GRE

> 最新最全数学机经题 全面体现最新&最热门考点

2.1 用图形描述数据专题

[专项练习]

答案&解析

1. 填 112/243

解题思路: 考察比例。两个集合的总数和每个集合中 A 所占百分比都知道,算出每个集合中 A 的个数即可求比值。7000×40%:13500×45%=112/243

2. 填15.8

解题思路:考察百分数计算。分别计算 B 增加之后的总数和该集合由于 B 的增加所增加之后的总数,再做除法即可。 $(7000\times20\%-350)\div(7000-350)=15.8\%$

3. 填 159%

解题思路:考察百分数计算。分别算出两个集合中 C 的个数,再计算多出的百分比即可。Ⅰ中 C 的个数为 7000 ×25%=1750,Ⅱ中 C 的个数为 13500×5%=675,多的百分比=(1750-675)/675=159%

4. 填 14.3

解题思路:(40%-35%) ÷35%≈14.3%

5. 填90

解题思路: 360×25%=90°

2.2 用数字描述数据专题

[专项练习]

答案&解析

1. 选 D

解题思路: 这7个数字的平均值=(240+x)/7,不知道x的值,无法比较其与x的大小关系。

2. 选 B

解题思路: a、b、c的平均值=(a+b+c)/3=1/3<1/2

3. 选 D

解题思路:y=5x/3, z=3x/2, 那么 xyz 的平均值=(x+5x/3 + 3x/2)/3=25x/18, 因为 x 的正负无法确定, 故与 x 的 大小无法确定

4. 选 B

解题思路:

r=(x+y+z+2.7+3.8+5.5)/6 s=(x+y+z-2.7-3.8-5.5)/6r-s=(5.4+7.6+11)/6=(2.7+3.8+5.5)/3

5. 填21

解题思路: n 个数字的平均值为 2.5. 和为 2.5n>50. n>20. 那么 n 最小为 21

6. 填 21

解题思路:数列 M 平均值 31,包含 100 个数字,总和 31×100=3100;数列 N 平均值 x,包含 25 个数字,总 和 25x,全部数字的个数 100+25=125,平均值 29,总和 125×29=3625,那么 3100+25x=3625,x=21

7. 填110

解题思路:x 既是平均数,也是中位数,那么(90+105+120+125+x)/5=x,解得 x=110

8. 填 108

解题思路:设这 5 个数字从小到大为 abcde, 三个最大数字的平均值比 3 个最小数字的平均值大 72, 也即 (c+d+e) /3-(a+b+c)/3=72, 化简得(d+e)/2-(a+b)/2=108

9. 选 D

解题思路:只知道 A 集合当中大于 50 的数据占比等于 B 集合当中大于 55 的数据占比,完全不知道其他数字 离 50 或者离 55 的差距有多大,无法判断平均值谁大谁小

10. 选 D

解题思路:这 10 个正整数的平均值 7.5,中位数无法确定,于是无法判断选到一个数字大于 7 的概率,与 0.5 的大小关系

11. 选 k=x+54

解题思路:55 个数字的平均值为 x,删除一个 k 后,剩下的数字的平均值为 x-1,可列等式(55x-k)/(55-1)=x-1.化简得 k=x+54

12. 填60

解题思路:考察平均数和代数式运算。假设两个父母的体重分别是 A 和 B, 四个孩子的体重分别是 a,b,c,d, 根据题意可列出两个式子:(A+B)/2=(a+b+c+d)/4+240 以及(A+B+a+b+c+d)/6=140, 从第二个式子可得:A+B=840-(a+b+c+d)再代入第一个式子可得:(a+b+c+d)/4=60

13. 填 24

解题思路:四条最轻的+四条最重的总重-中位数重量=七条的总重量,也即 4×20.5+117-中位数=7×25,解得中位数=24

14. 填15

解题思路:设仍需参加 x 此且每次考 100 分,此时所有考试的平均值=(10×75+100x)÷(10+x)=90,解得 x=15

15. 选 AB

解题思路:每位雇员要么在 X 部门,要么在 B 部门,X 部门人数是 Y 部门人数的超过 2 倍,设 X 部门 B 人,Y 部门 B 人,则 B B B

X部门 b 人, 平均工资为 25000, 总工资 25000b

Y部门a人, 平均工资为35000, 总工资35000a

故所有人总工资 25000b+35000a, 一共 b+a 人, 故所有人的平均工资 (25000b+35000a) / (b+a)

(25000b+35000a) / (b+a) = 5000 (5b+7a) / (b+a) = 5000 (5b+5a+2a) / (b+a) = 5000[5+2a/(a+b)]

b>2a, 故 a+b>3a, 由于 a+b>1, 3a>1, 那么 1/(a+b)<1/3a, 两边同时乘以 2a 得, 2a/(a+b)<2/3, 故 5+2a/(a+b)<17/3, 也即 5000[5+2a/(a+b)]<28333.333···· 因此可以取的平均值有 AB 选项

