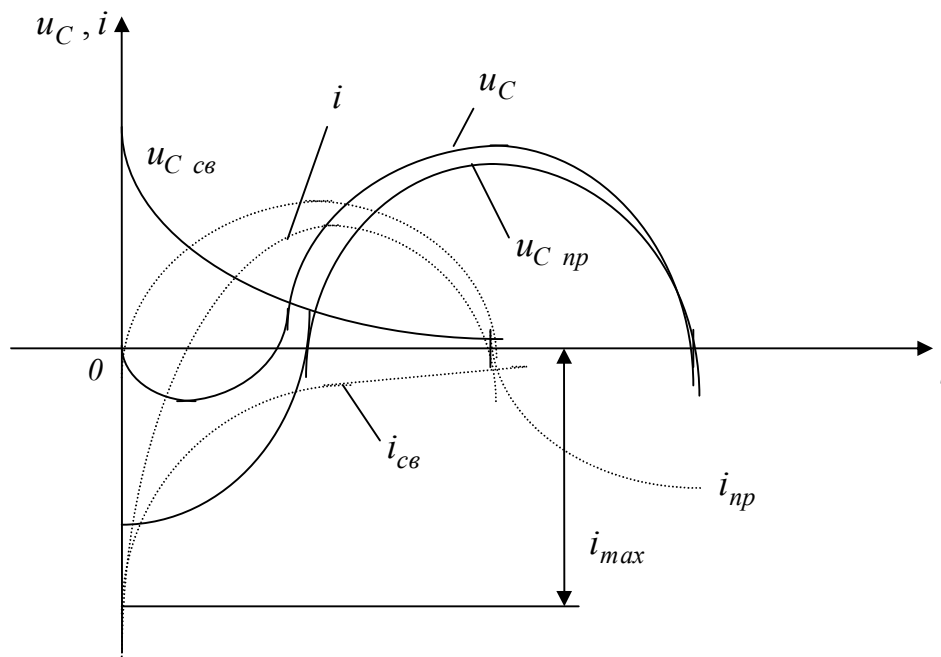
$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + U_{Cm} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i = I_m \sin\omega t - \frac{I_m}{R\omega C} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

при большой постоянной времени $\tau = RC$ получается значительные перенапряжения на емкости (до $2U_{Cm}$ установившегося режима), но малый ток. Этот случай представлен на рисунке.



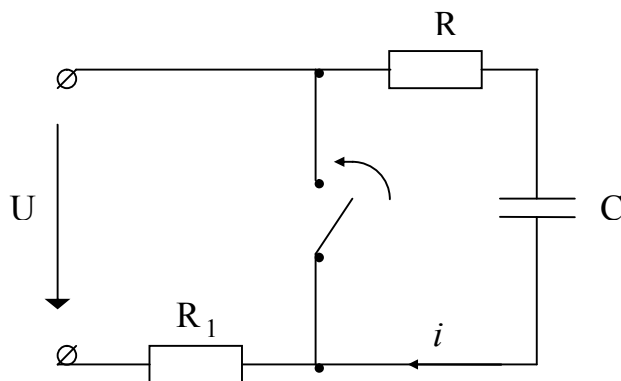
При малой постоянной времени может быть сверхток $i(0) = \frac{U_m}{R}$, во много раз превосходящий амплитудное значение I_m тока установившегося режима, но перенапряжений на емкости не будет.

Этот случай представлен на следующем рисунке.



3. Короткое замыкание цепи.

Как и в случае заряда емкости выполним расчет по двум путям, определяя в первую очередь u_C или i .



Дифференциальное уравнение цепи

$$0 = Ri + u_C.$$

1). Заменим

$$i = C \frac{du_C}{dt},$$

тогда

$$0 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Принужденное напряжение

$$u_{C \text{ пр}} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$0 = RCp + 1$$

и

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

Общее решение

$$u_C = u_{C \text{ пр}} + u_{C \text{ св}} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = RC$.

Из начальных условий

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U.$$

Поэтому

$$U = A,$$

то есть

$$u_C = Ue^{pt} = Ue^{-\frac{t}{RC}} = Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CU \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

2). Заменим

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

После дифференцирования получим

$$0 = Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

и

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}.$$

Принужденный ток

$$i_{np} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$0 = Rp + \frac{1}{C} \quad \text{и} \quad p = -\frac{1}{RC}.$$

Общее решение

$$i = i_{np} + i_{св} = A e^{-\frac{t}{RC}} = A e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = RC$.

Из начальных условий

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U$$

подстановкой в исходное уравнение при $t = 0$ получим

$$0 = Ri(0) + U,$$

откуда

$$i(0) = -\frac{U}{R}.$$

Тогда

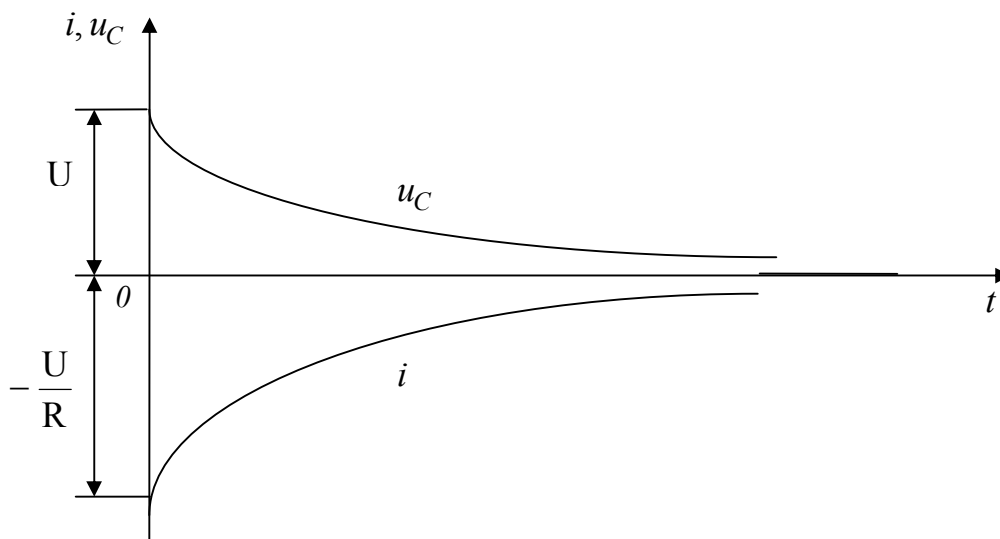
$$-\frac{U}{R} = A \quad \text{и} \quad i = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = U + \frac{1}{C} \int_0^t -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = U e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Здесь пределы приняты от $-\infty$ до t , так как к началу отсчета времени на емкости уже имелось напряжение.

Графики процесса приведены на рисунке.



Переходный процесс характеризуется преобразованием энергии электрического поля емкости в тепловую на сопротивлении:

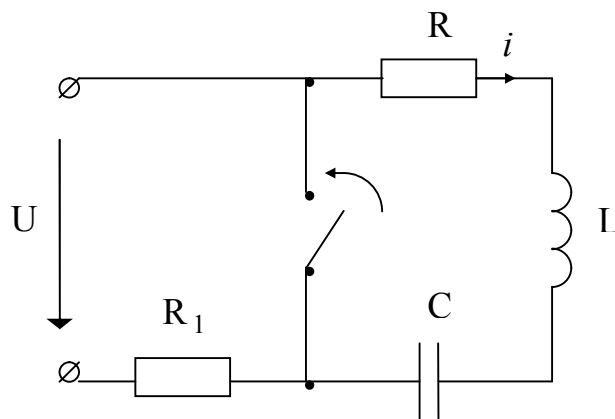
$$W = \int_0^{\infty} R i^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{U^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C U^2.$$

ЛЕКЦИЯ №29.

Переходные процессы в цепи с последовательным соединением индуктивности, емкости и активного сопротивления.

1. Короткое замыкание цепи.

Опыт показывает, что разряд емкости в этой цепи может происходить постепенно, т.е. напряжение на C плавно падает до нуля, или же при разряде возникают периодические колебания, т.е. емкость разряжается до нуля, затем заряжается в противоположном направлении, затем снова разряжается и т.д. В последнем случае происходит периодический обмен энергией между электрическим полем емкости и магнитным полем индуктивности, сопровождающийся выносом энергии из цепи путем преобразования за каждый цикл заряд - разряд в тепловую энергию в сопротивлении R . Процесс и в том и в другом случае носит затухающий характер, так как начальный запас энергии в цепи $W_C = \frac{Cu_C^2(0)}{2}$ ограничен. Механическим аналогом переходного процесса может служить процесс движения физического маятника в средах различной вязкости.



Для рассматриваемой цепи в любой момент времени:

$$u_L + u_C + u_R = 0,$$

или

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0,$$

или после дифференцирования

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

так как

$$\frac{dq}{dt} = i.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0.$$

Его корни

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В дальнейшем для краткости записи принимаем

$$\frac{R}{2L} = \alpha$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Тогда

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$
$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

В соответствии с квадратным характеристическим уравнением необходимы два начальных условия для отыскания двух постоянных интегрирования. Составим их на основе законов коммутации. Так как в цепи имеется индуктивность, то

$$i(0_+) = i(0_-),$$

но до коммутации ток был равен нулю. Поэтому

$$i(0) = 0.$$

Второе условие должно быть сформулировано относительно производной тока.

Для этого выразим из исходного уравнения $\frac{di}{dt}$ и, учитывая закон коммутации для емкости, получим при $t = 0$:

$$\frac{di}{dt} = \frac{-Ri - u_C}{L},$$

но

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U,$$

тогда

$$\left[\frac{di}{dt} \right]_{t=0} = -\frac{U}{L}.$$

Характер разряда зависит от параметров цепи. т.е. от соотношения между R , L , C и сводится к исследованию процесса при трех возможных случаях корней характеристического уравнения.

Первый случай.

$$\alpha > \omega_0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \quad \text{или} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вещественные, неравные корни.

Решение ищем в виде

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

При $t = 0$ из условия $i(0) = 0$ получим:

$$0 = A_1 + A_2 \quad \text{или} \quad A_1 = -A_2.$$

Из условия

$$\left[-\frac{di}{dt} \right]_{t=0} = -\frac{U}{L}$$

после дифференцирования решения для тока и подстановки $t = 0$ получим:

$$-\frac{U}{L} = p_1 A_1 - p_2 A_1,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{U}{L(p_1 - p_2)},$$

$$A_2 = \frac{U}{L(p_1 - p_2)}.$$

Таким образом

$$i = -\frac{U}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{LU}{L(p_1 - p_2)}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Напряжение на емкости

$$\begin{aligned} u_C = -u_L - Ri &= \frac{U}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) + \frac{R}{L} \cdot \frac{U}{p_1 - p_2}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \\ &= \frac{U}{p_1 - p_2} \left[e^{p_1 t} \left(p_1 + \frac{R}{L} \right) - e^{p_2 t} \left(p_2 + \frac{R}{L} \right) \right] = \frac{U}{p_1 - p_2} \left[\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{R}{L} \right) e^{p_1 t} - \left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} + \frac{R}{L} \right) e^{p_2 t} \Big] = \frac{U}{p_1 - p_2} \left[-p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t} \right] = \\ &= \frac{U}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}). \end{aligned}$$

Построим графики переходного процесса для тока, напряжения на индуктивности и емкости. В соответствии с уравнением тока для его построения необходимо алгебраически сложить две экспоненты:

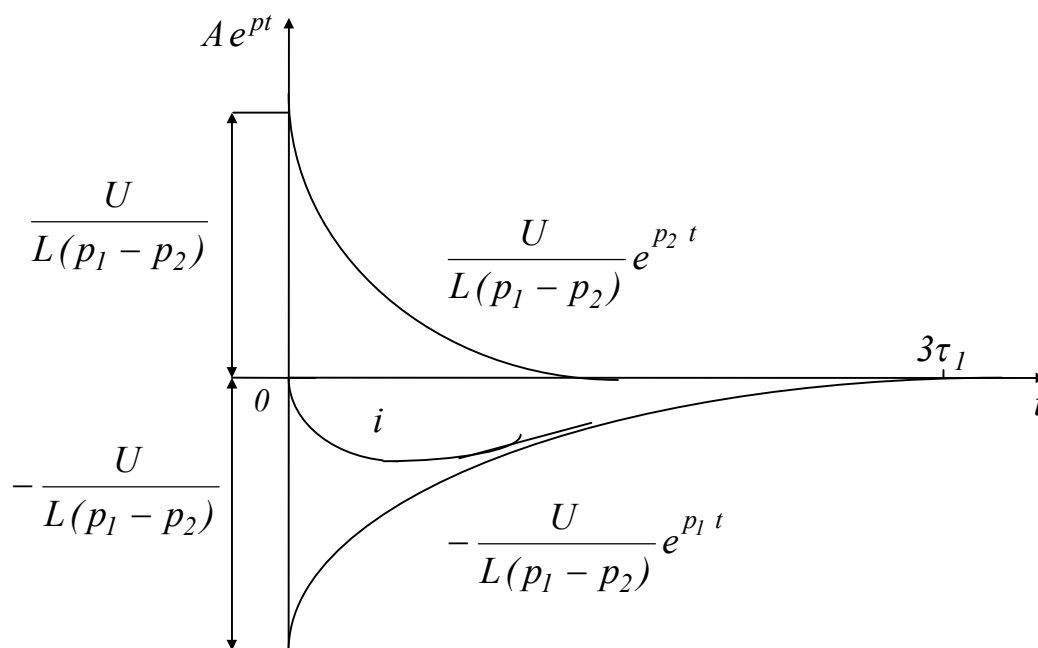
$$-\frac{U}{L(p_1 - p_2)}e^{p_1 t} \quad \text{и} \quad \frac{U}{L(p_1 - p_2)}e^{p_2 t}.$$

Так как $|p_2| > |p_1|$, то вторая экспонента затухает быстрее первой.

При построении обозначим

$$-\frac{1}{p_1} = \tau_1, \quad -\frac{1}{p_2} = \tau_2$$

и определим значения экспонент для промежуточных моментов времени вплоть до $3\tau_1$. После построения каждой экспоненты следует их сложить, что и выполнено на рисунке.



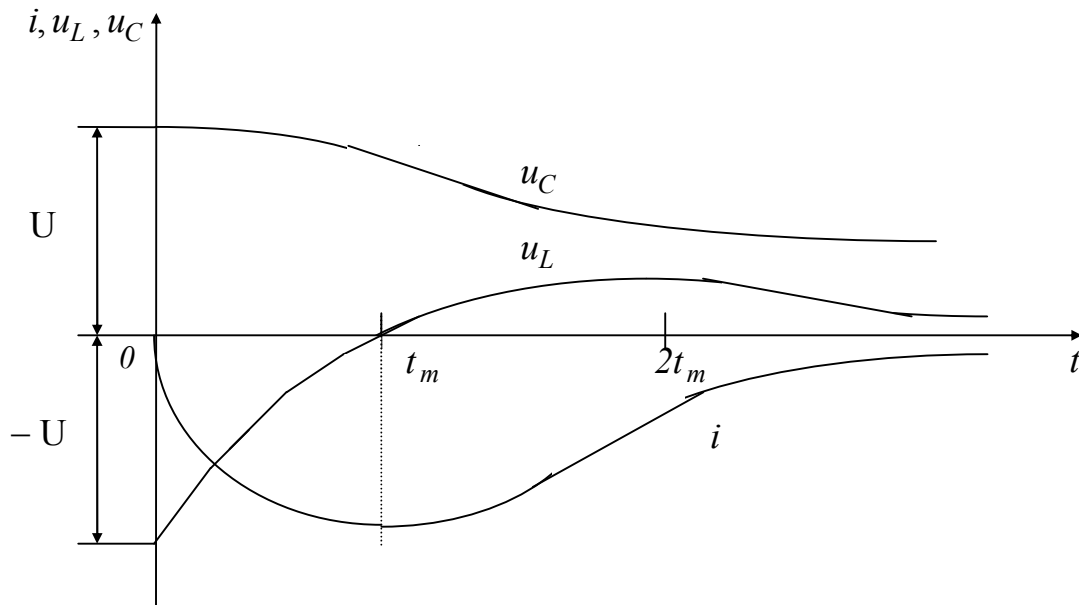
Рекомендуется рассчитать для каждой кривой 4 - 5 промежуточных точек. Из построения видно, что ток не меняет своего направления, т.е. емкость все время разряжается. Такой разряд называется апериодическим. Напряжения на емкости при нем монотонно спадает до нуля. Для уточнения момента максимального тока продифференцируем уравнение тока и приравняем производную нулю:

$$p_1 e^{p_1 t_m} - p_2 e^{p_2 t_m} = 0,$$

или

$$t_m = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}.$$

Исследование уравнения напряжения на индуктивности показывает, что u_L от отрицательного значения (при $t = 0$ $u_L = -U$) возрастает, при $t = t_m$ проходит через нуль, достигает при $t = 2t_m$ единственного максимума и далее уменьшается до нуля. Графики переходного процесса представлены на рисунке.



Второй случай.

$$\alpha = \omega_0, \text{ т.е. } R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тогда $p_1 = p_2 = -\alpha$ и решение имеет вид

$$i = (A_3 + A_4 t) e^{-\alpha t}.$$

Из начальных условий определим A_3 и A_4 .

При $t = 0$

$$i(0) = 0 \text{ и } 0 = A_3 + A_4 \cdot 0, \text{ т.е. } A_3 = 0.$$

При этом

$$i = A_4 t e^{-\alpha t}.$$

Но

$$\left[-\frac{di}{dt} \right]_{t=0} = -\frac{U}{L} = A_4,$$

тогда

$$i = -\frac{U}{L} t e^{-\alpha t}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U(\alpha t - 1) e^{-\alpha t},$$

на емкости

$$u_C = -\left(L \frac{di}{dt} + Ri\right) = U(\alpha t + 1) e^{-\alpha t}.$$

(при определении u_C учтено, что $\alpha = \frac{R}{2L}$).

Анализ уравнений показывает, что в этом случае разряд остается апериодическим. Это предельный случай апериодического разряда.

Третий случай.

$$\alpha < \omega_0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \quad \text{или} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В этом случае корни характеристического уравнения p_1 и p_2 комплексные сопряженные числа. Обозначим

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + j\omega_1,$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_1.$$

Общее решение уравнения и в этом случае можно искать в виде

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

однако, можно показать, что проще решать задачу в виде

$$i = k e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \psi).$$

В самом деле, из курса математики известно, что при комплексных сопряженных корнях решение может быть представлено как

$$i = (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) e^{-\alpha t},$$

а стоящая в скобках сумма двух синусоид может быть приведена к виду

$$k \sin(\omega_1 t + \psi).$$

Из начальных условий получим:

$$\begin{cases} i(0) = 0, \\ \left[\frac{di}{dt} \right]_{t=0} = -\frac{U}{L}, \\ 0 = k \sin \psi, \\ -\frac{U}{L} = -\alpha k \sin \psi + \omega_1 k \cos \psi. \end{cases}$$

Решение системы дает

$$\psi = 0 \quad \text{или} \quad \psi = \pi,$$

так как « k » не может быть равно нулю (это означало бы отсутствие тока).

$$\text{При } \psi = 0 \quad k = -\frac{U}{\omega_1 L},$$

при $\psi = \pi$ $k = \frac{U}{\omega_1 L}$.

В обоих случаях

$$i = -\frac{U}{\omega_1 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t, \quad \text{или} \quad i = -I_m e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t,$$

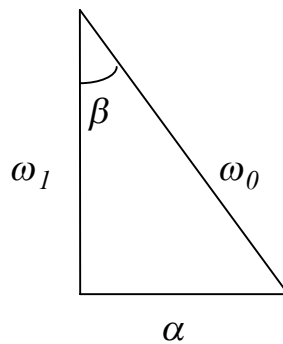
где $\frac{U}{\omega_1 L} = I_m$.

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U}{\omega_1} (-\alpha \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t) e^{-\alpha t}.$$

Выражение, заключенное в скобки, представляет собой сумму двух синусоид. Для получения результирующей введем вспомогательный треугольник, определяемый равенством

$$\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega_1^2,$$



при этом так как по условию всегда

$$\omega_0 \geq \omega_1,$$

то и

$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \sin \beta \quad \text{и} \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = \cos \beta.$$

Вынесем за скобки из выражения u_L величину ω_0 :

$$\begin{aligned} u_L &= -\frac{U}{\omega_1} \omega_0 \left(-\frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos \omega_1 t \right) e^{-\alpha t} = \\ &= -\frac{U \omega_0}{\omega_1} (-\sin \beta \sin \omega_1 t + \cos \beta \cos \omega_1 t) e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

или

$$u_L = -\frac{U \omega_0}{\omega_1} \cos(\omega_1 t + \beta) e^{-\alpha t}.$$

Выражение можно записать также и в виде

$$u_L = -I_m \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2} + \beta) e^{-\alpha t},$$

так как

$$\frac{U}{\omega_1 L} = I_m, \quad \text{а} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Аналогичным образом можно определить напряжение на ёмкости:

$$u_C = -Ri - L \frac{di}{dt} = -I_m \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} - \beta) e^{-\alpha t}.$$

Величину $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, связывающую амплитудные значения тока и напряжений на элементах, часто называют волновым сопротивлением контура R, L, C .

Полученные выражения i, u_L, u_C проанализируем сначала для сверхпроводящего контура, т.е. при $R = 0$. Очевидно, тогда и

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 0, \quad \beta = \arcsin \frac{\alpha}{\omega_0} = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0.$$

Выражения принимают вид (здесь $U = U_m$):

$$\begin{aligned} i &= -I_m \sin \omega_0 t = -\frac{U_m}{\rho} \sin \omega_0 t, \\ u_L &= -I_m \rho \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -U_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \\ u_C &= -I_m \rho \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_m \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае в цепи возникают незатухающие колебания, период которых определяется формулой Томсона

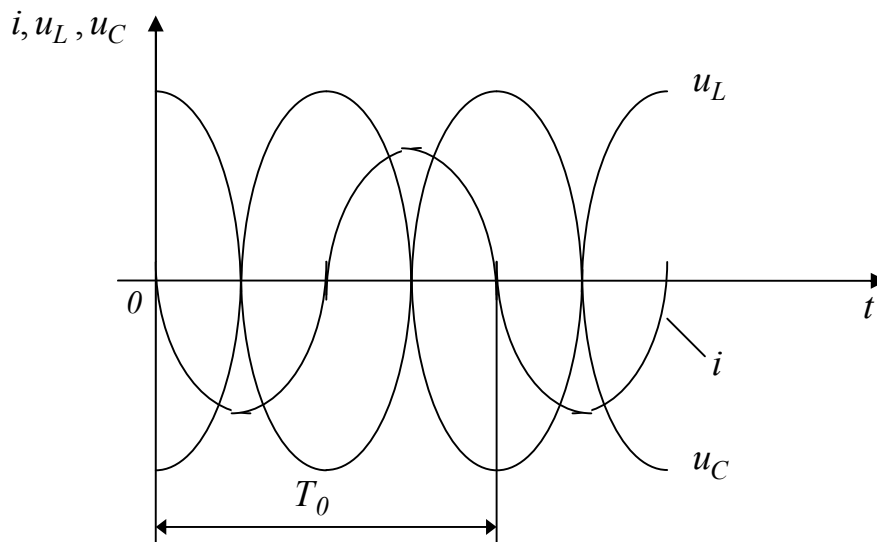
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Так как T_0 зависит только от параметров контура, то это - период собственных незатухающих колебаний.

Графики колебаний показывают, что соотношение фаз между i, u_L и u_C такое же, как и при установившемся режиме. В цепи происходит обмен энергией между электрическим и магнитным полями, не сопровождающийся потерями, так как $R = 0$. Поэтому процесс является бесконечным и незатухающим.

При $0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, т.е. $0 < \alpha < \omega_0$ разряд носит также колебательный характер, так как

$$i = -I_m e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t$$



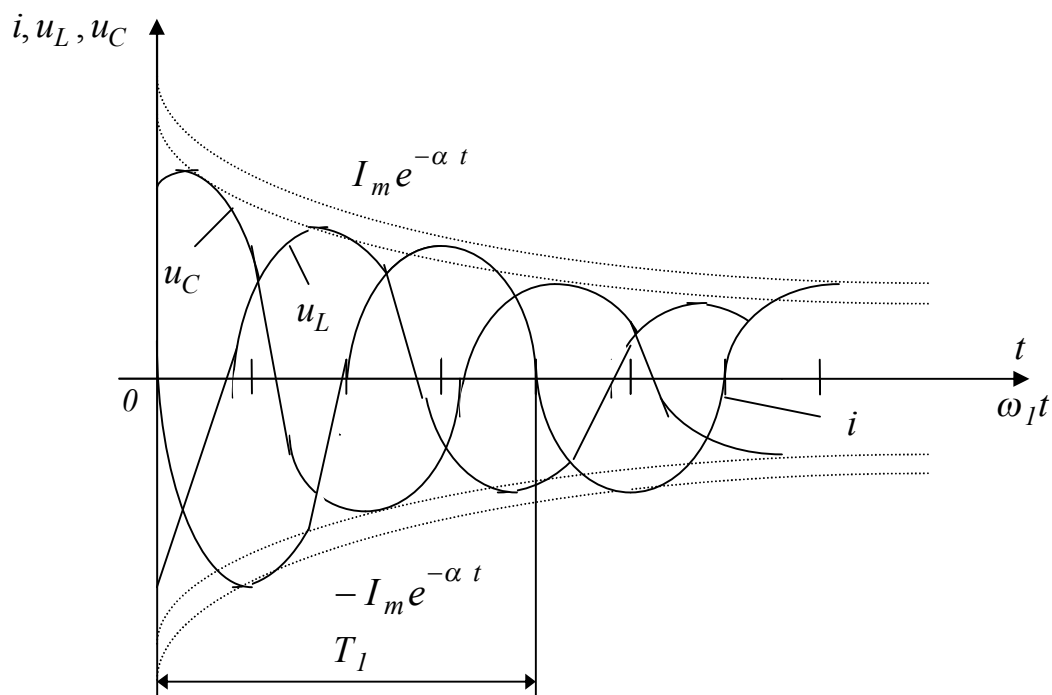
периодически меняет знак, но при этом амплитуды колебаний постепенно затухают. Угловая частота затухающих колебаний ω_l меньше ω_0 :

$$\omega_l = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0, \quad \text{а} \quad T_l = \frac{2\pi}{\omega_l} > T_0.$$

При малых $\frac{\alpha}{\omega_0}$ для определения периода можно пользоваться формулой

Томсона (так при $\frac{\alpha}{\omega_0} = 0.1$ погрешность не превышает 0.5%). Разница между

ω_0 и ω_l растёт с увеличением $\frac{\alpha}{\omega_0}$ и при $\alpha = \omega_0$, $\omega_l = 0$, т.е. разряд переходит в апериодический.



На графике приведены зависимости i , u_L и u_C во времени. При их построении удобно сначала построить огибающую затухающих амплитуд синусоид (например, для тока $I_m e^{-\alpha t}$ и $-I_m e^{-\alpha t}$), между которыми и вписываются синусоиды. Построение следует доводить примерно до $3\tau = 3 \frac{L}{R}$. Напряжения u_L и u_C также затухают, при этом переходы через нуль u_L опережают токовые на $\frac{\pi}{2} + \beta$, а u_C - отстают на $\frac{\pi}{2} + \beta$.

Для суждения о быстроте затухания рассмотрим отношение двух последующих амплитуд одного знака - декремент затухания :

$$\frac{I_m e^{-\alpha t}}{I_m e^{-\alpha(t+T_1)}} = e^{-\alpha T_1}.$$

Затухание, очевидно, тем больше, чем больше $\alpha = \frac{R}{2L}$.

Часто пользуются логарифмическим декрементом затухания:

$$\Delta = \ln \frac{I_m e^{-\alpha t}}{I_m e^{-\alpha(t+T_1)}} = \alpha T_1.$$

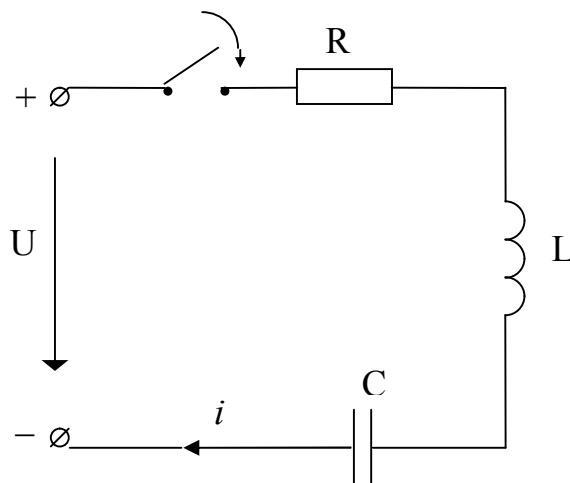
Энергетическая сторона процесса характеризуется также обменом энергией между электрическим и магнитным полями. Однако, при этом в любой момент времени dt происходит рассеяние энергии на сопротивлении R :

$$dW = i^2 R dt.$$

Поэтому общая энергия системы убывает, а процесс затухает.

2. Включение на постоянное напряжение.

Дифференциальное уравнение цепи



принимает вид

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U$$

и имеет характеристическое уравнение, совпадающее с рассмотренным при коротком замыкании цепи. Поэтому здесь также возможны как апериодический, так и колебательный режимы.

В принужденном режиме $i_{np} = 0$, а $u_{C np} = U$.

Начальные условия:

$$i(0) = 0 \quad \text{и} \quad u_C(0) = 0.$$

Если $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то режим будет апериодическим. Из первого начального условия следует:

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad \text{или} \quad A_1 = -A_2, \quad \text{а} \quad i = A_1(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Напряжение на ёмкости

$$\begin{aligned} u_C &= U - L \frac{di}{dt} - Ri = U - LA_1(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) - RA_1(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \\ &= U - LA_1 \left[e^{p_1 t} \left(p_1 + \frac{R}{L} \right) - e^{p_2 t} \left(p_2 + \frac{R}{L} \right) \right]. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{R}{L} &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} + \frac{2\alpha L}{L} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -p_2, \\ p_2 - \frac{R}{L} &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} + \frac{2\alpha L}{L} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -p_1, \end{aligned}$$

а

$$u_C = U - LA_1(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}).$$

Так как при $t = 0$ напряжение $u_C(0) = 0$, то

$$U - LA_1(p_1 - p_2) = 0 \quad \text{и} \quad A_1 = \frac{U}{(p_1 - p_2)L} = \frac{U}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}.$$

Окончательно получим выражения для тока

$$i = \frac{U}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}),$$

для напряжения на емкости

$$u_C = U - \frac{U}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}).$$

Если $\alpha = \omega_0$ (критический режим), получим аналогичным способом:

$$i = \frac{U}{L} t e^{-\alpha t},$$

$$u_C = U - U(1 - \alpha t) e^{-\alpha t}.$$

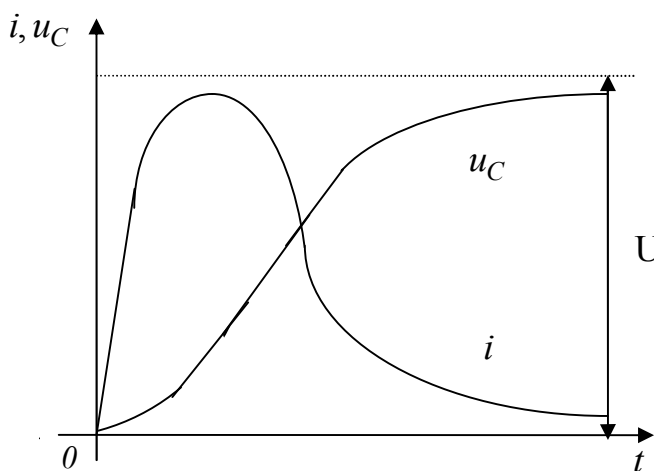
При $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ процесс как и при разряде ёмкости будет носить колебательный характер.

Рассуждая совершенно таким же образом, как и в случае колебательного разряда в цепи R, L, C , получим для этого случая

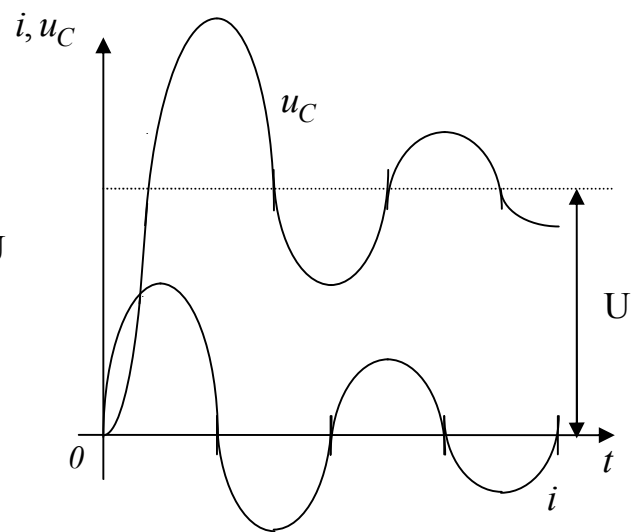
$$i = \frac{U}{\omega_1 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t,$$

$$u_C = U - U \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \beta).$$

Примерные графики переходных процессов для обоих случаев приведены на рисунках,



Апериодический режим.



Колебательный режим.

Максимальное значение u_C при переходном режиме достигает не более $2U$.

3. Включение на синусоидальное напряжение.

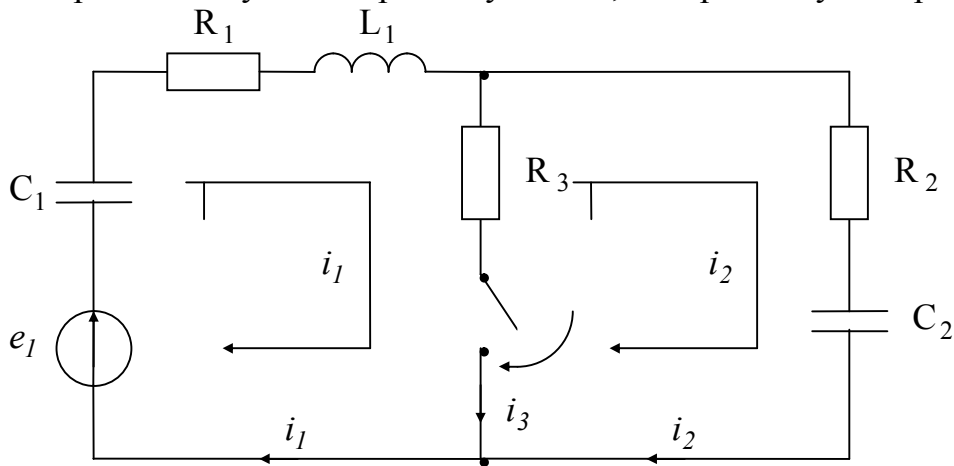
При включении цепи на синусоидальное напряжение ход решения остается таким же. Переходный ток и напряжение на участках будут представлять собой сумму принужденных синусоид и свободных затухающих составляющих, носящих апериодический или колебательный характер с собственной частотой ω_1 , в общем случае не равной частоте сети ω . Величины, характеризующие переходный процесс, зависят также от момента включения.

ЛЕКЦИЯ №30.

Расчёт переходных процессов в сложных цепях классическим методом.

Расчет переходных процессов в электрических цепях классическим методом сводится к определению принужденных и свободных составляющих токов и напряжений путем интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих переходный процесс в исследуемой цепи. Интегрирование может быть выполнено обычными приемами, изучаемыми в курсе высшей математики. Однако, характер электрических цепей и дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в них, позволяет в значительной степени рационализировать процесс решения уравнений.

Рассмотрим сложную электрическую цепь, изображенную на рисунке.




Запишем уравнения первого и второго законов Кирхгофа:

$$\begin{cases} e_1 = u_{C1} + R_1 i_1 + L_1 i_1' + R_3 i_3, \\ 0 = R_2 i_2 + u_{C2} - R_3 i_3, \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{cases}$$


Входящие в уравнения u_{C1} и u_{C2} выразим через токи ветвей:

$$u_{C1} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt, \quad u_{C2} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt.$$


В качестве пределов интегрирования здесь следует понимать от $-\infty$ до t . Часто напряжение на емкости удобнее изображать как сумму $u_C(0)$ и $\frac{1}{C} \int i dt$, где в качестве пределов взяты 0 и t . На рисунке изображены различные случаи подобной записи.

$u_C(0)$

 Направление обхода.
 $u_C(0) + \frac{I}{C} \int idt.$

$$u_C(0) \quad \downarrow \quad \begin{array}{c} + \\ \hline - \end{array} \quad \uparrow \quad i \quad \left(\leftarrow \right. \quad \begin{array}{c} \text{Направление} \\ \text{обхода.} \end{array} \quad -u_C(0) + \frac{1}{C} \int i dt.$$

$u_C(0)$


Направление
обхода.



$u_C(0) - \frac{1}{C} \int i dt.$

$$u_C(0) \quad \downarrow \quad \begin{array}{c} + \\ \hline \hline - \end{array} \quad \downarrow \quad i \quad \left(\leftarrow \right. \quad \begin{array}{c} \text{Направление} \\ \text{обхода.} \end{array} \quad -u_C(0) - \frac{I}{C} \int i dt.$$

Вернемся к исходным уравнениям и исключим из них ток i_3 :

$$\begin{cases} e_l = \frac{I}{C_l} \int i_l dt + R_l i_l + L_l i_l' + R_3 i_l - R_3 i_2, \\ 0 = -R_3 i_l + R_2 i_2 + \frac{I}{C_2} \int i_2 dt + R_3 i_2. \end{cases}$$

Заметим, что уравнения могут быть записаны сразу методом контурных токов.

Перепишем уравнения для свободных токов:

$$\begin{cases} 0 = \frac{I}{C_1} \int i_{1\text{ } c_6} dt + R_1 i_{1\text{ } c_6} + L_1 i_{1\text{ } c_6}' + R_3 i_{1\text{ } c_6} - R_3 i_{2\text{ } c_6}, \\ 0 = -R_3 i_{1\text{ } c_6} + R_2 i_{2\text{ } c_6} + \frac{I}{C_2} \int i_{2\text{ } c_6} dt + R_3 i_{2\text{ } c_6}. \end{cases}$$

Решение системы для любого из токов может быть представлено в виде суммы экспоненциальных функций, каждая пара которых, имеющая одинаковые показатели, должна удовлетворять этим уравнениям.

Для любой из пар:

$$i_{1_{сБ}} = A_1 e^{p t} \quad \text{и} \quad i_{2_{сБ}} = A_2 e^{p t}$$

производные

$$i'_{l_{c\beta}} = pA_l e^{p t} = p i_{l_{c\beta}}, \quad i'_{2_{c\beta}} = pA_2 e^{p t} = p i_{2_{c\beta}},$$

интегралы

$$\int i_{1\text{св}} dt = \frac{I}{p} A_1 e^{pt} = \frac{i_{1\text{св}}}{p}, \quad \int i_{2\text{св}} dt = \frac{I}{p} A_2 e^{pt} = \frac{i_{2\text{св}}}{p}.$$

Здесь интегралы понимаются в пределах от 0 до t , так как в уравнениях свободных токов выпадают $u_{C1}(0)$ и $u_{C2}(0)$.

Подстановка в систему дает:

$$\begin{cases} \frac{I}{pC_1} i_{1\text{св}} + R_1 i_{1\text{св}} + pL_1 i_{1\text{св}} + R_3 i_{1\text{св}} - R_3 i_{2\text{св}} = 0, \\ -R_3 i_{1\text{св}} + R_2 i_{2\text{св}} + \frac{I}{pC_2} i_{2\text{св}} + R_3 i_{2\text{св}} = 0. \end{cases}$$

Подобный прием называют алгебраизацией дифференциальных уравнений. Полученная система алгебраических уравнений может быть установлена другим путем. Для этого следует записать уравнения методом контурных токов для послекоммутационного установившегося режима

$$\begin{cases} \left(\frac{I}{j\omega C_1} + R_1 + j\omega L_1 + R_3 \right) \underline{I}_1 - R_3 \underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ -R_3 \underline{I}_1 + \left(R_2 + \frac{I}{j\omega C_2} + R_3 \right) \underline{I}_2 = 0. \end{cases}$$

и заменить в них $j\omega$ на « p », токи \underline{I}_1 и \underline{I}_2 - на $i_{1\text{св}}$ и $i_{2\text{св}}$, а правую часть приравнять нулю. Справедливость этого приема следует из того, что умножение на $j\omega$ равносильно дифференцированию, а деление на $j\omega$ - интегрированию мгновенных значений по времени, как и в случае с множителем « p ».

Алгебраизованные уравнения могут быть использованы для определения « p ». В самом деле, решая систему относительно какого-либо тока, например, $i_{1\text{св}}$ получим:

$$\left(\frac{I}{pC_1} + R_1 + pL_1 + R_3 - \frac{R_3^2}{R_3 + R_2 + \frac{I}{pC_2}} \right) i_{1\text{св}} = 0,$$

откуда

$$\frac{I}{pC_1} + R_1 + pL_1 + R_3 - \frac{R_3^2}{R_3 + R_2 + \frac{I}{pC_2}} = 0.$$

Полученное уравнение дает возможность определить значения его корней « p ».

Можно поступить и иначе. В самом деле, система алгебраизованных уравнений имеет отличное от нулевого решение только тогда, когда определитель сис-

темы равен нулю:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} \frac{1}{pC_1} + R_1 + pL_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_2 + \frac{1}{pC_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что нулевое решение ($i_{1\text{св}} = i_{2\text{св}} = 0$) означает отсутствие переходного процесса. Таким образом, « p » является корнем характеристического уравнения.

Существует и еще более простой способ определения корней характеристического уравнения. Для этого следует составить в комплексной форме входное сопротивление относительно любой ветви (включая и сопротивление этой ветви), заменить $j\omega$ на « p » и принять выражение нулю.

Так, например, для левой ветви

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_1} + R_1 + j\omega L_1 + \frac{R_3(\frac{1}{j\omega C_2} + R_2)}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2}},$$

откуда

$$Z(p) = \frac{1}{pC_1} + R_1 + pL_1 + \frac{R_3(R_2 + \frac{1}{pC_2})}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC_2}} = 0.$$

Справедливость подобного приема вытекает из следующих соображений. В исходной схеме при свободных токах э.д.с. отсутствует. Записав в комплексной форме закон Кирхгофа, например, для левого контура, получим при отсутствии э.д.с.

$$Z_1(j\omega)\underline{I}_1 + Z_{23}(j\omega)\underline{I}_1 = 0,$$

где

$$Z_1(j\omega) = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1},$$

$$Z_{23}(j\omega) = \frac{R_3(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2})}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2}}.$$

Заменим $j\omega$ на « p », а ток \underline{I}_1 на $i_{1\text{св}}$:

$$[Z_1(p) + Z_{23}(p)] i_{1\text{св}} = 0.$$

но $i_{1\text{св}} \neq 0$, так как иначе нет переходного процесса.

Тогда

$$Z_{11}(p) + Z_{23}(p) = 0,$$

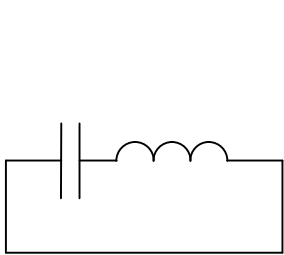
откуда легко определяются корни характеристического уравнения.

В заключение отметим, что характеристическое уравнение может быть составлено и общепринятым в математике способом путем приведения системы дифференциальных уравнений к одному, записанному относительно одного неизвестного и заменой i''' на p^3 , i'' на p^2 , i' на p . Однако, такой способ часто является более трудоемким.