16. 选 C

解题思路:一支钢笔 2 刀,一支铅笔 1.5 刀,求哪个选项可以判断所有的平均售价。假设钢笔卖了 x 支,铅笔 卖了 y 支——

A 选项, x+y=150, 平均售价(2x+1.5y)/150 无法判断;

B 选项, x=y+50, 平均售价(2x+1.5y)/(x+y), 不可算;

C 选项,x=2y, 平均售价(2x+1.5y)/(x+y), 可算(x 换成 y);

17. 选 D

解题思路:x、y、120 的中位数是 100, 且 x<y, 如果 x 是中位数=100, 那么 x=100<y<120, y 才是中位数。 因此,只可能 v 是中位数=100, 此时 x<100 即可,无法判断与 90 的大小关系

18. 选 D

解题思路:正 n 边形的每个内角=[(n-2)×180]/n=180-(360/n), n 越大,每个内角越大。正 n 边形有 n 个内角,正 n+1 边形有 n+1 个内角,前者的内小于后者的内角,整组数据从小到大排列,一共 2n+1 个内角,中位数为从小到大第 n+1 个角,为正 n+1 边形的内角,正四边形的内角=90°,正五边形的内角=108°......因此这个角的度数与 90°的大小关系无法判断

19. 选 D

解题思路:5 个整数的中位数是 60,中位数之外的其他四个数均在 50 和 70 之内(包含两端),求这 5 个数字的和可能是几。5 个整数的中位数是从小到大排第 3 个,那么——

5 个数字中有 2 个在 50 和 60 之间, 和在 100 与 120 之间

5 个数字中有 2 个在 60 和 70 之间, 和在 120 与 140 之间

那么所有数字的和的取值范围在 100+60+120=280 与 120+60+140=320 之间

20. 选

解题思路:数列 M 中有 15 个数字,其中 8 个大于 50.4, 8 个小于 54.6, 中位数 m 的取值范围在 50.4 与 54.6 之间. 无法判断与 52.4 的大小关系

21. 选B

解题思路:a<b<c<d, 那么四个数字的中位数=(b+c)/2, 判断与(a+b)/2 的大小关系 QA-QB=(a-c)/2<0, QA<QB

22. 填15

解题思路: 极差 18, 最小值-3, 那么最大值 15

23. 填 20

解题思路:一组数据都加一个数字, range 不变;都乘一个数字 2, range 也会乘以这个数字。本题目中乘以 2 会使极差变为原先的二倍,但是同时加 3 并不会影响极差。

24. 填 48

解题思路: r+s+t 最小可能为 41+42+43=126,最大可能为 57+58+59=174,极差=174-126=48

25. 填60

解题思路: $(x-y)^2$ 的极差,取决于|x-y|的极值——

已知 4≤x<7<y≤12, 且 x 与 y 均为整数

要使|x-v|极小, x 与 y 要尽量接近, x=6, y=8, 此时|x-v|=2, (x-v)²=4

要使|x-y|极小, x = 5 要尽量原理, |x-4| |y-12| 此时|x-y| = 8, $|(x-y)|^2 = 64$

因此. (x-v)²的极差=64-4=60

26. 填8

解题思路: 从集合 A 与 B 中分别取一个数字然后求和得到新的数列,这个数列中最大值=5+10=15,最小值=1+6=7,因此极差=15-7=98

27. 选B

解题思路:集合当中的每个数字加 5, 极差不变 ;集合当中的每个数字增加 1.5%, 极差变大成原来的 1.015 倍, 变大

28. 填 2

解题思路: 25 个整数都在 1 和 10 之间,且平均值为 9,除了最小值之外的 24 个值的平均值为 217,那么最小值=9×25-197=8,要想整组数据的平均值为 9,肯定需要有 10,那么整组数据的极差=10-8=2

29. 选 AB

解题思路: f 和 23 都有可能是全班最小值,m 和 44 都有可能是全班最大值,极差就是最大值减去最小值

30. 选=填3.75

解题思路:

 $0.5^{-2}=4$

 $0.5^{-1}=2$

 $0.5^{\circ}=1$

 $0.5^{1}=0.5$

 $0.5^2 = 0.25$

这组数据当中, 最小值 0.25, 最大值 4, 极差 3.75

31. 选 D

解题思路: 这组数据当中——

最小值最小是 10, 最大值最大是 59, 极差最大是 49;

最小值最大是19,最大值最小是50,极差最小是31;

因此, 极差无法与 40 比大小

32. 选 D

解题思路: 这组数据的极差为 37. 那么

- 最小值可能是 10、最大值是 47、补充进去 11 和 43 两个数据之后极差仍为 47-10=37
- 最小值可能是 11,最大值是 48,补充进去 11 和 43 两个数据之后极差仍为 48-11=37
- 最小值可能是 12、最大值是 49、补充进去 11 和 43 两个数据之后极差为 49-11=38
- 最小值可能是 13、最大值是 50、补充进去 11 和 43 两个数据之后极差为 50-11=39

33. 选 C

解题思路: 一个数列的平均值 20, 标准差 0, 说明整组数据不离散均为 20, 那么极差为 0

34. 选 D

解题思路: 如果这三个数据同减去 45000 之后, 更加靠近平均值, 那么整组数据变得更加集中, 标准差变小; 如果这三个数据同减去 45000 之后, 更加远离平均值, 那么整租数据变得更加离散, 标准差变大

35. 填 23

解题思路: y 相对于 x, 相当于给每个 x 同时乘以 5, 再同加 30, 同乘 5, 标准差变成原来的 5 倍, 4.6×5=23, 同加 30 标准差不变, 仍为 23

36. 选 A

解题思路: 两组数据的平均数均为 16, 但是明显第一组数据中 13 和 19 离平均数 16 更远, 第二组数据中 15 和 17 相对而言离平均数 16 更近, 因此 A 更加离散, 标准差更大

37. 选 A

解题思路: 500、600、900、1200 的平均值为 800, B 集合恰好补充了 800 进去, 而 A 集合补充了 700 进去, 相对而言更加离散

38. 选 C

解题思路:

8~44(包含两端)的偶数包括 8、10、12、·····、42、44 23~59(包含两端)的奇数包括 23、25、27、······57、59 对比发现给第一组数据同加 15 可以得到第二组数据

39. 选 D

解题思路: 7个数字的极差 4,中位数 m,比中位数小的最大值为 m-3 当这 7个数字为 m-3, m-3, m-3, m, m+1, m+1 时,平均值 < m 当这 7个数字为 m-3, m, m, m, m+1, m+1 时,平均值 = m 有小有等,无法判断与 0 的固定大小关系

40. 选 ABC

解题思路: 三家公司的股价分别为 x, 2x, x+2 (x>2) 要求判断哪个补充条件可以帮助判断 x

A选项,平均值知道后,总和已知,x+2x+x+2已知,可以计算x

B 选项, 因为 x>2, 所以 x<x+2<2x, 中位数知道后, 也即 x+2 知道, 可以计算 x

C 选项, 因为 x>2, 所以 x<x+2<2x, 极差知道后, 也即 2x-x 知道, 可以计算 x

41. 选 D

解题思路:数列 R 与数列 S 均包含 100 个数字,且其中有 50 个重合,R 的平均值比 S 的小,判断两个数列中位数的大小关系

假如两个数列从小到大排列后,前后 25 个数字重合,中间的 50 个数字都不一样,中位数大小关系无法判断假如两个数列从小到大排列后,中间 50 个数字重合,那么中位数肯定相等(均为第 50 个数字与第 51 个数字的平均值)

42. 选 ABCDE

解题思路: 7 个数字的平均值为 13,和为 7×13=91=7+11+15+19+23+x+y,那么 x+y=16——

1+15=16、整组数据的中位数为从小到大排列第4个,为15

2+14=16,整组数据的中位数为从小到大排列第4个,为14

3+13=16、整组数据的中位数为从小到大排列第4个、为13

4+12=16,整组数据的中位数为从小到大排列第4个,为12

5+11=16, 整组数据的中位数为从小到大排列第4个, 为11

6+10=16, 整组数据的中位数为从小到大排列第 4 个, 为 11

7+9=16,整组数据的中位数为从小到大排列第4个,为11

8+8=16、整组数据的中位数为从小到大排列第 4 个,为 11

43. 选B

解题思路:集合 A 包含 5 个数字,中位数 m,最大值与 m 的差距为 6,最小值与 m 的差距为 2 让每个数字尽量小,这 5 个数字可以是 m-2, m-2, m, m, m+6, 平均值依旧>m 因此,这组数据的平均数恒大于 m

44. 选 ABC

解题思路: × 从 12 增加到 14 之后——

平均值肯定会发生变化

众数从原来的 12 变成了 14

每个数据离平均值相对而言更远, 标准差变大

45. E

解题思路: 7 个整数的中位数(从小到大第四个)为 10,平均值为 9 (和为 63),众数唯一为 2,求最大数字可以是几,那么就要让其他数字尽量小,这样的话,这 7 个整数可以是

- 1、2、2、10、11、12、X, 此时 X=63-1-2-2-10-11-12=25
- 2、2、2、10、10、11、X, 此时 X=63-2-2-10-10-11=26

因此,最大值可以是26

2.3 计数法专题

2.3.1 集合

[专项练习]