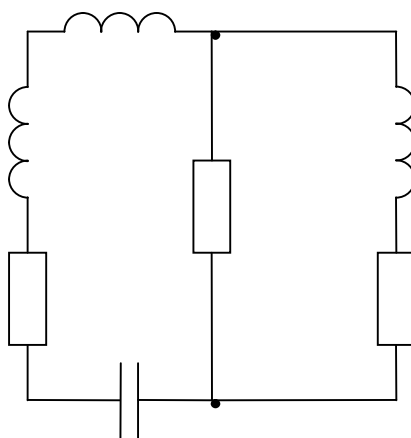
При наличии известного опыта по виду схемы можно сразу определить порядок характеристического уравнения. Этот порядок совпадает с количеством постоянных интегрирования. Как известно, постоянные определяются с помощью законов коммутации и их число не может быть больше, чем количество применимых к данной схеме независимых начальных условий по законам коммутации. При этом следует иметь в виду, что последовательно включенные индуктивности и параллельно включенные емкости не повышают порядок уравнения.

Причиной возникновения переходных процессов является наличие в электрических цепях индуктивностей, где не может скачкообразно изменяться ток, и емкостей, где не может скачкообразно изменяться напряжение. Отсюда следует, что порядок определяется количеством индуктивностей и емкостей в схеме. При этом последовательно включенные индуктивности считаются за одну индуктивность, а параллельно включенные емкости - за одну емкость. Исследуемая схема содержит в первой ветви L_1 и C_1 , а во второй - C_2 . Поэтому порядок характеристического уравнения равен трем.

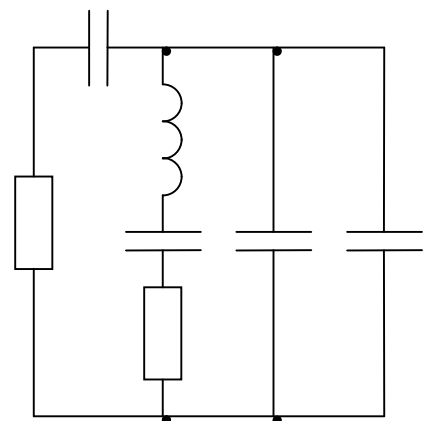
На рисунках приведены три схемы и указан порядок уравнений.



2-ой порядок.



3-ий порядок.



4-ый порядок.

После определения корней характеристического уравнения следует составить общее решение дифференциальных уравнений.

При вещественных различных корнях p_1 , p_2 и p_3 решение удобно записать в виде

$$i = i_{np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t},$$

при вещественных одинаковых корнях $p_1 = p_2 = p_3 = p$

$$i = i_{np} + (A_1 + A_2 t + A_3 t^2) e^{p t},$$

наконец, если p_1 - вещественный, а p_2 и p_3 - комплексные сопряженные:

$$i = i_{np} + A e^{p_1 t} + k e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi),$$

где $p_{2,3} = -\alpha \pm j\omega$.

Следующей операцией является определение постоянных интегрирования (в нашем случае их три). Для их определения следует из исходных дифференциальных уравнений, записанных по первому и второму законам Кирхгофа, определить, записав их при $t = 0$, значения искомых функций времени и их производных, применяя законы коммутации. В рассматриваемом случае необходимо для определения трех токов при трех постоянных интегрирования в составе каждого тока определить $i_1(0)$, $i_1'(0)$, $i_1''(0)$, $i_2(0)$, $i_2'(0)$, $i_2''(0)$, $i_3(0)$, $i_3'(0)$ и $i_3''(0)$.

Для этого перепишем исходные уравнения при $t = 0$ (непосредственно после коммутации):

$$\begin{cases} e_1(0) = u_{C1}(0) + R_1 i_1(0) + L_1 i_1'(0) + R_3 i_3(0) \\ 0 = R_2 i_2(0) + u_{C2}(0) - R_3 i_3(0) \\ i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) \end{cases}.$$

В системе $e_1(0)$ известно по заданию, $u_{C1}(0)$, $i_1(0)$, $u_{C2}(0)$ определяются по докоммутационному режиму с учетом законов коммутации и переносятся на послекоммутационный при $t = 0$. Таким образом, в системе из трех уравнений остаются неизвестными три величины $i_1'(0)$, $i_2(0)$ и $i_3(0)$, которые легко определяются решением системы (подчеркнуты чертой).

Если э.д.с. e_1 постоянна и равна E_1 , то с учетом законов коммутации

$$u_{C1}(0) = E_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2},$$

$$u_{C2}(0) = E_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

$$i_1(0) = 0$$

и система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} E_I = u_{C1}(0) + L_1 i_1'(0) + R_3 i_3(0) & (1) \\ 0 = R_2 i_2(0) + u_{C2}(0) - R_3 i_3(0) & (2) \\ 0 = i_2(0) + i_3(0) & (3) \end{cases}$$

Из (3) следует

$$i_2(0) = -i_3(0).$$

Затем из уравнения (2) подстановкой $i_2(0) = -i_3(0)$ определяются $i_2(0)$ и $i_3(0)$ и наконец из уравнения (1) определяется $i_1'(0)$.

Продифференцировав исходные уравнения и записав их при $t = 0$, получим:

$$\begin{cases} 0 = \frac{i_1(0)}{C_1} + L_1 i_1''(0) + R_3 i_3'(0) + R_1 i_1'(0) \\ 0 = R_2 i_2'(0) + \frac{i_2(0)}{C_2} - R_3 i_3'(0) \\ i_1'(0) = i_2'(0) + i_3'(0) \end{cases}.$$

В этой системе также три неизвестных $i_1''(0)$, $i_2'(0)$ и $i_3'(0)$, которые определяют решения системы.

Еще раз продифференцировав исходные уравнения и записав их при $t = 0$, найдем дополнительно $i_2''(0)$ и $i_3''(0)$:

$$\begin{cases} 0 = \frac{i_1'(0)}{C_1} + L_1 i_1'''(0) + R_3 i_3''(0) + R_1 i_1''(0) \\ 0 = R_2 i_2''(0) + \frac{i_2'(0)}{C_2} - R_3 i_3''(0) \\ i_1''(0) = i_2''(0) + i_3''(0) \end{cases}.$$

В этих уравнениях также три неизвестных $i_1'''(0)$, $i_2''(0)$ и $i_3''(0)$.

Если заданная э.д.с. синусоидальна $e = E_{Im} \sin(\omega t + \psi)$, то определение токов и их производных производится таким же способом. Для определения начальных условий при этом предварительно необходимо в комплексной форме рассчитать докоммутационную цепь.

До коммутации:

$$\underline{I}_{1m} = \underline{I}_{2m} = \frac{\underline{E}_{1m}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2},$$

где

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}.$$

Затем по полученному значению

$$\underline{I}_{1m} = \underline{I}_{2m} = I_{1m} e^{j\psi_1}$$

записывается закон изменения тока

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$$

и определяется

$$i_1(0) = I_{1m} \sin \psi_1.$$

Для напряжений на емкостях:

$$\underline{U}_{C1m} = \underline{I}_{1m} \frac{1}{j\omega C_1} = U_{C1m} e^{j\psi_2},$$

$$\underline{U}_{C2m} = \underline{I}_{1m} \frac{1}{j\omega C_2} = U_{C2m} e^{j\psi_3}.$$

Тогда

$$u_{C1}(0) = U_{C1m} \sin \psi_2,$$

$$u_{C2}(0) = U_{C2m} \sin \psi_3.$$

После определения значений токов и их производных составляются уравнения для определения постоянных. Например, в случае вещественных корней для тока i_1 :

$$\begin{cases} i_1(0) = i_{1np}(0) + A_1 + A_2 + A_3 \\ i_1'(0) = i_{1np}'(0) + p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 \\ i_1''(0) = i_{1np}''(0) + p_1^2 A_1 + p_2^2 A_2 + p_3^2 A_3 \end{cases}.$$

Уравнения определяют постоянные A_1, A_2, A_3 .

Если рассматриваемая схема содержит индуктивные связи, то определение характеристического уравнения по $Z_{ex}(p)$ сопряжено с известными трудностями. В этом случае проще записать дифференциальные уравнения и после их алгебраизации найти характеристическое уравнение по определителю $\Delta(p) = 0$.

На основании изложенного можно рекомендовать следующую наиболее простую схему расчета переходных процессов.

1. Записывается система дифференциальных уравнений по первому и второму законам Кирхгофа для переходного процесса (послекоммутационного) режима. Напряжение на емкостях предпочтительнее записывать в виде $\pm u_C(0) \pm \frac{1}{C} \int i dt$.

2. Составляется характеристическое уравнение либо по $Z_{ex}(p) = 0$, либо путем алгебраизации уравнений (в случае наличия индуктивных связей).

3. Определяются корни характеристического уравнения и в зависимости от их количества и вида записываются выражения для переходных токов или напряжений в виде суммы принужденных и свободных величин.

4. Рассчитываются принужденные величины и подставляются в выражения переходных.

5. Расчет докоммутационного установившегося режима определяют начальные значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях (независимые начальные условия).

6. Начальные условия, определенные в п.5, подставляются в исходные дифференциальные уравнения, записанные для $t = 0$. Из полученной таким образом системы алгебраических уравнений определяются необходимые значения токов и их производных при $t = 0$. Недостающие значения определяются повторным дифференцированием исходных дифференциальных уравнений и записью их при $t = 0$ с учетом ранее определенных величин.

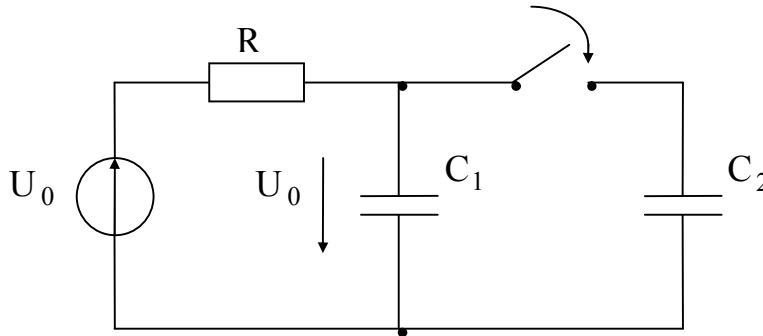
7. Записываются выражения переходных токов (или напряжений) и их производных до $(n - 1)$ -го порядка (n -порядок цепи) в общем виде для $t = 0$, в которые подставляются их значения, определенные в п. 6.

8. Из полученных уравнений определяются постоянные интегрирования и записываются окончательные выражения переходных величин.

ЛЕКЦИЯ №31.

Переходные процессы при «некорректных» начальных условиях.

Существует ряд задач, в которых имеются трудности в применении законов коммутации. Пусть, например, к одной емкости C_1 , заряженной до напряжения U_0 , подключается параллельно незаряженная емкость C_2 .



До коммутации

$$u_{C1} = U_0,$$

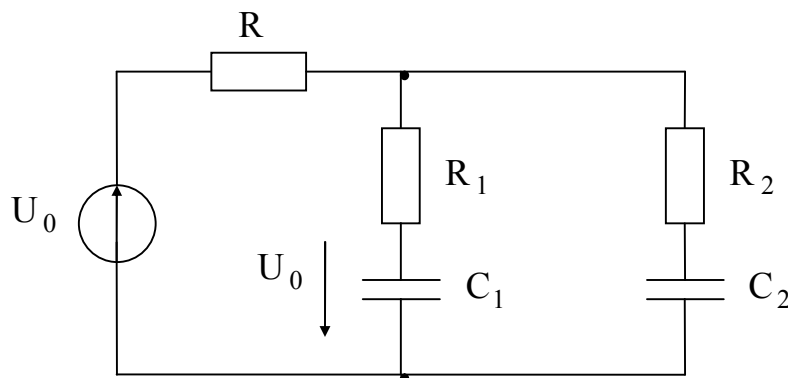
$$u_{C2} = 0.$$

По закону коммутации

$$u_{C1}(0) = U_0,$$

$$u_{C2}(0) = 0.$$

Но обе емкости подключены к одним и тем же точкам цепи и не могут иметь различных напряжений. Это несоответствие является следствием идеализации реальных цепей и может быть устранено, если учесть, что соединительные провода и переходные (контактные) сопротивления рубильника в сумме создают (хотя и малое) сопротивление. Таким образом, учет «малых параметров» делает постановку задачи корректной, т.е. приводит к схеме, изображенной на рисунке, где $R_1 \ll R_2$ и $R_2 \ll R$.

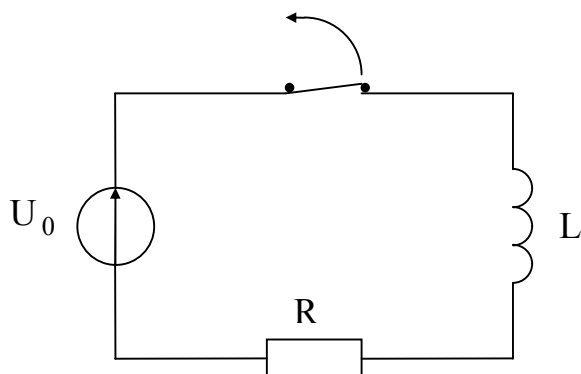


Однако можно и не учитывать «малых параметров», т.е. считать, что перезарядка емкостей происходит при бесконечно большом токе в течении бесконеч-

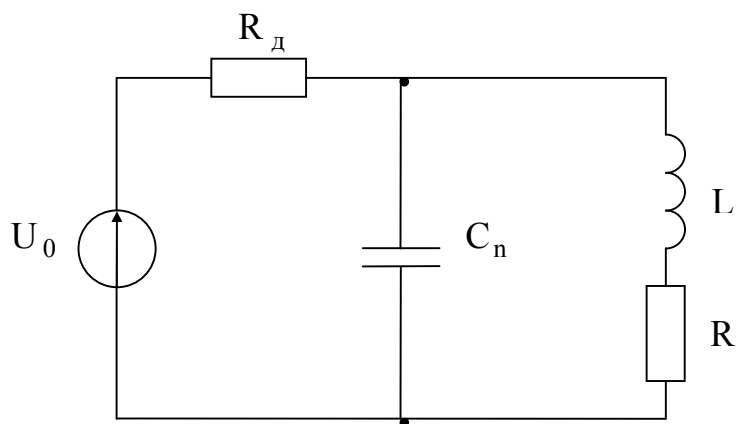
но малого времени. Для этого пользуются законом сохранения заряда, связывающий докоммутационный (0_-) и послекоммутационный (0_+) заряды:

$$u_{C1}(0_-) \cdot C_1 + u_{C2}(0_-) \cdot C_2 = u_C(0_+) \cdot (C_1 + C_2).$$

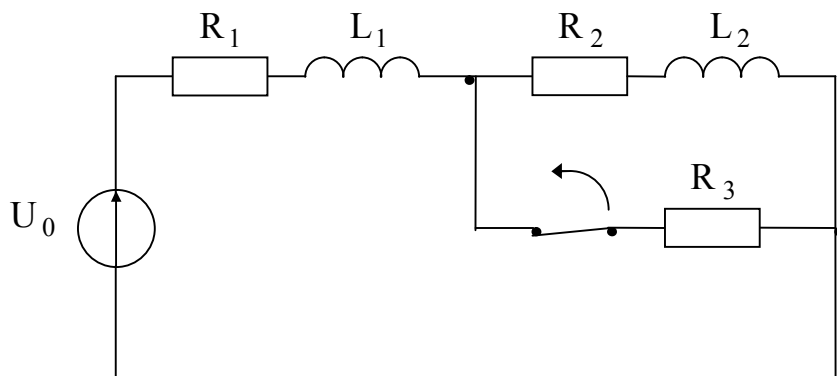
«Некорректными» могут быть и цепи с индуктивностями, например, при разрыве цепи закону коммутации противоречит мгновенное уменьшение тока до нуля.



Однако, и эта задача может быть поставлена корректно, если учесть сопротивление возникающей при этом между контактами электрической дуги и емкость между верхним и нижним проводами.



Совершенно так же выглядит некорректной следующая задача.



В таком режиме работают многочисленные элементы контактных релейных схем.

До коммутации

$$i_1(0_-) \neq i_2(0_-).$$

К концу переходного процесса

$$i_1(\infty) = i_2(\infty).$$

При $t > 0$

$$U_0 = Ri + L \frac{di}{dt},$$

$$i = \frac{U_0}{R} + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Из начальных условий

$$A = i(0_+) - \frac{U_0}{R}.$$

Но предположение о мгновенном разрыве тока противоречит закону коммутации и не определяет постоянную A .

Напишем новое уравнение

$$U_0 = R_1 i_1 + L_1 i_1' + R_2 i_2 + L_2 i_2'.$$

В нем сумма $L_1 i_1' + L_2 i_2'$ должна оставаться конечной, так как все остальные слагаемые конечны.

Представим

$$L_1 i_1' + L_2 i_2' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2}{\Delta t}.$$

Эта сумма остается конечной при $\Delta t \rightarrow 0$ только, если

$$L_1 \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2 = 0,$$

или

$$(L_1 + L_2) \cdot i(0_+) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-).$$

Полученное выражение называют законом сохранения магнитного потокосцепления. Он делает возможным определение $i(0_+)$. Здесь приходится принять, что выравнивание токов происходит при бесконечно больших напряжениях.

Более общие законы сохранения заряда и потокосцепления соблюдаются и в обычных корректных задачах и приводят к известным:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

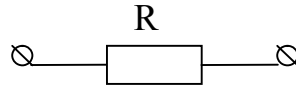
и

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Расчет переходных процессов в сложных цепях с помощью вычислительных машин непрерывного действия.

Напомним свойства пассивных элементов электрических цепей.

1. Активное сопротивление.



$$u = Ri; \quad i = Gu, \quad R = \frac{u}{i}.$$

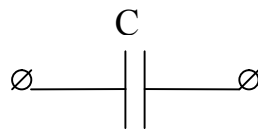
2. Индуктивность.



$$\Psi = Li; \quad U = -e = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt};$$

$$i = \frac{\Psi}{L} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u dt + \frac{1}{L} \int_0^t u dt = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u dt.$$

3. Емкость.

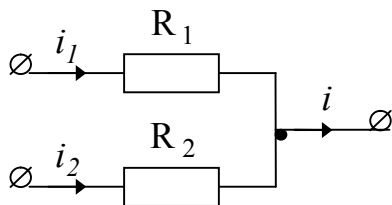


$$q = Cu; \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt};$$

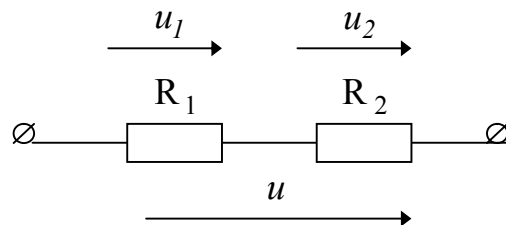
$$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Свойства элементов и законы Кирхгофа позволяют использовать электрические цепи для выполнения различных математических операций.

Суммирование.

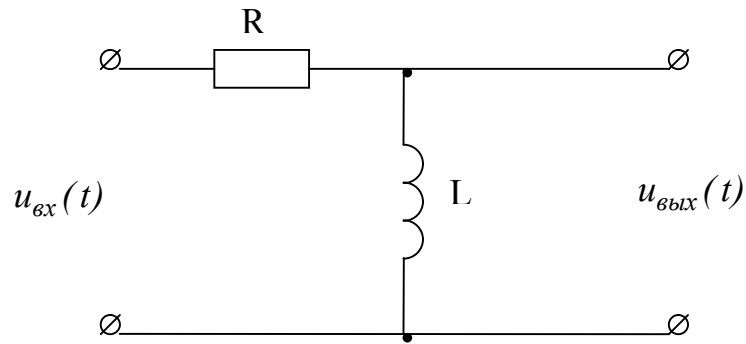


$$i = i_1 + i_2$$



$$u = u_1 + u_2$$

Аналогичным образом могут быть выполнены операции вычитания, умножения и деления. Однако, наибольший интерес представляет возможность осуществления операций дифференцирования и интегрирования.



Для цепи, изображенной на рисунок:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_{\text{вх}}(t).$$

Если подобрать элементы так, чтобы

$$L \frac{di}{dt} \ll Ri,$$

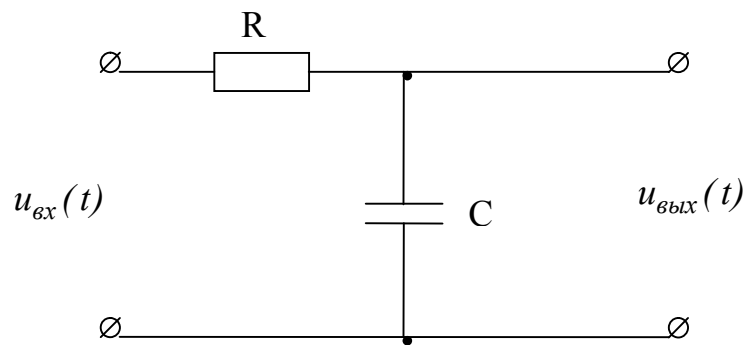
то

$$Ri \approx u_{\text{вх}}(t) \quad \text{и} \quad i \approx \frac{u_{\text{вх}}(t)}{R}.$$

При этом напряжение на выходе

$$u_{\text{вых}}(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \cdot \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Для схемы изображенной на следующем рисунке,



запишем закон Кирхгофа:

$$Ri + \frac{1}{C} \int idt = u_{\text{вх}}(t).$$

Выберем элементы так, чтобы

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt \ll Ri,$$

тогда

$$Ri \approx u_{\text{вх}}(t) \quad \text{и} \quad i \approx \frac{u_{\text{вх}}(t)}{R},$$

а

$$u_{\text{вх}}(t) = u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{RC} \int u_{\text{вх}}(t) dt.$$

Возможность выполнения математических операций с помощью электрических цепей используется в электронных вычислительных машинах.

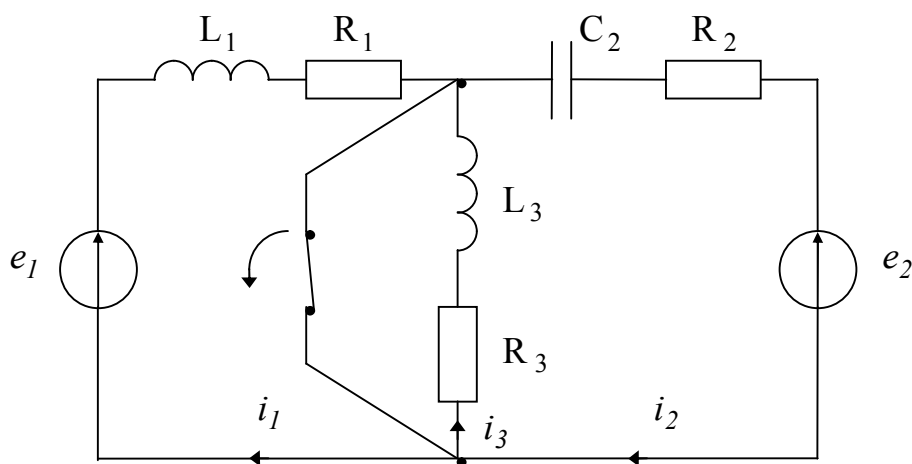
Для расчета переходных процессов в сложных линейных (и нелинейных) цепях дифференциальные уравнения необходимо представить так, чтобы левая часть содержала только производную неизвестной величины:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, a),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, a),$$

.....

Например, для цепи, изображенной на рисунке,



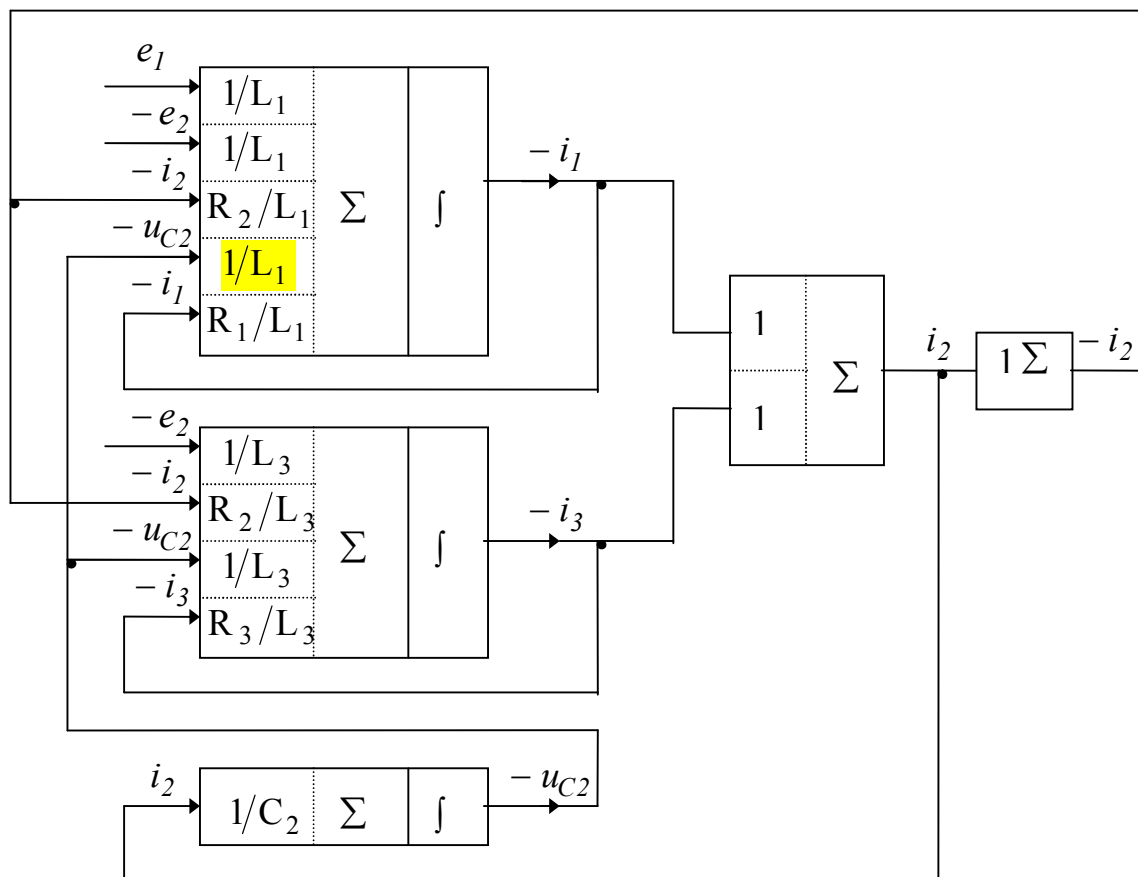
исходные уравнения

$$\begin{cases} i_2 = i_1 + i_3 \\ R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + u_{C2} = e_1 - e_2 \\ R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + R_2 i_2 + u_{C2} = -e_2 \end{cases}$$

следует записать в виде

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1}(e_1 - e_2) - \frac{R_2}{L_1}i_2 - \frac{1}{L_1}u_{C2} - \frac{R_1}{L_1}i_1 \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L_3}e_2 - \frac{R_2}{L_3}i_2 - \frac{1}{L_3}u_{C2} - \frac{R_3}{L_3}i_3 \\ i_2 = i_1 + i_3; \quad \frac{du_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2}i_2 \end{cases}.$$

Примерный вид схемы решения системы уравнений приведен на рисунке.



Начальные значения токов $i_1(0_+)$ и $i_3(0_+)$, а также $u_{C2}(0_+)$ в каждом интеграторе задаются отдельно при помощи специального входа для начальных значений. Следует заметить, что входящие в состав блоков усилители дают на выходе усиленную входную величину с обратным знаком.

ЛЕКЦИЯ №32.

Операторный метод расчета переходных процессов.

Применение преобразований Лапласа к расчету переходных процессов.

Основная трудность расчета переходных процессов классическим методом заключается в многократном решении алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования. При этом необходимо предварительно определять начальные значения функций и их производных. Однако, исходные дифференциальные уравнения можно интегрировать с помощью операционного исчисления. На его основе построен операторный метод расчета переходных процессов. При его использовании действительные функции вещественной переменной - времени, называемые оригиналами, заменяются функциями комплексного переменного $p = \delta + j\omega$, называемые изображениями. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливаются при помощи функционального преобразования. Оно выбрано так, что операции дифференцирования и интегрирования оригиналов заменяются алгебраическими операциями над их изображениями. Тогда дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические для изображений.

Связь между $F(p)$ и $f(t)$ устанавливается по формуле прямого преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Соответствие обозначается сокращенно

$$F(p) = L\{f(t)\},$$

или

$$F(p) \Leftrightarrow f(t),$$

где $F(p)$ называется лапласовым изображением функции $f(t)$.

В электротехнике встречаются также преобразования Карсона-Хевисайда

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p).$$

Его достоинством является одинаковая размерность оригинала и изображения. Однако, за последние годы наибольшее распространение получило преобразование Лапласа ввиду его простой связи с частотным спектром функции.

В дальнейшем будем пользоваться преобразованием Лапласа.

Для операторного метода расчета переходных процессов необходимо помнить некоторые свойства изображений.

а) Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых.

$$\sum_1^n f_k(t) \Leftrightarrow \sum_1^n F_k(p).$$

б) При умножении функции на постоянный коэффициент на тот же коэффициент должно быть умножено ее изображение, т.е.

$$A_k f_k(t) \Leftrightarrow A_k F_k(p).$$

Основные формулы соответствия.

$$1. A \Leftrightarrow \frac{A}{p}.$$

$$2. e^{\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha}.$$

$$3. 1 - e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}.$$

$$4. \cos \omega t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

$$5. \sin \omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

$$6. f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0_+),$$

$$f''(t) \Leftrightarrow p^2 \left[F(p) - \frac{f(0_+)}{p} - \frac{f'(0_+)}{p^2} \right],$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n \left[F(p) - \frac{f(0_+)}{p} - \frac{f'(0_+)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0_+)}{p^n} \right].$$

$$7. \int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p},$$

$$\int_a^t f(t) dt \Leftrightarrow \int_a^0 f(t) dt + \int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{p} \int_a^0 f(t) dt + \frac{F(p)}{p}.$$

Если $\int_a^0 f(t) dt$ при $t = 0$ делает скачок, то нужно брать ее значение справа от нуля (0_+) .

Изображения напряжений на индуктивности и емкости.

Для индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt},$$

$$\frac{di}{dt} \Leftrightarrow pI(p) - i(0),$$

его изображение

$$u_L \Leftrightarrow LpI(p) - Li(0).$$

Знаки соответствуют совпадению с произвольно выбранным положительным направлением послекоммутационного тока в индуктивности.

Для емкости

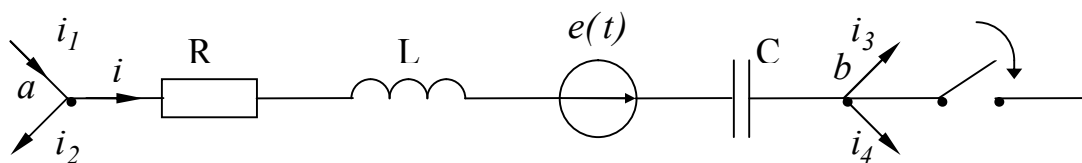
$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt,$$

его изображение

$$u_C \Leftrightarrow \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Знаки соответствуют совпадению напряжения $u_C(0)$ с произвольно выбранным направлением послекоммутационного тока через емкость.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.



Для цепи изображенной на рисунке, запишем второй закон Кирхгофа

$$\varphi_a = \varphi_b + u_C + u_R + u_L - e(t),$$

или

$$u_{ab} = Ri + Li' + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt - e(t).$$

Применим преобразования Лапласа

$$U_{ab}(p) = RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I(p)}{pC} - E(p),$$

или

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}},$$

где $R + pL + \frac{1}{pC} = Z(p)$ - операторное сопротивление.

В состав закона Ома вошли так называемые «внутренние» э.д.с., связанные с наличием в начале переходного процесса энергии в электрическом и магнитных полях.

По первому закону Кирхгофа

$$i_1 - i - i_2 = 0,$$

или в операторной форме

$$I_1(p) - I(p) - I_2(p) = 0,$$

вообще

$$\sum_I^n I_k(p) = 0.$$

Для любого замкнутого контура с « n » ветвями

$$\sum_I^n e_k = \sum_I^n R_k i_k + \sum_I^n L_k \frac{di_k}{dt} + \sum_I^n \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^t i_k dt,$$

или после преобразования Лапласа

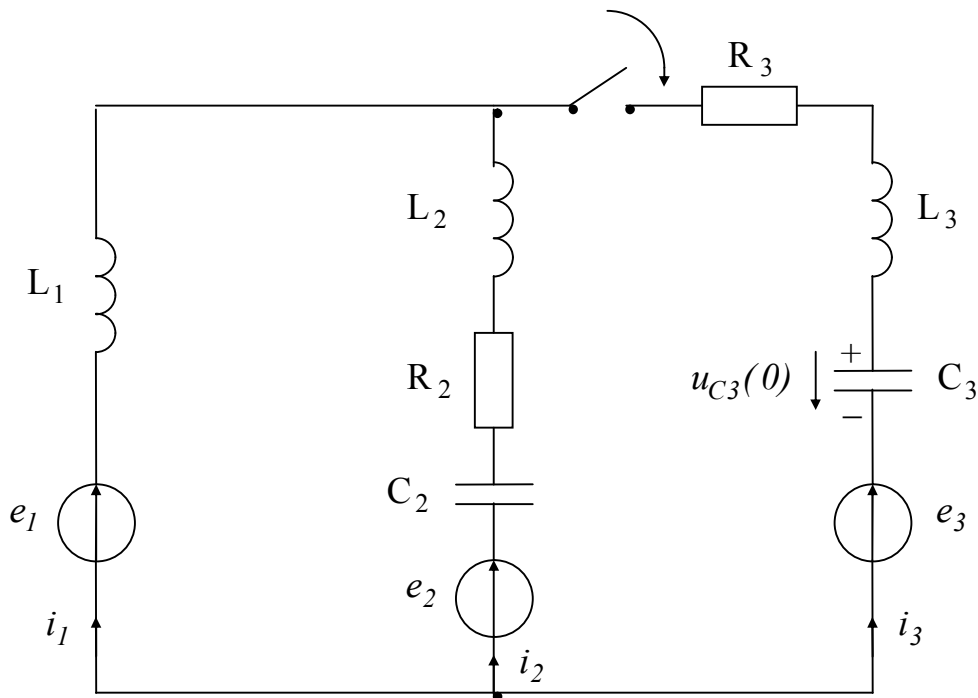
$$\sum_I^n \left[E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right] = \sum_I^n Z_k(p) I_k(p).$$

Знаки записаны для совпадающих направлений внутренних э.д.с. с положительным направлением послекоммутационных токов в них.

ЛЕКЦИЯ №33.

Расчет переходных процессов в сложных цепях операторным методом.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме аналогичны по своей записи тем же законам в комплексной форме для установившегося синусоидального режима. Поэтому все приемы и методы расчета, основанные на этих законах, могут быть применены и при расчете переходных процессов для отыскания изображений.



Для изображенной на рисунке цепи запишем уравнения переходного процесса в дифференциальной форме, приняв произвольно положительное направление токов:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ e_1 - e_2 = L_1 i_1' - L_2 i_2' - R_2 i_2 - \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_2 dt \\ e_2 - e_3 = L_2 i_2' + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_2 dt - R_3 i_3 - L_3 i_3' - \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t i_3 dt \end{array} \right. .$$

Те же уравнения перепишем для изображений с учетом ненулевых начальных условий. При этом, обходя контур по току, имеем для индуктивности

$$u_L \Leftrightarrow pLI(p) - Li(0),$$

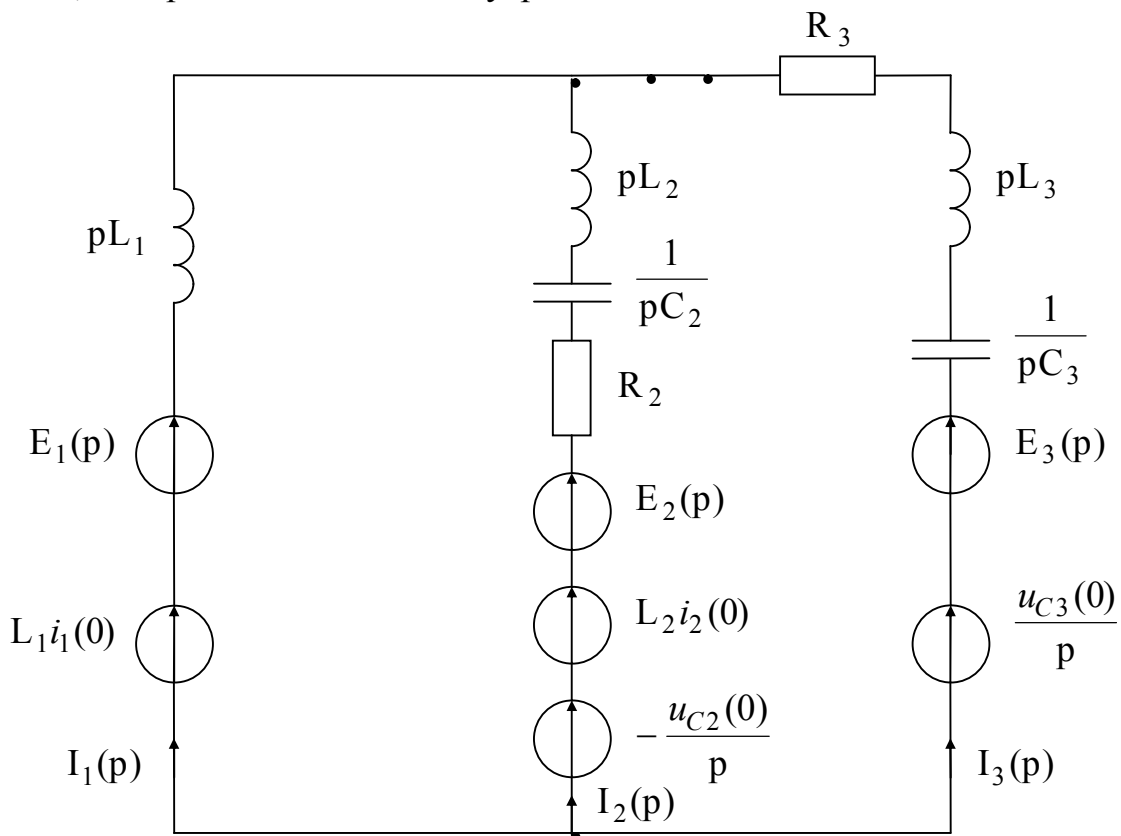
а для емкости:

$$u_C \Leftrightarrow \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Уравнения принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0 \\ E_1(p) - E_2(p) = L_1[pI_1(p) - i_1(0)] - L_2[pI_2(p) - i_2(0)] - \\ \quad - \frac{I_2(p)}{pC_2} - \frac{u_{C2}(0)}{p} - R_2 I_2(p) \\ E_2(p) - E_3(p) = R_2 I_2(p) + L_2[pI_2(p) - i_2(0)] + \frac{I_2(p)}{pC_2} + \frac{u_{C2}(0)}{p} - \\ \quad - R_3 I_3(p) - pL_3 I_3(p) - \frac{I_3(p)}{pC_3} + \frac{u_{C3}(0)}{p} \end{array} \right.$$

Удобнее записывать уравнения после предварительного составления эквивалентной операторной схемы, в которую включаются операторные сопротивления, изображения э. д. с. и внутренние э. д. с.



Положительные направления внутренних э. д. с. принимают обычно совпадающими с направлениями тока в данной ветви (под положительным направлением здесь понимается направление стрелки в кружке).

При расчете переходных процессов операторным методом удобно придерживаться следующего порядка.

1. На заданной схеме обозначается произвольно принятое положительное направление послекоммутационных переходных токов.

2. Составляется эквивалентная операторная схема с учетом начальных условий. При этом все внутренние э.д.с. целесообразно направить (стрелки) по току. Тогда $Li(0)$ будет положительной, а $\frac{u_C(0)}{p}$ положительна при противо-

положных направлениях $i(t)$ и $u_C(0)$ и отрицательной $-\frac{u_C(0)}{p}$ - при совпадающих направлениях.

3. Расчет изображения какого-либо тока или напряжения производится любым способом (контурными токами, узловыми потенциалами и т. п.) в операторной форме.

4. На основе полученного изображения находится оригинал с помощью обратного преобразования Лапласа.

В простых случаях это можно сделать с помощью специальных таблиц соответствия. Однако, чаще пользуются так называемой формулой разложения.

Если изображение имеет вид рациональной дроби

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n},$$

то оригинал определяется формулой разложения

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \Leftrightarrow f(t) = \sum_1^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

При этом предполагается, что $m < n$, а рациональная дробь несократимая, т.е. многочлены $F_1(p)$ и $F_2(p)$ общих корней не имеют, a_k и b_k - вещественные числа.

В формуле разложения p_k - простые корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$, причем один из них может равняться нулю.

Если знаменатель имеет один нулевой корень, то часто применяется другая форма записи

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{p F_3(p)} \Leftrightarrow \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_1^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Если $F_2(p)$ имеет n различных корней p_1, p_2, \dots, p_n и один из них корень p_1 кратностью m_1 , корень p_2 - кратностью m_2 , ..., корень p_n - кратностью m_n , то оригинал

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p) e^{pt}}{F_2(p)} \right]_{p=p_k},$$

причем знаменатель квадратной скобки нужно сначала сократить на $(p - p_k)^{m_k}$, а затем дифференцировать.

При применении формул разложения следует иметь ввиду, что если уравнение $F_2(p) = 0$ имеет комплексные сопряженные корни, то нет необходимости вычислять слагаемые суммы для каждого из комплексных сопряженных корней в отдельности. Известно, что функции с вещественными коэффициентами от комплексных сопряженных значений независимого переменного сами комплексные сопряженные. Поэтому, если корни p_1 и p_2 - комплексные сопряженные, то достаточно вычислить одно, а второе взять комплексным сопряженным первому.

Формулы включения.

Включение источника напряжения в пассивную электрическую цепь вызывает ток

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где $Z(p)$ либо входное сопротивление (тогда $I(p)$ - входной ток), либо взаимное (при определении других токов).

Если включается экспоненциальное напряжение вида $Ue^{\alpha t}$, то по закону Ома в операторной форме при нулевых начальных условиях

$$I(p) = \frac{U}{(p - \alpha) Z(p)}.$$

Применяя формулу разложения, получим формулу включения для экспоненциального напряжения

$$i(t) = \frac{Ue^{\alpha t}}{Z(\alpha)} + \sum_1^n \frac{Ue^{p_k t}}{(p_k - \alpha) Z'(p_k)},$$

где первое слагаемое дает принужденный ток, а сумма всех остальных свободный ток.