答案&解析

1. 填13

解题思路: 23 位学生上数学课, 28 位学生上科学课, 一共 45 位学生, 7 位二者都不上, 那么要么上数学, 要么上科学, 要么都上的人数=45-7=38, |A∪B|=38=|A|+|B|-|A∩B|=23+28-|A∩B|, 二者都上的人数|A∩B|=13

2. 填 1100

解题思路:一共 2500 位乘客,其中 1250 人去过巴黎,900 人去过伦敦,2500×30%=750 人两个城市都去过,那么要么去过巴黎,要么去过伦敦,要么都去过的人数|A∪B|=1250+900-750=1400,因此两个城市都没去过的人数=2500-1400=1100

3. 填 28.4

解题思路:一家公司里,54.6%的雇员认为薪酬是最重要的激励,47%的雇员认为升职是最重要的激励,30%的人认为二者都重要,那么认为要么薪酬重要,要么升职重要,要么二者都重要的人占比|A∪B|=54.6%+47%-30%=71.6%,认为二者都不重要的人占比=1-71.6%=28.4%

4. 填10

解题思路:在调查中,40%的受访者更倾向狗,30%的受访者更倾向猫,40%的受访者二者都不倾向,那么要么倾向猫,要么倾向狗,要么二者都倾向的占比|A∪B|=1-40%=60%,而|A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|=40+30-|A∩B|,解得|A∩B|=10%

5. 填10

解题思路:在一个班里,会说西班牙语的人数 40,会说法语的人数 30,会说西班牙语的 40 人当中,一半也即 20 人不会说法语,那么另外 20 人西班牙语法语都会说,一共 30 人会说法语,其中 20 人西班牙语法语都会说,那么只会说法语的人数=30-20=10

6. 填 20

解题思路 :68 位养猫、或者狗、或者都养|A∪B|的受访者中,48 位养狗,34 位养猫,而|A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|, 也即 68=48+34-|A∩B|,解得既养猫又养狗的人数|A∩B|=14,34 位养猫,其中 14 位既养猫又养狗,那么之养 猫不养狗的人数=34-14=20

7. 选 B

解题思路:一共 50 人,其中 20 人参加 A 俱乐部|A|,一定人数参加 B 俱乐部|B|,求哪个选项单独能够帮助确定多少人没参加 A 俱乐部但是参加了 B 俱乐部(也即|B|- $|A \cap B|$)

A 选项,参加 B 俱乐部的人数即使知道,不知道交集部分多少,无法确定多少人没参加 A 俱乐部但是参加了 B 俱乐部;

B 选项,两个俱乐部都没参加(即补集)的人数知道后,全集-补集可以算并集|A∪B|,而|A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|, |A|已知,|A∪B|已知,那么|B|-|A∩B|可以算,也即单独能够帮助确定多少人没参加 A 俱乐部但是参加了 B 俱乐部

C 选项,参加 A 但没参加 B 的人数知道后,可以计算 AB 都参加的人数,但是不知道多少人要么参加 A,要么参加 B,要么都参加 (也即|A∪B|),进而也就无法利用容斥原理计算参加 B 的人数,再计算只参加 B 没参加 A 的人数

8. 选 B

解题思路:从 1 到 100, 3 的倍数有 3×1······3×33, 一共 33 个

从 1 到 100, 7 的倍数有 7×1······7×14, 一共 14 个

从 1 到 100, 既是 3 的倍数又是 7 的倍数有 21×1·····21×4, 一共 4 个

那么,从1到100,要么是3的倍数,要么是7的倍数,要么都是的数字有33+14-4=43个

因此. 从1到100. 既不是3的倍数也不是7的倍数的数字有100-43=57个

9. 填30

解题思路:60 位学生中,30 人选了 A 课|A|, 50 人选了 B 课|B|, 两门课都选的人数|A ∩ B|最多为 30, 也即 30 个选了 A 课的人也都选了 B 课, 不可能更多(小集合包含于大集合时)

10. 填 7/12

解题思路:一个班里,3/4 的人上化学课,5/6 的人上生物课,学生可能两门课都不上,求那么两门课都上的人占比起码是多少。 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,当 $|A \cup B| = 1$ 时, $|A \cap B|$ 取到最小值, $1 = 3/4 + 5/6 - |A \cap B|$,解得 $|A \cap B| = 7/12$,不能更小

11. 填 160

解题思路:500 位受访者均被问两个问题,只能回答 "是" 或 "否"。440 人对第一个问题回答 "是" |A|, 220 人对第二个问题回答 "是" |B|, 当|A∪B|取到最大值 500 时,|A∩B|取到最小值, 500=440+220-|A∩B|, 解得 |A∩B|=160, 也即起码有 160 人对两个问题都回答 "是",不能更少

12. 选 A

解题思路:一共 20 首歌,M 标记 15 首为喜欢,S 标记 12 首为喜欢,求二者都标记为喜欢的歌曲数的取值范围。 $|A \cup B| = 20 = |A| + |B| - |A \cap B|$ 时, $|A \cap B|$ 取到最小值,不能更小,也即 20=15+12- $|A \cap B|$, $|A \cap B| = 7$,当 S 包含于 M 时,交集最大为 12,因此 $|A \cap B|$ 的取值范围在 7 和 12 之间,不可能是 6

13. 选 D

解题思路:一家公司里,1/3 的雇员为女性|A|,1/2 的雇员有大学学历|B|,求所有人当中女雇员且有大学学历的百分比 $|A\cap B|$

A与B集合不重合时, IA∩BI取到最小值0;

A 集合包含于 B 集合时, |A∩B|取到最大值 1/3

在这个范围内的值都有可能

14. 填 3/7

解题思路:一共 210 个学生,其中 160 上物理,80 上化学,60 上生物,学生不可能同时上所有三门课,求上两门课的学生的占比。假设有 x 人上两门课,那么 160+80+60-x=210, x=90,因此这些学生占比 90/210=3/7

15. 填 9

解题思路:一共 10 天, C上过 8 天课, S上过 7 天课, A上过 6 天课, 三人只有一天同时上课, 求任意两人同时上课的天数。三人一共出席了 8+7+6=21 天, 其中有 1 天三人都出席, 减去这 3 天, 那么三人在剩下 9 天理一共上了 18 节课, 只能是这 9 天里每天 2 人上课, 一共上这剩下的 18 天课

16. 填 4

解题思路:S 集合包含 n 个数字,一共有 6 个包含两个元素的子集,也即 C (n, 2) =6,解得 n=4

17. 选 D

解题思路:一些多边形当中(假设 100 个),80%是六边形(也即 80 个) |A|,这些六边形当中,20%是正六边形(也即 80×20%=16 个),也即正多边形 16 个|B|,那么多边形当中,由于 B 集合包含于 A 集合,表面看起来要么六边形,要么正多边形,要么都是|A∪B|=|A|=80 个,那么 100 个多边形当中既不是六边形,也不是正多边形的多边形的个数=100-80=20 个,占比 20/100=20%>16%。但是,并不知道剩余 20%当中是否还有正多边形,如果过的话还需要进一步排除,占比可能小于 20%,因此无法判断大小关系。

2.3 计数法专题

2.3.2 数列

[专项练习]

答案&解析

1. 选 B

解题思路: 等差数列的公差 d=3,通项公式为 a_n= a₁+(n-1)×3,因此—— a₁₇= a₁+(17-1)×3= a₁+48=55 a₉₈= a₁+(98-1)×3= a₁+291= a₁+48+243= a₁₇+243=55+243=298<300

2. 填7650

解题思路:等差数列当中,a₁=6,d=6,那么 a_n= 6+(n-1)×6=6n 因此,300=6×50=a₅₀ 故 S₅₀=[(a₁+a₅₀)×50]/2=7650

3. 选 A

解题思路:A、B细菌初始均为5000——A每小时翻倍,变成上一小时的2倍; B每小时增加50%,变成上一小时的1.5倍; 很明显,A增速更快

4. 选 A

解题思路:等比数列当中, r_1 =1,公比 q=1/5,通项公式为 r_n =(1/5)ⁿ⁻¹,因此——QA= r_5 =(1/5)⁴ QB= $625 \times r_{10} = 5^4 \times (1/5)^9 = (1/5)^5$

5. 填 8/27

解题思路:高度第二题比前一天增加前一天的 1/2,也即增长为前一天的 3/2 倍,因此高度呈等比数列排列,假设 a_1 =x,公比 q=3/2,那么通项公式 a_n = $x(3/2)^{n-1}$ 第四天的高度 a_4 = $x(3/2)^{4-1}$ 第七天的高度 a_7 = $x(3/2)^{7-1}$ 故 a_4/a_7 = $(3/2)^3/(3/2)^6$ = $1/(3/2)^3$ =8/27

6. 填 4000

解题思路: 剧院里, 12:55 的时候有 250 位观众, 剧 14:15 开始, 从 12:55 到 14:15 开始前 (期间一共 80 分钟)

观众人数每 20 分钟翻倍,呈等比数列, a_1 =250,公比=2,那么通项公式 a_n =250× 2^{n-1}

20 分钟后, a₂=250×2²⁻¹

40 分钟后,a₃=250×2³⁻¹

60 分钟后,a₄=250×2⁴⁻¹

80 分钟后,也即开演前一刻,a₅=250×2⁵⁻¹=4000

7. 填11

解题思路:代入 a_n= d×a_{n-1}-c 得——

a₃= d×a₂-c, 也即 14=4d-c

a₄= d×a₃-c. 也即 64=14d-c

联立解得 d=5, c=6, 那么 c+d=11

8. 填15

解题思路:每一项是前一项平方之后再乘以 12, $a_1=1$, 那么 $a_{=2}=12$, $a_3=12\times(12)^2=(12)^3$, $a_4=12\times[(12)^3]^2=(12)^7$, $a_5=12\times[(12)^7]^2=(12)^{15}$

9. 填7645

解题思路:代入 Sn=6nS1, S1=1, 那么

 $S_2=6\times2\times1$

 $S_3=6\times3\times1$

 $S_4=6\times4\times1$

.....