Формулу включения на постоянное напряжение получим, полагая $\alpha = 0$:

$$i(t) = \frac{U}{Z(0)} + \sum_1^n \frac{Ue^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)}.$$

При включении синусоидального напряжения

$$u = \operatorname{Im} \left\{ U_m e^{j(\omega t + \psi)} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \underline{U}_m e^{j\omega t} \right\},$$

полагая $\alpha = j\omega$ и заменяя U комплексной амплитудой $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi}$ получим переходный ток как мнимую часть комплексного оригинала:

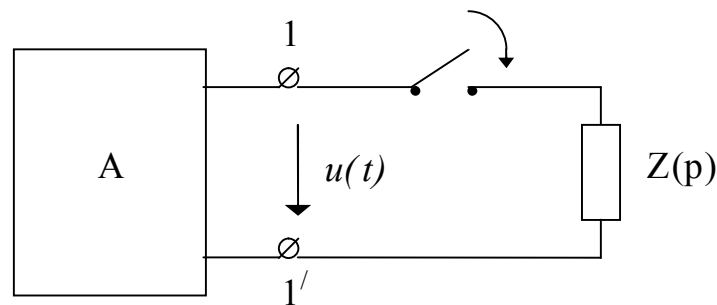
$$i(t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\underline{U}_m e^{j\omega t}}{Z(j\omega)} + \sum_1^n \frac{\underline{U}_m e^{p_k t}}{(p_k - j\omega) Z'(p_k)} \right\},$$

т. е. формулу включения для гармонического напряжения.

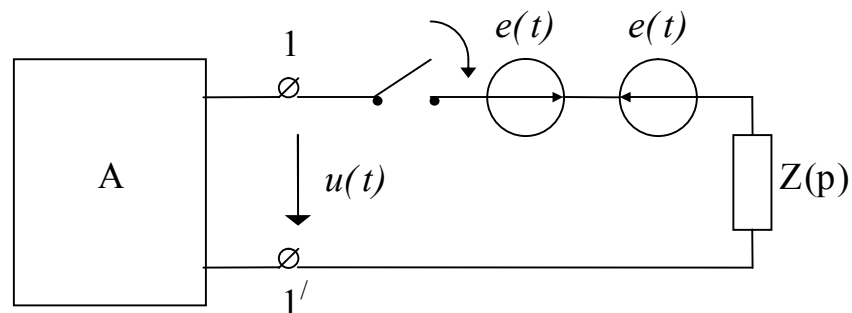
Приведение цепи к нулевым начальным условиям.

При использовании формул включения, а иногда и в других случаях цепь приводят к нулевым начальным условиям.

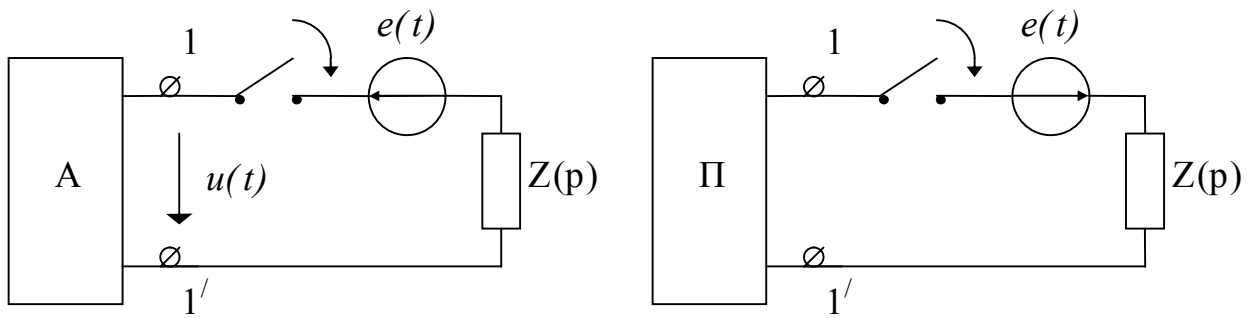
Пусть к зажимам $1-1'$ активного двухполюсника подключается ветвь с сопротивлением $Z(p)$.



Определим $u(t)$ на зажимах $1-1'$ до включения, обусловленное всеми э.д.с. в составе двухполюсника. Затем включим в ветвь рубильника две одинаковые но противоположно направленные э.д.с., равные $u(t)$. При этом режим в цепи не изменится.



На основе принципа наложения определим ток при включении рубильника как результат наложения токов от двух расчетных схем.



Однако, в первой схеме ток в ветви рубильника при включении равен нулю, т.е, для всей схемы в целом это будет режим до коммутации. Таким образом, остается выполнить расчет при включении ветви с источником $e(t)$ к пассивному двухполюснику, т.е. при нулевых начальных условиях. Ток внутренней ветви складывается из тока в ней до коммутации и тока, который возникает в этой ветви после включения $e(t)$ к пассивному двухполюснику.

ЛЕКЦИЯ №34.

Цепи с распределенными параметрами.

Основные понятия и определения.

При исследовании электрических цепей до сих пор считалось, что электрическое поле сосредоточено на отдельных участках цепи - ёмкостях, магнитное поле - на индуктивностях, а преобразование электрической энергии в тепловую - на сопротивлениях. Такие цепи называют цепями с сосредоточенными параметрами.

Однако, встречаются цепи, в которых такие участки выделить нельзя, так как все эти процессы имеют место одновременно на всех участках. Такие цепи называют цепями с распределенными параметрами. К ним следует отнести прежде всего длинные линии электропередачи, линии телеграфной и телефонной связи, линии телеуправления и телеизмерения, обмотки электрических машин и т.п. При этом, если рассматривать их в целом, то можно привести цепь к двухполюснику или четырехполюснику с сосредоточенными параметрами, эквивалентным рассчитываемым цепям. Однако, если анализ должен выявить соотношения внутри устройства или при широком диапазоне частот, приходится вести расчет с учётом распределенных параметров.

Наибольший интерес представляет расчет так называемых однородных линий. Различают линии передачи электрической энергии, где важно осуществить передачу с минимальными потерями, и линии передачи информации (телефонные, телеграфные и т.п.), где важно передать информацию без искажений. По конструкции и те и другие могут быть воздушными или кабельными.

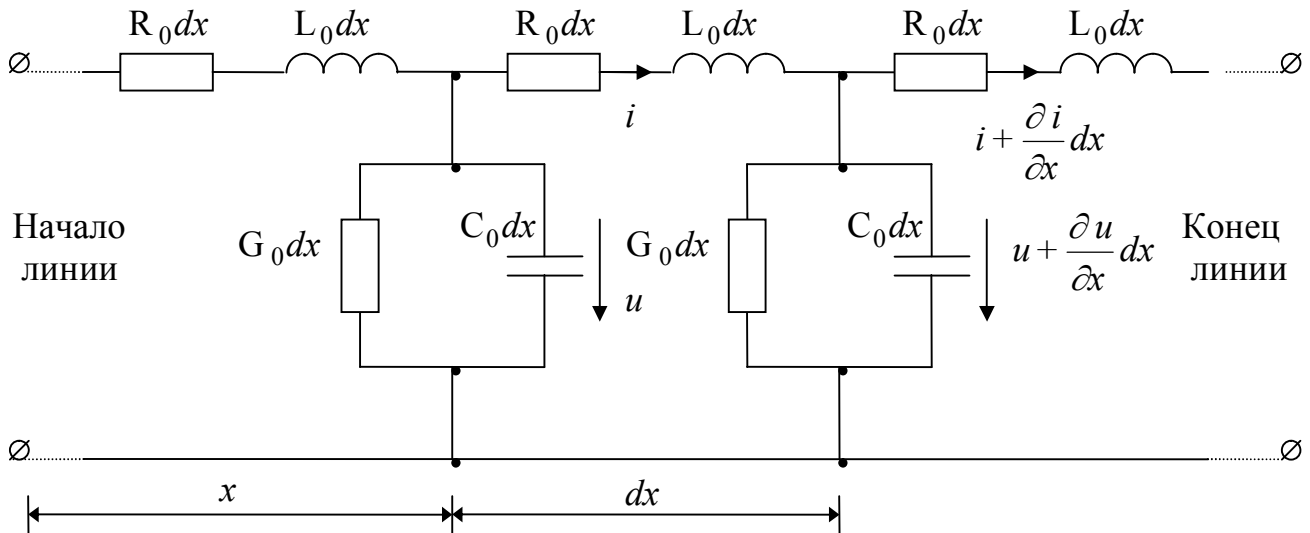
В любой линии электрическое и магнитное поля распределены между проводниками и внутри проводов. Их точный расчет должен осуществляться методами расчета электромагнитных полей. Такая задача является довольно сложной. Далее рассматривается упрощенная теория так называемых длинных линий, которая делает возможным употребление известных понятий напряжения, тока, сопротивления, индуктивности и ёмкости, если расстояние между проводниками значительно меньше длины волны электромагнитных колебаний.

Уравнения однородной линии.

Будем считать, что каждый элемент длины линии обладает сопротивлением, проводимостью, индуктивностью и емкостью. Тогда линию можно представить состоящей из бесконечно большого числа таких элементов. Если сопротивление, проводимость, индуктивность и ёмкость равномерно распределены вдоль линии, ее называют однородной.

Пусть R_0 , G_0 , L_0 , C_0 - соответственно сопротивление, проводимость, ин-

дуктивность и емкость, отнесенные к единице длины линии. Эти величины называют также первичными параметрами линии.



Для элемента длины линии можно записать уравнения Кирхгофа:

$$\begin{cases} u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = R_0 i dx + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} \\ i = \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \end{cases}$$

После приведения подобных, сократив на dx и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим так называемые телеграфные уравнения:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

При отсчете расстояния от конца линии аналогичным способом получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial y} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Решение системы уравнений при определенных начальных и граничных условиях дает возможность определить ток и напряжение в зависимости от расстояния от начала (конца) линии и времени.

Решение уравнений однородной линии для установившегося режима
постоянного напряжения.

При постоянном напряжении в начале линии напряжения и токи во всех сечениях линии будут тоже постоянными. Уравнения линии при отсчете расстояний от конца линии принимают вид:

$$\frac{dU_0}{dy} = R_0 I_0,$$

$$\frac{dI_0}{dy} = G_0 U_0.$$

Дифференцируя первое и подставляя значение $\frac{dI_0}{dy}$ из второго получим:

$$\frac{d^2 U_0}{dy^2} = R_0 G_0 U_0.$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 - R_0 G_0 = 0,$$

или

$$p^2 - \alpha^2 = 0,$$

где принято $R_0 G_0 = \alpha^2$.

Его корни

$$p_{1,2} = \pm \alpha.$$

Общее решение для напряжения

$$U_0 = A_1 e^{\alpha y} + A_2 e^{-\alpha y}.$$

Ток

$$I_0 = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{dU_0}{dy} = \frac{\alpha}{R_0} (A_1 e^{\alpha y} - A_2 e^{-\alpha y}) = \sqrt{\frac{G_0}{R_0}} (A_1 e^{\alpha y} - A_2 e^{-\alpha y}) = \frac{A_1 e^{\alpha y} - A_2 e^{-\alpha y}}{\rho}.$$

Отсюда следует, что однородную линию характеризуют две величины:

$$\rho = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} \quad - \text{ волновое сопротивление (характеристическое),}$$

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} \quad - \text{ коэффициент распространения.}$$

Если заданы напряжение и ток в конце линии, а также и сопротивление нагрузки

$$R_2 = \frac{U_{02}}{I_{02}},$$

то при $y = 0$

$$\begin{aligned}U_{02} &= A_1 + A_2, \\ \rho I_{02} &= A_1 - A_2,\end{aligned}$$

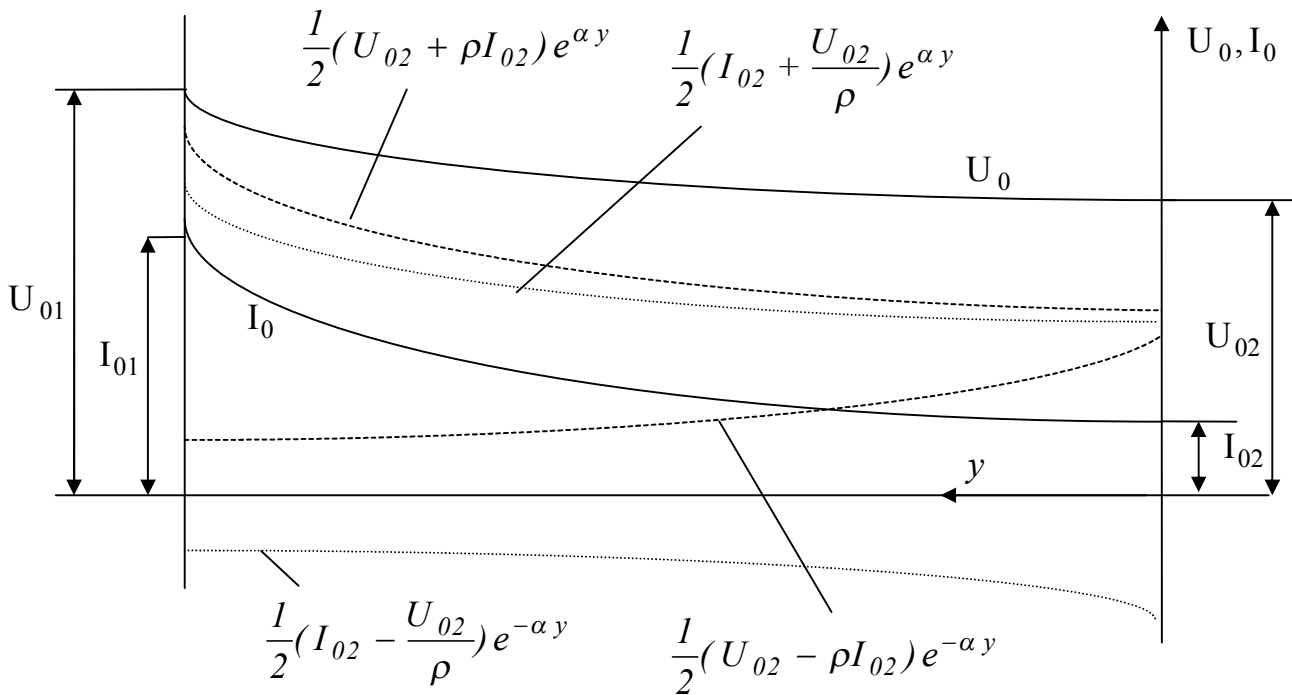
тогда

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{I}{2}(U_{02} + \rho I_{02}), \\ A_2 &= \frac{I}{2}(U_{02} - \rho I_{02}).\end{aligned}$$

Напряжение и ток на расстоянии y от конца линии:

$$\begin{aligned}U_0 &= \frac{I}{2}(U_{02} + \rho I_{02})e^{\alpha y} + \frac{I}{2}(U_{02} - \rho I_{02})e^{-\alpha y}, \\ I_0 &= \frac{I}{2}(I_{02} + \frac{U_{02}}{\rho})e^{\alpha y} + \frac{I}{2}(I_{02} - \frac{U_{02}}{\rho})e^{-\alpha y}.\end{aligned}$$

Напряжение и ток в любой точке линии определяются алгебраическими суммами ординат двух экспоненциальных кривых.



Ординаты кривой $e^{\alpha y}$ уменьшаются от начала к концу линии, а ординаты кривой $e^{-\alpha y}$ - от конца к началу. На рисунке показаны составляющие и суммарные кривые U_0 и I_0 для случая $R_2 > \rho$. Если включённое в конце линии сопротивление равно волновому, т.е. $R_2 = \rho$, вторые члены выражений для U_0 и I_0 пропадают,

и распределение U_0 и $I_0 = \frac{U_0}{\rho}$ вдоль линии изображается одной экспонентой.

Следовательно, в однородной линии постоянного тока происходит ослабление напряжения и тока вдоль линии, определяемое коэффициентом распространения $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$, который в данном случае является также коэффициентом ослабления.

Решение уравнений однородной линии при установившемся
синусоидальном режиме.

При питании линии от источника синусоидального напряжения ток и напряжение в любой точке линии ввиду линейности параметров являются также синусоидальными функциями времени. Перепишем уравнения линии, заменив мгновенные значения комплексными $\underline{U}\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и $\underline{I}\sqrt{2}e^{j\omega t}$, где комплексные значения зависят только от x :

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = R_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = G_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U} \end{cases},$$

где \underline{Z}_0 - продольное сопротивление единицы длины,
 \underline{Y}_0 - поперечная проводимость единицы длины.

Продифференцируем первое уравнение и подставим в него $\frac{d\underline{I}}{dx}$ из второго:

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\underline{I}}{dx}, \quad \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U}.$$

Обозначим

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}.$$

Тогда

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0.$$

Решение уравнения:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x},$$

где \underline{U} - комплексное напряжение на расстоянии x от начала линии, $-\underline{\gamma}$ и $+\underline{\gamma}$ - корни характеристического уравнения

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0,$$

\underline{A}_1 и \underline{A}_2 - постоянные интегрирования.

Комплексный ток найдем из первого уравнения:

$$\underline{I} = -\frac{I}{\underline{Z}_0} \frac{dU}{dx} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}),$$

или

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}}.$$

Величина $\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$ зависит от параметров линии и имеет размерность сопротивления. Назовем ее характеристическим сопротивлением и обозначим \underline{Z}_C :

$$\underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}.$$

Окончательное выражение комплексного тока:

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x}.$$

Для выяснения физического смысла слагаемых перейдем от комплексов к мгновенным значениям с учетом равенств:

$$\begin{aligned}\underline{A}_1 &= A_1 e^{j\psi_1}, \\ \underline{A}_2 &= A_2 e^{j\psi_2}, \\ \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta.\end{aligned}$$

Тогда

$$u = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2),$$

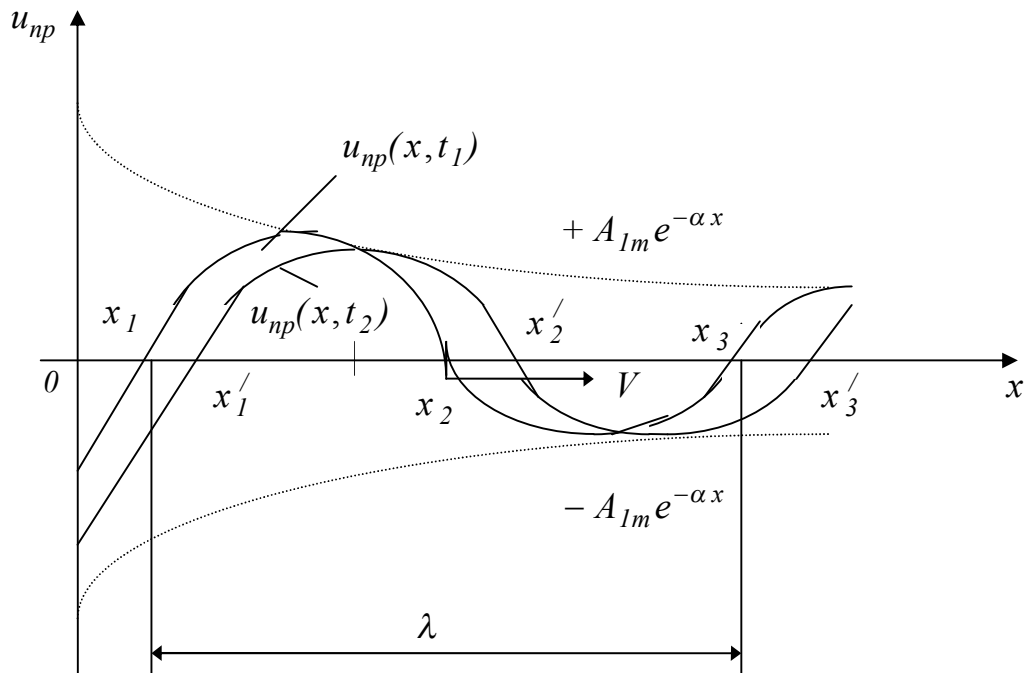
или

$$u = u_{np}(x, t) + u_{обр}(x, t),$$

где

$$\begin{aligned}u_{np}(x, t) &= A_{1m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1), \\ u_{обр}(x, t) &= A_{2m} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2).\end{aligned}$$

По полученным функциям построены графики $u_{np}(x, t_1)$ и $u_{np}(x, t_2)$ для t_1 и $t_2 = t_1 + \Delta t_2$.



Из графиков и уравнений следует, что в любой фиксированный момент времени u_{np} представляет собой гармоническую затухающую функцию.

В момент t_1 нулевые напряжения в точках x_1, x_2, x_3 и т.д.,

где

$$\sin(\omega t_1 - \beta x + \psi_1) = 0,$$

или

$$\omega t_1 + \psi_1 - \beta x = k\pi,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

В момент t_2 нулевые напряжения в точках x'_1, x'_2, x'_3 и т.д.,

где

$$\sin(\omega t_2 - \beta x' + \psi_1) = 0,$$

Так как

$$t_2 = t_1 + \Delta t,$$

то

$$x' = x + \Delta x.$$

Тогда

$$\omega t_1 - \beta x + \psi_1 = \omega t_1 + \omega \Delta t - \beta x - \beta \Delta x + \psi_1,$$

то есть

$$\beta \Delta x = \omega \Delta t,$$

или при приращении времени dt происходит приращение dx и

$$\frac{dx}{dt} = V = \frac{\omega}{\beta}.$$

Таким образом уравнение $u_{np}(x, t)$ можно рассматривать как бегущую со скоростью V волну. Величину этой скорости V называют фазовой, то есть это скорость перемещения фазы колебания, которая в течении времени t и по мере увеличения расстояния x , пройденного волной от начала к концу линии остается постоянной.

Аналогичное исследование $u_{обp}(x, t)$ дало бы для фазовой скорости такое же значение, но с обратным знаком, то есть это также бегущая волна, но перемещающаяся от конца линии к началу и затухающая в направлении движения.

Совершенно таким же образом можно показать, что и ток

$$i = \frac{\sqrt{2}A_1}{Z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) - \frac{\sqrt{2}A_2}{Z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta)$$

можно рассматривать как результат двух волн. Первое слагаемое дает $i_{np}(x, t)$, а второе - $i_{обp}(x, t)$, т. е. прямую и обратную волны тока.

Второй основной характеристикой бегущих волн является длина волны. Длиной волны λ называется расстояние между ближайшими двумя точками, взятое в направлении распространения волны, фазы колебания в которых различаются на 2π . Следовательно

$$\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1 = \omega t - \beta x + \psi_1 - 2\pi$$

и

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta},$$

а

$$V = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T},$$

то есть за время, равное периоду, волна пробегает расстояние, равное длине волны.

Обозначим

$$\underline{U}_{np} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x};$$

$$\underline{U}_{обp} = \underline{A}_2 e^{\gamma x};$$

$$\underline{I}_{np} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x};$$

$$\underline{I}_{обp} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x}.$$

Тогда

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} + \underline{U}_{обр}, \quad \underline{I} = \underline{I}_{np} - \underline{I}_{обр},$$

а токи и напряжения волн связаны между собой законом Ома

$$\underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{Z}_C}, \quad \underline{I}_{обр} = \frac{\underline{U}_{обр}}{\underline{Z}_C}.$$

Нужно иметь в виду, что физически в линии существуют только результирующие ток \underline{I} и напряжение \underline{U} , и разложение их на прямые и обратные волны - лишь удобный для анализа процессов прием.

ЛЕКЦИЯ №35.

Вторичные параметры линии.

Коэффициент распространения.

Из уравнений волн следует, что коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)},$$

где α - коэффициент ослабления,

β - коэффициент фазы.

Из выражения

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(L_0 G_0 + C_0 R_0)}$$

следует, что

$$(\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(L_0 G_0 + C_0 R_0),$$

или

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0,$$

$$2\alpha\beta = \omega L_0 G_0 + \omega C_0 R_0.$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}.$$

Из выражений следует, что α и β в общем случае зависят от частоты.

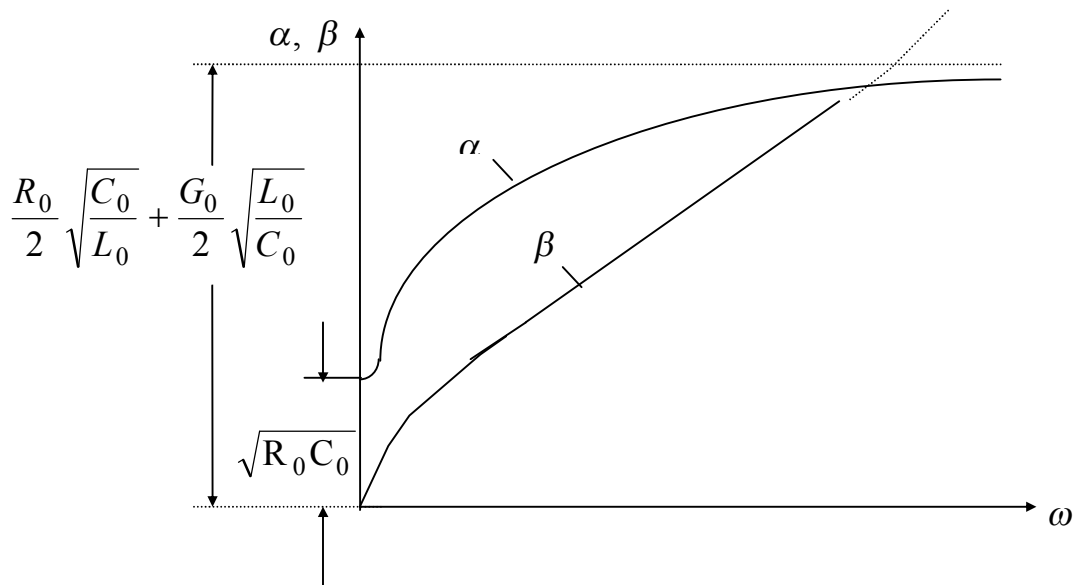
Однако, эти выражения неудобны для практического использования из-за их громоздкости. Существует ряд приближенных формул, учитывающих, что в области высоких частот (1 МГц и выше) сопротивление R_0 весьма мало по сравнению с ωL_0 , а проводимость G_0 ничтожно мала по сравнению с ωC_0 . Это приводит к

$$\alpha \approx \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Заметим, что входящие сюда R_0 и G_0 являются функциями частоты.

Зависимость α и β от частоты приведена на рисунке.



Фазовая скорость в воздушных линиях обычно близка к скорости света в пустоте, а в кабелях примерно в два раза меньше.

Характеристическое (волновое) сопротивление.

Определяется из выражения:

$$\underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}},$$

т.е.

$$Z_C^2 e^{j2\theta} = \frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0},$$

или

$$Z_C = \sqrt[4]{\frac{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2}},$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega L_0 G_0 - \omega C_0 R_0}{R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0}.$$

При $\omega = 0$

$$Z_C = Z_C(0) = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}},$$

а при $\omega \rightarrow 0$

$$Z_C = Z_C(\infty) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

У воздушных линий $Z_C = 300 \div 600$ Ом,

у кабельных $Z_C = 50 \div 200$ Ом.

Модуль сопротивления Z_C растет с увеличением расстояния между проводами (за счет роста L_0) и уменьшением диаметра проводов (за счет уменьшения C_0).

Угол $\theta = 0$ при $\omega = 0$ и при $\omega \rightarrow 0$, а при других частотах $\theta < 0$, так как в реальных линиях аргумент $G_0 + j\omega C_0$ больше $R_0 + j\omega L_0$.

Практически обычно R_0, C_0 мало по сравнению с ωL_0 и ωC_0 приближенно можно считать, что

$$Z_C \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \text{а} \quad \theta \approx 0.$$

Уравнения линии с гиперболическими функциями.

Линия как четырехполюсник.

Определим постоянные интегрирования в решении уравнений однородной линии. При этом удобнее отсчет расстояний вести от нагрузки т.е. от конца линии. Для этого заменим x на $l - y$, где теперь y - расстояние от конца линии:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma(l-y)} + \underline{A}_2 e^{\gamma(l-y)}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma(l-y)} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma(l-y)}. \end{aligned}$$

Введем новые постоянные $\underline{A}_1 e^{-\gamma l} = \underline{B}_1$ и $\underline{A}_2 e^{\gamma l} = \underline{B}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{B}_1 e^{\gamma y} + \underline{B}_2 e^{-\gamma y}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{B}_1}{\underline{Z}_C} e^{\gamma y} - \frac{\underline{B}_2}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma y}. \end{aligned}$$

В конце линии при $y = 0$ напряжение и ток: $\underline{U} = \underline{U}_2$ и $\underline{I} = \underline{I}_2$.

В этом случае постоянные определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 + \underline{B}_2 &= \underline{U}_2, \\ \underline{B}_1 - \underline{B}_2 &= \underline{Z}_C \underline{I}_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2}, \\ \underline{B}_2 &= \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2}. \end{aligned}$$

Напряжение и ток в линии :

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_{np} + \underline{U}_{обр} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} e^{\underline{\gamma} y} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} e^{-\underline{\gamma} y} \\ \underline{I} = \underline{I}_{np} - \underline{I}_{обр} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_C} e^{\underline{\gamma} y} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_C} e^{-\underline{\gamma} y} \end{cases},$$

или с гиперболическими функциями :

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} y \\ \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} y + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y \end{cases}.$$

По полученным уравнениям можно вычислить напряжение и ток в любой точке линии. В частности в начале линии :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \operatorname{ch} \underline{\gamma} l \cdot \underline{U}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_C} \underline{U}_2 + \operatorname{ch} \underline{\gamma} l \cdot \underline{I}_2 \end{cases}.$$

Уравнения показывают, что линию можно рассматривать как симметричный пассивный четырехполюсник.

Мощности генератора и приемника при этом:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^*, \quad \underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^*.$$

При расчетах часто пользуются понятием входного сопротивления линии. Это такое сосредоточенное сопротивление, которым можно заменить линию вместе с нагрузкой. Поэтому

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l \cdot \underline{U}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \cdot \underline{I}_2}{\frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_C} \underline{U}_2 + \operatorname{ch} \underline{\gamma} l \cdot \underline{I}_2} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_H \operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$$

При замене $\underline{\gamma} l$ на \underline{G} выражение совпадает с входным сопротивлением пассивного симметричного четырехполюсника. Поэтому при $\underline{Z}_H = 0$ и при $\underline{Z}_H = \infty$ могут быть получены аналогичные четырехполюснику входные сопротивления короткого замыкания и холостого хода.

Несогласованная и согласованная нагрузка линии.

Наличие или отсутствие обратной волны зависит от характера и величины нагрузки. Для расчета обратной волны часто пользуются коэффициентом отраже-

ния:

$$\underline{N} = \frac{\underline{B}_2}{\underline{B}_1},$$

или

$$\underline{N} = ne^{j\nu} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C}.$$

При этом обратная волна рассматривается как результат отражения прямой от конца линии. Поэтому прямую волну называют также падающей, а обратную - отраженной.

Наибольшее рассогласование линии и нагрузки имеет место при коротком замыкании ($N = -1$) и холостом ходе ($N = 1$). При согласованной нагрузке ($N = 0$) обратной волны нет. В таком согласованном режиме часто работают линии передачи информации.

Приняв

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta},$$
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_C$$

получим более простые уравнения линии:

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} = \underline{B}_1 e^{\gamma y} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2}{2} e^{\gamma y} = \underline{U}_2 e^{\gamma y},$$
$$\underline{I} = \underline{I}_{np} = \frac{\underline{B}_1}{\underline{Z}_C} e^{\gamma y} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma y} = \underline{I}_2 e^{\gamma y},$$

или для мгновенных значений, считая фазу напряжения на нагрузке нулевой:

$$u(x, t) = U_{2m} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y),$$
$$i(x, t) = I_{2m} e^{\alpha y} \sin(\omega t + \beta y - \theta).$$

При согласованной нагрузке вся мощность прямой волны достигшей конца линии, поглощается в нагрузке. При отсутствии согласования обратная волна может вновь отразиться от внутреннего сопротивления генератора и т.д., что приводит к появлению ложного сигнала на приемной аппаратуре, т.е. к искажению основного сигнала.

ЛЕКЦИЯ №36.

Понятие о неискажающей линии и линии без потерь.

а) Неискажающая линия.

Для устранения амплитудных искажений необходимо чтобы коэффициент ослабления α не зависел от частоты. Для устранения фазовых искажений необходима постоянная фазовая скорость, т.е. линейная зависимость коэффициента фазы β от частоты. Линию, отвечающую этим требованиям называют неискажающей.

Можно показать, что это имеет место, если

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

В самом деле тогда

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{R_0 G_0 \left(1 + j\omega \frac{L_0}{R_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{G_0}\right)} = \\ &= \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}\end{aligned}$$

и

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Для такой линии

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{(R_0/L_0) + j\omega}{(G_0/C_0) + j\omega}}$$

и

$$\underline{Z}_C = Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \theta = 0.$$

Обычно в линиях $G_0 L_0 < R_0 C_0$. Поэтому приходится искусственно увеличивать индуктивность, включая через определенные промежутки особые реактивные катушки, или применяя специальные кабели, проводящие жилы которых обмотаны тонкой лентой из ферромагнитного материала.

На практике большинство линий передачи информации не являются неискажающими. Искажения устраняют при помощи специальных четырехполюсников и корректирующих контуров сразу для всего тракта передачи сигналов. Можно показать, что неискажающая линия одновременно является и линией с минимально возможным затуханием при заданных R_0, G_0 .

б) Линия без потерь.

В ряде случаев, особенно при высоких частотах, когда $\omega L_0 \gg R_0$ и $\omega C_0 \gg G_0$, можно пренебречь наличием потерь в линии и положить $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$. Такие линии называют линиями без потерь.

В этом случае

$$\alpha = 0, \quad \underline{\gamma} = j\beta, \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}, \quad \underline{Z}_C = Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Таким образом, линия без потерь является практически неискажающей.

При холостом ходе такой линии $Z_H = \infty$, $\underline{I}_C = 0$ и уравнения принимают вид:

$$\underline{U} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 e^{j\beta y} + \underline{U}_2 e^{-j\beta y}) = \underline{U}_2 \cos \beta y,$$

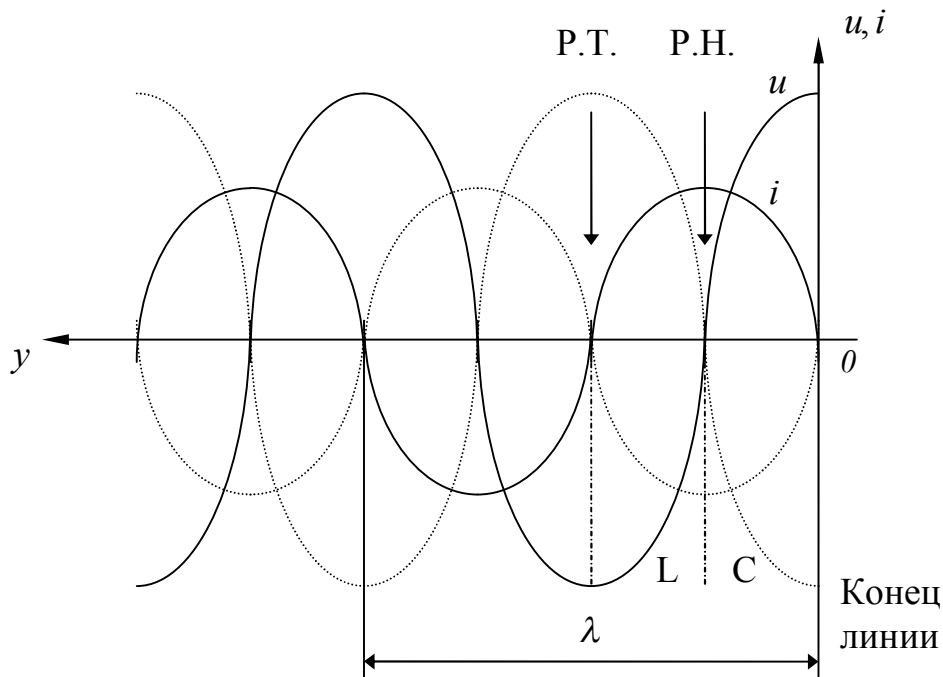
$$\underline{I} = \frac{1}{2Z_C}(\underline{U}_2 e^{j\beta y} - \underline{U}_2 e^{-j\beta y}) = j \frac{\underline{U}_2}{Z_C} \sin \beta y.$$

Для мгновенных значений имеем (при $\underline{U}_2 = U_2$):

$$u = U_{m2} \sin \omega t \cos \beta y,$$

$$i = U_{m2} \frac{1}{Z_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \sin \beta y.$$

В этом случае ток и напряжение вдоль линии образуют стоячие волны.



Стоячие волны возникают также при коротком замыкании линии без потерь и при нагрузке линии без потерь в виде индуктивности или емкости, т.е. когда средняя мощность равна нулю. Во всех этих случаях не происходит передачи энергии, так как в узлах, где $i = 0$ или $u = 0$ (всегда) мгновенная мощность равна нулю и энергия через эти точки не передается. Энергия может передаваться только бегущей волной.

Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе:

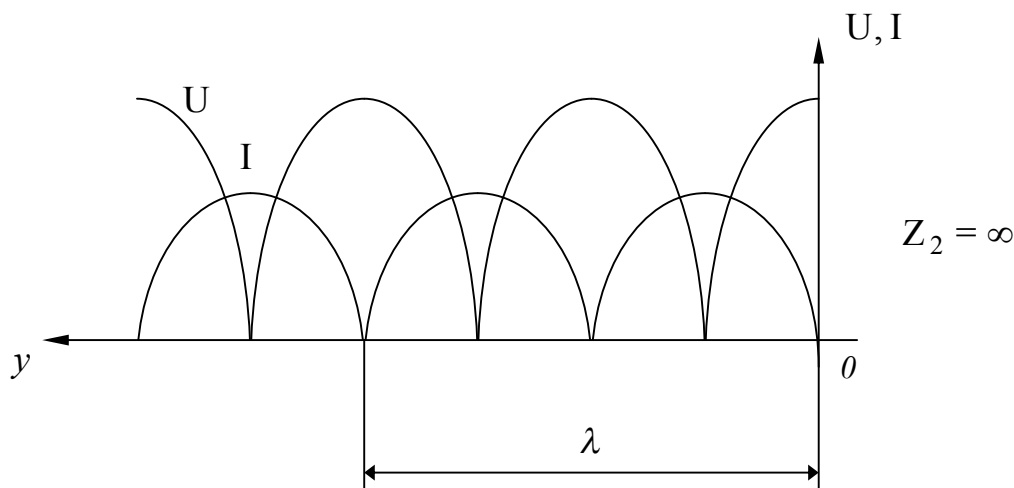
$$\underline{Z}_0 = \frac{U_{lx}}{I_{lx}} = -jZ_C \operatorname{ctg} \beta l = jX_l.$$

Отсюда с учетом равенства

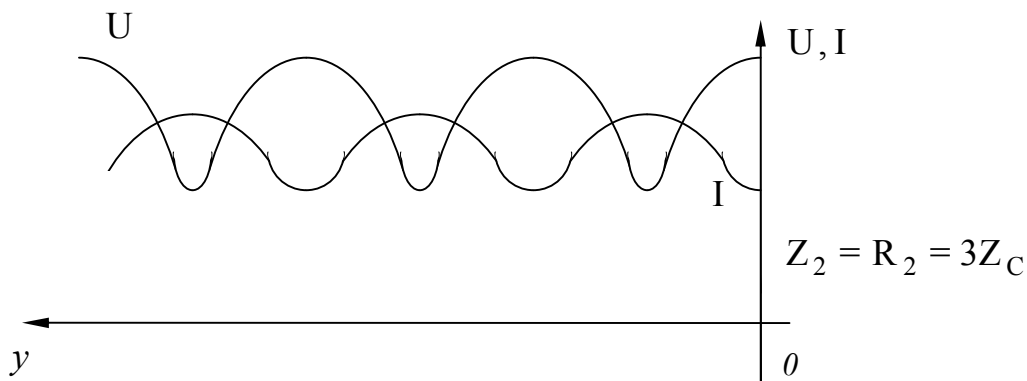
$$\beta = \frac{\omega}{V} = \frac{\omega T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

следует, что при $0 < l < \frac{\lambda}{4}$ - сопротивление линии носит емкостный характер, при $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ - индуктивный характер и т.д. При длине $l = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots$ наблюдается резонанс напряжений ($Z_0 = 0$), при длине $l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ наблюдается резонанс токов. При промежуточных значениях с помощью линии определенной длины можно реализовать индуктивное или емкостное сопротивление любой величины.

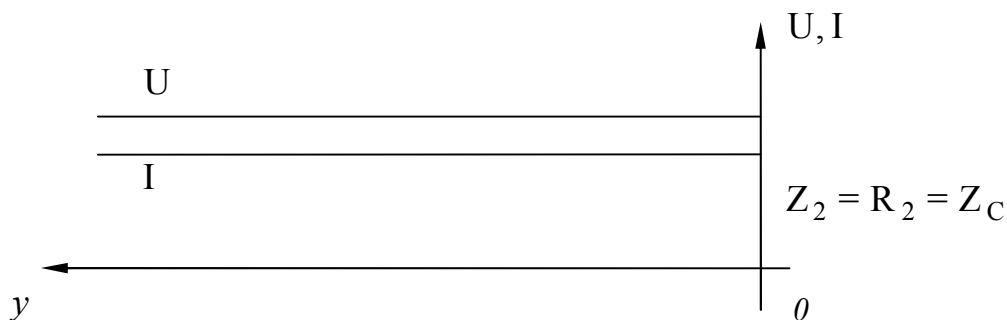
Для практики основной интерес представляет распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии. Из приведенных выше графиков мгновенных значений токов и напряжений следует, что для линии без потерь при холостом ходе (стоячие волны) распределение действующих значений имеет следующий вид.



При нагрузке линии без потерь активным сопротивлением нулевых значений тока и напряжения не будет, так как по линии при этом передается активная мощность. Примерный график распределения приведен на рисунке.



Заметим, что при согласованной нагрузке напряжение и ток одинаковы по всей длине.



При наличии потерь происходит также затухание величины действующих значений от начала к концу линии.

Понятие о переходных процессах в линиях.

Такие процессы возникают прежде всего при включении и отключении какого либо участка (или всей линии). При большой протяженности линий изменение внешних электрических и магнитных полей (например, при грозовых разрядах) также вызывает переходный процесс. Кроме того, эти процессы возникают всегда при наличии телефонных или телеграфных сигналов, а также импульсов информации.

В общем случае уравнения однородной линии имеют вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Их решение в общем виде сложно. Наиболее просто уравнения решаются для линии без потерь. Приняв $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$, получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Дифференцируя первое по x и используя второе, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -L_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = -L_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Решение полученного волнового уравнения дано Даламбером в виде:

$$u = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt),$$

где $V = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$.

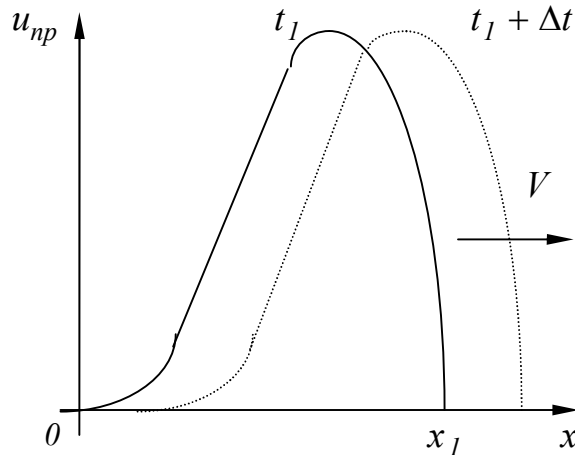
Первое слагаемое дает одиночную прямую волну напряжения, которая без изменения перемещается от начала к концу линии. В самом деле, в момент t_1 прямая волна:

$$u_{np}(t_1) = f_1(x - Vt_1).$$

По прошествии некоторого времени Δt :

$$u_{np}(t_1 + \Delta t) = f_1(x - V\Delta t - Vt_1) = f_1(x - \Delta x - Vt_1),$$

т.е. волна перемещается вправо.



Второе слагаемое дает обратную волну, которая перемещается влево.