 $S_{50}=6\times50\times1=300$

也即, S₁+ S₂··· + 300= S₁+ S₂··· + S₅₀

 $S_1 + S_2 + S_{50} = 1 + 6 \times (2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 49 + 50)$

 $2+3+4+5+\cdots+49+50=(2+50)\times49\div2=1274$

故 S₁+ S₂··· + S₅₀= 1+6×1274=7645

10. 选 C

解题思路:

当 n 是偶数时, a_n=a_{n-1}+2,

当 n 是奇数时, a_n=a_{n-1}-8

代入分段函数得

 $a_1 = 6$

$$a_2 = a_1 + 2 = 8$$

$$a_3 = a_2 - 8 = 0$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 2$$

$$a_5 = a_4 - 8 = -6$$

$$a_6 = a_5 + 2 = -4$$

$$a_7 = a_6 - 8 = -12$$

2.3 计数法专题

2.3.3 阶乘、乘法原理、排列与组合

[专项练习] 答案&解析

1. 选B

解题思路: 5!-4!= 4!× (5-1) =4!×4>4!

2. 选 B

解题思路:

3>2>1 时, (n-k)!=1, n!-k!=4, QA<QB 4>2>1 时, (n-k)!=2, n!-k!=22, QA<QB 随着 n 与 k 的差距增加, QB 只会相对 QA 变得更大 即使 n 与 k 的差距为最小值 1, QB 仍然比 QA 大 故 QB 恒大于 QA

3. 选 25³×10⁴

解题思路:不能使用字母 O,还剩 25 中选法,字母和数字都可以重复使用,所以一共有 $25^3 \times 10^4$ 种构成方法

4. 填100

解题思路:一共有 10 位,只记得前 8 位,最后两位不知道,电话号码每位可以从 0-9 选,10 种可能,一共有 10×10=100 种变化,最不幸的情况,尝试了 100 次才猜对正确号码

5. 填 188

解题思路:设三个组的名称分别为 ABC,有三种情况:AB, AC 和 BC, 总情况数是 8×6+8×10+6×10=188

6. 填 48

解题思路:5 个旗帜颜色不同,要求最中间为红色或者绿色,有 2 种排法,其他 4 个旗帜全选全排安排在剩下四个位置有 A(4,4)种排法,因此一共有 2×A(4,4)=48 种排法

7. 填12

解题思路:第一行有 A (3, 3) 中排法, 第二行有 2 种排法, 第一第二行确定后, 第三行只有 1 种确定的可能, 因此一共有 A (3, 3) ×2×1=12 中办法

举例——

第一行:abc abc 第二行:bca cab 第三行:cab bca

8. 填55

解题思路:8选4有C(8, 4)种选法,6选4有C(6, 4)种选法,二者相差C(8, 4)-C(6, 4)=55

9. 选

解题思路:从 2、6、8、12 四个数字中选两个乘起来,可以构成 C(4, 2) = 6 种不同的积,再加上选 0 与任何数字构成的积 0,一共有 7 种不同的可能的积

10. 填6

解题思路:列举法——

666

667

676

677

766

767

11. 填6

解题思路:210=2×3×5×7

其因数当中,由两个质数乘起来构成的有 C(4,2)=6 个

12. 填 120

解题思路:从8种A里选1个,从6种B里选2个B,一共有C(8,1)×C(6,2)=120种办法

13. 填10

解题思路:6 个相同球放入 4 个不同瓶子里,至少每个瓶子放 1 个,那么只需要考虑剩下 2 个怎么放从 4 个瓶子里选 1 个,把这剩下 2 个球全部放进去,有 C (4, 1) = 4 种选法;

从 4 个瓶子里选 2 个, 把这剩下 2 个球分别放 1 个进去, 有 C (4, 2) = 6 种选法;