Для тока в линии интегрирование дает:

$$i = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} [f_1(x - Vt) - f_2(x + Vt)].$$

Обозначив

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

получим:

$$i = \frac{1}{Z_C} (u_{np} - u_{обр}) = i_{np} - i_{обр},$$

то есть

$$\frac{u_{np}}{i_{np}} = \frac{u_{обр}}{i_{обр}} = Z_C.$$

При наличии в линии потерь волны в ней сохраняются, но затухают по мере движения. При наличии на пути волны неоднородности (изменяются параметры линии, кончается линия и т.п.) происходит отражение волны, которое может быть частичным или полным. При частичном отражении возникает преломленная волна.

Обозначим

u_1, i_1 - напряжение и ток в месте отражения,

u_{1n}, i_{1n} - напряжение и ток падающей волны,

u_{10}, i_{10} - напряжение и ток отраженной волны,

u_2, i_2 - напряжение и ток преломленной волны,

Z_{C1}, Z_{C2} - волновые сопротивления для прямой, обратной и преломленной волн.

В месте неоднородности

$$u_1 = u_2,$$

$$i_1 = i_2.$$

Следовательно

$$\begin{cases} u_{1n} + u_{10} = u_2 \\ i_{1n} - i_{10} = i_2 \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} u_{1n} + u_{10} = u_2 \\ u_{1n} - u_{10} = u_2 \cdot \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \end{cases}$$

Совместное решение дает:

$$2u_{1n} = u_2 \left(1 + \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \right),$$

$$2u_{10} = u_2 \left(1 - \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \right).$$

Таким образом:

$$u_{10} = u_{1n} \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = u_{1n} n,$$

$$u_2 = u_{1n} + u_{10} = (1 + n) u_{1n},$$

где $n = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}}$ - коэффициент отражения.

Соответственно:

$$i_{10} = \frac{u_{10}}{Z_{C1}} = n \frac{u_{1n}}{Z_{C1}},$$

$$i_2 = \frac{u_2}{Z_{C2}} = \frac{(1 + n) u_{1n}}{Z_{C2}} = \frac{1 + \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}}}{Z_{C2}} u_{1n} = \frac{2u_{1n}}{Z_{C1} - Z_{C2}}.$$

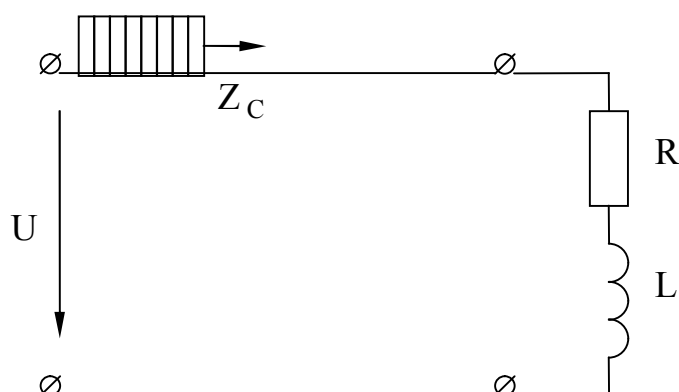
Отсюда следует, что ток в конце линии можно найти как ток эквивалентной цепи, в которую включается напряжение, равное двойному напряжению падающей волны, и которая состоит из волнового сопротивления первой линии

Z_{C1} и последовательно с ним соединенного сопротивления нагрузки (Z_{C2} или Z_2).

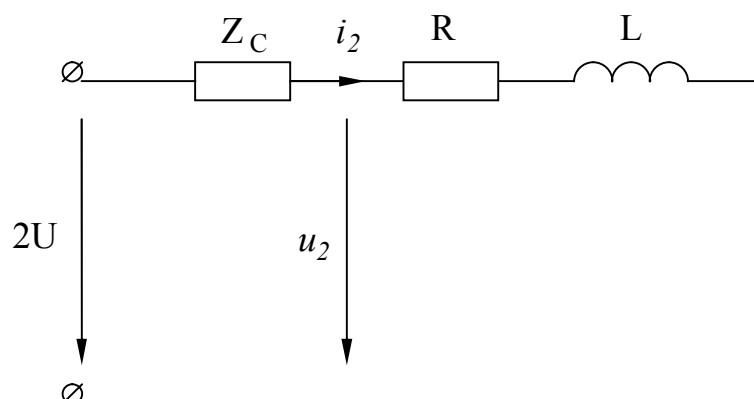
Например, при включении линии без потерь к источнику постоянного напряжения по линии распространяется волна с прямоугольным фронтом, создающая напряжение и ток в линии. Если в конце линии подключена нагрузка, равная волновому сопротивлению линии, то падающая волна не отразится и в линии по достижению волной ее конца наступает установившийся режим. При несогласованной нагрузке возникает отраженная волна, которая затем отразится от начала линии и т.д. В линии без потерь такой процесс колебаний бесконечен. В реальной линии волны затухают. Напряжение и ток определяются в любой момент как алгебраическая сумма и разность напряжений и токов прямых и обратных волн.

Обычно падающую волну рассматривают как волну с прямоугольным фронтом и при синусоидальном напряжении, так как за время движения по линии напряжение очень мало меняется во времени.

В качестве примера рассмотрим условия отражения волны в схеме изображенной на рисунке.



Определим напряжение и ток в месте отражения - конце линии. Для этого составим эквивалентную схему.



Для схемы при включении на постоянное напряжение $2U$:

$$2U = (Z_C + R) i_2 + L \frac{di_2}{dt}.$$

Решение уравнения:

$$i_2 = \frac{2U}{Z_C + R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$u_2 = 2U - Z_C i_2 = \frac{2U}{Z_C + R} \left(R + Z_C e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где

$$\tau = \frac{L}{Z_C + R},$$

а $t = 0$ соответствует моменту падения волны на сопротивление нагрузки в конце линии.

ЛЕКЦИЯ №37.

Переходный процесс при включении линии.

Если длина линии l мала по сравнению с длиной волны, то время пробега волны вдоль всей линии:

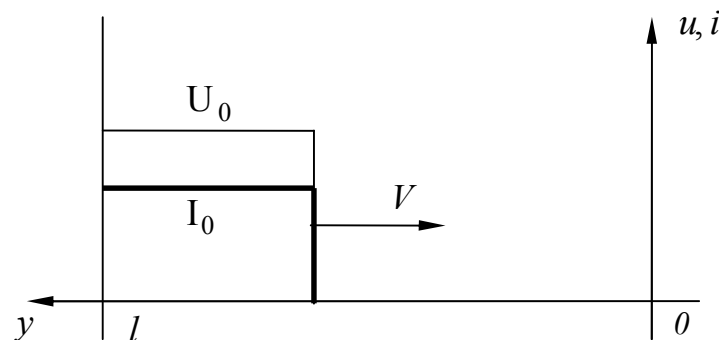
$$t_l = \frac{l}{V} \ll \frac{\lambda}{V} = T,$$

т.е. это время много меньше периода синусоидального напряжения, на которое включается линия. Поэтому можно пренебречь изменением этого напряжения за время начальной стадии переходного процесса включения и ограничиться рассмотрением процесса включения линии на постоянное напряжение U_0 , равное мгновенному значению синусоидального $u(t)$ в момент включения. Тогда волновые процессы при включении линии на синусоидальное и постоянное напряжение при $l \ll \lambda$ будут аналогичны.

Рассмотрим переходный процесс при включении линии на постоянное напряжение U_0 . При этом считаем, что источник напряжения имеет достаточно большую мощность, т.е. его внутренним сопротивлением можно пренебречь. Тогда волны напряжения и тока будут прямоугольными и отразятся от начала к линии так, как было бы при коротком замыкании линии начала линии.

1 стадия.

После включения разомкнутой на конце линии, т. е. в режиме холостого хода вдоль нее пойдут волны напряжения и тока. Через время, равное $\frac{l}{V}$, волны дойдут до конца линии и тогда в любой точке линии напряжение равно U_0 , а ток $I_0 = \frac{U_0}{Z_C}$.



2 стадия.

Затем произойдет отражение волны напряжения без перемены знака от конца линии. При этом ($Z_H = \infty$):

$$u_2 = 2u_{n1} \frac{Z_H}{Z_H + Z_C} = 2u_{n1} = 2U_0,$$

$$u_{01} = u_2 - u_{n1} = 2U_0 - U_0 = U_0 = u_{n1},$$

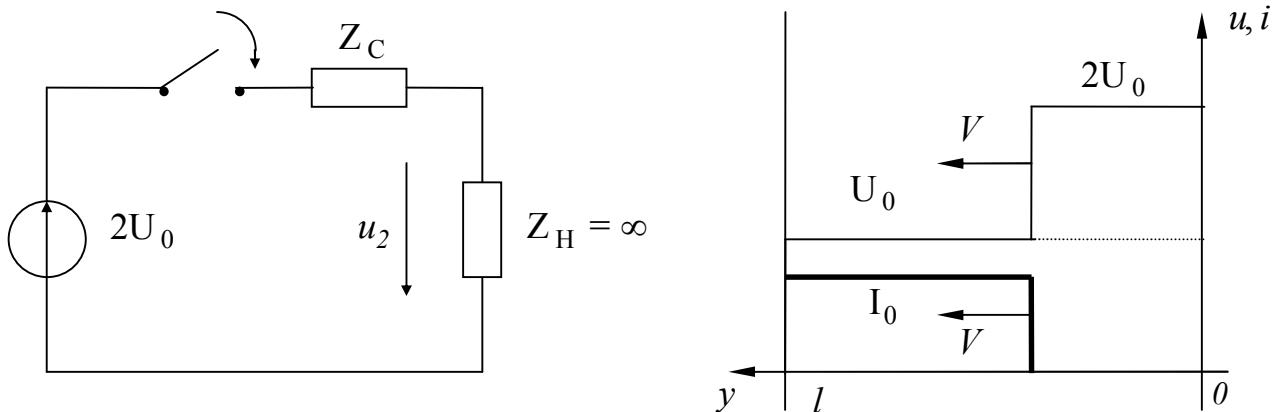
$$i_{01} = \frac{u_{01}}{Z_C} = i_{n1} = I_0.$$

Так как

$$u = u_{n1} + u_{01},$$

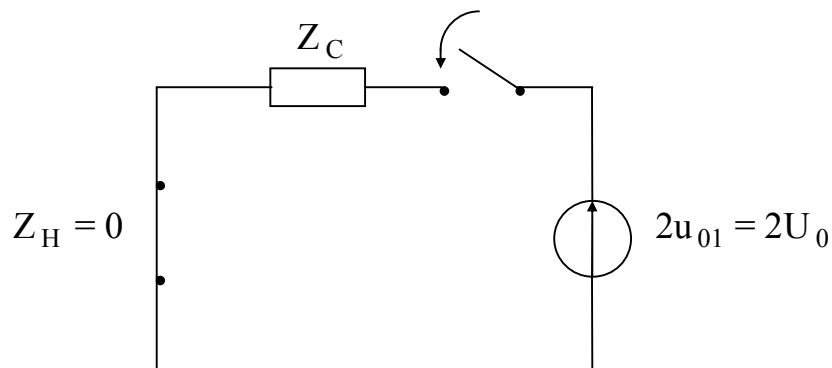
$$i = i_{n1} - i_{01},$$

то состояние линии после отражения характеризуется представленной на рисунке схемой.



3 стадия.

Волны u_{01} и i_{01} , дойдя до начала линии, вновь отразятся от начала и вызовут распространение от генератора к концу линии вторых падающих волн тока и напряжения. Для определения характеристик отражения по схеме замещения, представленной на рисунке, получим:

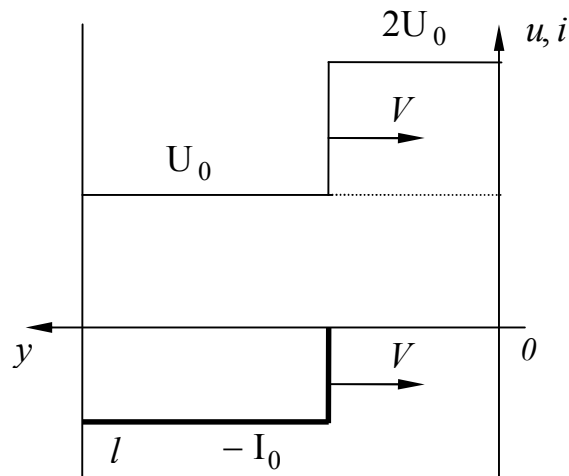


$$U_0 + u_{n2} = 0,$$

$$u_{n2} = -U_0,$$

$$i_{n2} = \frac{u_{n2}}{Z_C} = -I_0.$$

Результирующее состояние линии, полученное наложением трех волн напряжения и трех волн тока, представлено на следующем рисунке.



4 стадия.

Теперь на три предыдущие стадии накладываются волны напряжения и тока, как результат отражения от конца линии вторых падающих волн.

На схеме замещения теперь

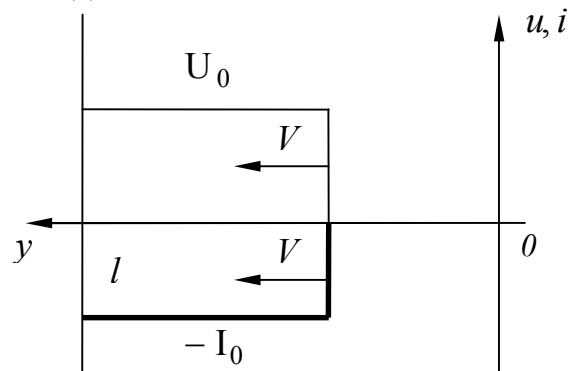
$$2u_{n2} = -2U_0.$$

При четвертой стадии:

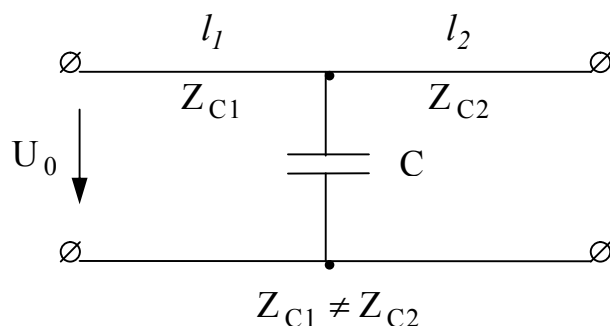
$$u_{n1} + u_{01} + u_{n2} + u_{02} = U_0 + U_0 - U_0 - U_0 = 0,$$

$$i_{n1} - i_{01} + i_{n2} - i_{02} = I_0 - I_0 + (-I_0) - (-I_0) = 0.$$

Далее процесс повторяется до бесконечности.



В заключении рассмотрим процесс при подключении источника постоянного напряжения к двум последовательно соединенным линиям при наличии емкости в месте стыка линий.



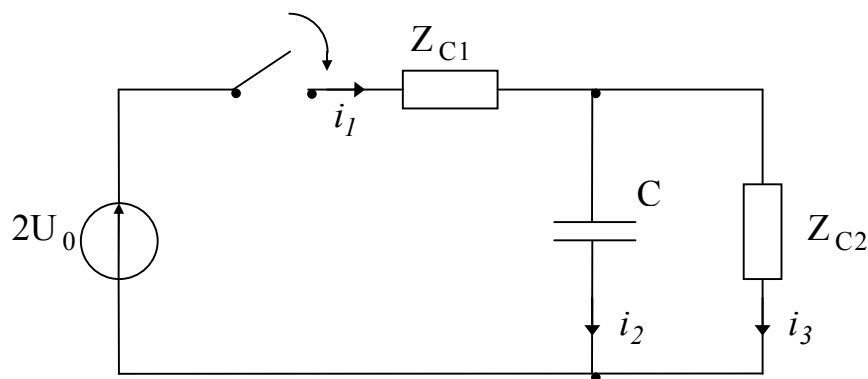
Определим форму преломленной волны, характер изменения тока через емкость, а также ток и напряжение в первой линии после отражения волны от стыка.

В начале от генератора распространяется падающая волна с прямоугольным фронтом:

$$u_{n1} = U_0,$$

$$i_{n1} = \frac{U_0}{Z_{C1}} = I_0.$$

Для расчета отражения по схеме замещения определяем:



$$i_1 = \frac{2U_0}{Z_{C1} + Z_{C2}} \left(1 + \frac{Z_{C2}}{Z_{C1}} e^{pt} \right),$$

$$i_2 = \frac{2U_0}{Z_{C1} + Z_{C2}} (1 - e^{pt}),$$

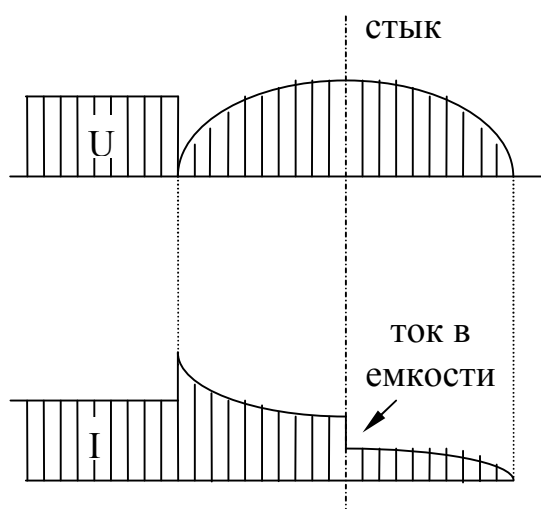
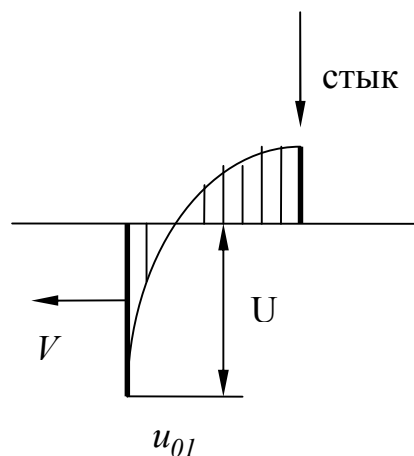
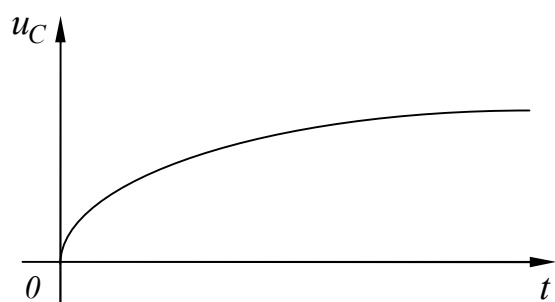
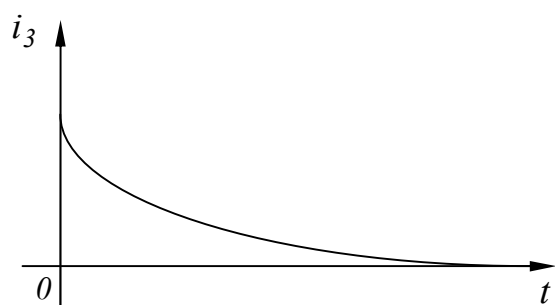
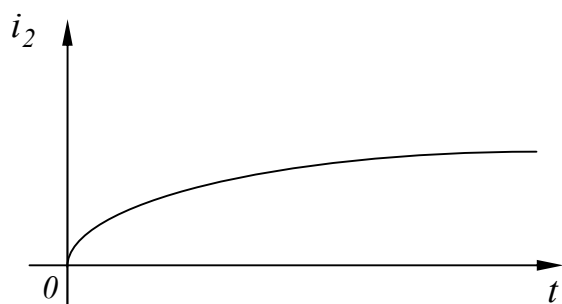
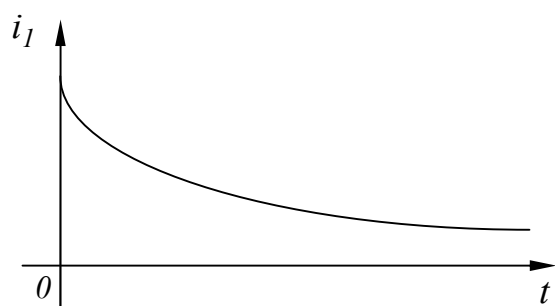
$$i_3 = \frac{2U_0}{Z_{C1}} e^{pt},$$

$$u_C = u_{Z_{C2}} = \frac{2U_0 Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} (1 - e^{pt}).$$

Характер функций представлен на графиках. При подходе волны к емкости напряжение падает до нуля (напряжение на емкости, как известно, не может изменяться скачком).

Для построения отраженной волны из ординат $u_C(t)$ нужно вычесть напряжение падающей волны, а затем перенести полученную кривую на первую линию, зная скорость отраженной волны.

Кривые распределения напряжения и тока на некоторый момент времени представлены на следующих рисунках.



Пример.

Для последовательного соединения двух линий с емкостью в месте стыка проведем расчет отраженных волн, если первая линия кабельная $Z_{C1} = 50$ Ом, а вторая воздушная $Z_{C2} = 400$ Ом, кроме того $l_2 = 100$ км, $l_1 = 60$ км, $C = 5.62$ мкФ, $u = 10$ кВ.

Расчет.

По ранее установленным формулам:

$$p = -\frac{Z_{C1} + Z_{C2}}{Z_{C1}Z_{C2}C} = -4000 \frac{1}{c}.$$

Ток падающей волны в первой линии:

$$i_{n1} = \frac{u}{Z_{C1}} = 200 \text{ A.}$$

Расчет по схеме для отраженных волн:

$$i_2 = 44.5(1 - e^{-4000t}) \text{ A,}$$

$$i_3 = 400e^{-4000t} \text{ A,}$$

$$i_1 = 44.5(1 + 8e^{-4000t}) \text{ A,}$$

$$u_C = 17750(1 - e^{-4000t}) \text{ B.}$$

До конца второй линии волна дойдет за

$$t = \frac{l_2}{V} = \frac{100}{300000} = \frac{1}{3000} \text{ c.}$$

За это время отраженная волна пройдет расстояние в два раза меньше. Графики переходного процесса были изображены раньше. Перепад на графике тока (ток через емкость) при $t = 1/3000 \text{ c}$:

$$i_3 = 400e^{-\frac{4}{3}} = 106 \text{ A.}$$

Напряжение на емкости в этот момент:

$$u_C = 13.05 \text{ кВ.}$$

ЛЕКЦИЯ №38.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.

Установившиеся процессы в нелинейных цепях и методы их расчета.

Нелинейные электрические цепи постоянного тока.

Основные понятия и определения.

До сих пор рассматривались основные свойства и методы расчета линейных электрических цепей, существенная особенность которых заключается в применимости к ним метода наложения. В линейном элементе ток связан с напряжением линейным уравнением - алгебраическим или дифференциальным первого порядка. Однако, в реальных условиях все электрические и магнитные цепи являются нелинейными. Линейными их можно считать в ограниченных диапазонах токов и напряжений. Так при чрезмерно больших токах наблюдается значительный нагрев проводников, что резко изменяет сопротивление проводника. При высоких напряжениях изменяются свойства диэлектриков в конденсаторах, что изменяет их емкость. Для катушек с ферромагнитными сердечниками изменяется их индуктивность при значительном насыщении сердечника, связанного с протеканием по катушкам больших токов. Во многих случаях приходится считаться с нелинейностью и при нормальной работе цепей в допустимом диапазоне изменений токов и напряжений.

В этом разделе курса изучаются основные свойства и методы расчета нелинейных цепей. Электрическую цепь будем считать нелинейной, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент (н.э.), т.е. такой элемент, ток и напряжение которого связаны нелинейной зависимостью. Процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями. Необходимо четко знать, что метод наложения к таким цепям в общем случае неприменим.

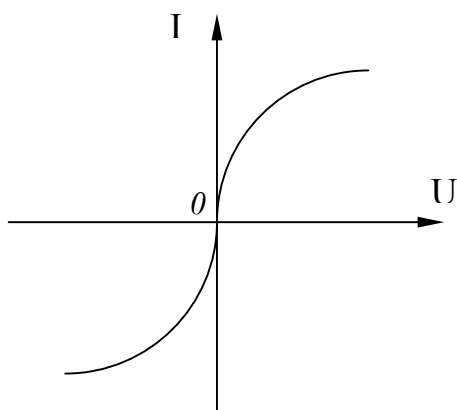
В зависимости от способности рассеивать электрическую энергию в виде тепла или накапливать магнитную или электрическую энергию различают **нелинейное сопротивление** и нелинейные накопители энергии - **нелинейную индуктивность** и **нелинейную емкость**.

Их характеристики, получаемые экспериментально, задаются графиками (таблицами) или приближенными аналитическими выражениями. Это вольт-амперные характеристики для сопротивлений, вебер-амперные (зависимости потокосцепления или магнитного потока от тока) - для индуктивностей (эту характеристику иногда называют магнитной), кулон-вольтные (зависимости заряда от напряжений) для емкостей (характеристику называют также электрической).

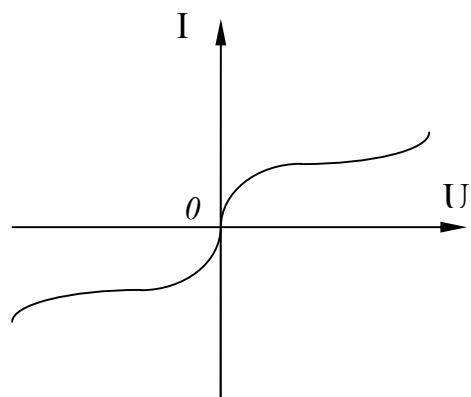
В этом разделе нелинейных цепей постоянного тока рассматриваются только нелинейные сопротивления (цепи без накопителей энергии).

В зависимости от отсутствия или наличия возможности изменять вольт-амперную (В-А) характеристику элементов путем внешнего воздействия на элемент различают управляемые и неуправляемые н. э. Поэтому неуправляемые н.э. имеют одну В-А характеристику, а управляемые - семейство характеристик, соответствующих различным величинам внешнего воздействия.

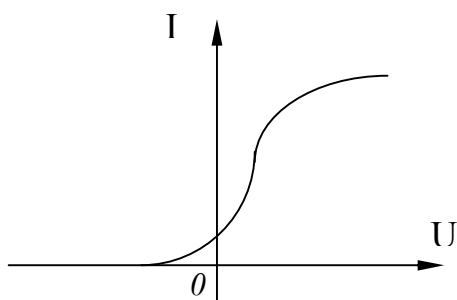
Различают также симметричные и несимметричные н.э. У симметричных В-А характеристики не зависят от направлений тока и напряжения на зажимах (электрические лампы, батареи, терморезисторы и т.п.). У несимметричных характеристики неодинаковы при различных направлениях тока и напряжения на зажимах (электрическая дуга при разнородных электродах, ламповые и полупроводниковые триоды, вентили и т.п.). На следующих рисунках приведены В-А характеристики некоторых н.э.



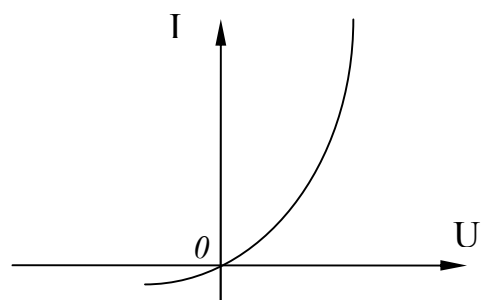
В-А характеристика лампы с металлической нитью.



В-А характеристика бареттера.



Ламповый диод (вентиль).



Полупроводниковый диод (вентиль).

Для оценки величины сопротивлений н.э. применяются два понятия: статическое и дифференциальное.

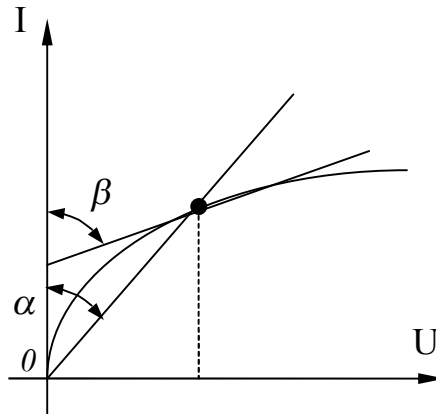
Под статическим понимают отношение постоянного напряжения на элементе тока в нем:

$$r_{cm} = \frac{U}{I}.$$

Дифференциальным называют сопротивление:

$$r_{\partial} = \frac{dU}{dI},$$

характеризующее н.э. при малых отклонениях от рассматриваемой точки нелинейной характеристики.

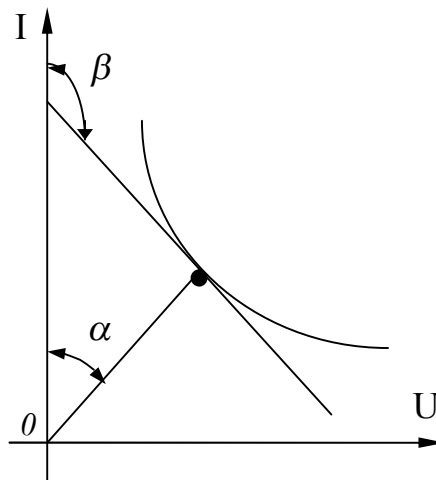


Из рисунка следует, что

$$r_{cm} = m_r \operatorname{tg} \alpha,$$

$$r_{\partial} = m_r \operatorname{tg} \beta,$$

т.е. в общем случае эти сопротивления не равны друг другу и совпадают только для линейных элементов.



Заметим также, что в случае так называемой «падающей» характеристики дифференциальное сопротивление может быть отрицательным.

Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока.

Законы Кирхгофа могут быть использованы и для расчета нелинейных цепей. При этом аналитический расчет возможен на основе аналитически выраженных В-А характеристик (например, $I = aU^{2/3}$ для электронной лампы). Возможно также и применение приближенной аналитической аппроксимации. Однако, трудности получения достаточно точных аналитических зависимостей

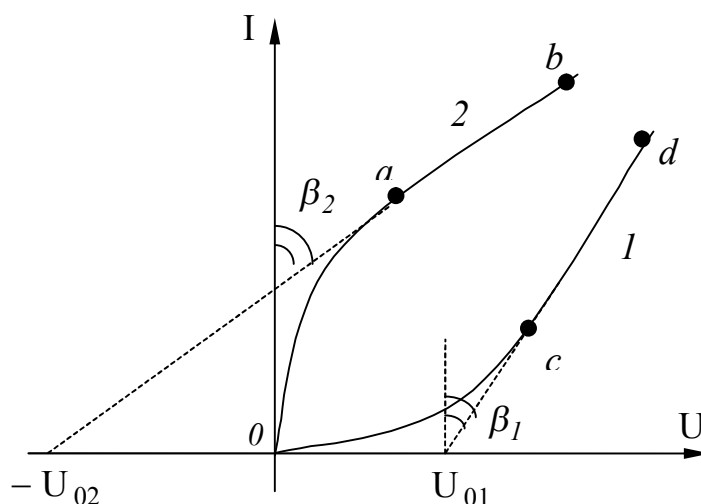
между током и напряжением большинства н.э. заставляет широко применять графические методы расчета.

Рассмотрим наиболее распространенные способы расчета нелинейных цепей.

1. Приведение нелинейных цепей к линейным.

Применение метода возможно, если нелинейные цепи работают в таком диапазоне токов и напряжений, где участки В-А характеристик н.э. близки к прямолинейным.

На линейных участках



$$U_1 = U_{01} + m_r \operatorname{tg} \beta_1 I_1,$$

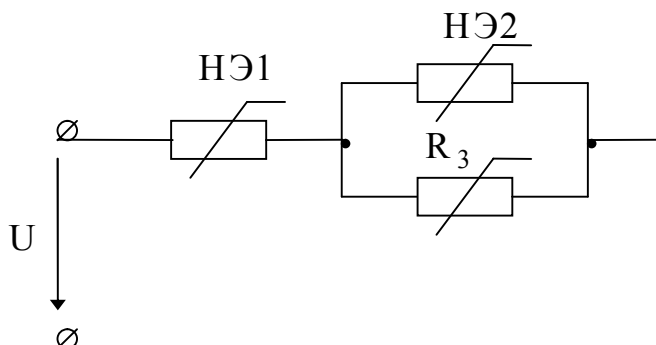
$$U_2 = -U_{02} + m_r \operatorname{tg} \beta_2 I_2,$$

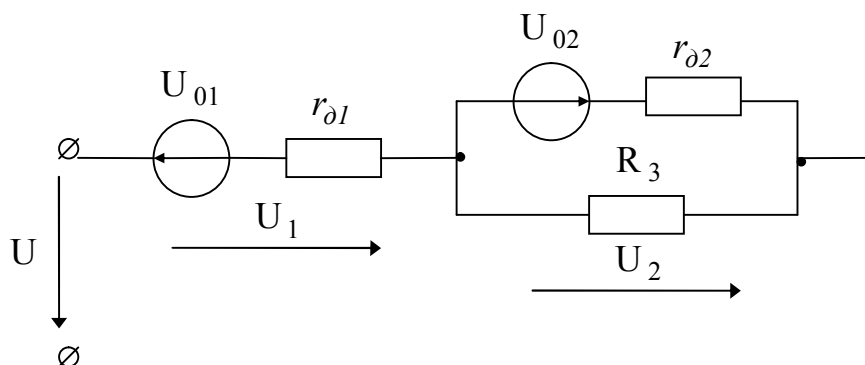
или

$$U_1 = U_{01} + r_{\partial 1} I_1,$$

$$U_2 = -U_{02} + r_{\partial 2} I_2.$$

В соответствии с полученными уравнениями каждый н.э. может быть представлен в виде эквивалентной схемы, состоящей из последовательного соединения $r_{\partial 1}$ или $r_{\partial 2}$ и источника напряжения U_{01} или $-U_{02}$, включенного навстречу внешнему напряжению, т.к. последнее должно преодолеть напряжение этого источника. В результате пассивная нелинейная цепь преобразуется в активную линейную, рассчитываемую обычными методами расчета линейных цепей. Ниже представлено преобразование смешанного соединения н.э.





В более простом случае последовательного соединения НЭ1 и НЭ2 расчетное уравнение линейной схемы принимает вид:

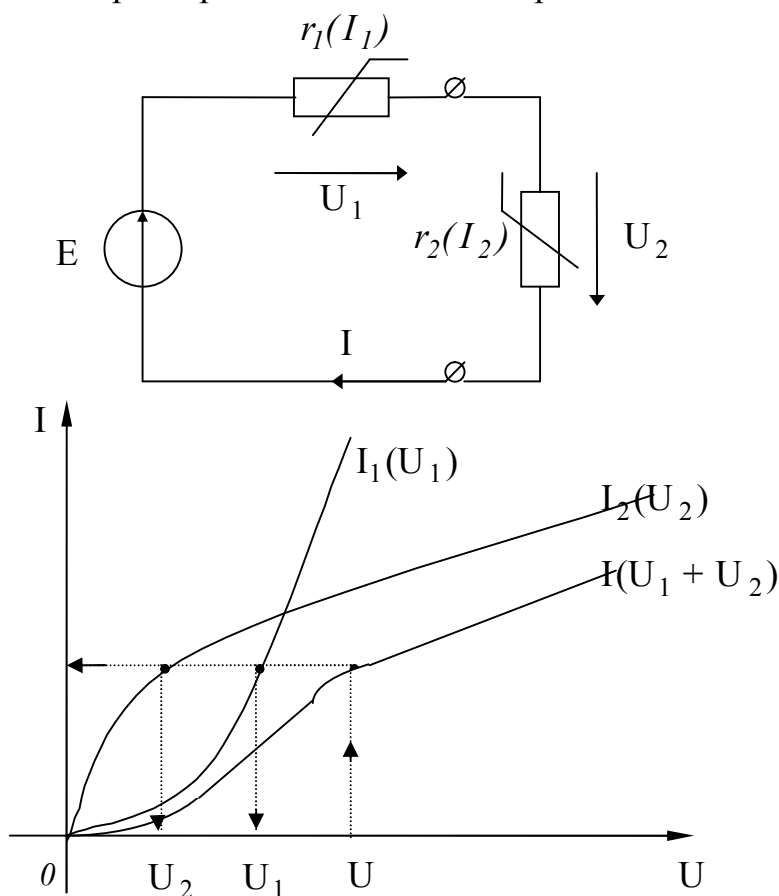
$$U = (U_{01} - U_{02}) + (r_{01} + r_{02})I.$$

2. Графический метод расчета.

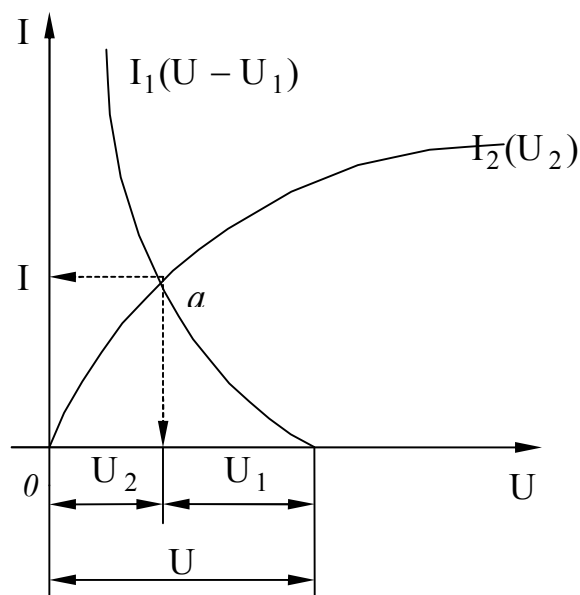
Этот метод основан на графическом решении уравнений Кирхгофа.

а) При последовательном соединении н.э.

При двух н.э. строится вспомогательная характеристика - зависимость тока I от суммарного напряжения $U_1 + U_2$ (в соответствии со схемой соединения). Так как в последовательной цепи ток одинаков, то для этого необходимо просуммировать напряжения при одинаковых токах. По суммарной характеристике для заданного напряжения источника легко находим ток. Затем по характеристикам н.э. находим при определенном токе напряжения на н.э.



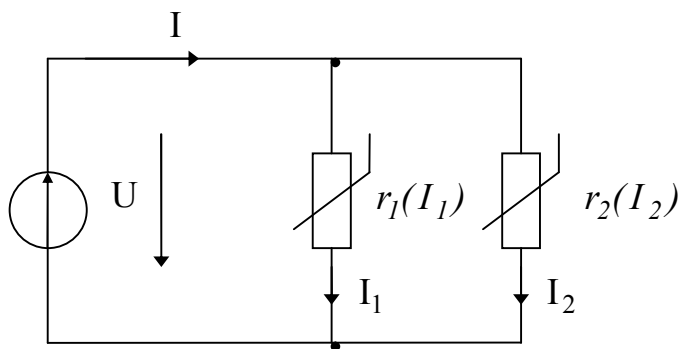
При последовательном соединении нелинейного активного двухполюсника и нелинейного пассивного двухполюсника построение характеристик можно выполнить другими способом.

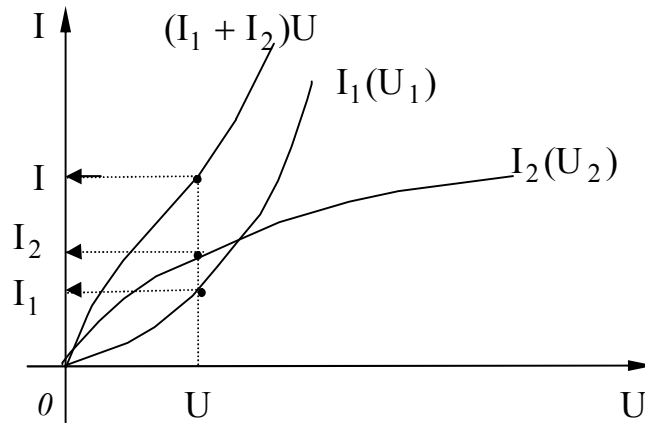


Напряжение на зажимах нелинейного элемента U_2 определяется, с одной стороны, В-А характеристикой этого элемента $I_2(U_2)$, а с другой - разностью между э.д.с. $E = U$ и напряжением U_1 на зажимах нелинейного элемента $r_1(I_1)$. На рисунке построены $I_2(U_2)$ и $I_1(U - U_1)$. Абсциссы последней получены вычитанием абсцисс В-А характеристики из напряжения U для различных значений тока I_1 . В точке a пересечения кривых $I_2(U_2)$ и $I_1(U - U_1)$ удовлетворяются равенства $U_2 = U - U_1$ и $I_1 = I_2 = I$, определяющие режим при этом соединении.

б) При параллельном соединении н.э.

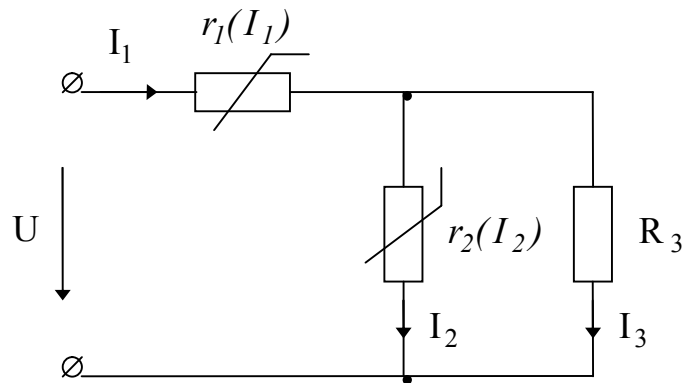
Построение при решении ведется аналогичным способом, но при этом на основе уравнения $I = I_1 + I_2$ и $U_1 = U_2 = U$ складываются токи при одинаковых напряжениях. Определение суммарного тока и тока н.э. представлено на рисунке.





в) При смешанном соединении н.э.

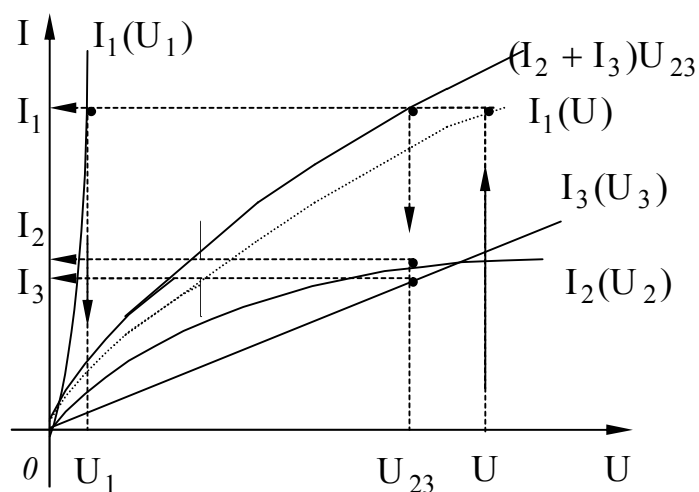
Рассмотрим графическое решение схемы, представленной на рисунке.



По законам Кирхгофа

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

$$U = U_1 + U_{23}.$$



На основании законов Кирхгофа выполнено построение

$$U_{23}(I_2 + I_3) = U_{23}(I_1),$$

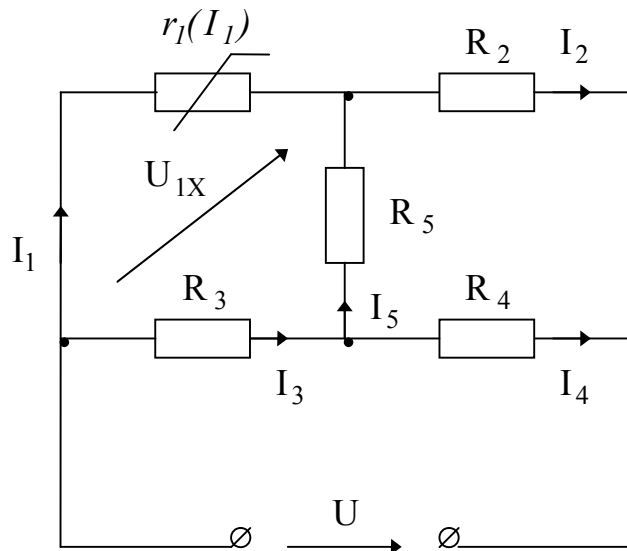
а затем

$$(U_1 + U_{23}) I_1 = U(I_1).$$

На графике показано определение токов и напряжений всех элементов для некоторого частного значения U .

3. Применение теоремы об активном двухполюснике.

Способ удобен при одном н.э. Тогда остающаяся часть схемы (за исключением н.э.) заменяется эквивалентным генератором с некоторым сопротивлением. Рассмотрим расчет на примере мостовой схемы, в одно плечо которой включен н.э.



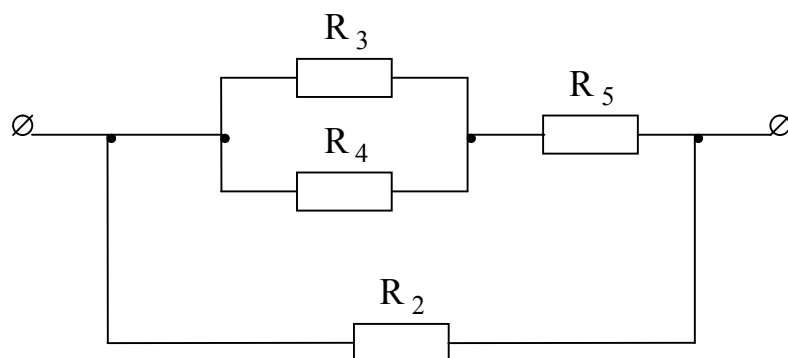
Для изображенной на рисунке схемы при холостом ходе ветви с н.э.:

$$U_{1X} = R_3 I_{3X} + R_5 I_{5X},$$

$$I_{3X} = \frac{U}{R_3 + \frac{R_4(R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}},$$

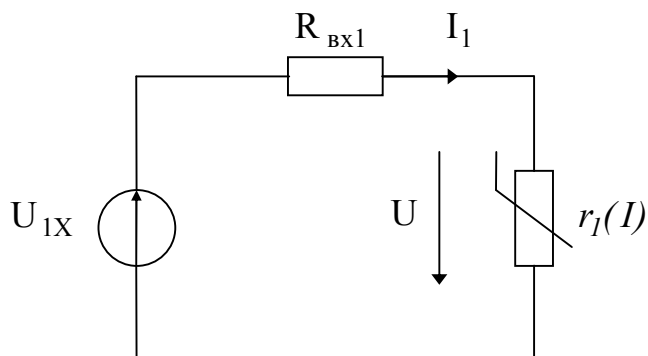
$$I_{5X} = I_{3X} \frac{R_4}{R_2 + R_4 + R_5}.$$

Входное сопротивление определим по следующему рисунку, на котором более ясна схема соединений.



$$R_{exl} = \frac{(R_5 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}) R_2}{R_2 + R_5 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

Таким способом исходная схема заменена расчетной, представленной на следующем рисунке.



Для нее ранее была рассмотрена методика расчета.

Построим В-А характеристику н.э.,

$$I_1 = f_1(U_1),$$

а также

$$I_1 = f_2(U_{IX} - R_{exl} I_1).$$

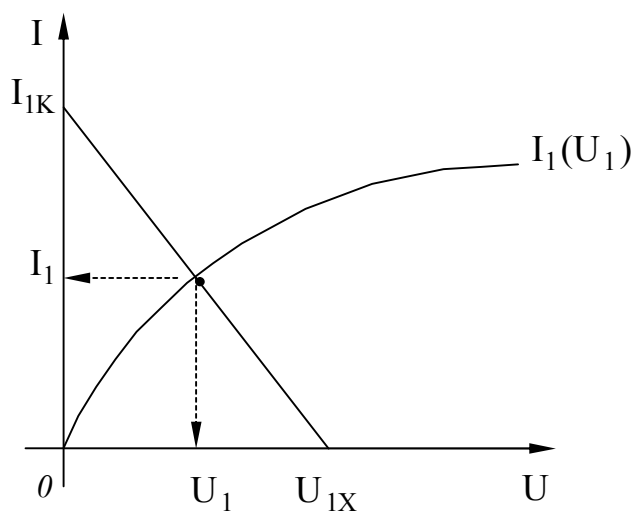
Точка их пересечения определит ток I_1 . Остальные токи определяются из очевидных уравнений:

$$I_2 = \frac{U - U_1}{R_2},$$

$$I_4 = \frac{R_5 I_5 + R_2 I_2}{R_4},$$

$$I_5 = I_2 - I_1,$$

$$I_3 = I_5 + I_4.$$

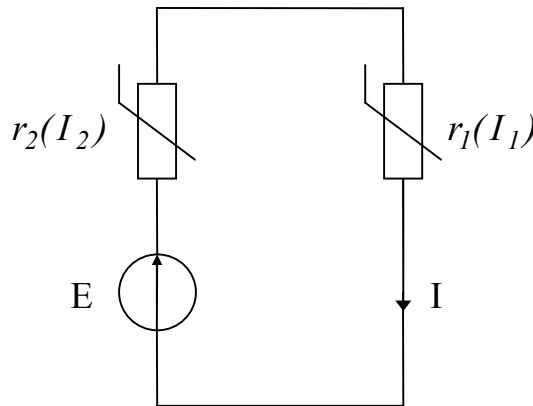


4. Метод последовательных приближений.

Сущность метода рассмотрим на простом примере последовательного соединения двух н.э. Расчет ведется на основе уравнения

$$I_{n+1} = \frac{E}{r_{1n} + r_{2n}},$$

где n - порядковый номер приближения.



Для изображенной на рисунке схемы зададимся произвольным нулевым приближением тока I_0 , по В-А характеристикам найдем соответствующие этому току напряжения U_{10} и U_{20} . Затем определим

$$r_{10} = \frac{U_{10}}{I_0}, \quad r_{20} = \frac{U_{20}}{I_0}, \quad r_{10} + r_{20},$$

а также первое приближение тока

$$I_1 = \frac{E}{r_{10} + r_{20}}.$$

Исходя из тока величиной I_1 , повторим весь расчет для второго приближения тока I_2 и так далее до тех пор, пока из-за сходимости итерационного процесса результат не начнет практически повторяться.

Как известно, итерация в зависимости от вида характеристик может дать расходящийся процесс. Тогда сходимость можно получить на основе определения напряжения:

$$U_{1,n+1} = \frac{r_{1n}E}{r_{1n} + r_{2n}}.$$

В случае сложной цепи возможно применение метода контурных токов. При этом контуры должны быть выбраны так, чтобы контурный ток нелинейных ветвей был бы и действительным током, так как принцип наложения для нелинейных элементов неприменим.

Понятие о стабилизации напряжения с помощью нелинейных элементов.

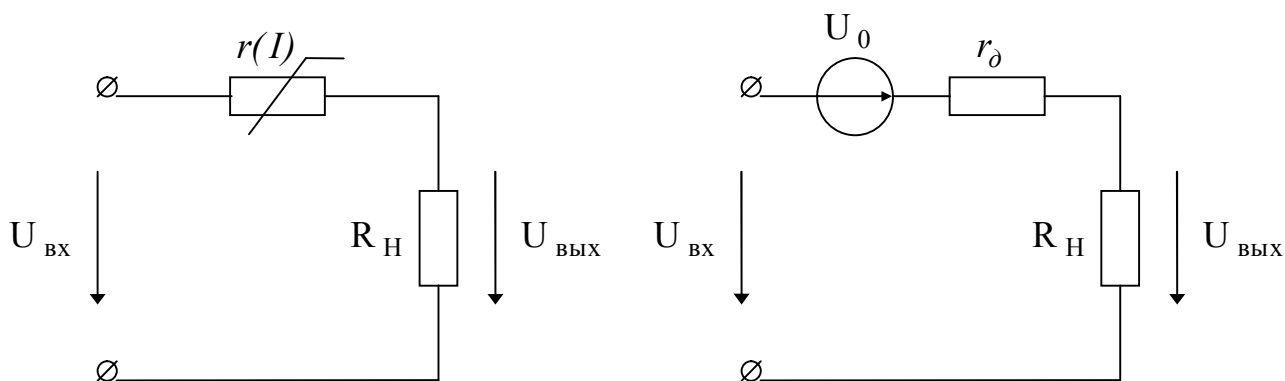
При стабилизации напряжения относительное изменение напряжения на выходе значительно меньше, чем на входе.

Отношение

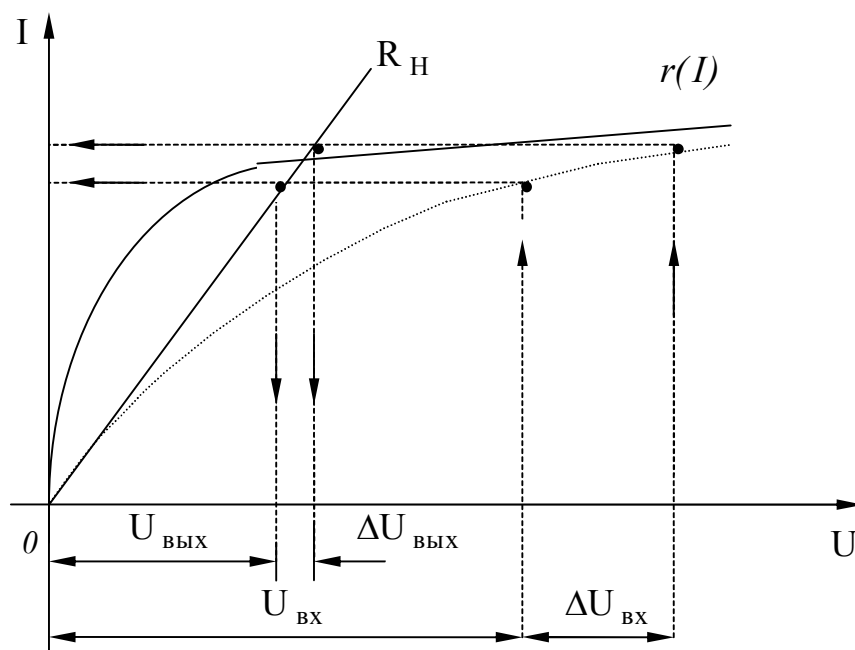
$$k = \frac{\frac{\Delta U_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}}}}{\frac{\Delta U_{\text{вых}}}{U_{\text{вых}}}}$$

называют коэффициентом стабилизации.

Простейший стабилизатор напряжения может быть составлен по схеме, изображенной на рисунке.



Коэффициент стабилизации может быть определен графически (это сделано на следующем графике), а также вычислен аналитически, если заменить нелинейный элемент - линейным сопротивлением и источником напряжения.



Коэффициент стабилизации

$$k = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} \cdot \frac{\Delta U_{\text{вх}}}{\Delta U_{\text{вых}}}.$$

Напряжение нелинейного элемента

$$U_{H\varnothing} = -U_0 + r_{\varnothing} I,$$

а выходное напряжение

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{вх}} + U_0}{r_{\varnothing} + R_H} \cdot R_H.$$

Дифференцируя входное напряжение по выходному, получим

$$\frac{dU_{\text{вх}}}{dU_{\text{вых}}} = \frac{r_{\varnothing} + R_H}{R_H}.$$

Учитывая, что

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{(1 + \frac{U_0}{U_{\text{вх}}}) R_H}{r_{\varnothing} + R_H},$$

имеем

$$k = \frac{r_{\varnothing} + R_H}{R_H} \cdot \frac{(1 + \frac{U_0}{U_{\text{вх}}}) R_H}{r_{\varnothing} + R_H} = 1 + \frac{U_0}{U_{\text{вх}}}.$$

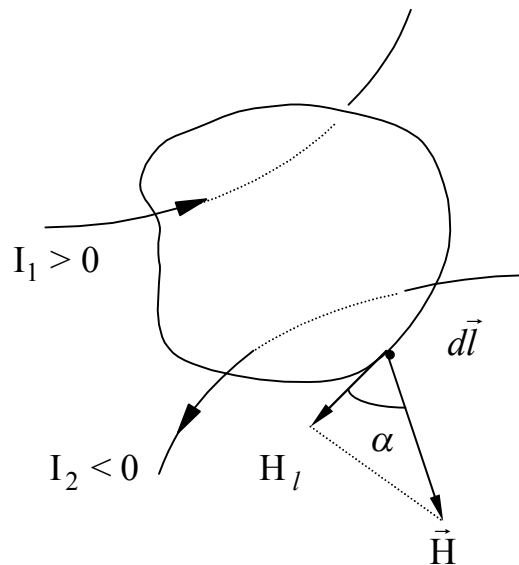
ЛЕКЦИЯ №39.

Магнитные цепи постоянного тока.

Основные понятия и законы магнитных цепей.

В современных электромагнитных аппаратах, трансформаторах, электрических машинах, приборах и магнитных элементах вычислительной и информационно-измерительной технике для увеличения магнитного потока в определенной части пространства используют, как правило, ферромагнитный материал. Устройства или их совокупность, содержащие ферромагнитные материалы, предназначенные для создания с помощью намагничивающей силы магнитного потока в определенной части пространства, называют магнитной цепью.

Основной зависимостью, используемой при расчете магнитных цепей, является закон полного тока. При этом под полным током понимается алгебраическая сумма токов, пронизывающих поверхность, ограниченную произвольным замкнутым контуром. Ток считается положительным, если его направление совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается по часовой стрелке.



Наличие электрических токов приводит к появлению магнитного поля, основными характеристиками которого являются магнитная индукция и напряженность. По аналогии с электрическим полем вводится понятие магнитного напряжения:

$$U_m = \int_l \vec{H} d\vec{l} = \int_l H_l dl,$$

где $H_l = H \cos \alpha$ - касательная составляющая напряженности магнитного поля.

Экспериментально установлено, что магнитное напряжение, взятое по замкнутому контуру, равно полному току, проходящему сквозь поверхность, ограниченную этим контуром - закон полного тока.

Его математическая запись

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I.$$

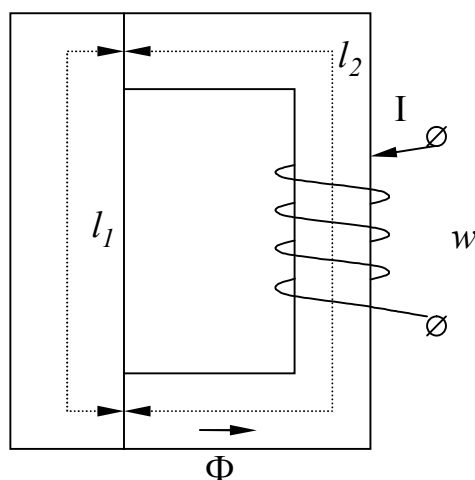
При совпадении контура с магнитной линией

$$\oint H_l dl = \sum I.$$

При постоянной напряженности:

$$Hl = \sum I.$$

Ранее магнитная цепь была определена как сочетание тел, через которые замыкается магнитный поток и которые можно рассматривать как одну индукционную трубку. По такой цепи проходит магнитный поток. Это поток вектора магнитной индукции.



Как известно

$$B = \mu_0 \mu H,$$

а поток в неразветвленной цепи

$$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = \dots$$

Разобьем цепь на участки с одинаковой магнитной проницаемостью (на рисунке это участки 1 и 2). По закону полного тока:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_n l_n = \sum wI.$$

Для любого участка

$$U_m = Hl = \frac{B}{\mu_0 \mu} l = \Phi \frac{l}{\mu_0 \mu S} = \Phi R_m,$$

где $R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu S}$ - магнитное сопротивление участка.

Таким образом U_m , R_m и Φ связаны между собой соотношением, подобным закону Ома электрических цепей.

Уравнение

$$U_m = \Phi R_m$$

называют законом Ома для магнитных цепей.

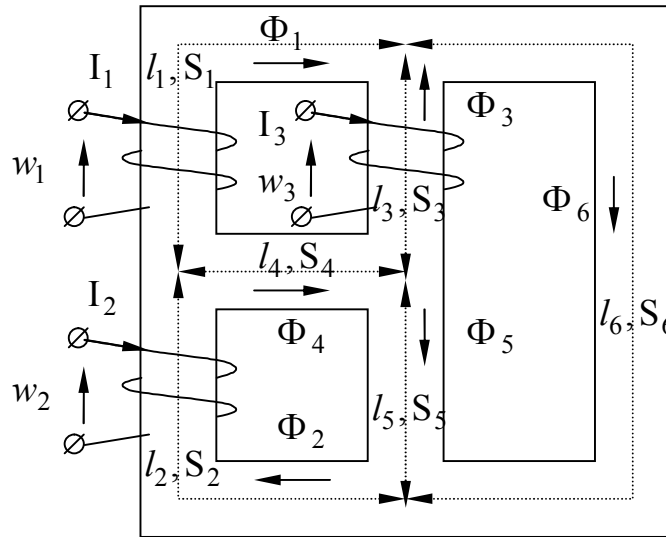
Для цепи, изображенной на рисунке

$$wI = \Phi R_{m1} + \Phi R_{m2} = \Phi(R_{m1} + R_{m2}).$$

В общем случае для неразветвленной замкнутой магнитной цепи:

$$\Phi = \frac{\sum wI}{\sum R_m}.$$

Знак намагничивающих сил wI определяется правилом буравчика: вращая его по направлению тока в катушках, получим направление намагничивающей силы совпадающим с его поступательным движением.



Для разветвленной магнитной цепи в силу непрерывности магнитных линий для любой узловой точки:

Первый закон Кирхгофа для магнитных цепей.

$$\sum \Phi_n = 0.$$

По закону полного потока для контура $1-3-4$:

$$w_1 I_1 - w_3 I_3 = H_1 l_1 - H_3 l_3 - H_4 l_4,$$

или после замены $H \rightarrow B \rightarrow \Phi$:

$$w_1 I_1 - w_3 I_3 = R_{m1} \Phi_1 - R_{m3} \Phi_3 - R_{m4} \Phi_4.$$

Вообще для любого замкнутого контура второй закон Кирхгофа для магнитных цепей:

$$\sum w_n I_n = \sum R_{mn} \Phi_n.$$

К сожалению, использование для расчета полученных зависимостей наталкивается на существенные трудности. Выше отмечалось, что большинство магнитных цепей построено из ферромагнитных материалов. Зависимость между B и H для них определена кривой намагничивания.

Кривая первоначального намагничивания может быть записана:

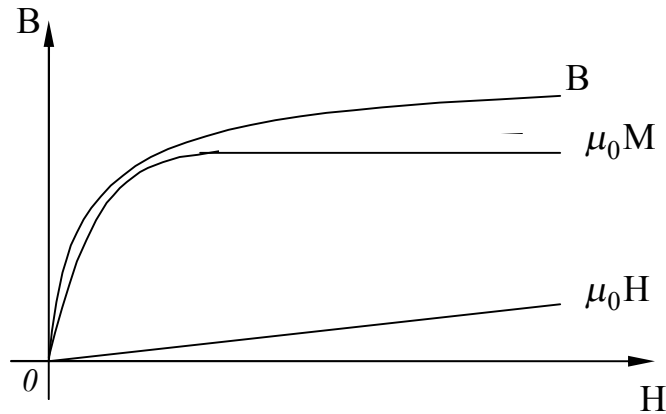
$$B = \mu_0 (M + H),$$

где M - намагниченность.

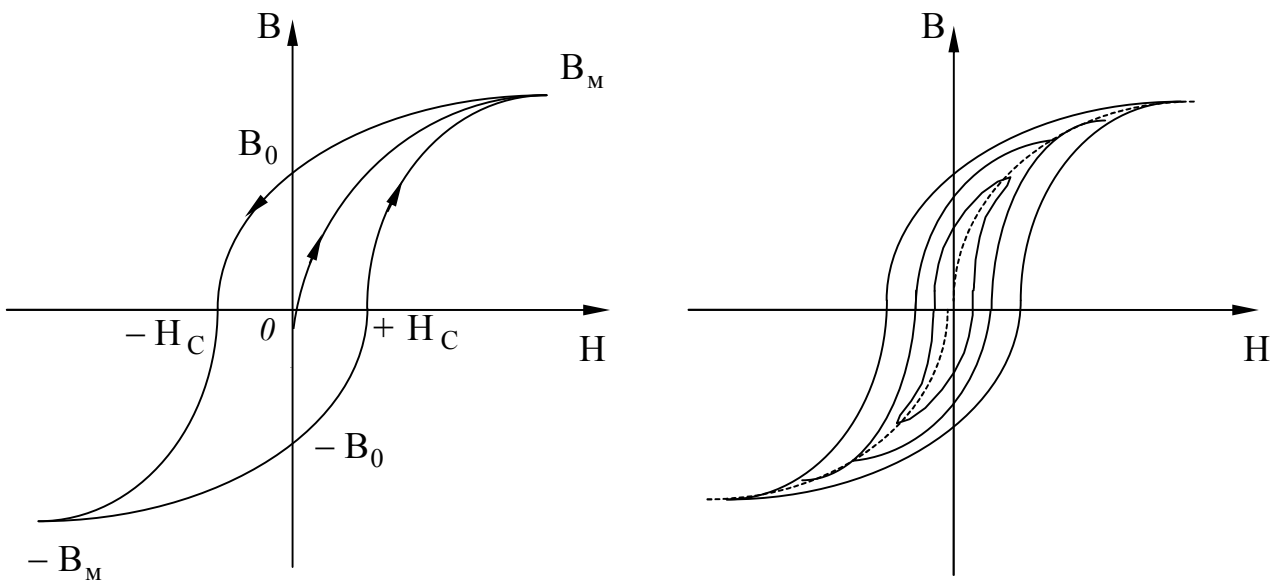
В таком случае магнитная проницаемость:

$$\mu_0 \mu = \frac{B}{H} = \frac{\mu_0(M + H)}{H} = \mu_0 \left(1 + \frac{M}{H}\right)$$

оказывается переменной величиной, так как намагниченность не может расти беспрестанно. Поэтому магнитное сопротивление R_m до окончания расчета является неопределенной величиной.



При расчетах следует также учесть, что все магнитные цепи работают в условиях перемагничивания (особенно на переменном токе). Поэтому необходимо учесть явление гистерезиса. Большинство магнитных цепей выполняется из магнитно-мягких материалов, для которых принято вести расчет по так называемой основной кривой намагничивания.



Это геометрическое место вершин вписанных друг в друга гистерезисных циклов, соответствующих различным значениям максимальной магнитной индукции.

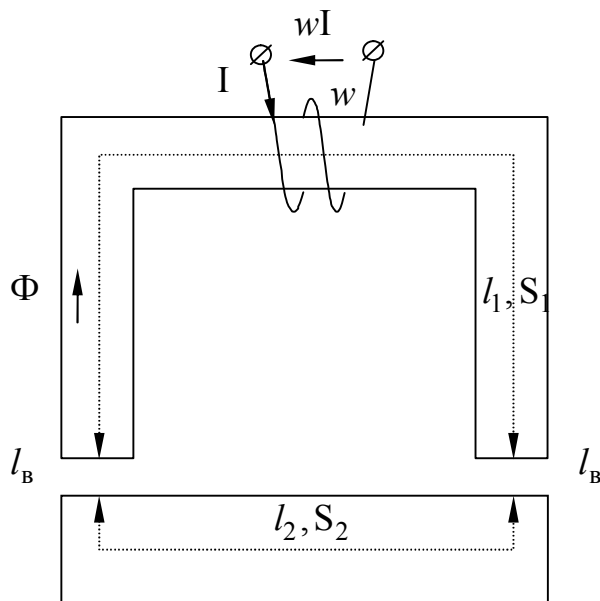
ЛЕКЦИЯ №40.

Расчет неразветвленных магнитных цепей.

При расчете неразветвленных магнитных цепей различают два вида задач.

Первый вид задач.

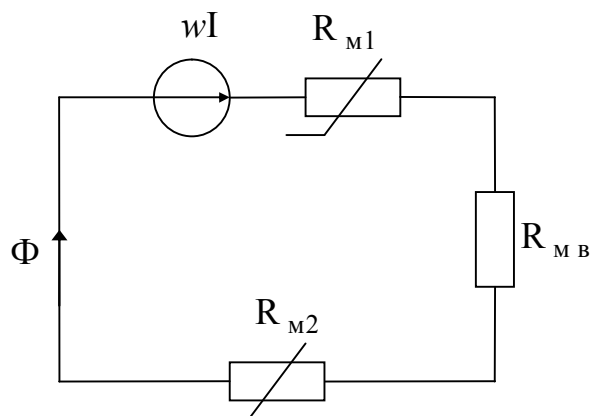
Заданы: геометрические размеры магнитной цепи,
магнитный поток,
число витков намагничивающей катушки,
материал участков,
кривые намагничивания участков магнитной цепи.
Определить: намагничивающий ток.



Порядок расчета.

Намечаем среднюю магнитную линию и определяем длины участков. Принимаем площадь поперечного сечения воздушного зазора S_g равной площади S_1 из-за малости зазора.

Составляем расчетную эквивалентную схему и записываем основные расчетные соотношения.



На основании закона полного тока (второго закона Кирхгофа)

$$wI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_6 l_6.$$

Кроме того

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}, \quad B_6 = \frac{\Phi}{S_6} \approx \frac{\Phi}{S_1}.$$

По кривым намагничивания находим по $B_1 \rightarrow H_1$, по $B_2 \rightarrow H_2$, а для воздушного зазора, являющегося линейным магнитным сопротивлением

$$H_6 = \frac{B_6}{\mu_0}.$$

Заметим, что при B_6 и μ_0

$$H_6 = 0.8 \cdot B \left[\text{А/см} \right].$$

Из уравнения закона полного тока определяем

$$I = \frac{\sum H l}{w}.$$

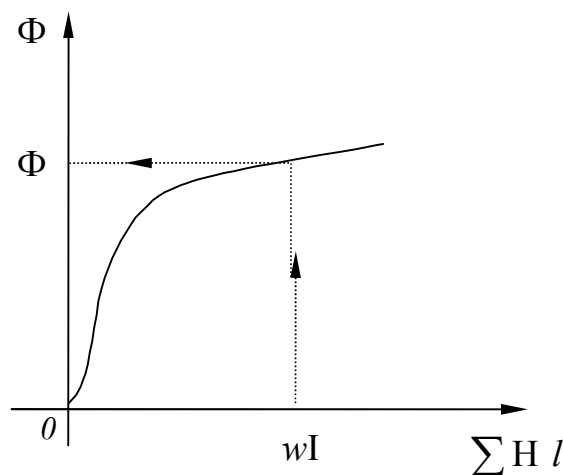
Второй вид задач.

Заданы: геометрические размеры,
число витков намагничивающей катушки,
намагничивающий ток,
материал сердечников,
кривые намагничивания.

Определить: магнитный поток.

Порядок расчета.

Задача не имеет прямого решения, так как для определения потока нужно знать и B , и H , которые связаны между собой нелинейной зависимостью. Обычно расчет ведется методом последовательных приближений.



Задаемся предполагаемым потоком Φ' и как в первом виде задач находим

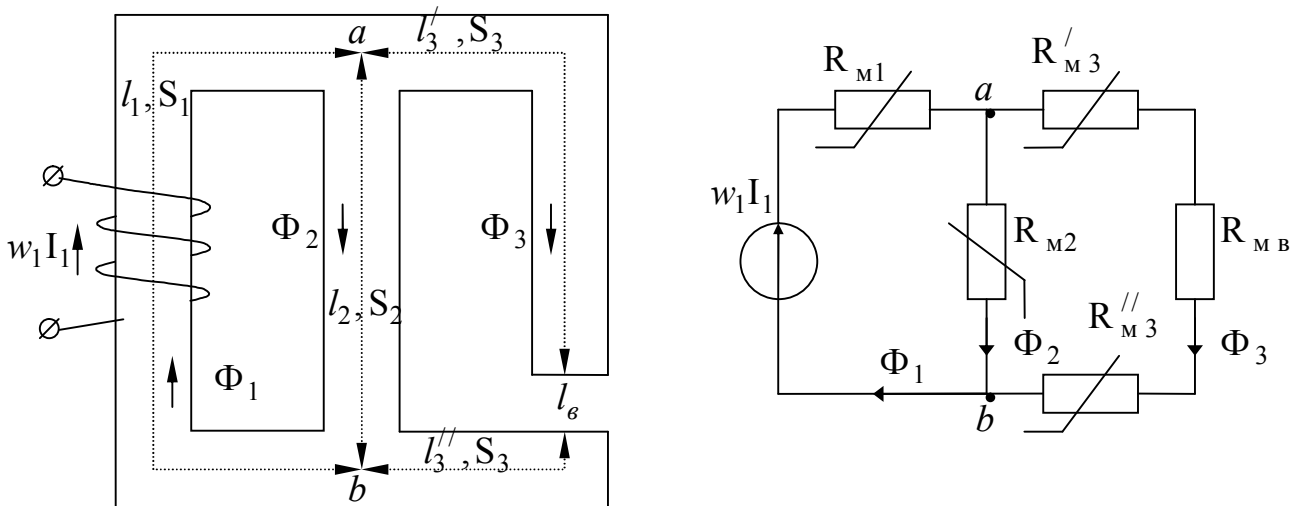
$$wI' = \sum (H l)'$$

При несовпадении wI и wI' производим такие же расчеты для Φ'' , Φ''' и т.д.

По расчетам строим зависимость $\Phi(\sum H l)$ и по ней для заданных wI находим графически Φ . Построения показаны на рисунке.

Расчет разветвленных магнитных цепей.

Расчет основан на графическом решении нелинейных уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Предварительно указываются (или принимаются) положительные направления намагничивающих сил, а также положительные направления магнитных потоков и составляется эквивалентная схема (показано на рисунках).



Первый вид задач.

Дано: геометрические размеры,
материал сердечников,
кривые намагничивания,
один из потоков, например Φ_3 .

Определить: остальные потоки и намагничивающую силу.

Порядок расчета.

1. Определяем

$$\frac{\Phi_3}{S_3} = B_3$$

и по кривой намагничивания находим H_3 , а затем магнитное напряжение

$$U_{mab} = H_3(l_3' + l_3'') + H_6 l_6,$$

где

$$H_6 = \frac{B_6}{\mu_0} \approx \frac{B_3}{\mu_0}.$$

2. Для ветви 2:

$$U_{mab} = H_2 l_2,$$

откуда

$$H_2 = \frac{U_{mab}}{l_2}.$$

По кривой намагничивания находим B_2 , а также

$$\Phi_2 = B_2 S_2.$$

3. По первому закону Кирхгофа:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3.$$

4. Искомая намагничивающая сила определится из уравнения

$$w_1 I_1 = H_1 l_1 + U_{mab},$$

где H_1 найдена по кривой намагничивания для $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$.

Второй вид задач.

Дано: геометрические размеры,
материал сердечников,
кривые намагничивания,
намагничивающая сила.

Определить: магнитные потоки.

Порядок расчета.

1. Определим магнитное напряжение между точками a и b по всем трем сердечникам:

$$U_{mab}^{(1)} = w_1 I_1 - H_1 l_1,$$

$$U_{mab}^{(2)} = H_2 l_2,$$

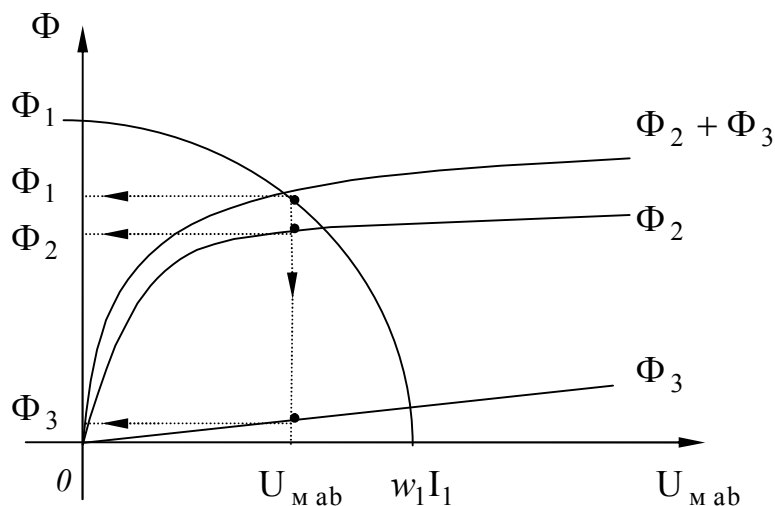
$$U_{mab}^{(3)} = H_3 (l_3' + l_3'') + H_6 l_6.$$

Знаки слагаемых определяются так же, как и при записи закона Ома для участка электрической цепи.

2. Построим графики зависимостей $\Phi(U_{mab})$ для всех трех сердечников. Расчет необходимых для построения величин удобно выполнить, сведя его в ниже следующую таблицу.

№	Φ	1-ый сердечник.				2-ой сердечник.			3-ий сердечник.			
		$B_1, H_1, H_1 l_1,$				$B_2, H_2,$			$B_3, H_3, H_3 l_3$			
		$U_{\text{маб}} = w_1 I_1 - H_1 l_1.$				$U_{\text{маб}} = H_2 l_2.$			$U_{\text{маб}} = H_3 l_3 + H_6 l_6.$			
	Вб	Т	А/м	А	А	Т	А/м	А	Т	А/м	А/м	А
1												
2												
3												
.												
.												

Рассчитанные графики построены на рисунке.



3. Строим вспомогательную зависимость $(\Phi_2 + \Phi_3)(U_{\text{маб}})$. На основании первого закона Кирхгофа

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

точка, определяющая магнитное напряжение $U_{\text{маб}}$ должна принадлежать как характеристике $(\Phi_2 + \Phi_3)(U_{\text{маб}})$, так и характеристике $\Phi_1(U_{\text{маб}})$, т.е. находиться на их пересечении. Таким образом определим $U_{\text{маб}}$. Для этого магнитного напряжения по $\Phi_1(U_{\text{маб}})$, $\Phi_2(U_{\text{маб}})$ и $\Phi_3(U_{\text{маб}})$ легко определяются все потоки.

В начале расчета возможно неправильное задание направлений потоков. В этом случае ответ должен быть отрицательным. Для его отыскания следует учесть, что каждая кривая может быть продолжена при отрицательных потоках в нижней полуплоскости. Например, если принять Φ_3 направленным вверх, уравнения принимают вид:

$$U_{\text{маб}}^{(1)} = w_1 I_1 - H_1 l_1,$$

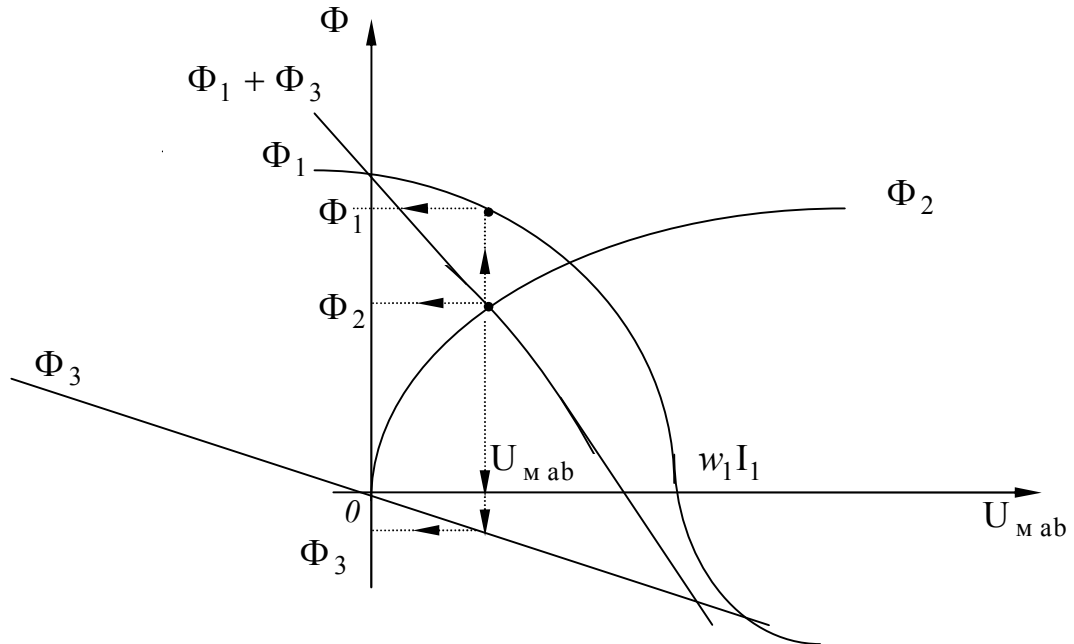
$$U_{\text{маб}}^{(2)} = H_2 l_2,$$

$$U_{\text{м ab}}^{(3)} = -H_3(l_3' + l_3'') - H_6 l_6.$$

Решение их на основе закона Кирхгофа

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$$

представлено на следующем рисунке.

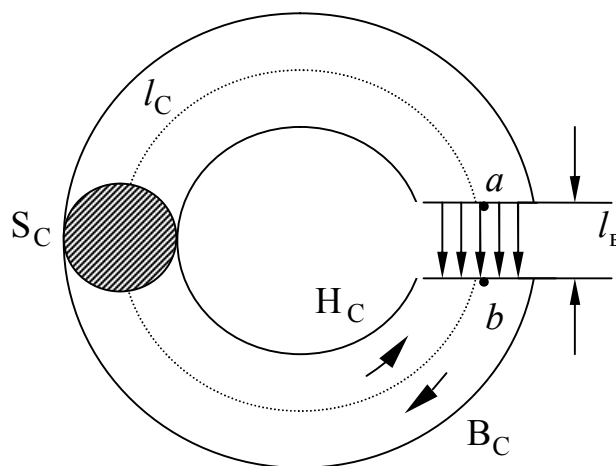


ЛЕКЦИЯ №41.

Понятие о расчете магнитных цепей с постоянными магнитами.

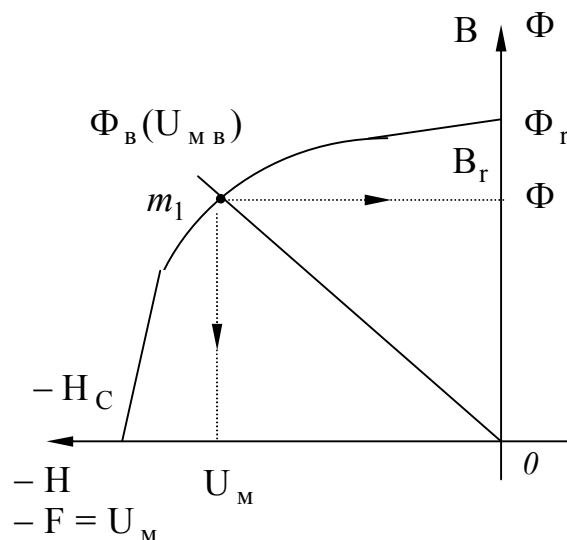
Постоянные магниты применяются в измерительных приборах, электрических машинах, поляризованных реле и других устройствах автоматики и телемеханики. Особенно широко они стали применяться в связи с успехами техники в изготовлении высококачественных магнитных материалов с большой коэрцитивной силой и остаточной индукцией (более 2 Тл.).

При изготовлении тороидального постоянного магнита после снятия намагничивающей обмотки в нем создается воздушный зазор l_g , что дает магнит длиной l_c и сечением S_c .



Основной характеристикой для расчета является часть петли гистерезиса, лежащая во втором квадранте - кривая размагничивания в координатах $B(H)$ или пропорциональных им величинах $\Phi(F)$, так как

$$\Phi = BS, \quad F = H l.$$



При отсутствии зазора в тороиде поток Φ_r , индукция B_r , а напряженность $H = 0$, так как по закону полного тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H l = wI = 0.$$

При наличии зазора

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = F_C + F_\epsilon = 0,$$

или

$$F_\epsilon = -F_C.$$

Предполагая поле однородным, имеем

$$F_C = H_C l_C,$$

а

$$F_\epsilon = H_\epsilon l_\epsilon.$$

Тогда

$$H_C l_C = -H_\epsilon l_\epsilon$$

и

$$H_C = -H_\epsilon \frac{l_\epsilon}{l_C} = -\frac{B_C}{\mu_0} \cdot \frac{l_\epsilon}{l_C} = -N_\epsilon \frac{B_C}{\mu_0},$$

где $N_\epsilon = \frac{l_\epsilon}{l_C}$ - так называемый размагничивающий коэффициент по индукции.

Здесь при незначительной длине воздушного зазора S_ϵ принято равным S_C .

Отрицательное значение напряженности магнитного поля внутри сердечника при наличии зазора означает, что $B_C = B_\epsilon$ меньше остаточной индукции $B_r = \mu_0 M$, так как

$$B_C = \mu_0 M + \mu_0 H_C.$$

Поэтому рабочая точка должна опуститься по кривой размагничивания.

Для расчета построим дополнительно к кривой размагничивания, определяющей зависимость $\Phi_C(U_{\text{маб}})$, зависимость $\Phi_\epsilon(U_{\text{маб}})$ по воздушному зазору, определяемую уравнением

$$U_{\text{маб}} = R_{\text{м}\epsilon} \Phi_\epsilon = H_\epsilon l_\epsilon = \frac{B_\epsilon}{\mu_0} l_\epsilon = \Phi_\epsilon \frac{l_\epsilon}{\mu_0 S_C},$$

т.е.

$$\Phi_\epsilon = \frac{U_{\text{маб}}}{R_{\text{м}\epsilon}} = \frac{U_{\text{маб}}}{l_\epsilon} \mu_0 S_C.$$

Очевидно, это будет прямая, проходящая через начало координат. Так как потоки $\Phi_C = \Phi_\epsilon$, то магнитный поток определится точкой их пересечения. Из построения следует, что чем больше зазор, тем меньше будет поток.