因此一共有 10 种选法

14. 填9

解题思路:只有 0.7+1.3+1.7=3.7 没有超过 4, 其他所有可能性和都会超过 4, 因此一共有 C (5, 3) -1=9 种可能性

15. 填21

解题思路:2、7、5 三个数字形成一个三位数,使得至少 1 个数字用了至少 1 次,反着算最快—— 所有可能性 3×3×3=27 种

其中每个数字都使用1次有A(3,3)=6种可能性

那么至少1个数字用了至少2次的可能性=27-6=21种

16. 选 D

解题思路:一共 40 个 DVD, 其中 17 张有关心理学, 14 张有关生物学, 9 张有关历史。但是, 要求这 9 张历史 DVD 整体而言按时间排序。

方法一:

- 1) 首先就按照年代排好这 9 个 DVD, 9 张 DVD 之间形成了 10 个空隙, 随便挑 1 个空隙放进去历史 DVD 之外的其他一张 DVD, 有 10 种方法;
- 2) 放好后,这 10 张 DVD 之间形成了 11 个空隙,随便挑 1 个空隙再放进去历史 DVD 之外的其他一张 DVD,有 11 种方法;……

以此类推, 之后逐渐有 12 种、13 种·····40 种放法, 因此总共有 40×29×38·····×10=40 ! /9! 种放法;

方法二:

- 1) 首先, 这 40 张 DVD 全排 A (40, 40) =40!;
- 2) 但是,仔细分析后发现,假如其他31张DVD已排好固定,这9张历史DVD还可以进行A(9,9)种内部调整变化;
- 3) 而本题中要求这 9 张历史 DVD 整体而言,从左到右必须按照时间顺序排列,所以不需要他们进行内部调整变化,因此需要除掉这 9 张 DVD 内部调换顺序的 A(9, 9)=9! 种情况;

故实际的不同排法只有40!/9!种。

17. 填30

解题思路:五位密码由特殊字符组成,其中包含 1 个@、两个\$、两个#,假设五个字符全部不同,一共有 5 ! 种排法,但是其中两个\$相同,只剩 5 ! /(2 ! $)^2$ = 30 种排法。

18. 填63

解题思路:7 支球队,每支球队与所有其他 6 支队伍都要对决,每次对决进行 3 局决胜负,那么一共要进行 C (7, 2) =21 次对决,每次对决进行 3 局,因此一共需要进行 21×3=63 局比赛

19. 填 18

解题思路:7 支球队,每支球队与所有其他 6 支队伍都要对决,每次对决进行 3 局决胜负,那么每支队伍一共要进行 6×3=18 局比赛

2.4 概率专题

[专项练习] 答案&解析

1. 填 1/1225

解题思路: 50 个零部件中, 2 个是坏的, 随机选 2 个的总可能性 C (50, 2), 正好选的 2 个都是坏的的可能性 C (2, 2) =1, 因此概率=1/C (50, 2) =1/1225

2. 填 4/9

解题思路:十位能被 2 整除的两位数有 4×10=40 个,占所有两位数的比例=40/90=4/9

3. 填 3/5

解题思路: 首先,列出二元一次方程组:a+b=20, 0.2a+0.4b=5.6,解得 a=12, b=8 任取一个取到 a 的概率就是 12/20=3/5

4. 填 271/1000

解题思路: 假设从 000 到 999 (包含两端), 在所有 10×10×10=100 种可能性中, 所有数位上都没有 6 的可能性=9×9×9=729, 概率=729/1000, 那么至少有 1 个 6 的概率=1-729/1000=271/1000; 转换成从 001 到 1000, 总可能性不变仍为 1000, 所有数位上都没有 6 的可能性, 少了 000, 多了 1000, 所以仍然为 729 个, 那么至少有 1 个 6 的概率仍然等于 271/1000

5. 填 3/5

解题思路: 盒子里 5 个球, 1 个红球, 4 个绿球, 随机挑 2 个, 一共有 C (5, 2) = 10 种可能性, 其中 2 个正好都是绿球的可能性=C (4, 2) = 6, 因此概率=6/10=3/5

6. 填 2000/23751

解题思路: 总可能性 C (30, 5), 正好选中 3 红 1 黑 1 黄的可能性 C (10, 3) ×C (10, 1) ×C (10, 1), 因 此概率= C (10, 3) ×C (10, 1) ×C (10, 1) / C (30, 5) = 2000/23751

7. 填 1/3

解题思路: 100 到 159 (包含两端) 一共有 159-100+1=60 个数字, 其中十位不大于 3, 个位不大于 4 的数字 有 4×5=20 个, 因此概率 20/60=1/3

8. 填

解题思路: T集合均为负数,要想乘积为正,只要在 R集合选了负数即可,R集合中选中负数的概率=3/7,故乘积为负数的概率=3/7

9. 填 5/14

解题思路: 8 个学生中,5 个是女生。随机选 2 个,任命他们为班长和副班长,求两个选中的学生恰好都是女生的概率。总可能性事件 C(8, 2)=28,正好选中 2 个女生的可能性 C(5, 2)=10,因此概率=10/28=5/14