Энергия магнитного поля в зазоре

$$W_\epsilon = \frac{B_\epsilon H_\epsilon}{2} S_\epsilon l_\epsilon,$$

в сердечнике

$$W_C = \frac{B_C H_C}{2} S_C l_C.$$

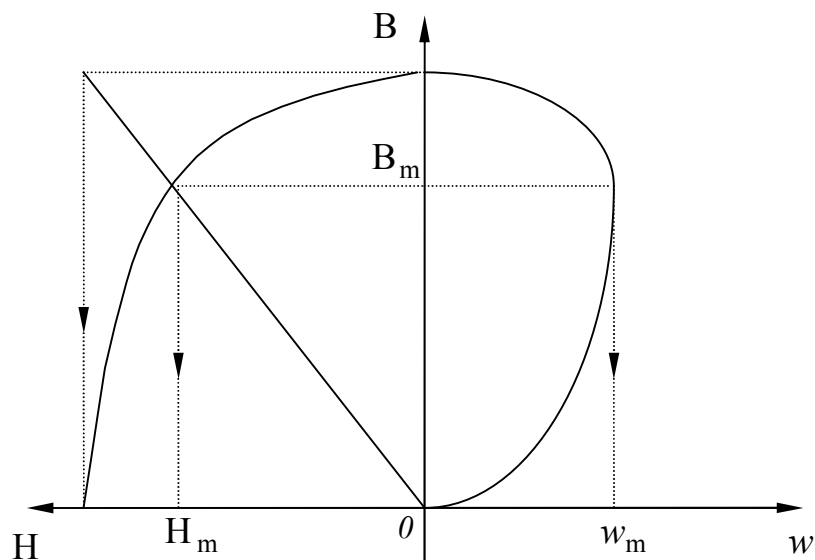
Так как

$$|H_C l_C| = |H_\delta l_\delta|,$$

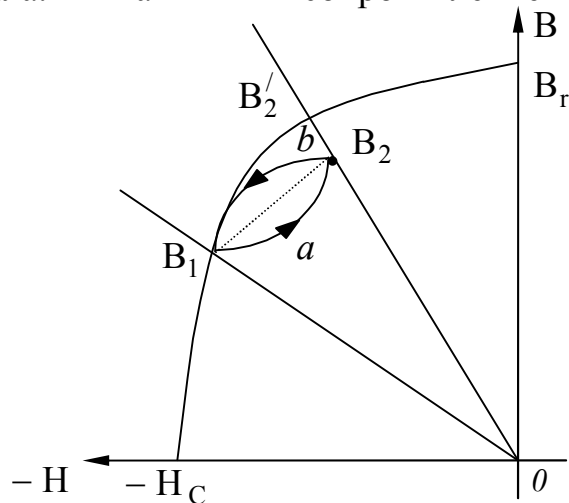
то

$$W_\delta = W_C.$$

Наивыгоднейшее положение рабочей точки можно определить исходя из энергетических соображений: энергия магнитного поля в зазоре должна быть максимальной. Эта энергия в каждой точке пропорциональна произведению ординаты на абсциссу. На рисунке она представлена в зависимости от магнитной индукции. Для всех магнитно-твердых материалов по данным опыта с достаточной точностью можно принять, что рабочая точка, соответствующая максимуму энергии, лежит на пересечении кривой размагничивания с диагональю прямоугольника, построенного на B_r и H_C .

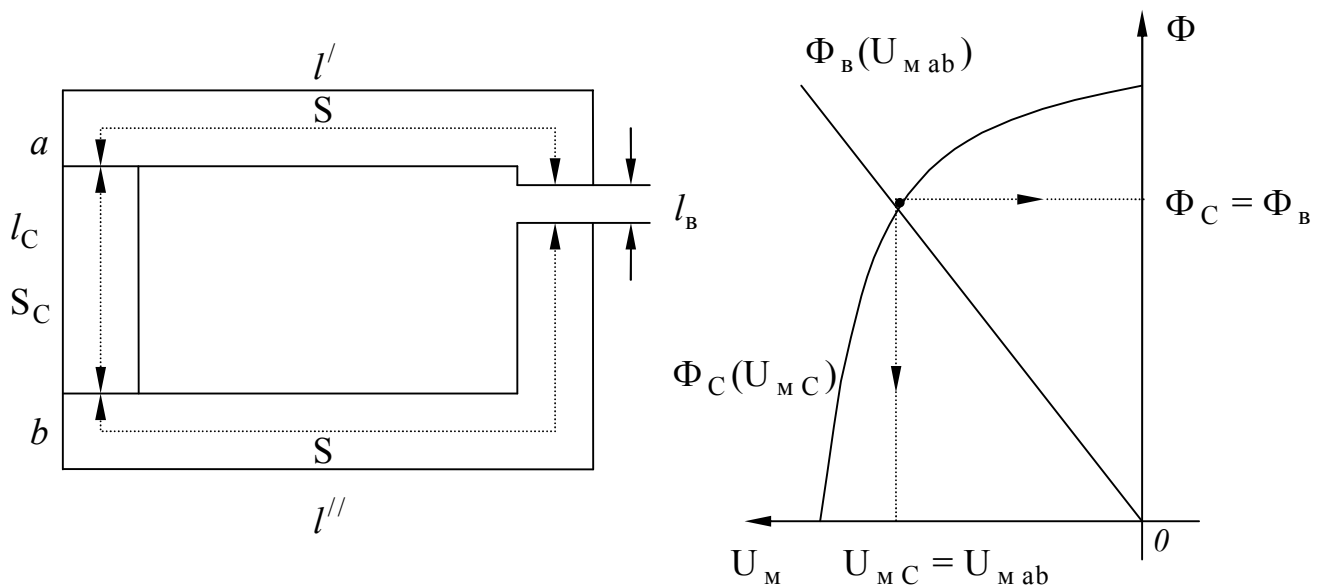


В реальных условиях в зазор вводятся дополнительные детали из магнитно-мягкого материала. Их магнитным сопротивлением можно пренебречь.



При этом из-за гистерезиса индукция увеличится до B_2 по некоторой кривой $B_1 a B_2$. Если затем удалить эту деталь, то возврат осуществится по $B_2 b B_1$. Полученная кривая называется частной петлей гистерезиса. Она ввиду узости может быть заменена прямой возврата. Практически прямая возврата соединяет прямые OB_1 и OB_2' несколько ниже точек B_1 и B_2 .

В заключении рассмотрим расчет простой цепи с постоянным магнитом. Определим магнитный поток в воздушном зазоре после намагничивания всей цепи до насыщения. Для цепи, изображенной на рисунке: l_C и S_C - длина и сечение постоянного магнита, l', l'' и S - длина и сечение участка из магнитного мягкого материала.



С помощью кривой размагничивания строим $\Phi_C = B_C S_C = \Phi_C(U_{Mc})$, где $U_{Mc} = H_C l_C$. Задаваясь рядом значений потока Φ_B , построим кривую $\Phi_B(U_{Mab})$ для остальной части магнитной цепи. Во всех участках цепи поток имеет одно и то же значение. Поэтому искомое значение магнитного потока определится ординатой этой точки пересечения кривых $\Phi_B(U_{Mab})$ $\Phi_C(U_{Mc})$.

ЛЕКЦИЯ №42.

Основы теории нелинейных цепей переменного тока.

Основные понятия и определения.

Ранее установлено, что нелинейными называют электрические цепи, параметры которых зависят от величины тока или напряжения. Строго линейных цепей не существует. При достижении токами и напряжениями достаточно больших значений начинают проявляться в заметной степени нелинейные эффекты: ферромагнитные сердечники индуктивных катушек насыщаются, нарушается пропорциональность между поляризацией и приложенным полем в диэлектрике конденсаторов, изменяется температура, а, следовательно, и сопротивление проводников и т.д.

Для простейшей цепи нелинейных R , L , C :

$$u = R(i) i + \frac{d\Psi}{dt} + u_C,$$

или

$$u = R(i) i + \frac{d[iL(i)]}{dt} + \frac{1}{C(u_C)} \int i dt.$$

Уравнение нелинейно и не имеет общих методов решения. К таким уравнениям не применяется принцип наложения. Поэтому расчет нелинейных цепей всегда является приближенным.

При расчете установившихся режимов таких цепей необходимо помнить о динамических свойствах нелинейных элементов и в каждом случае решать, следует ли считаться с инерционностью нелинейных элементов. Цепи разделяют на три группы:

- а) цепи с существенно инерционными нелинейными элементами,
- б) цепи с активными сопротивлениями, имеющими несимметричные характеристики,
- в) цепи с реактивными нелинейными элементами.

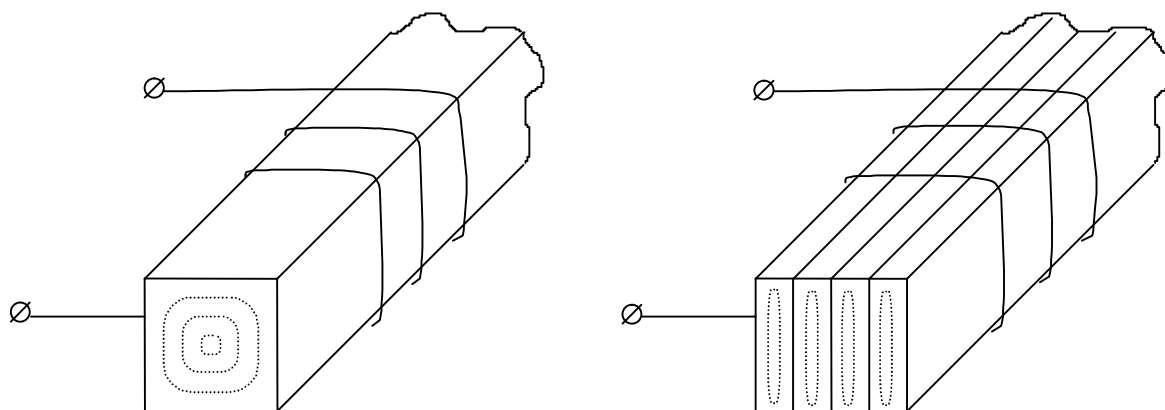
К первой группе относят такие нелинейные элементы, параметры которых за полупериод изменяются столь незначительно, что их можно считать постоянными. Так величина сопротивления лампы накаливания при частоте тока 50 Гц определяется действующим значением тока. Очевидно, что в установившемся режиме подобные нелинейные элементы ведут себя как линейные. Иными словами говоря, у них зависимость между действующими значениями нелинейная, а между мгновенными - линейная. При этом если ток синусоидален, то синусоидально и напряжение. Их расчет не отличается от расчета нелинейных цепей постоянного тока.

Типичными представителями второй группы являются полупроводниковые диоды, вакуумные диоды, газотроны и т.п. Эти элементы практически безынерционны. В этом случае характеристики их, снятые на постоянном токе,

совпадают с характеристиками для мгновенных значений переменного тока. Расчет удобнее выполнять по мгновенным значениям графоаналитическими методами, которые рассматриваются подробно в специальных курсах.

Из третьей группы наибольший интерес представляют нелинейные индуктивности, которым в дальнейшем уделено главное внимание.

Катушка с ферромагнитным сердечником.



При переменном токе в катушке по сердечнику проходит переменный магнитный поток. Он наводит в нем вихревые токи. Их протекание вызывает потери энергии и по закону Ленца сопровождается размагничивающим действием. Последние сильнее в центре, охваченном наибольшим числом контуров токов. Поэтому наблюдается вытеснение магнитного потока к поверхности - магнитный поверхностный эффект.

Для уменьшения этих явлений сердечник собирают из отдельных электрически изолированных друг от друга листов, что увеличивает сопротивление на пути токов. В сталь добавляют присадки, снижающие проводимость (например, кремний). Для частоты 50 Гц применяют листы специальной электротехнической стали толщиной $0.35 \div 0.5$ мм. В дальнейшем такую катушку будем кратко называть катушкой со сталью или дросселем со сталью.

В первом приближении считаем, что нелинейность катушки не связана с инерционными процессами. При рассмотрении этого нелинейного элемента под индукцией и напряженностью будем понимать их средние по сечению сердечника значения, а расчет будем вести по средней длине сердечника, междувитковую емкость не учитываем.

Напряжение на зажимах катушки:

$$u = Ri + \frac{d\Psi'}{dt},$$

где R - активное сопротивление обмотки,

Ψ' - общее потокосцепление, состоящее из Ψ - основного и Ψ_s - потокосцепления рассеяния.

Поток рассеяния, частично проходящий по воздуху, может быть принят пропорциональным току:

$$\Psi_S = L_S i .$$

Тогда

$$u = Ri + L_S \frac{di}{dt} + w \frac{d\Phi}{dt} = Ri + (L_S + w \frac{d\Phi}{dt}) \cdot \frac{di}{dt} .$$

Однако, $\Phi(i)$ - сложная нелинейная зависимость. Поэтому вначале принимаем, что падением напряжения на сопротивлении обмотки и индуктивностью рассеяния можно пренебречь.

В этом случае:

$$u = w \frac{d\Phi}{dt} .$$

Если

$$u = U_m \sin \omega t ,$$

то

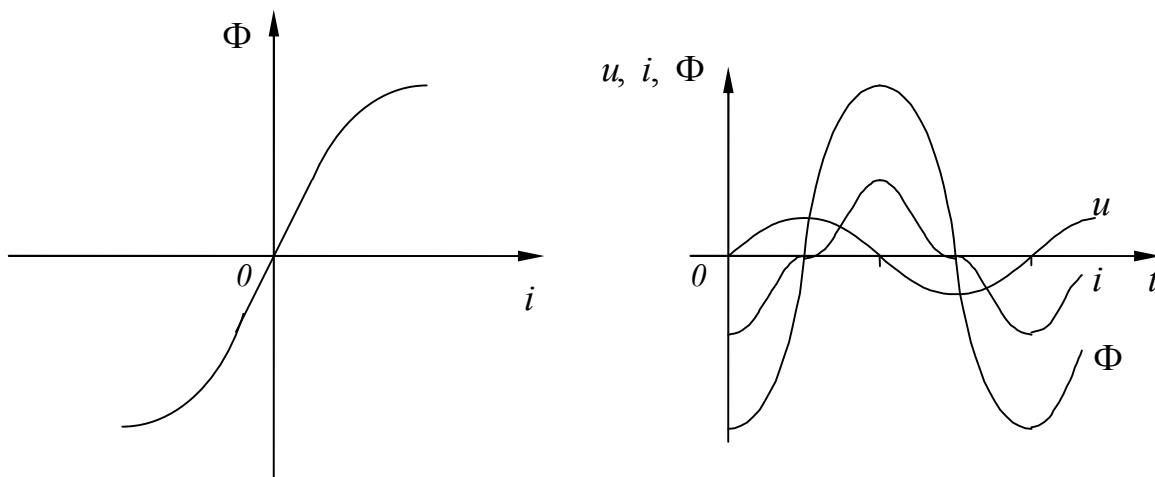
$$\Phi = \Phi_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_m}{w\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

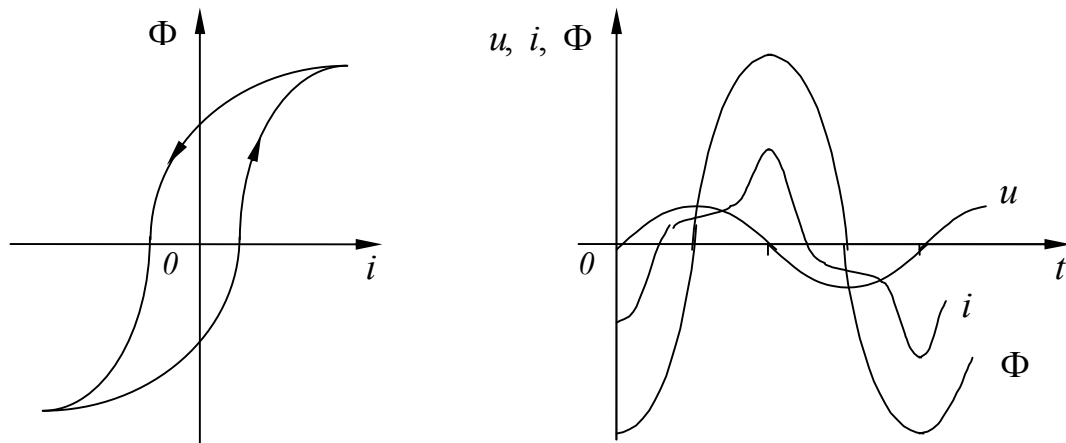
при отсутствии в потоке постоянной составляющей.

При этом

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f w \Phi_m}{\sqrt{2}} \approx 4.44 f w \Phi_m .$$

Кривую тока легко построить графическим методом. Она симметрична относительно оси абсцисс т.е. содержит только нечетные гармоники. Хорошо заметна третья гармоника, слабее выражены пятая и более высокие гармоники.





Явление гистерезиса нарушает симметрию относительно начала координат, но симметрия относительно оси абсцисс сохраняется. При этом средняя за период (активная) мощность не будет равна нулю. Таким образом, в катушках со сталью кроме потерь энергии на вихревые токи имеют место потери энергии на гистерезис.

Рассмотренный выше графический метод анализа, к сожалению, не дает общих закономерностей. Поэтому при расчетах применяют и другие методы расчета. Выполним расчет методом математической аппроксимации.

Пренебрегая гистерезисом и вихревыми токами, можно приближенно выразить ток через потокосцепление

$$i = a\Psi + b\Psi^3.$$

Тогда, если

$$u = U_m \cos \omega t$$

и, соответственно

$$\Psi = \Psi_m \sin \omega t,$$

ток выразится как

$$i = a\Psi_m \sin \omega t + b\Psi_m^3 \sin^3 \omega t.$$

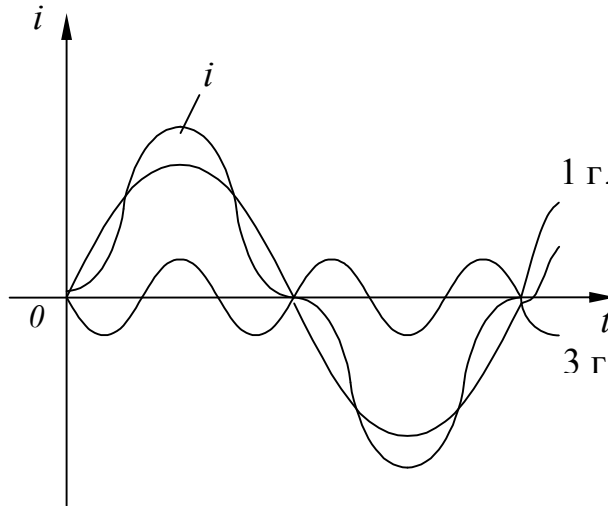
Так как

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4}(3\sin \omega t - \sin 3\omega t),$$

то

$$i = (a\Psi_m + \frac{3}{4}b\Psi_m^3) \sin \omega t - \frac{1}{4}b\Psi_m^3 \sin 3\omega t = I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t.$$

Результаты расчета представлены на графике.



Максимальное значение тока

$$I_{\text{макс}} = I_{1m} + I_{3m}.$$

Более точная аппроксимация

$$i = a\Psi + b\Psi^3 + c\Psi^5 + d\Psi^7 + \dots$$

привела бы к появлению дополнительно 5, 7 и т.д. гармоник, что соответствует экспериментальным данным.

По формулам для действующих значений синусоидальных U и I может быть определена эквивалентная индуктивность. Пренебрегая активным сопротивлением, имеем

$$L_{\text{э}} = \frac{U}{\omega I}.$$

При синусоидальном напряжении

$$u = U_m \cos \omega t$$

и токе

$$i = a\Psi + b\Psi^3$$

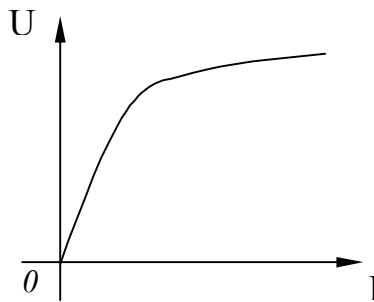
эквивалентная индуктивность

$$L_{\text{э}} = \frac{U}{\omega I} = \frac{\frac{I}{\sqrt{2}} \omega \Psi_m}{\frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{(a\Psi_m + \frac{3}{4}b\Psi_m^3)^2 + (\frac{1}{4}b\Psi_m^3)^2}} = \frac{I}{\sqrt{a^2 + \frac{3}{2}ab\Psi_m^2 + \frac{10}{16}b^2\Psi_m^4}}.$$

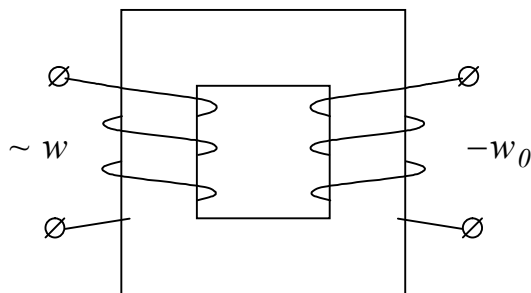
Отсюда следует, что с ростом U , а, следовательно и Ψ_m индуктивность $L_{\text{э}}$ уменьшается, ток

$$I = \frac{U}{\omega L_{\text{э}}}$$

растет быстрее, а вольтамперная характеристика $U(I)$ вначале почти прямолинейна, а затем угол, образуемый ею с осью токов, уменьшается.



В электротехнических устройствах иногда кроме обмотки переменного тока на сердечнике размещается обмотка постоянного тока, с целью подмагничивания сердечника постоянным магнитным потоком.



При синусоидальном напряжении

$$u = w \frac{d\Phi}{dt}$$

магнитный поток

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_m \sin \omega t.$$

Если мысленно заменить обмотку w_0 постоянного тока эквивалентной с числом витков w , приняв постоянный ток

$$I'_0 = \frac{w_0}{w} I_0,$$

то

$$\Psi = w\Phi = w\Phi_0 + w\Phi_m \sin \omega t = \Psi_0 + \Psi_m \sin \omega t$$

для любой обмотки.

Приняв ту же зависимость $i(\Psi)$ для токов, получим (сумма токов обеих обмоток):

$$i = a\Psi + b\Psi^3 = a(\Psi_0 + \Psi_m \sin \omega t) + b(\Psi_0 + \Psi_m \sin \omega t)^3 = (a\Psi_0 + b\Psi_0^3 + \frac{3}{2}b\Psi_0\Psi_m^2) + \\ + (a\Psi_m + 3b\Psi_0^2\Psi_m + \frac{3}{4}b\Psi_m^3) \sin \omega t - \frac{3}{2}b\Psi_0\Psi_m^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{4}b\Psi_m^3 \sin 3\omega t =$$

$$= I_0' + I_{1m} \sin \omega t + I_{2m} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2}) + I_{3m} \sin(3\omega t - \pi).$$

Так как ток катушки w не может иметь постоянной составляющей ($u = Ri + w \frac{d\Phi}{dt}$) то I_0' и есть ток в катушке w постоянного тока (или для $w_0 \rightarrow I_0$).

Три остальных члена определяют первую, вторую и третью гармоники тока обмотки w переменного тока. Более точная аппроксимация дала бы гармоники более высокого порядка.

Отсюда следует:

- 1) в цепи переменного тока помимо нечетных появились четные гармоники,
- 2) так как ток

$$I_0' = a\Psi_0 + b\Psi_0^3 + \frac{3}{2}b\Psi_0\Psi_m^2 = const,$$

постоянная составляющая Ψ_0 потокосцепления уменьшается с ростом переменной составляющей Ψ_m , что объясняется насыщением сердечника намагничивающей силой обмотки w переменного тока.

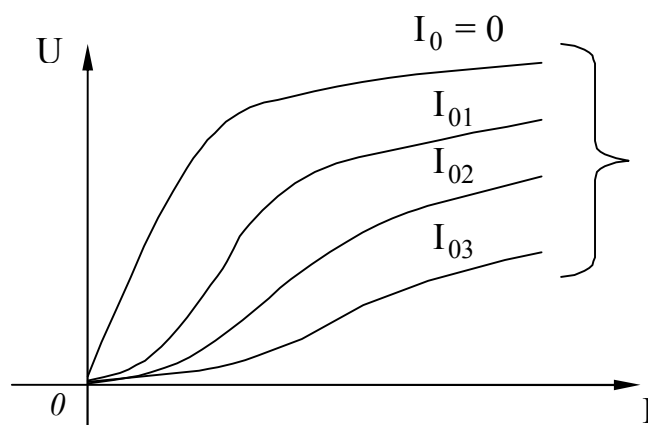
Эквивалентная индуктивность обмотки переменного тока

$$L_{\Sigma} = \frac{U}{\omega I} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Psi_m}{\frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{(a\Psi_m + 3b\Psi_0^2\Psi_m + \frac{3}{4}b\Psi_m^3)^2 + (\frac{3}{2}b\Psi_0\Psi_m^2)^2 + (\frac{1}{4}b\Psi_m^2)^2}} =$$

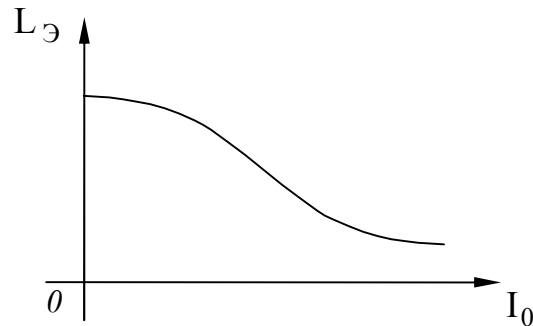
$$= \frac{I}{\sqrt{a^2 + 9b^2\Psi_0^4 + 6ab\Psi_0^2 + \frac{27}{4}b^2\Psi_0^2\Psi_m^2 + \frac{10}{16}b^2\Psi_m^4 + \frac{3}{2}ab\Psi_m^2}}.$$

Отсюда следует:

1. характеристики $L_{\Sigma}(\Psi_m)$, а следовательно и вольтамперные характеристики $U(I)$ имеют тот же вид, что и без подмагничивания, но чем больше Ψ_0 т.е. I_0 , тем ниже лежит вольтамперная характеристика;



2. величиной индуктивности L_{Σ} цепи переменного тока можно управлять, изменяя Ψ_0 , т.е. величину постоянного тока.



Для решения более сложной задачи - анализа цепи с учетом активного сопротивления - применим метод гармонического баланса.

Пусть

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{dt},$$

а приложенное напряжение

$$u = U_m \cos \omega t.$$

Применим метод в сочетании с аналитической аппроксимацией.

Так как $\Psi(i)$ симметрична относительно осей координат и $R = \text{const}$, кривая $i(t)$ будет симметрична относительно оси абсцисс, т.е. она может содержать только нечетные гармоники, а ряд Фурье в общем случае бесконечен.

Приближенно

$$i(t) \approx I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \Psi_3),$$

где неизвестны I_{1m} , I_{3m} , Ψ_1 , Ψ_3 .

Представим потокосцепление в виде

$$\Psi(i) = m i - n i^3.$$

Подстановка в исходное уравнение и преобразование дает

$$U_m \cos \omega t = \sum B_{km} \sin k \omega t + \sum C_{km} \cos k \omega t,$$

где k - номер гармоники,

B_{km} и C_{km} - алгебраические суммы коэффициентов, соответственно, при всех $\sin k \omega t$ и $\cos k \omega t$, являющиеся функциями всех четырех неизвестных.

На основе гармонического баланса.

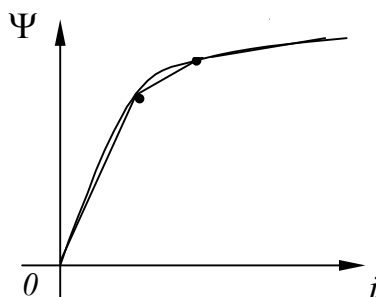
$$\begin{cases} 0 = B_{1m}, \\ U_m = C_{1m}, \\ 0 = B_{3m}, \\ 0 = C_{3m}. \end{cases}$$

Из этих уравнений определяются I_{1m} , I_{3m} , Ψ_1 , Ψ_3 , входящие в выражения коэффициентов.

Та же задача может быть решена методом кусочно-линейной аппроксимации. Для этого $\Psi(i)$ заменяется ломаной линией. Подстановка линейных уравнений для прямых участков в исходное

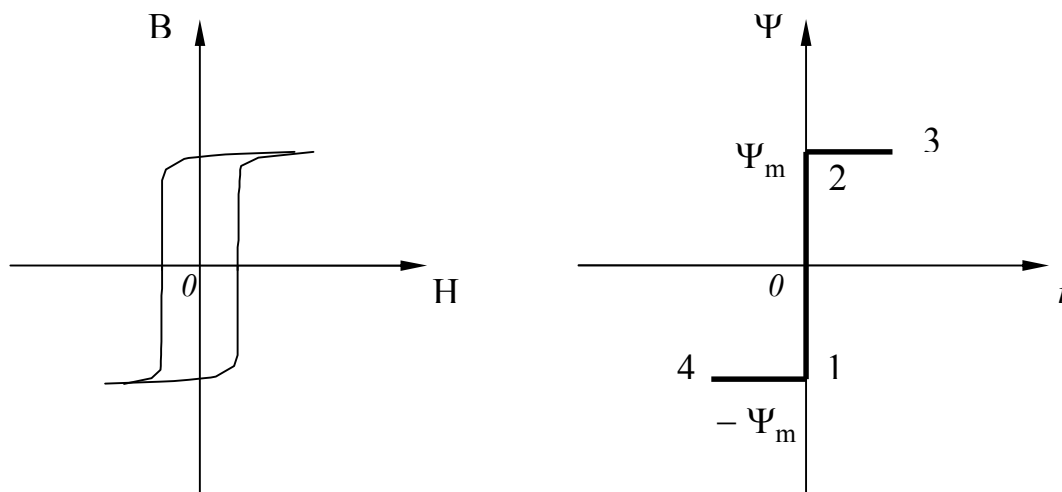
$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri = U_m \sin \omega t$$

приводит к замене этого нелинейного уравнения системой линейных, число которых равно числу прямых участков. Затем их общие решения припасовываются: величина потокосцепления для конца предыдущего участка приравнивается потокосцеплению для начала последующего, откуда определяются постоянные интегрирования.



Наиболее просто решается задача, если участки совпадают с осями координат.

Для тороидальной катушки с сердечником из ферромагнитного материала с почти прямоугольной петлей гистерезиса можно при магнитно-мягком материале осуществить простую аппроксимацию, показанную на рисунке.



Пусть задано

$$u = U_m \sin \omega t$$

и при $t = 0 \quad \Psi(0) = -\Psi_m$.

За время t_1 его роста на участке 1 – 2 до $+\Psi_m$ ток $i = 0$.

При этом уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_m \sin \omega t$$

имеет решение

$$\Psi = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + A.$$

Для определения постоянной имеем при $t = 0$:

$$\Psi(0) = -\Psi_m = -\frac{U_m}{\omega} + A,$$

т.е.

$$A = \frac{U_m}{\omega} - \Psi_m.$$

Тогда

$$\Psi = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + \frac{U_m}{\omega} - \Psi_m.$$

Продолжительность t_1 нарастания потокосцепления от $-\Psi_m$ до $+\Psi_m$ определим из зависимости

$$\Psi(t_1) = \Psi_m = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t_1 + \frac{U_m}{\omega} - \Psi_m,$$

т.е.

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos\left(1 - \frac{2\omega\Psi_m}{U_m}\right).$$

Позже t_1 до конца полупериода на участке 2 – 3

$$\Psi = \Psi_m = \text{const}$$

и уравнение принимает вид

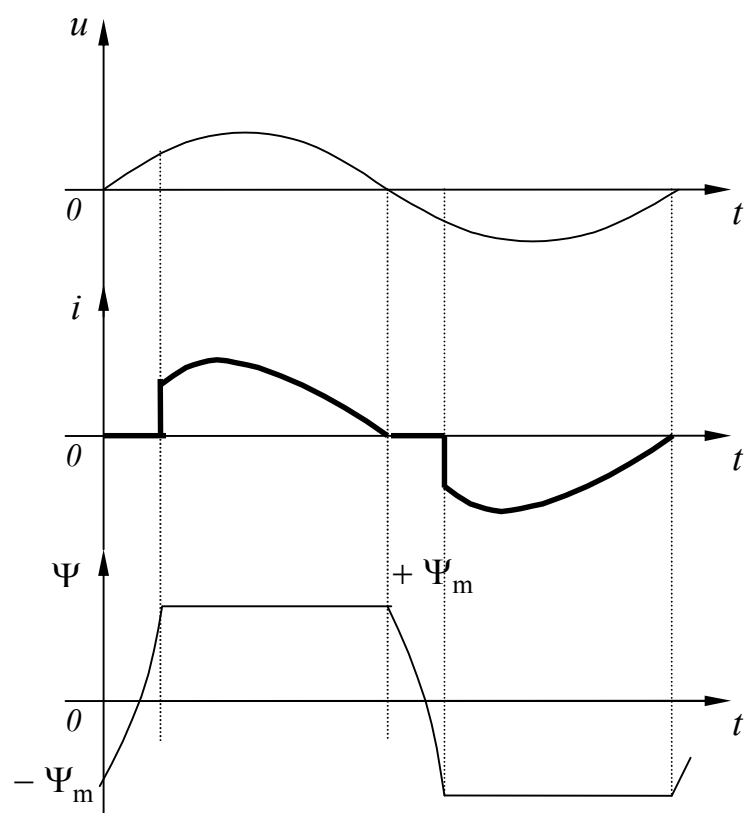
$$Ri = U_m \sin \omega t.$$

Его решение

$$i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t.$$

Графики изменения напряжения, тока и потокосцепления во времени показаны на рисунках. Из-за прямоугольности аппроксимации получен скачок тока. В действительности наблюдается весьма быстрое, но плавное изменение тока.

Во втором полупериоде процесс повторяется с изменением знака.



ЛЕКЦИЯ №43.

Векторная диаграмма для катушки с ферромагнитным сердечником.

Выше установлено, что при наличии ферромагнитного сердечника имеют место потери энергии на вихревые токи и гистерезис. Полные потери в стали определяются по мощности

$$P_{cm} = P_{\epsilon} + P_r + P_{don},$$

где P_{don} - дополнительные потери, связанные главным образом с так называемой магнитной вязкостью, их обычно не учитывают отдельно.

Раздельно в некоторых случаях определяют потери на вихревые токи и гистерезис по уравнениям:

$$P_{\epsilon} = \sigma_{\epsilon} f^2 B_m^2 G, \quad P_r = \sigma_r f B_m^n G,$$
$$n = 1.6 \text{ от } 0.1 \text{ до } 1 \text{ Тл,}$$
$$n = 2 \text{ от } 1 \text{ до } 1.6 \text{ Тл.}$$

Заметим, что потери на гистерезис за один цикл перемагничивания, отнесенные к единице объема, пропорциональны площади гистерезисной петли:

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T w \frac{d\Phi}{dt} i dt = f \int_0^T w S \frac{dB}{dt} \cdot \frac{Hl}{w} dt = f S l \oint H dB = f V \oint H dB.$$

Практически определяют как правило суммарные потери в стали. По ГОСТу для одного килограмма стали :

$$P = P_0 B_m^n \left(\frac{f}{50} \right)^{1.3},$$

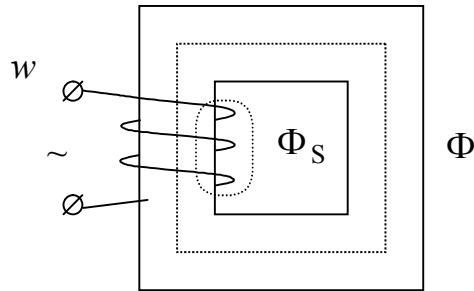
где P_0 - потери в стали в Вт/кг, определяемые по справочнику для $B_m = 1$ Тл и $f = 50$ Гц, $n = 2.22 \div 1.91$.

При частоте 50 Гц приближенно

$$P = P_0 B_m^2.$$

Если несинусоидальную кривую тока заменить эквивалентной синусоидой, то она должна быть сдвинута по фазе относительно напряжения (при $R = 0$) на угол, косинус которого равен коэффициенту мощности при данных потерях в стали.

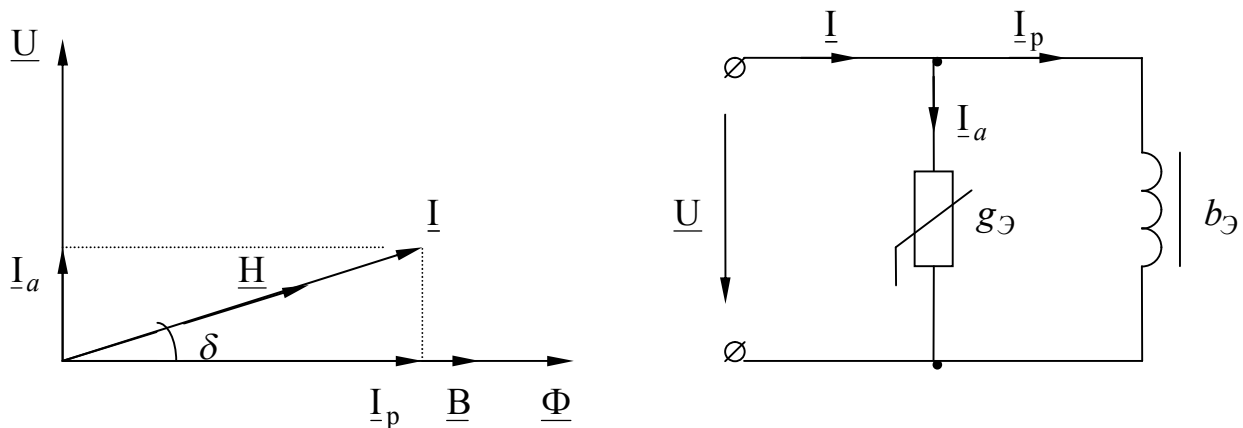
При построении векторной диаграммы будем считать, что все несинусоидальные кривые заменены эквивалентными синусоидами. Это позволяет применить комплексный метод, строить векторные диаграммы, определить эквивалентные R_{Σ} и L_{Σ} . Однако, их значения заранее неизвестны. Поэтому расчет является приближенным.



Вначале не учитываем поток рассеяния и активное сопротивление обмотки. Потери в стали приводят к тому, угол сдвига фаз между напряжением и током отличается от 90° на угол потерь в стали. При этом напряжение

$$U = 4.44fwSB_m.$$

Ток можно разложить на активную и реактивную составляющие. Такой диаграмме соответствует изображенная на рисунке схема. Ее параметры зависят не только от обмоточных данных катушки и характеристик сердечника, но и от величины и частоты приложенного напряжения, т.е. от режима работы.



Потери в стали

$$P_C = PG = UI_a = U^2 g_\Delta = (4.44fwSB_m)^2 g_\Delta$$

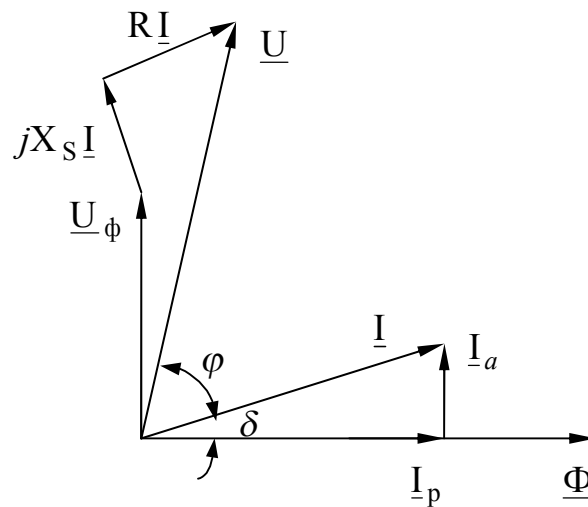
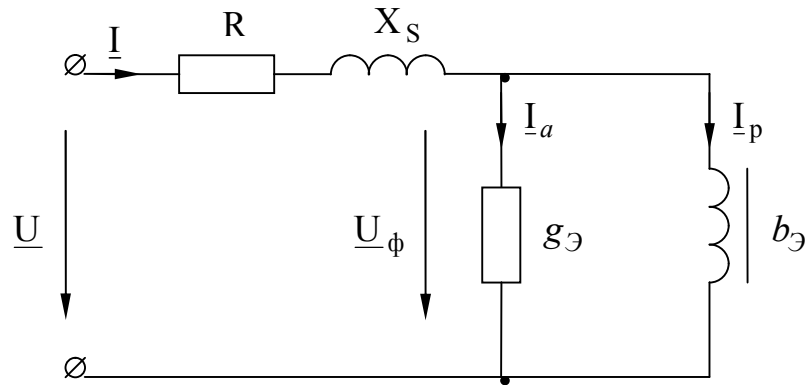
делают возможным определение активной составляющей тока, а также g_Δ .

По намагничивающей реактивной мощности

$$Q_C = QG = UI_p = U^2 b_\Delta = (4.44fwSB_m)^2 b_\Delta$$

можно определить реактивную составляющую тока и b_Δ . P_0 и Q_0 снимаются экспериментально для различных марок электротехнических сталей и приводятся в справочных таблицах. С увеличением напряжения или тока g_Δ практически не меняется, а L_Δ уменьшается.

Если учесть сопротивление обмотки и поток рассеяния, то эквивалентная схема и векторная диаграмма изменяются.



При определении эквивалентных параметров, однако, для упрощения часто пренебрегают R и X_s и полагают

$$U \approx U_\phi.$$

Однако, в дальнейшем целесообразно провести уточнение, так как при таком допущении суммарное напряжение

$$\underline{U} = (R + jX_s)\underline{I} + \underline{U}_\phi$$

превышает заданное значение. Уточнение производится итерационным методом.

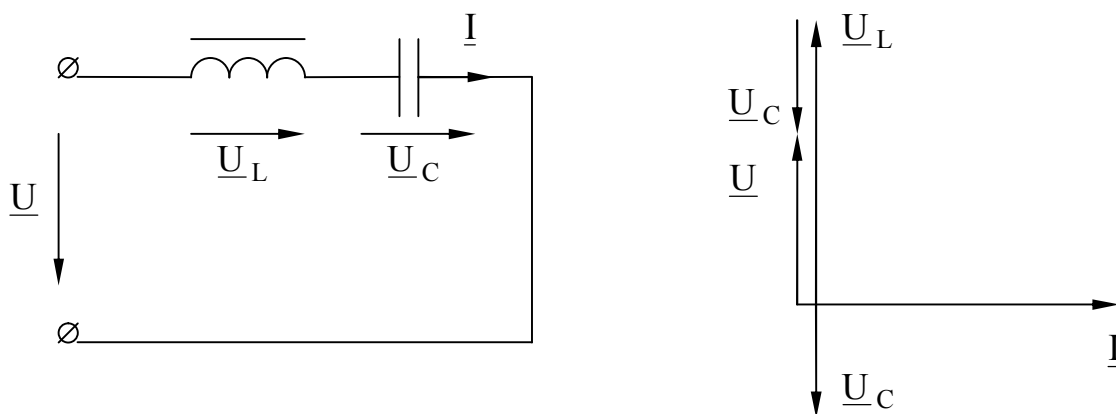
ЛЕКЦИЯ №44.

Явление феррорезонанса.

В цепях с нелинейными индуктивностями, содержащими емкость, плавное изменение напряжения может вызвать скачки фазы и амплитуды тока и, наоборот, плавное изменение тока может вызвать скачки напряжения. Подобные явления называют феррорезонансными. Они невозможны в линейных цепях.

В дальнейшем считаем, что кривые u , i , Φ заменены эквивалентными синусоидами, потерь в стали и обмотке нет, а зависимость $U(I)$ задана графически.

а) Феррорезонанс напряжений.



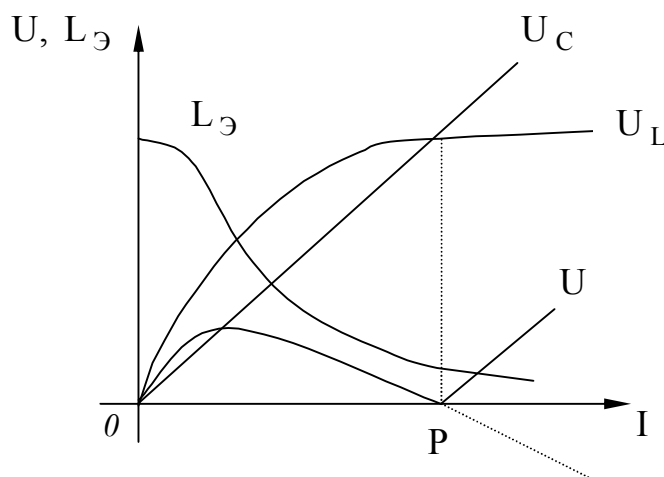
При последовательном соединении

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C,$$

или

$$U = |U_L| - |U_C|.$$

По заданным характеристикам элементов и равенствам построен график $U(I)$.