10. 填 1560/9900

解题思路: 总可能性 C (100, 40), 正好选中 A 与 B, 那么关键在于其他 38 个人是谁, 从 A 与 B 之外剩下的 98 个人中选了哪 38 个人 C (98, 38), 因此概率= C (98, 38) / C (100, 40) =1560/9900

11. 填 2/9

解题思路:一个三位数的每一位都可以被 3 整除,能被 3 整除的数位上的数字有 3、6、9,一共有 3×3×3=27个这样的三位数,其中,3 与 9 是奇数,6 是偶数,因此十位是奇数,百位是偶数的可能性有 1×2×3=6,故概率=6/27=2/9

12. 选 C

解题思路: 700 个成员中, 120 个是律师, 随机选 2 个, 总可能性 C (700, 2), 2 个都不是律师的可能性 C (580, 2), 概率= (580, 2) / C (700, 2) ≈ 0.68, 最接近 0.7

13. 填 4/9

解题思路:

- 方法一:要想这个三位数大于600,只要保证百位是从1-9里选了6、7、8、9即可,概率4/9;
- 方法二:考查古典概率,首先确认分母总可能性事件=A(9,3),然后确定分子这个三位数大于600的可能性。大于600,说明百位只能6,7,8,9这四个里选一个,C(4,1),然后两个数字从剩下的随便选,与顺序有关,A(8,2),所以总可能性是C(4,1)×A(8,2),概率=C(4,1)×A(8,2)/A(9,3)=4/9。

14. 选 B

解题思路: 考察概率范围和函数。将 Quantity A 中的代数式看做一个定义域为[0, 1]的函数,求出值域即可:

$$y = p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4} < 0.4$$

15. 填 3/10

解题思路: 设发生的概率为 x, 由题目定义可列式子 x/(1-x)=3/7, 解得 x=3/10

16. 选 DE

解题思路: 每个大炮射中的概率为 0.6,不射中的概率为 0.4,x 个大炮同时射击都不中的概率= $(0.4)^{-x}$,那 么 x 个大炮同时射击至少中 1 次的概率=1- $(0.4)^{-x}$ >0.99,也即 $(0.4)^{-x}$ <0.01,解得 x 至少取 6,那么 7 也可以

17. 选 C

解题思路: A和B是独立事件, A发生的概率=B发生的概率

QA 求 B 不发生时 A 发生的概率,由于 A 与 B 为独立事件,相互不影响,那么无论 B 发不发生,A 发生的概率都是 0.3

18. 填 3/8

解题思路: 盒子里有 10 个红球 6 个蓝球,志愿者不放回随机拿两个球,球两个球都是红球的概率。第一次是红球的概率 10/16,第一次是红球时,第二次是红球的概率 9/15,故两次都是红球的概率=10/16 × 9/15=3/8

19. 填 3/8

解题思路: T 盒子里有 20 白球 30 黑球,选中白球的概率 20/50=2/5;设从 U 盒子里选中白球的概率为 x,则 x · 2/5 =0.25,解得 x=5/8,那么从 U 盒子里选中黑球的概率=1-5/8=3/8

20. 填 1/2

解题思路: 盒子里有 10 个红球 6 个蓝球,一个人不放回拿两个出来,求两个球颜色不同的概率

红&蓝: 10/16 × 6/15=1/4 蓝&红: 6/16 × 10/15=1/4 因此.总概率=1/4 + 1/4=1/2

21. 选 C

解题思路: 盒子里 7 个球,其中 1 个红球,,某人不放回连续抽球出来直至抽到红球。比较第三次才抽到红球与第四次才抽到红球的概率。

QA 第三次才抽到红球的概率:6/7 · 5/6 · 1/5=1/7

QB 第四次才抽到红球的概率: 6/7 · 5/6 · 4/5 · 1/4=1/7

22. 选 C

解题思路: 10 个球对应整数 0 到 9, 不放回随机抽

QA 第一次抽到 5 的概率: 1/10

OB 第二次抽到 5 的概率: 9/10 × 1/9=1/10

23. 选 A

解题思路: 盒子里有 1 个红球,4 个紫球,95 个绿球,某人随机抽两个——

QA 两次当中有一次抽到红球的概率

• 红&非红:1/100 × 99/99=1/100

• 非红&红:99/100 × 1/99=1/100

故两次当中有一次抽到红球的概率=1/100 + 1/100=1/50

QB 两次都是紫球的概率: 4/100 × 3/99=1/825

明显 QA>QB

2.5 正态分布专题

[专项练习] 答案&解析

1. 选 A

解题思路: 正态分布当中, 平均数 56, 标准差 4, 60 与 62 之间, 62 与 64 之间岁差都差距为 2, 但是越靠近平均值分布数据越多, 因此 QA>QB