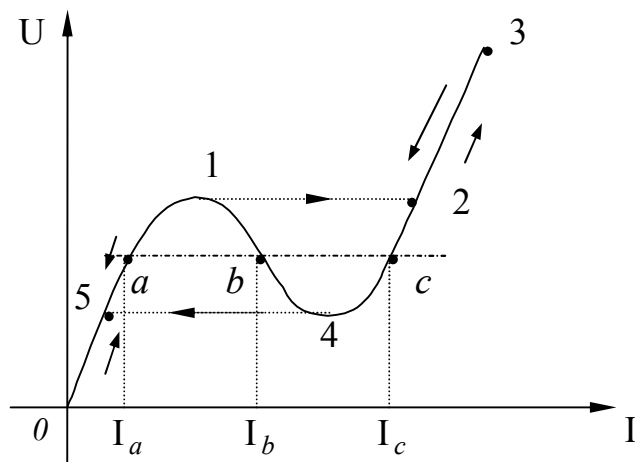


Точка P соответствует режиму феррорезонанса, который достигнут изменением напряжения питания. При этом изменяется эквивалентная индуктивность катушки

$$L_{\text{э}} = \frac{U_L}{\omega I},$$

за счёт чего и достигается настройка цепи в резонанс. В последовательной цепи явление называют феррорезонансом напряжений.

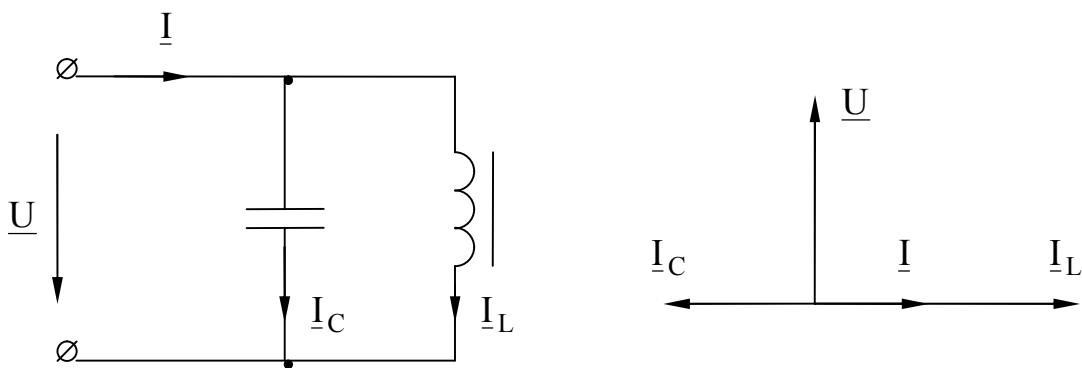
На практике с учётом потерь и несинусоидальности кривых характеристика имеет другой вид.



На ней стрелками показан ход процесса при увеличении и уменьшении напряжения. Участок 1-4 является неустойчивым и может быть получен при питании цепи от источника регулируемого тока.

Одновременно со скачками тока изменяется знак угла сдвига фаз, а также скачкообразно изменяются напряжения на индуктивности и емкости. На графике точки a и c - устойчивые, а точка b - неустойчивая.

б) Феррорезонанс токов.



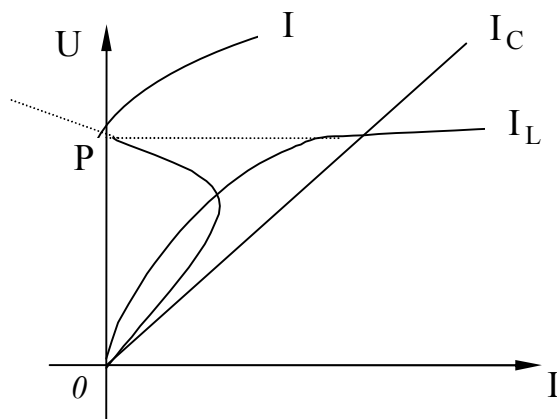
При параллельном соединении

$$I = I_L + I_C,$$

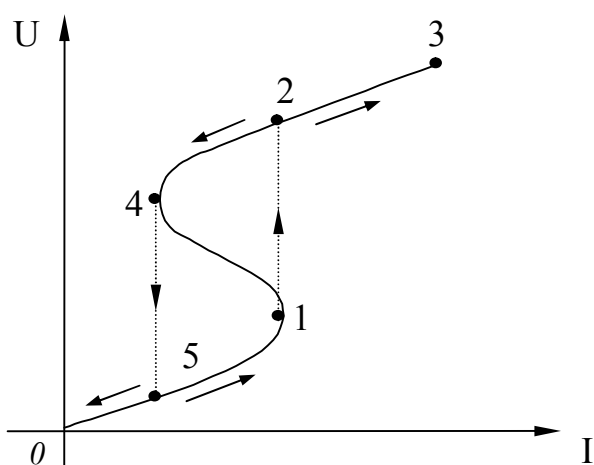
или

$$I = |I_L| - |I_C|.$$

По уравнениям и зависимости $U(I)$ элементов построен график $U(I)$ сети. Точка P соответствует режиму феррорезонанса токов.



С учётом потерь и несинусоидальности кривых $U(I)$ график представлен ниже.



Скачки напряжения возникают при питании цепи от источника регулируемого тока. Зона 1-4 неустойчива.

При резонансе реактивная составляющая первой гармоники тока в индуктивности равна току в емкости. Общий ток содержит при этом только активную составляющую первой гармоники тока в индуктивности и высшие гармоники. Обычно амплитуда активной составляющей значительно меньше амплитуды третьей гармоники. Поэтому при феррорезонансе токов общий ток изменяется с тройной частотой.

Всю характеристику полностью снимают при питании цепи от источника регулируемого напряжения.

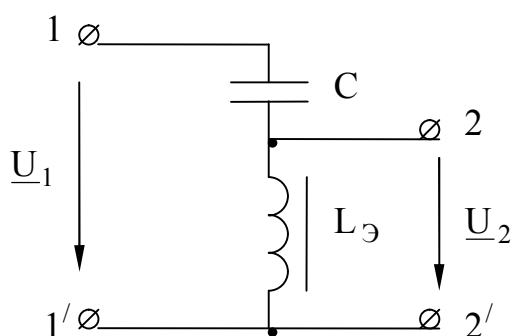
ЛЕКЦИЯ №45.

Ферромагнитные стабилизаторы напряжения.

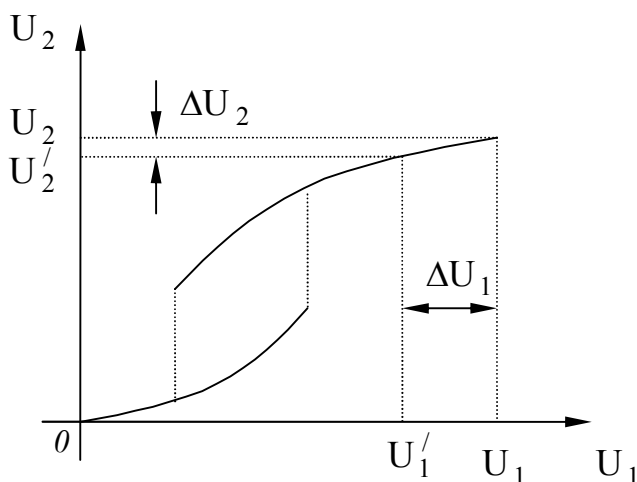
Применяются для питания многих устройств автоматики и измерительных приборов и характеризуются коэффициентом стабилизации

$$k_C = \frac{\frac{\Delta U_1}{U_1}}{\frac{\Delta U_2}{U_2}}.$$

Стабилизаторы, основной частью которых являются нелинейная катушка со сталью и конденсатор, называются феррорезонансными. Простейший стабилизатор может быть построен всего из двух элементов.



Для пояснения стабилизации перестроим характеристики цепи в координатах $U_2(U_1)$ на основе графиков феррорезонанса напряжений.

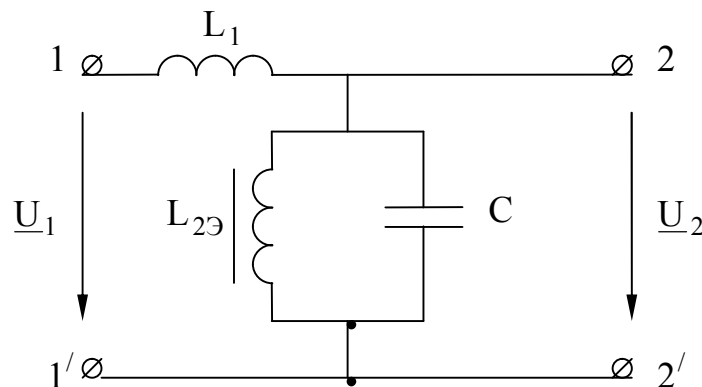


Катушка в схеме работает при достаточно глубоком насыщении. При увеличении U_1 ток возрастает, что приводит к уменьшению эквивалентной индуктивности. Поэтому напряжение на катушке меняется в меньшей степени.

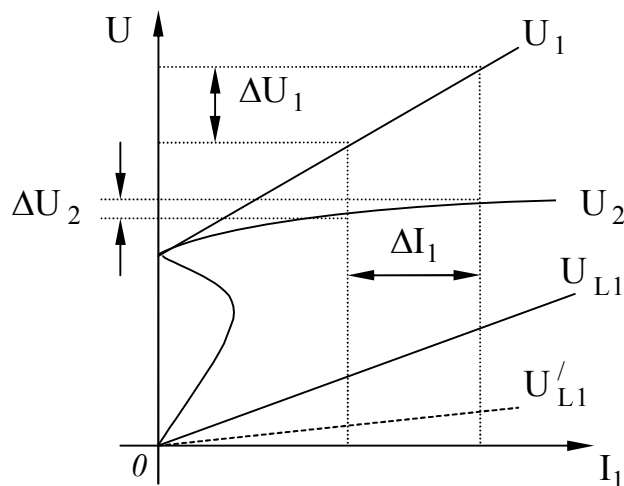
Присоединение нагрузки ухудшает стабилизацию, так как делает участок $2 - 2'$ в меньшей степени нелинейным.

Существуют и более сложные схемы, обеспечивающие более высокие стабилизирующие свойства и меньшую зависимость от нагрузки. На следующей схеме:

L_1 - линейная индуктивность с ненасыщенным стальным сердечником,
 L_{23} - нелинейная индуктивность.

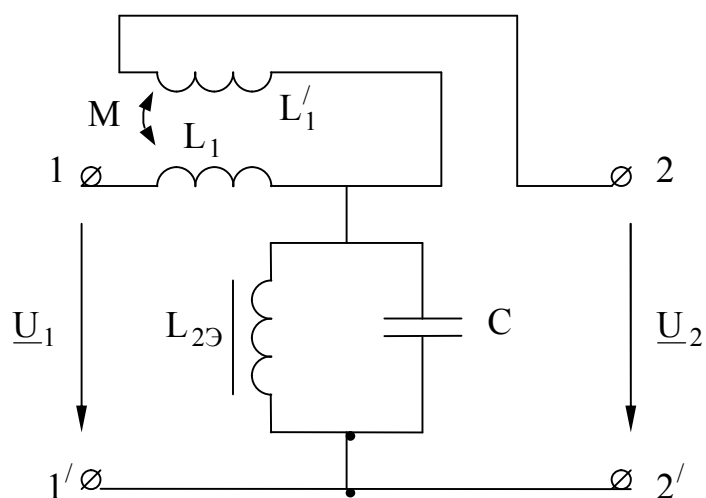


На характеристиках схемы к феррорезонансной $U_2(I_1)$ добавлено U_{L1} , что дает $U_1(I_1)$. При изменении U_1 на ΔU_1 напряжение изменяется в значительно меньшей степени (ΔU_2).



Качество стабилизации может быть еще более улучшено, если на выходе включить L'_1 , индуктивно связанную с L_1 . При этом из напряжения на контуре $L_{23} - C_2$ вычитается напряжение U'_{L1} , являющееся частью напряжения U_{L1} на L_1 .

Необходимо отметить, что за счет нелинейности цепи кривые тока и напряжения оказываются несинусоидальными и содержат высшие гармоники.

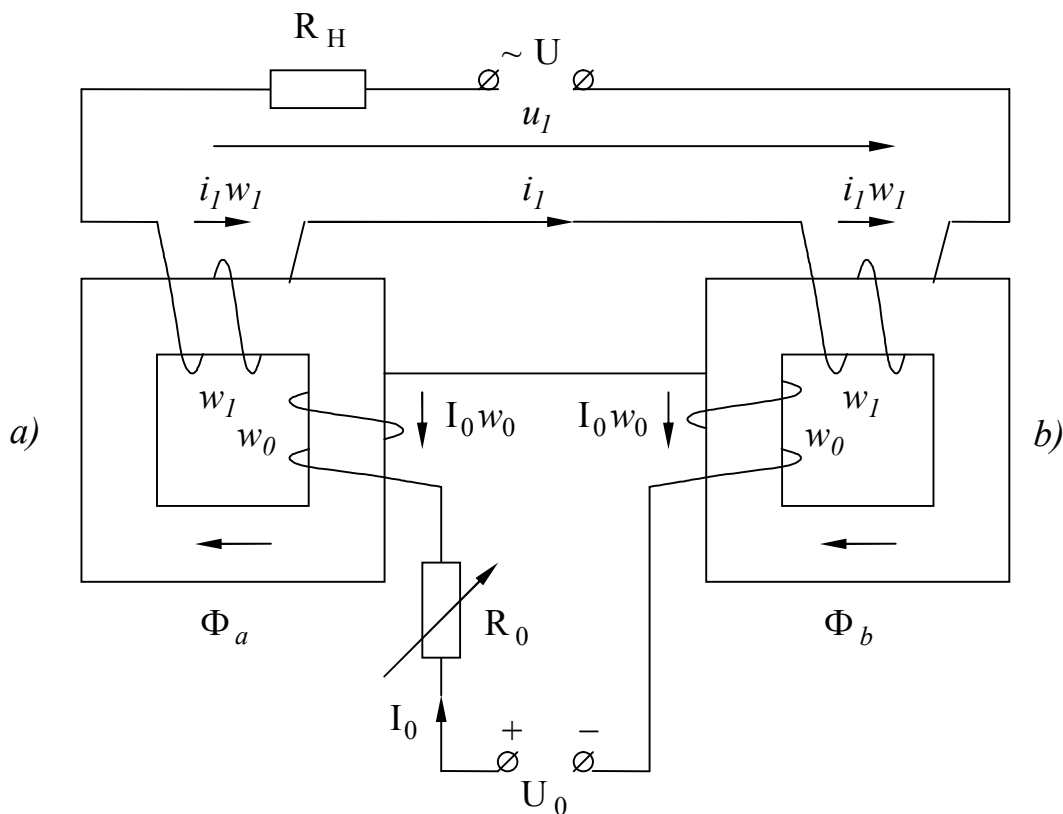


ЛЕКЦИЯ №46.

Понятие о ферромагнитном усилителе мощности.

Усилители мощности позволяют при затрате небольшой мощности в управляющей цепи регулировать значительно большие мощности в рабочей цепи. Примером усилителя, использующего нелинейные свойства катушки с ферромагнитным сердечником, является ферромагнитный усилитель мощности или просто магнитный усилитель.

Простейший магнитный усилитель образован двумя одинаковыми магнитными системами *a)* и *b)*, имеющими по две обмотки. Обмотки переменного тока входят в состав рабочей цепи, а обмотки постоянного тока - управляющей цепи. Сопротивление R_H - нагрузка усилителя.



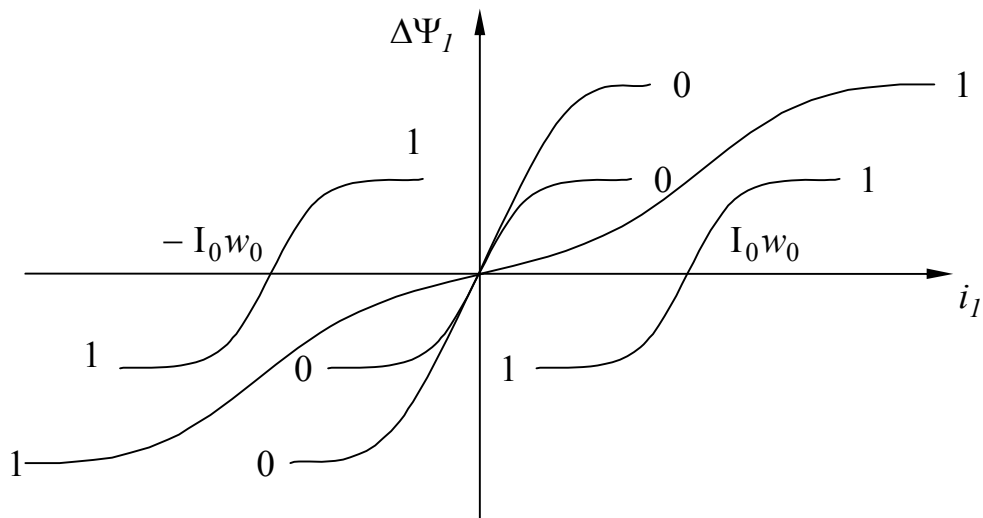
Изменяя сопротивление R_0 в управляющей цепи, можно управлять режимом работы цепи переменного тока. При этом увеличение I_0 приводит к возрастанию тока i_1 , а следовательно, к увеличению активной мощности, выделяющейся в нагрузке R_H .

В соответствии с принятыми положительными направлениями токов и потоков и направлением намотки катушек намагничивающие силы:

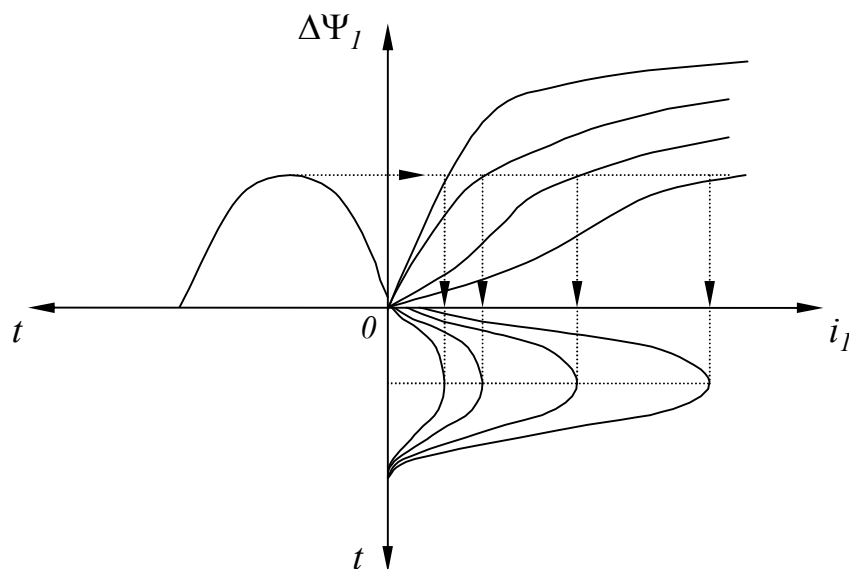
$$F_a = i_1 w_1 + I_0 w_0,$$

$$F_b = i_1 w_1 - I_0 w_0.$$

Если $I_0 = 0$, то зависимость между приращением потокосцепления $\Delta\Psi_a$ и $\Delta\Psi_b$, а также и $\Delta\Psi_I = \Delta\Psi_a + \Delta\Psi_b$ от тока выражается обычной характеристикой магнитной системы (кривые 0 - 0 на рисунке). Наличие тока подмагничивания приводит к изменению кривой $\Delta\Psi_I(i_I)$, которая будет суммой $\Delta\Psi_a(i_I)$ и $\Delta\Psi_b(i_I)$, каждая из которых является характеристикой магнитной системы с началом координат, перенесенным в точку $+I_0 w_0$ для системы «a» и в точку $-I_0 w_0$ для системы «b» (кривые 1 - 2 на рисунке).

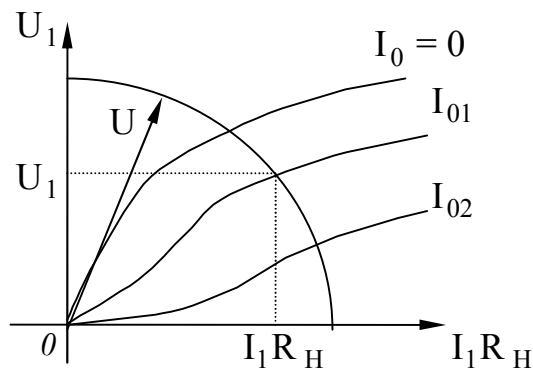


Если подключить синусоидальное напряжение u , то пренебрегая рассеянием и сопротивлением обмоток w_I , можно считать, что и потокосцепление изменяется по синусоидальному закону.



В зависимости от величины тока I_0 каждой характеристике $\Delta\Psi_I(i_I)$ будут соответствовать кривые $i_I(t)$, максимумы которых будут тем больше, чем

больше I_0 . Ток i_l при этом несинусоидален. Если, наоборот, через обмотки w_l проходит синусоидальный ток i_l , то $\Delta\Psi_l$ и $u_l = \frac{d\Psi_l}{dt}$ будут несинусоидальны и максимальные напряжения u_l будут тем больше, чем меньше I_0 . Практически несинусоидальны и ток i_l , и напряжение u_l , так как последовательно с источником u и обмотками w_l включено сопротивление нагрузки. Точный расчет при этом затруднен. Однако, можно рассматривать цепь обмоток w_l как условно-нелинейную индуктивность L_{Σ} , значение которой зависит не только от переменного, но и от постоянного тока, что дает при расчете удовлетворительную точность.



На рисунке представлены кривые $U_l(I_l) = I_l \omega L_{\Sigma}(I_l)$ для различных значений I_0 . По оси абсцисс при этом удобнее откладывать произведение $I_l R_H$. Считая, что U_l отличается по фазе от I_l на 90° , получим:

$$U_l^2 + (I_l R_H)^2 = U^2.$$

Для известных U и I_l можно, проведя окружность радиуса U , найти I_l и $P_{раб} = I_l^2 R_H$. Чем больше I_0 , тем больше P . Практически мощность постоянного тока в десятки и сотни раз меньше мощности в нагрузке.

Заметим, что применение двух магнитных систем связано, во-первых, со стремлением ликвидировать переменный ток в управляющей цепи (за счет трансформаторной э.д.с.), а также со стремлением уменьшить гармоники в рабочей цепи.

Одной из очень важных характеристик магнитного усилителя является зависимость между I_{lcp} (по модулю) и током I_0 , называемая характеристикой «вход-выход». Для выяснения этой зависимости запишем уравнения второго закона Кирхгофа:

$$w_l \frac{d}{dt}(\Phi_a + \Phi_b) + i_l R_l = U_m \sin \omega t,$$

$$w_0 \frac{d}{dt}(\Phi_a - \Phi_b) + i_0 R_0 = U_0.$$

Интегрируя второе уравнение за период, получим:

$$w_0 \int_0^T d(\Phi_a - \Phi_b) + R_0 \int_0^T I_0 dt = U_0 T.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как в силу периодичности процесса $\Phi_a - \Phi_b$ имеет одинаковое значение при $t = 0$ и при $t = T$. Следовательно:

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 dt = \frac{U_0}{R_0}.$$

Среднее по модулю значение переменного тока:

$$I_{lcp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |i_l| d\omega t.$$

Можно показать, что в течение периода в магнитном усилителе имеет место равенство:

$$|i_l w_l| = I_0 w_0,$$

или

$$i_l w_l = I_0 w_0.$$

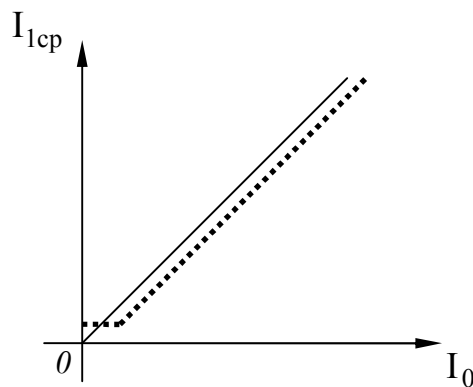
Тогда

$$\frac{w_l}{2\pi} \int_0^{2\pi} |i_l| d\omega t = \frac{w_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 d\omega t,$$

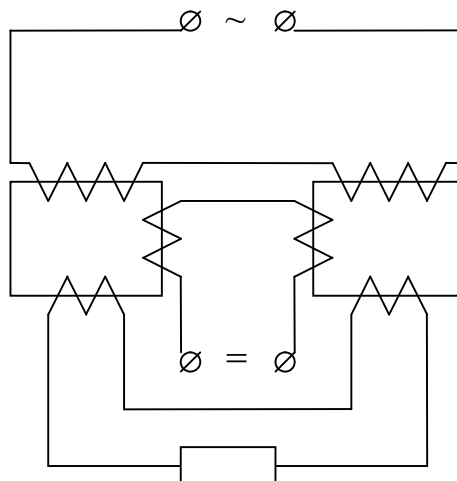
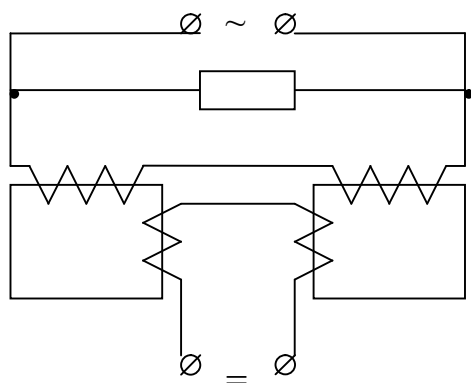
или

$$I_{lcp} w_l = I_0 w_0.$$

Из формулы следует, что зависимость «вход-выход» магнитного усилителя до некоторого значения I_0 линейна. Она представлена на рисунке. На действительной характеристике сказывается явление гистерезиса (пунктирная линия).



Нагрузку магнитного усилителя можно включать и параллельно или с помощью дополнительных обмоток.

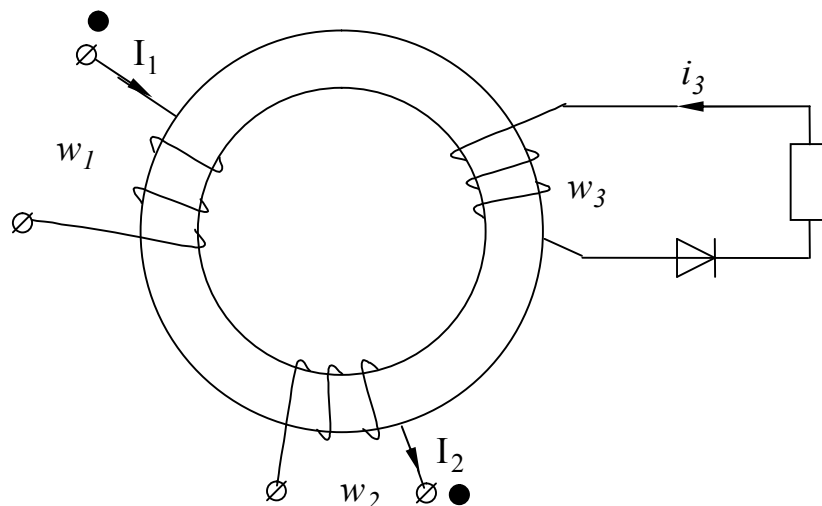


Применяются магнитные усилители для плавного автоматического управления электродвигателями, плавного регулирования освещения и т.п. Они являются основным звеном измерительных трансформаторов постоянного тока, применяются при создании стабилизаторов напряжения, так как падение напряжения на рабочей обмотке при подмагничивании мало меняется при изменении величины тока.

ЛЕКЦИЯ №47.

Ферромагнитные элементы вычислительных машин.

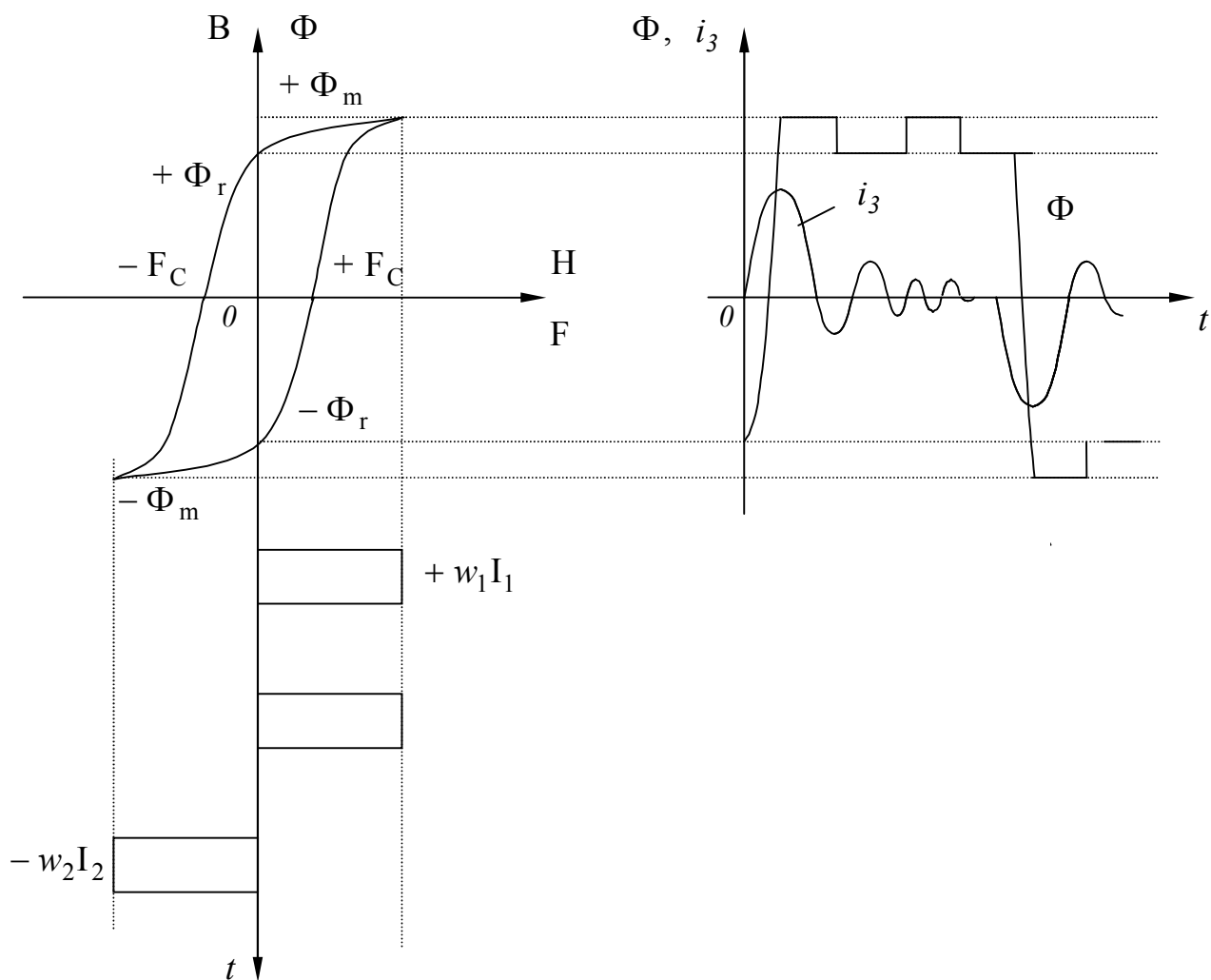
Основой ферромагнитных запоминающих элементов ЭВМ является тороидальный сердечник, выполненный из магнитных материалов, обладающих почти прямоугольной предельной (т.е. при очень больших $\pm H_m$) петлей гистерезиса $B(H)$. Эта же петля в других масштабах дает зависимость Φ от намагничивающей силы F . При $F = 0$ в намагниченном ранее сердечнике наблюдается остаточный магнитный поток $+\Phi_r$ или $-\Phi_r$. В вычислительной технике одному из этих состояний, например $+\Phi_r$, приписывается значение цифры 1, а $-\Phi_r$ - значение цифры 0, т.е. такой элемент может запомнить одну из этих цифр. С помощью набора подобных элементов можно в двоичном исчислении запомнить заданное число в виде ряда из цифр 1 и 0.



На сердечник наложены равномерно распределенные обмотки, образующие тороидальную магнитную цепь, поток во всех сечениях которой одинаков. Одна из обмоток может представлять расположенный по оси провод. Пусть имеются две входные обмотки с одинаковым числом витков $w_1 = w_2$ и одна выходная w_3 , включенная на исполнительную цепь. В последнюю может быть включен вентиль.

Входные обмотки питаются равными по величине и продолжительности импульсами тока $+I_1$ и $-I_2$, т.е. противоположного направления в необходимой последовательности, например, такой, как на рисунке.

Эти токи создают пропорциональные им импульсы намагничивающих сил $+F_1$ и $-F_2$, которые больше $+F_C$ и $-F_C$.



Пусть под действием предыдущего импульса $-F_2$ сердечник намагнитился в отрицательном направлении. Тогда его магнитный поток характеризуется точкой $-\Phi_r$. Следующий импульс $+F_1$ переводит сердечник в состояние $+\Phi_r$. При этом в выходной обмотке индуцируется импульс

$$e_3 = -w_3 \frac{d\Phi}{dt},$$

посылающий в исполнительную цепь рабочий импульс тока i_3 . Средние значения e_3 и i_3 пропорциональны изменению потока

$$\Delta\Phi = \Phi_m - (-\Phi_r) = \Phi_m + \Phi_r \approx 2\Phi_r,$$

так как $\Phi_r \approx \Phi_m$.

После окончания импульса произойдет незначительное уменьшение потока от Φ_m до Φ_r . Проиндуктированный при этом импульс (помехи) незначителен.

Так как следующим импульсом будет $+F_I$, то при этом возрастание потока от $+\Phi_r$ до $+\Phi_m$ и убывание от $+\Phi_m$ до $+\Phi_r$ также создаст незначительные помехи разных знаков.

Следующий импульс $-F_I$ вызовет аналогичный $+F_I$ процесс, но импульсы рабочего тока и помех меняют знак.

Таким образом, элемент работает в режиме трансформатора. Поэтому намагничивающая сила входных обмоток w_1 и w_2 должна быть рассчитана не только на перемагничивание сердечника, но и на компенсацию размагничивающего действия i_3 в рабочей цепи, т.е. по закону полного тока

$$w_1 I_1 = w_2 I_2 = H_m l_C + w_3 I_{3m}.$$

Импульсы рабочего тока разного знака, соответствующие цифрам 1 и 0, воздействуют на последующие элементы ЭВМ.

Если в рабочую цепь включить клапан, то в ней может проходить ток одного знака, соответствующий, например, цифре 1. Тогда элемент работает в режиме нагруженного трансформатора. Цифре 0 будет соответствовать отсутствие рабочего тока, т.е. режим холостого хода. Это приведет к облегчению режима выходной и одной из входных обмоток и уменьшению средней мощности, потребляемой элементом, что позволяет уменьшить его габариты. Кроме того, устранение тока обратного направления уменьшает помехи.

ЛЕКЦИЯ №48.

Сегнетоэлектрический конденсатор.

Для таких конденсаторов (например, с диэлектриком из титаната бария) зависимость q от u подобна зависимости смещения D от ε и изображается гистерезисной петлей.

При синусоидальном токе

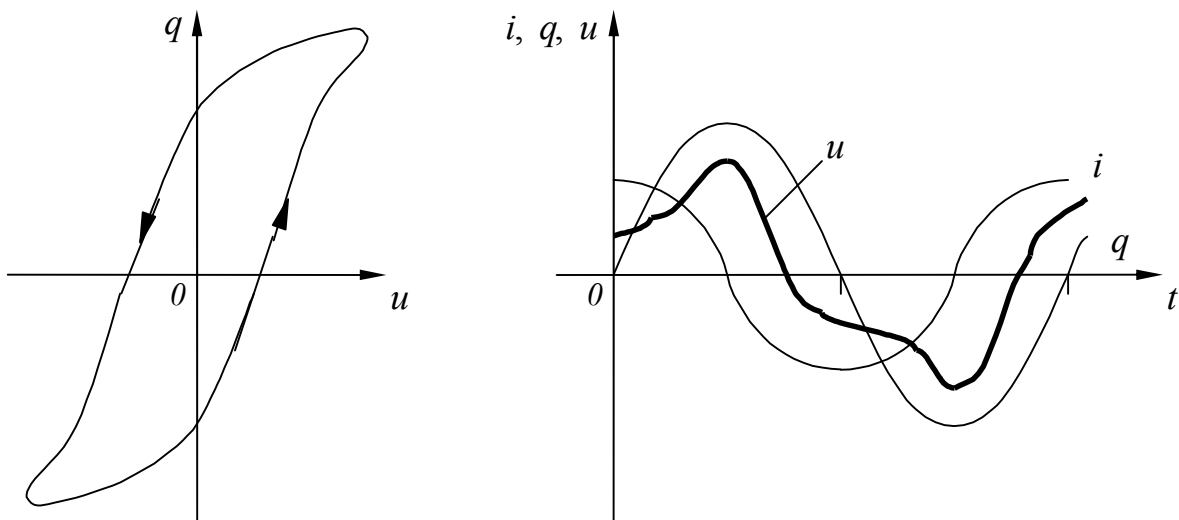
$$i = I_m \cos \omega t = \frac{dq}{dt},$$

откуда

$$q = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t = Q_m \sin \omega t,$$

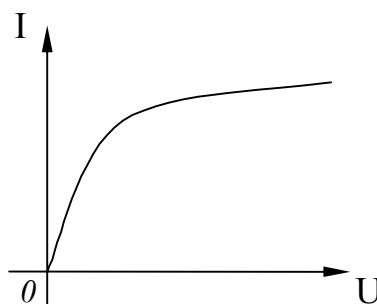
т.е. заряд изменяется по синусоидальному закону.

Кривая напряжения может быть построена графически аналогично способу, примененному для катушки с ферромагнитным сердечником.



Сравнение с кривыми для катушки показывает, что $u(t)$ сегнетоконденсатора подобна $i(t)$ катушки. Отсюда вытекает подобие $U(I)$ катушки и $I(U)$ конденсатора, т.е. эти элементы дуальны, как и линейные элементы L и C .

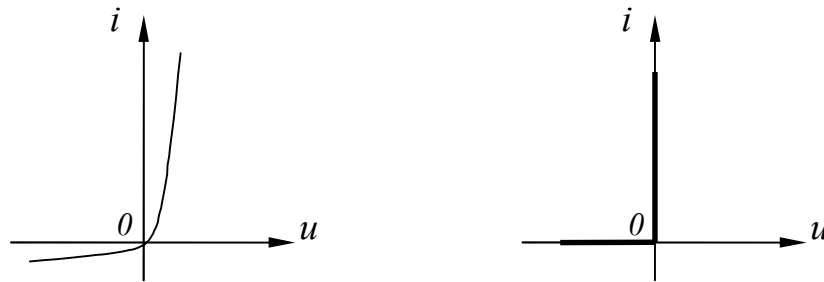
Это служит основанием возможности построения сегнетоэлектрической аппаратуры, аналогичной ферромагнитной.



О выпрямлении переменных токов.

Для выпрямления, т.е. получения из переменного тока - постоянного, должны применяться нелинейные элементы с несимметричной вольтамперной характеристикой. Такими свойствами обладают меднозакисные, селеновые, германиевые, кремниевые и другие полупроводниковые вентили, ртутные вентили, газотроны и электронные лампы.

На рисунках изображены вольтамперные характеристики реального и идеального вентилей. Последняя может рассматриваться как кусочно-линейная аппроксимация реальной характеристики.



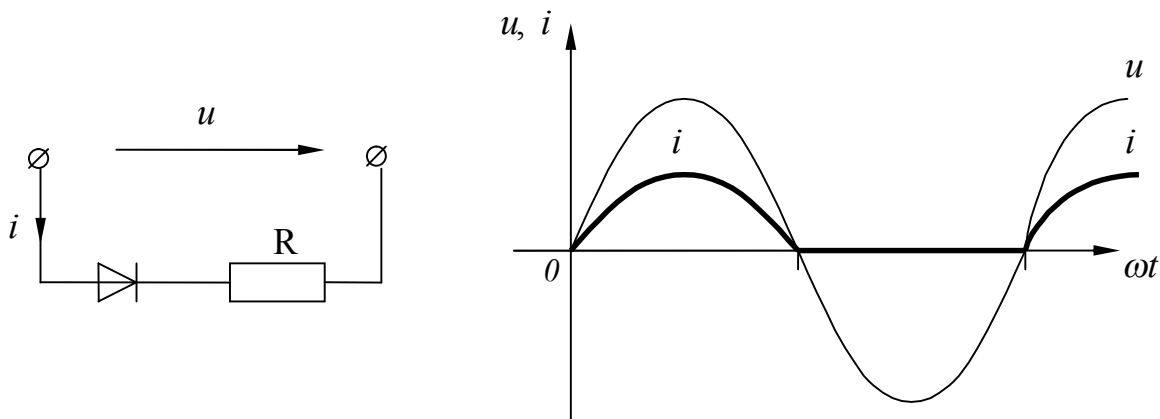
При включении идеального вентилей последовательно с нагрузкой R для прямого (проводящего) полупериода напряжения

$$u = U_m \sin \omega t$$

ток

$$i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

а для обратного $i = 0$.



В результате по цепи проходит ток в одном направлении. Такое выпрямление называют однополупериодным. В этом случае постоянная составляющая тока (среднее значение):

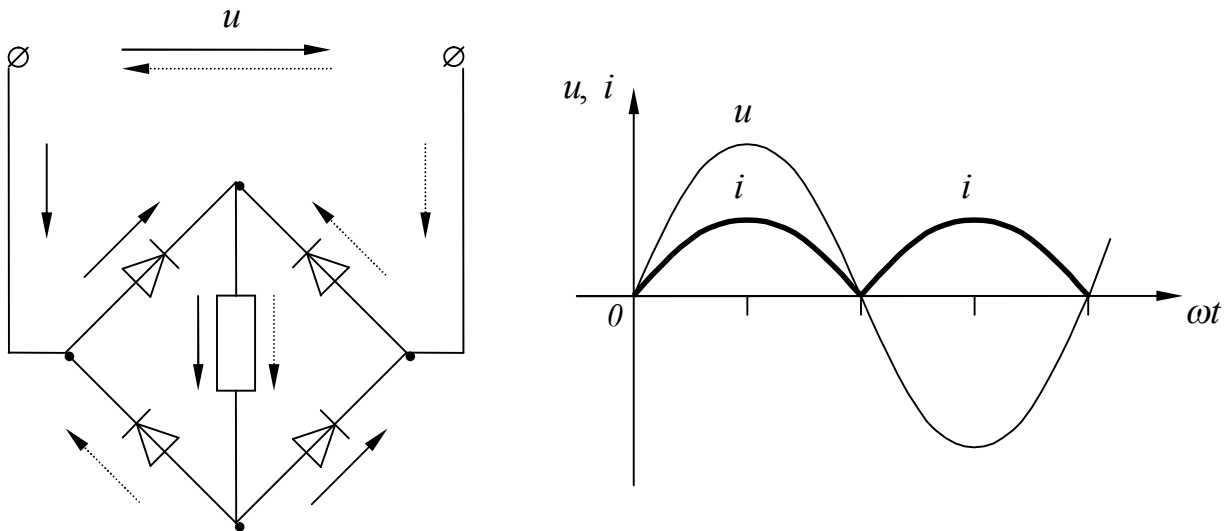
$$I_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi I_m \sin \omega t d\omega t = \frac{I_m}{\pi},$$

а действующее значение

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi I_m^2 \sin^2 \omega t d\omega t} = \frac{I_m}{2}.$$

Поэтому показания амперметров в цепи для магнитоэлектрической и электромагнитной систем будут различными.

Однополупериодное выпрямление приводит к сильной «пульсации» тока. Этот недостаток в значительной мере устраняется двухпериодным выпрямлением. Такое выпрямление удобнее всего осуществить с помощью мостовой схемы.



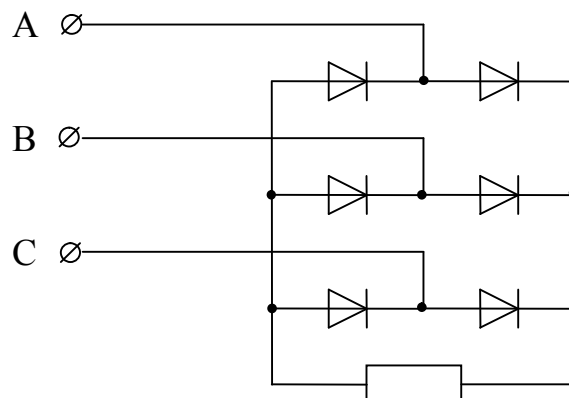
Рассмотрение токопрохождения показывает, что полученное ранее уравнение для тока одного полупериода теперь будет действительно и для второго.

Разложение кривой тока в ряд дает

$$i(t) = \frac{2}{\pi} I_m - \frac{1}{3\pi} I_m \cos 2\omega t - \frac{4}{15\pi} I_m \cos 4\omega t - \dots,$$

т.е. помимо постоянной составляющей $\frac{2}{\pi} I_m$, равной среднему значению тока, кривая содержит четные гармоники.

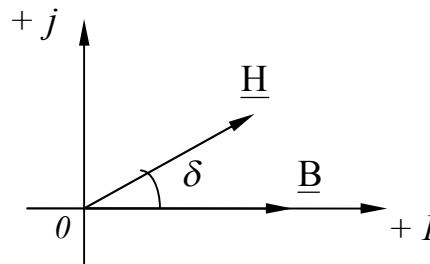
Еще большее уменьшение пульсации можно получить при увеличении числа фаз. На рисунке приведена схема трехфазного двухпериодного выпрямления.



Дальнейшее сглаживание кривой тока достигается с помощью электрических фильтров.

Понятие о расчете магнитных цепей переменного тока.

При расчете магнитной цепи катушки с ферромагнитным сердечником необходимо учитывать, что B и H характеризуются не только модулем, но и фазой, что следует из векторной диаграммы и соотношений:



$$\underline{H} = \frac{wI}{l},$$

$$\underline{B} = \frac{\Phi}{S}.$$

Отношение

$$\frac{\underline{B}}{\underline{H}} = \mu_0 \underline{\mu} = \mu_0 (\mu_1 - j\mu_2) = \mu_0 \mu e^{-j\delta}$$

называют комплексной магнитной проницаемостью.

Определим комплексную мощность из выражения:

$$\underline{S} = \underline{U}^* \underline{I} = P - jQ = -j4.44f w B_m S \frac{B_m l}{\sqrt{2} \mu_0 \underline{\mu} w} = -j \frac{4.44f V B_m^2}{\sqrt{2} \mu_0 \underline{\mu}}.$$

(ранее было принято $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$; замена на $\underline{S} = \underline{U}^* \underline{I}$ приводит только к изменению знака при мнимой части).

Из выражения мощности определим комплексную магнитную проницаемость, приняв предварительно $\frac{G}{V} = d$ (удельный вес):

$$\underline{\mu} = \mu_1 - j\mu_2 = -\frac{j4.44f V B_m^2}{\sqrt{2} \mu_0 (P - jQ)} \cdot \frac{j(Q - jP)}{j(Q - jP)} = \frac{4.44f V B_m^2 (Q - jP)}{\sqrt{2} (Q^2 + P^2) \mu_0},$$

или

$$\underline{\mu} = \frac{\pi f B_m^2 (Q - jP) V}{\mu_0 (Q^2 + P^2)} \cdot \frac{G^2}{G^2} = \frac{\pi f B_m^2 (Q_0 - jP_0)}{\mu_0 (Q_0^2 + P_0^2) d}.$$

Иногда удобнее вводить комплексное магнитное сопротивление:

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{\Phi}} = \frac{\underline{H} l}{\underline{B} S} = \frac{l}{\mu_0 \underline{\mu}} \cdot \frac{l}{S} = \underline{\rho} \frac{l}{S},$$

где $\underline{\rho} = \rho_1 + j\rho_2$ - комплексное удельное магнитное сопротивление. Его составляющие равны

$$\rho_1 = \frac{Q}{\pi f V B_m^2} = \frac{Q_0 d}{\pi f B_m^2},$$

$$\rho_2 = \frac{P}{\pi f V B_m^2} = \frac{P_0 d}{\pi f B_m^2}.$$

При параллельном соединении участков удобнее пользоваться $\underline{\mu}$, а при последовательном $\underline{\rho}$.

Для простейшей цепи из стального сердечника длиной l_C , сечением S_C с зазором l_δ при намагничивающей силе \underline{F} :

$$\underline{\Phi} = \frac{\underline{F}}{\underline{Z}_m} = \frac{\underline{F}}{\underline{Z}_{mC} + \underline{Z}_{m\delta}},$$

$$\underline{Z}_{mC} = \underline{\rho} \frac{l_C}{S_C} = \frac{(Q + jP) l_C}{\pi f V B_m^2 S_C} = \frac{(Q_0 + jP_0) l_C d}{\pi f B_m^2 S_C},$$

$$\underline{Z}_{m\delta} = \frac{l_\delta}{\mu_0 S_\delta}.$$

Расчет ведется методом последовательных приближений. Для этого задаемся B'_m , по ней находим Q_0 , P_0 и Q , P . По последним определяется $\underline{\rho}$, а затем Φ' и $B''_m = \frac{\Phi'_m}{S_C}$. Затем делается новое приближение и т.д.

ЛЕКЦИЯ №49.

Переходные процессы в нелинейных цепях.

Нелинейность характеристики элементов цепи может привести к появлению принципиально новых явлений, недостижимых в линейных цепях. Так в некоторых нелинейных цепях, питаемых источниками постоянного напряжения, во время переходного процесса возникают и не затухают колебания той или иной частоты - автоколебания. Они могут возникать даже в нелинейных цепях, описываемых одним дифференциальным уравнением первого порядка. В линейных цепях в этом случае колебания невозможны, а при более высоких порядках они затухают.

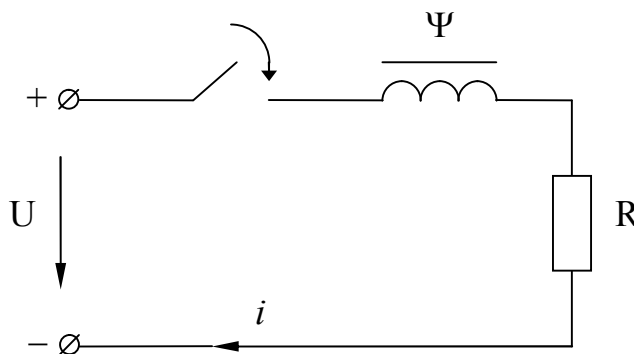
В тех случаях, когда процессы в нелинейных и линейных цепях качественно сходны, наблюдаются значительные количественные расхождения в пиковых напряжениях или токах, скорости процесса на различных его этапах.

Переходные процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для которых нет общих методов решения и невозможно разложение на свободные и принужденные составляющие. Это привело к появлению различных приближенных методов анализа процессов в нелинейных цепях. Наиболее распространены методы условной линеаризации, аналитической аппроксимации нелинейной характеристики, кусочно-линейной аппроксимации нелинейной характеристики, последовательных интервалов и т.п.

Некоторые из них рассмотрены ниже на примере переходного процесса в катушке с ферромагнитным сердечником.

Включение катушки с ферромагнитным сердечником на постоянное напряжение.

Пренебрегая явлением гистерезиса, вихревыми токами, можно представить катушку в виде изображенной на рисунке схемы. Зависимость $\Psi(i)$ считается заданной.



По второму закону Кирхгофа

$$U = Ri + \frac{d\Psi}{dt}.$$

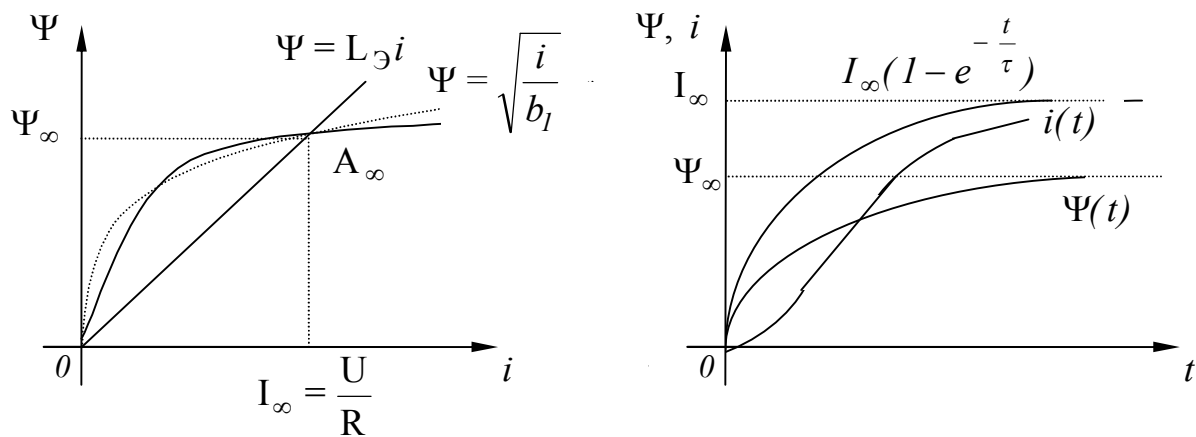
В установившемся режиме

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad i = I_{\infty} = \frac{U}{R},$$

$$\Psi = \Psi_{\infty}$$

и определяется по кривой $\Psi(i)$.

а) Расчет методом условной линеаризации.



Заменим $\Psi(i)$ прямой $\Psi = L_{\text{э}} i$. Тогда

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{R}{L_{\text{э}}} \Psi = U.$$

Решение условно-линейного уравнения:

$$\Psi = \Psi_{\infty} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

$$\tau = \frac{L_{\text{э}}}{R}.$$

Для каждого значения Ψ по кривой $\Psi(i)$ определим ток i . График процесса представлен на рисунке. На нем же изображен переходный процесс для линейной индуктивности. Их различие связано с тем, что при нелинейности в начале процесса

$$L = \frac{d\Psi}{di} > L_{\text{э}},$$

а затем

$$L < L_{\text{э}}.$$

б) Расчет методом аналитической аппроксимации.

Положим

$$I_{\infty} = b_l \Psi_{\infty}^2,$$

т.е.

$$b_l = \frac{I_{\infty}}{\Psi_{\infty}^2} = \frac{R}{L_{\Sigma}^2 U}.$$

Выразим кривую намагничивания уравнением

$$i = b_l \Psi^2,$$

или

$$\Psi = \sqrt{\frac{i}{b_l}}.$$

Подстановка в закон Кирхгофа для цепи дает:

$$U = \frac{R^2}{L_{\Sigma}^2 U} \Psi^2 + \frac{d\Psi}{dt},$$

или

$$t = \frac{1}{U} \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{1 - \frac{R^2}{L_{\Sigma}^2 U^2} \Psi^2} = \frac{L_{\Sigma}}{R} \operatorname{arcth} \frac{R\Psi}{L_{\Sigma} U}.$$

После преобразования получим:

$$\Psi = \frac{L_{\Sigma} U}{R} \operatorname{th} \frac{t}{\tau},$$

$$i = \frac{U}{R} \operatorname{th}^2 \frac{t}{\tau},$$

где

$$\tau = \frac{L_{\Sigma}}{R}.$$

Здесь интегрирование выполнено по табличному интегралу

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arcth} x,$$

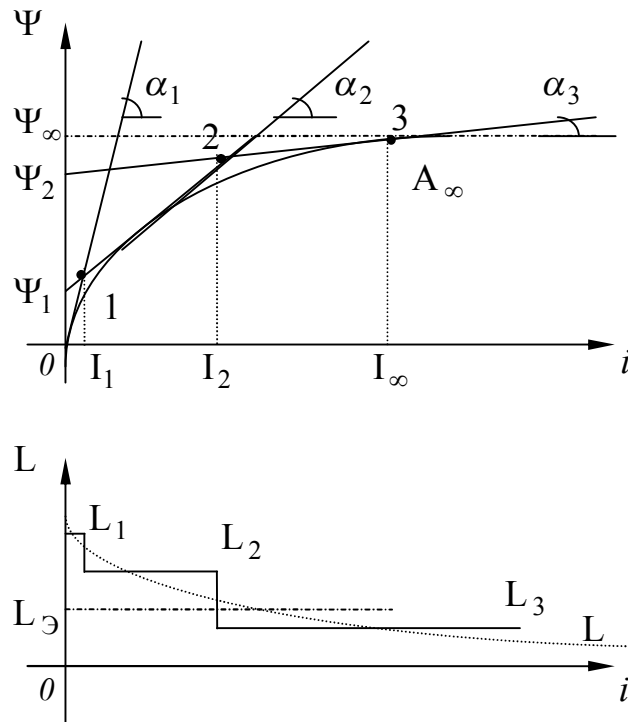
учтено также, что при

$$\operatorname{arcth} \frac{R\Psi}{L_{\Sigma} U} = \frac{t}{\tau}$$

имеем

$$\frac{R\Psi}{L_{\Sigma} U} = \operatorname{th} \frac{t}{\tau}.$$

в) Расчет методом кусочно-линейной аппроксимации.



На рисунке кривая $\Psi(i)$ представлена в виде ломанной линии, состоящей из прямых участков.

На участке $0 - 1$:

$$\Psi = L_1 i \quad \text{при} \quad 0 < i < I_1.$$

На участке $1 - 2$:

$$\Psi = \Psi_1 + L_2 i \quad \text{при} \quad I_1 < i < I_2.$$

На участке $2 - 3$:

$$\Psi = \Psi_2 + L_3 i \quad \text{при} \quad I_2 < i < I_\infty.$$

Соответствующие Ψ_1 и Ψ_2 находятся графически. Заметим также, что каждому участку соответствует линейная индуктивность.

В результате имеем три линейные задачи:

$$L_1 \frac{di}{dt} + Ri = U \quad \text{до} \quad t_1,$$

$$L_2 \frac{di}{dt} + Ri = U \quad \text{до} \quad t_2,$$

$$L_3 \frac{di}{dt} + Ri = U \quad \text{до} \quad t_\infty.$$

Обозначим

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R}, \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R}, \quad \tau_3 = \frac{L_3}{R}.$$

Решения уравнений

$$i = I_{\infty} + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad \text{до } t_1,$$

$$i = I_{\infty} + A_2 e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} \quad \text{до } t_2,$$

$$i = I_{\infty} + A_3 e^{-\frac{t-t_2}{\tau_3}} \quad \text{до } \infty.$$

Из условия невозможности скачка тока в точках 0, 1, 2 находим:

$$A_1 = -I_{\infty}, \quad A_2 = I_1 - I_{\infty}, \quad A_3 = I_2 - I_{\infty}.$$

Значения t_1 и t_2 определим из уравнений:

$$i(t_1) = I_1 = I_{\infty} (1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}),$$

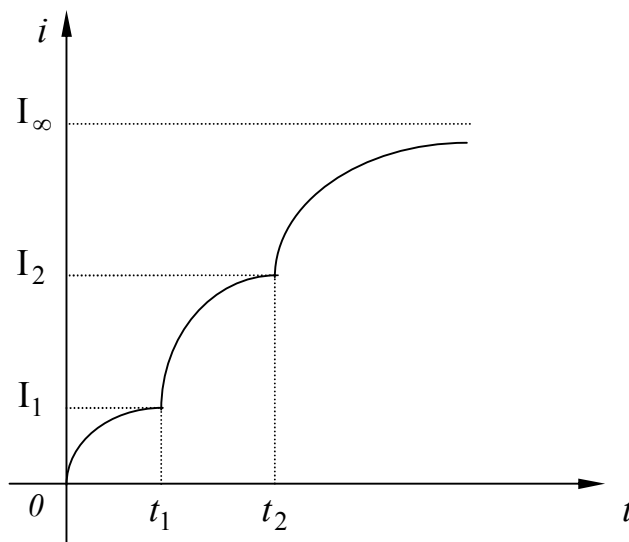
$$i(t_2) = I_2 = I_{\infty} + (I_1 - I_{\infty}) e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau_2}}.$$

Из них следует, что

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{I_{\infty}}{I_{\infty} - I_1},$$

$$t_2 = \tau_2 \ln \frac{I_{\infty} - I_1}{I_{\infty} - I_2} + t_1.$$

Примерный график переходного процесса, рассчитанного этим методом, приведен на рисунке.



г) Расчет методом графического интегрирования.

Из закона Кирхгофа цепи

$$U = Ri + \frac{d\Psi}{dt}$$

следует, что

$$dt = \frac{d\Psi}{U - Ri}.$$

По $\Psi(i)$ построим зависимость

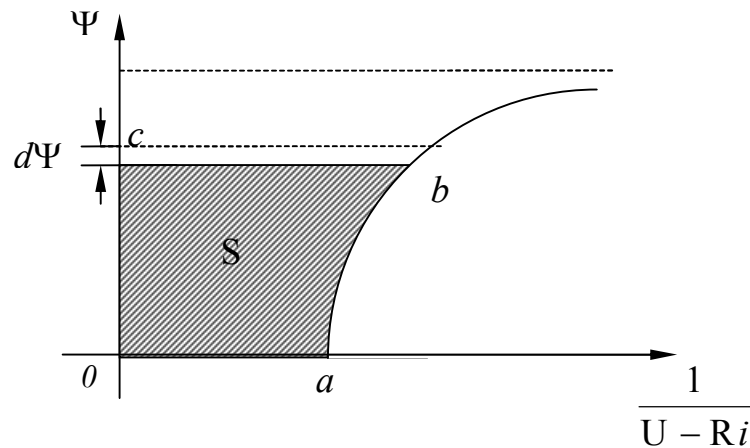
$$\Psi = f\left(\frac{I}{U - Ri}\right)$$

и проинтегрируем ее графически.

Для нахождения времени, в течении которого потокосцепление изменяется от θ до Ψ , нужно определить

$$t = \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{U - Ri},$$

т.е. определить площадь фигуры « θabc ».



д) Расчет методом последовательных интервалов.

Разобьем время процесса на Δt и для каждого интервала запишем:

$$\frac{\Delta\Psi_k}{\Delta t} \approx \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_k = U - Ri_{k\text{ ср}}.$$

Тогда

$$\Delta\Psi_k = \Psi_k - \Psi_{k-1} \approx (U - Ri_{k\text{ ср}}) \Delta t.$$

Зная $i_{k\text{ ср}}$, Δt и Ψ_{k-1} , можно найти $\Delta\Psi_k$ и Ψ_k , а затем и i_k по характеристике $\Psi(i)$. Переходя от « k » к « $k + 1$ » можно построить весь процесс.

При $t = 0$ также $\Psi_0 = 0$, $i_0 = 0$ и $k = 0$.

Для $\Delta\Psi_1$, полагая $i_{1\text{ ср}} \approx i_0 = 0$, получим

$$\Delta\Psi_1 = \Psi_1 = U\Delta t.$$

По $\Psi(i)$ найдем i_1 и, подставив вместо $i_{2\text{ ср}}$ для $k = 1$, получим

$$\Delta\Psi_2 \approx (U - Ri_1) \Delta t.$$

По графику $\Psi(i)$ для $\Psi_2 = \Psi_1 + \Delta\Psi_2$ определим i_2 и т.д.

ЛЕКЦИЯ №50.

Включение катушки с ферромагнитным сердечником на синусоидальное напряжение.

Уравнение Кирхгофа в этом случае имеет вид

$$U_m \sin(\omega t + \alpha) = R i + \frac{d\Psi}{dt}.$$

В соответствии с методом условной линеаризации принимаем по установившемуся режиму

$$L_{\varnothing} = \frac{\Psi_m}{I_m}.$$

Это делает уравнение условно линейным:

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{\Psi}{\tau} = U_m \sin(\omega t + \alpha),$$

где $\tau = \frac{L_{\varnothing}}{R}$ - постоянная времени.

Считая, что $\Psi(0) = 0$, получим:

$$\Psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \Psi_m \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где

$$\Psi_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L_{\varnothing})^2}} \cdot L_{\varnothing},$$
$$\varphi = \arctg \frac{\omega L_{\varnothing}}{R}.$$

Обычно $\omega L_{\varnothing} \gg R$ и $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$.

Тогда

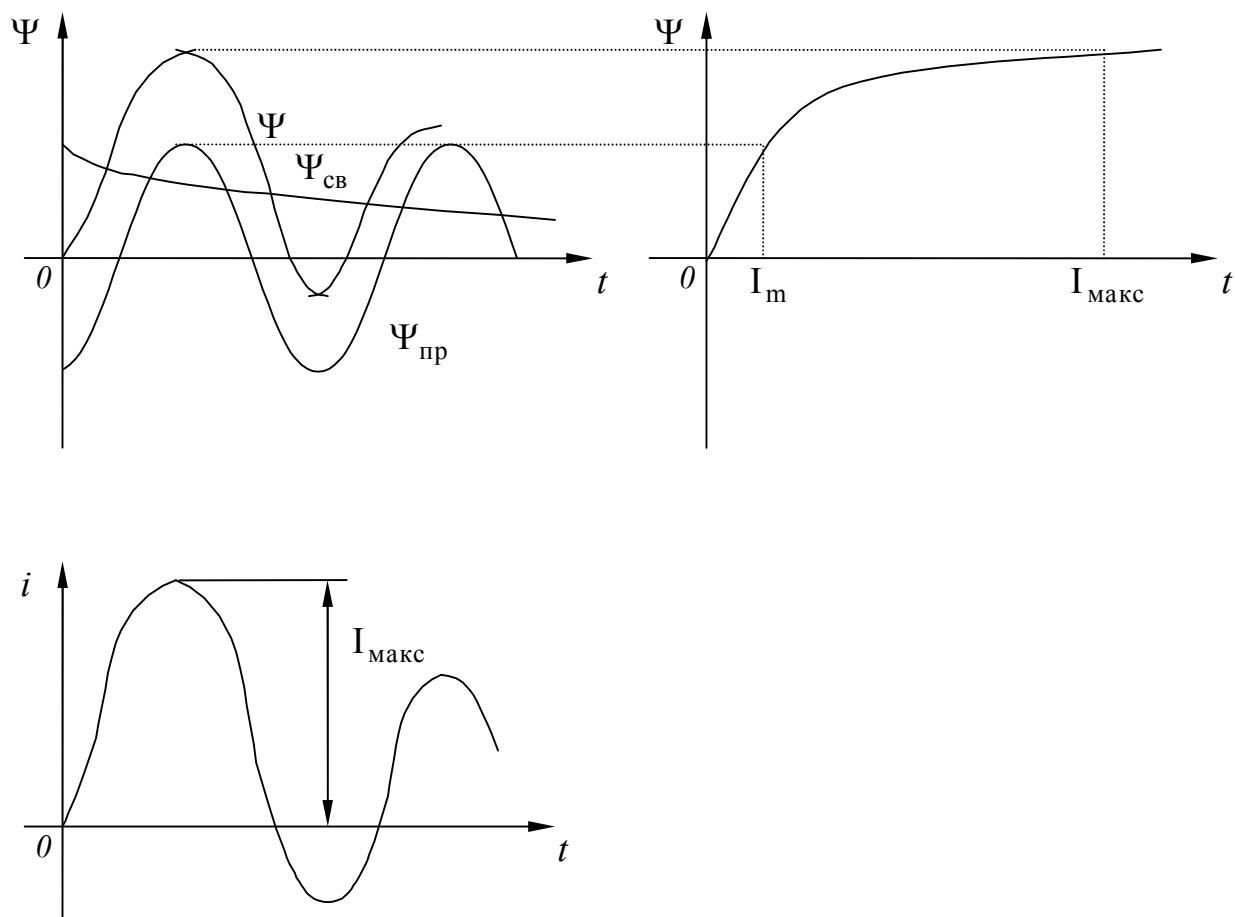
$$\Psi_m = \frac{U_m}{\omega}.$$

Наибольшее значение переходного тока наблюдается при $\alpha = 0$:

$$\Psi(t) = -\Psi_m \cos \omega t + \Psi_m e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток для этого случая построен на графиках.

Явление гистерезиса может еще более увеличить $I_{\text{макс}}$, который во много раз превышает ток установившегося режима I_m . Вихревые токи и магнитное рассеяние несколько снижают максимальное значение тока. Аналогичный процесс наблюдается при включении ненагруженного трансформатора.

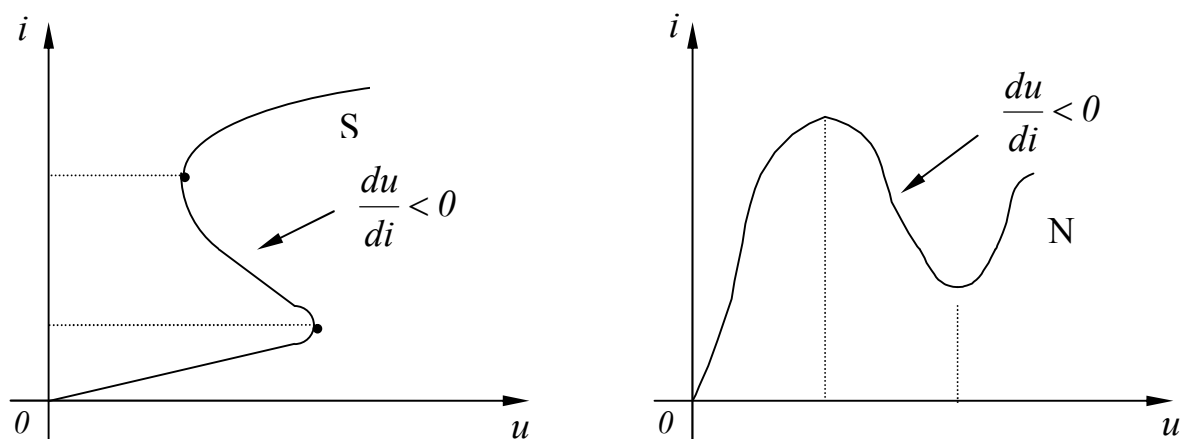


Автоколебания.

При изучении переходных процессов в нелинейных цепях особый интерес представляют процессы в цепях с элементами, имеющими спадающий участок характеристики, на котором дифференциальное сопротивление отрицательно:

$$R_{\partial} = \frac{du}{di} < 0.$$

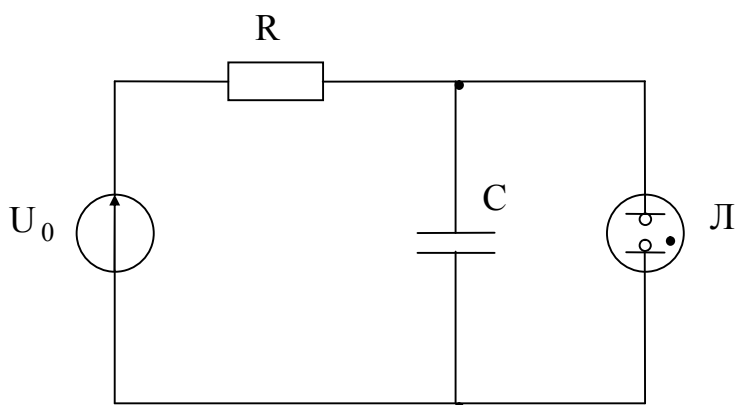
Такие характеристики разделяют по внешнему начертанию на две группы: типа S и N типа



Характеристикой типа S обладают газоразрядные электровакуумные приборы (газотрон, неоновая лампа) и электрическая дуга.

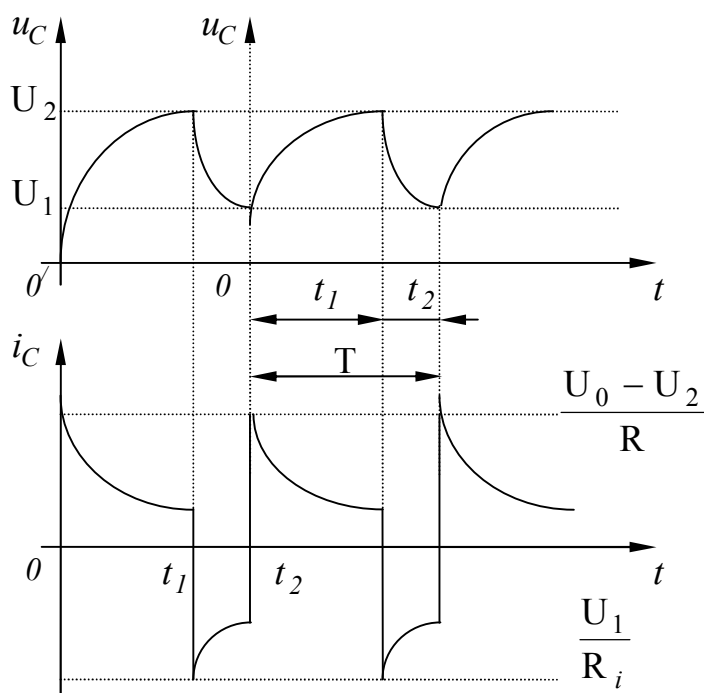
Характеристику типа N имеют некоторые электронные лампы, туннельные диоды.

Рассмотрим возникновение автоколебаний на примере так называемых релаксационных колебаний (релаксационными называют генераторы основанные на зарядно-разрядных явлениях, так как «релаксация» - высвобождение, в данном случае энергии).



При включении C заряжается через R . Внутреннее сопротивление лампы очень велико, и она не влияет на процесс заряда. При $u_C = U_1$ (потенциалу зажигания) в лампе происходит ионизация, и ее сопротивление резко уменьшается. Конденсатор при этом быстро разряжается через малое внутреннее сопротивление лампы R_i .

Как только u_C упадет до U_2 , при котором ионизация прекращается, R_i становится очень большим, и конденсатор снова заряжается. Процесс многократно повторяется.



При заряде

$$u_C = U_0 + A e^{-\frac{t}{RC}}.$$

При $t = 0$ $u_C = U_2$, то есть

$$u_C(0) = U_0 + A = U_2.$$

Поэтому

$$A = -(U_0 - U_2).$$

Таким образом

$$u_C = U_0 - (U_0 - U_2) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

В момент t_1 :

$$U_1 = U_0 - (U_0 - U_2) e^{-\frac{t_1}{RC}}.$$

откуда

$$e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2},$$

т.е.

$$t_1 = RC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1}.$$

При разряде, считая $R_i = \text{const}$, имеем:

$$u_C = U_1 e^{-\frac{t_1}{R_i C}}.$$

В момент $t = t_2$ напряжение на емкости $u_C = U_2$ и

$$e^{-\frac{t_2}{R_i C}} = \frac{U_2}{U_1},$$

или

$$t_2 = R_i C \ln \frac{U_1}{U_2}.$$

Период автоколебаний

$$T = t_1 + t_2 = RC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1} + R_i C \ln \frac{U_1}{U_2}.$$

Обычно $R \gg R_i$ и $t_1 \gg t_2$ тогда

$$T \approx t_1 = RC \ln \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1}.$$

С учетом

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

получим для тока при заряде:

$$i_C = \frac{U_0 - U_2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

и при разряде

$$i_C = -\frac{U_1}{R} e^{-\frac{t}{R_i C}}.$$

Полученные теоретически скачки тока в действительности отсутствуют, так как в цепи всегда имеется хотя и небольшая индуктивность. Поэтому наблюдается очень быстрое изменение тока.

Так как

$$i_C = C \frac{du_C}{dt},$$

то изобразив по оси x напряжение на емкости u_C , а по оси y ток i , получим так называемый фазовый портрет процесса. На нем заряд изображается отрезком AB , которому соответствует зарядный ток

$$i_C = \frac{U_0 - u_C}{R}.$$

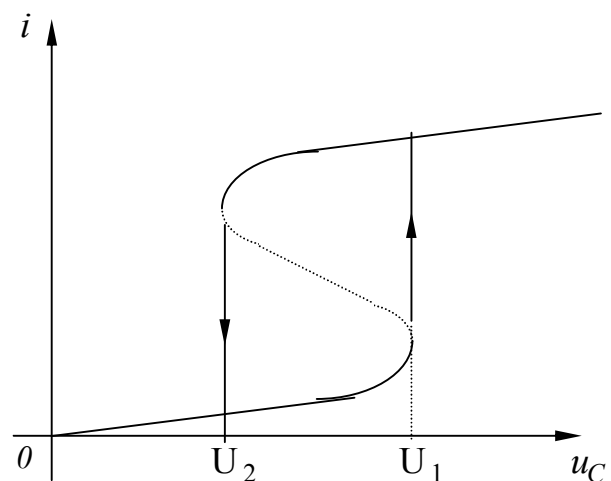
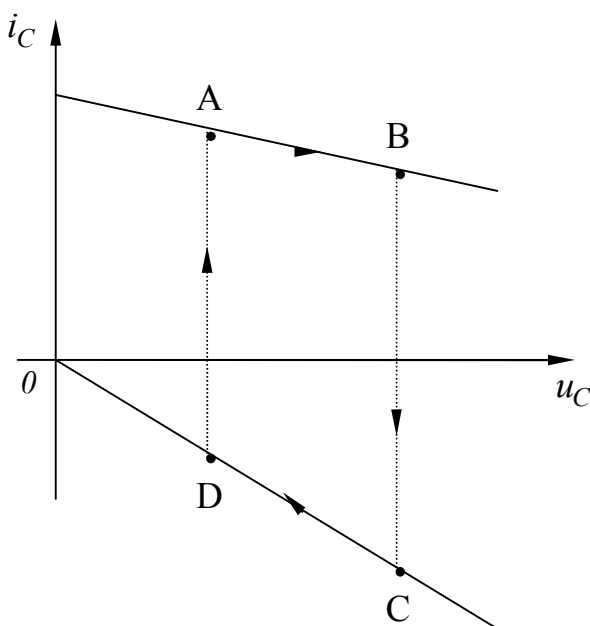
При разряде

$$i_C = -\frac{u_C}{R_i}$$

и если $R_i = const$, то процесс разряда изображается отрезком CD .

В действительности R_i нелинейно и отрезок CD не будет прямой линией.

Ниже изображены скачки, соответствующие переходу от одного режима к другому в других координатах.



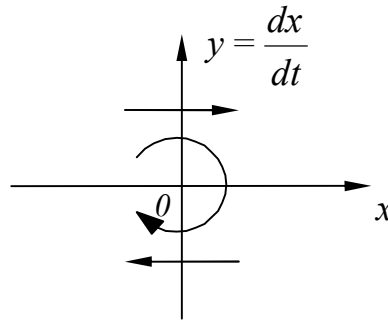
Релаксационные колебания близки к пилообразным. Они могут иметь почти прямолинейные участки. Поэтому они могут использоваться, например для осуществления развертки луча электронного осциллографа.

ЛЕКЦИЯ №51.

Понятие об изображении переходных процессов на фазовой плоскости.

Повышение порядка уравнений существенно усложняет расчет переходных процессов. Существуют методы, упрощающие вычислительную работу при анализе.

Исследуем процесс в новых координатах: по оси абсцисс отложим исследуемую величину, а по оси ординат - скорость ее изменения во времени. Образзуемая осями плоскость называется фазовой и на ней любой процесс ограничен (ранее время нарастало неограниченно). Обозначим исследуемую величину (u или i) через x , тогда $y = \frac{dx}{dt}$. Каждому состоянию цепи будет соответствовать точка на плоскости - изображающая или представляющая точка. При изменении состояния точка прочертит кривую - фазовую траекторию.



При этом в верхней полуплоскости

$$y = \frac{dx}{dt} > 0,$$

и точка перемещается только направо, а в нижней - только налево, т.е. изображающая точка может перемещаться только по часовой стрелке.

Если процесс описывается дифференциальным уравнением первого порядка, то все фазовые траектории лежат на одной кривой, и представляющая точка может перемещаться только по ней. При уравнении второго порядка в зависимости от начальных условий представляющая точка может оказаться в любом месте фазовой плоскости.

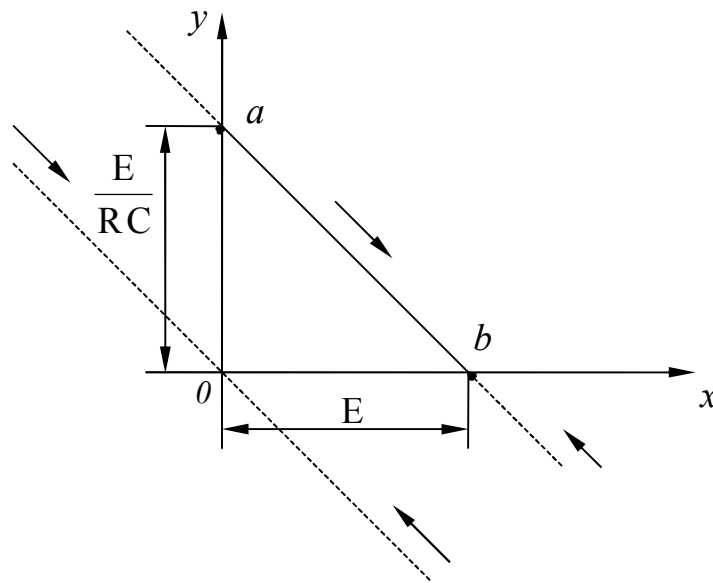
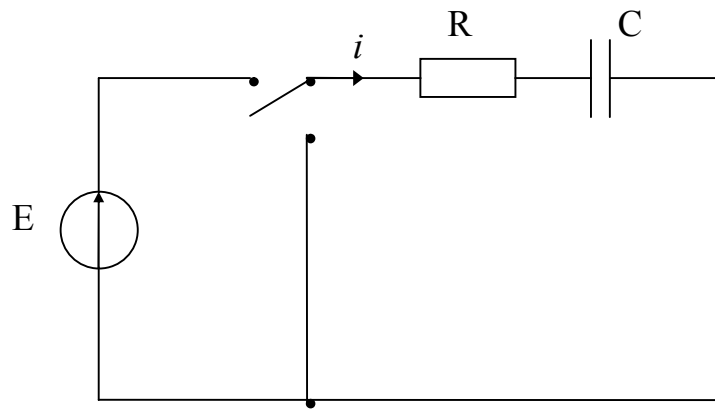
Изобразим на фазовой плоскости процесс заряда емкости через сопротивление при $u_C(0) = 0$.

Основные уравнения процесса:

$$Ri + u_C = E,$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt},$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$



Положим $u_C = x$, а

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{dx}{dt} = y.$$

Тогда

$$y = \frac{E - x}{RC}$$

фазовая траектория процесса - прямая линия. Ее можно построить по точкам:

при $x = 0$, $y = \frac{E}{RC}$,

при $y = 0$, $x = E$.

Точка «b» - точка равновесия. В зависимости от начального значения $u_C(0)$ фазовая траектория может начаться в различных точках прямой. Если $u_C \neq 0$, а E отключается, то фазовая траектория пройдет через начало координат.

В цепи R, L, C фазовые траектории сложнее. Предположив $R = 0$, имеем при подключении цепи на постоянное напряжение:

$$U = L \frac{di}{dt} + u_C = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt,$$

или

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

Обозначим

$$x = i, \quad y = \frac{di}{dt}, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

Подстановка дает:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dt} \right) + \omega_0^2 x = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad y \frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 x, \quad y dy = -\omega_0^2 x dx.$$

После интегрирования получим:

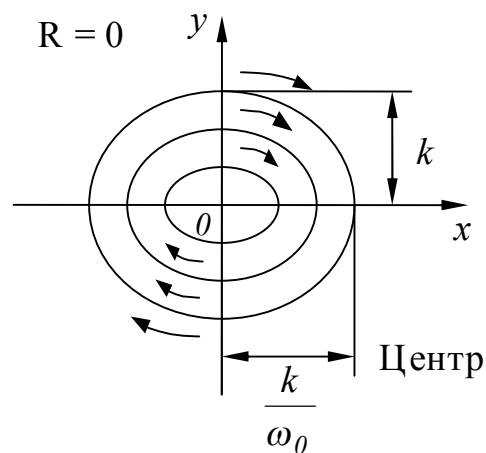
$$\frac{y^2}{2} = -\omega_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{k^2}{2},$$

или

$$y^2 + \omega_0^2 x^2 = k^2,$$

где k - постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

Полученное уравнение эллипса соответствует незатухающим синусоидальным колебаниям.



Амплитуда равна полуоси эллипса (по x), частота определяется отношением вертикальной полуоси к горизонтальной.

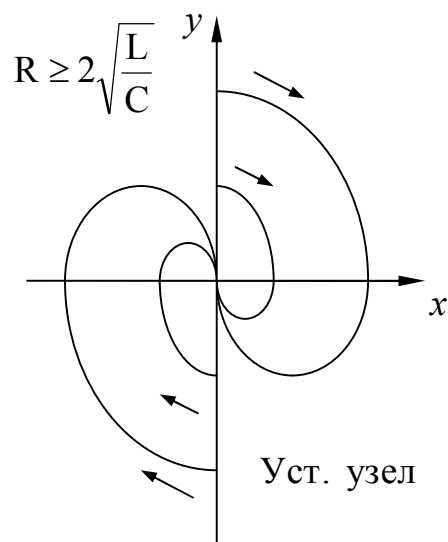
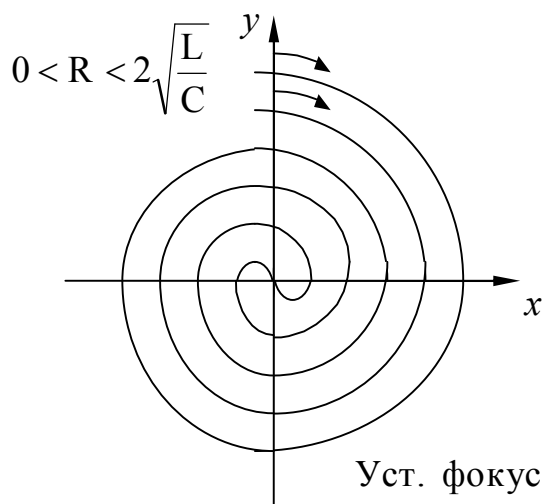
Так как при $t = 0$ заданы $i(0)$ и $u_C(0)$, то фазовая траектория проходит через точку с координатами:

$$x = i(0)$$

и

$$y = \frac{di}{dt} = \frac{U - u_C(0)}{L}.$$

В реальном колебательном контуре всегда есть потери и фазовые траектории принимают вид спиралей. По мере увеличения R шаг спиралей увеличивается, и они вырождаются в семейство параболических кривых. Во всех случаях кривые пересекают ось x под прямым углом с переменной знака $\frac{dx}{dt}$. Во всех случаях только одна точка равновесия - начало координат. При $R = 0$ - равновесие наименее устойчивое - центр. При $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ - это устойчивый фокус, а при $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ - устойчивый узел.



В дальнейшем оказалось удобным при построении фазовых траекторий пользоваться изоклинами. Это геометрическое место точек, для которых $\frac{dy}{dx}$ - постоянная величина. По семейству изоклин можно построить фазовые траектории чисто геометрическим путем.