

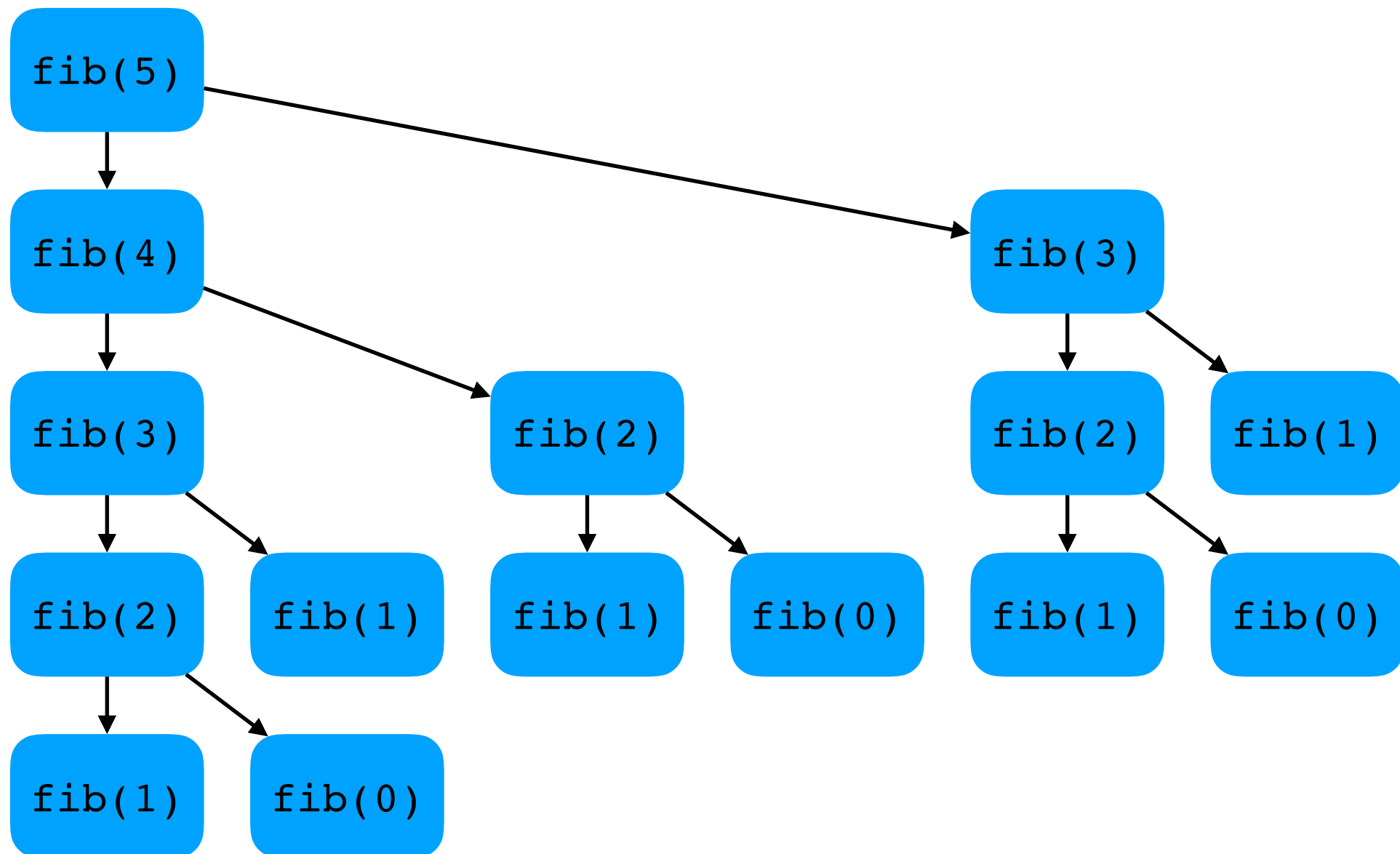
Laboratórios de Algoritmia II

Teórica 3

Fibonacci

```
def fib(n):  
    if n<2:  
        return 1  
    else:  
        return fib(n-1)+fib(n-2)
```

Fibonacci



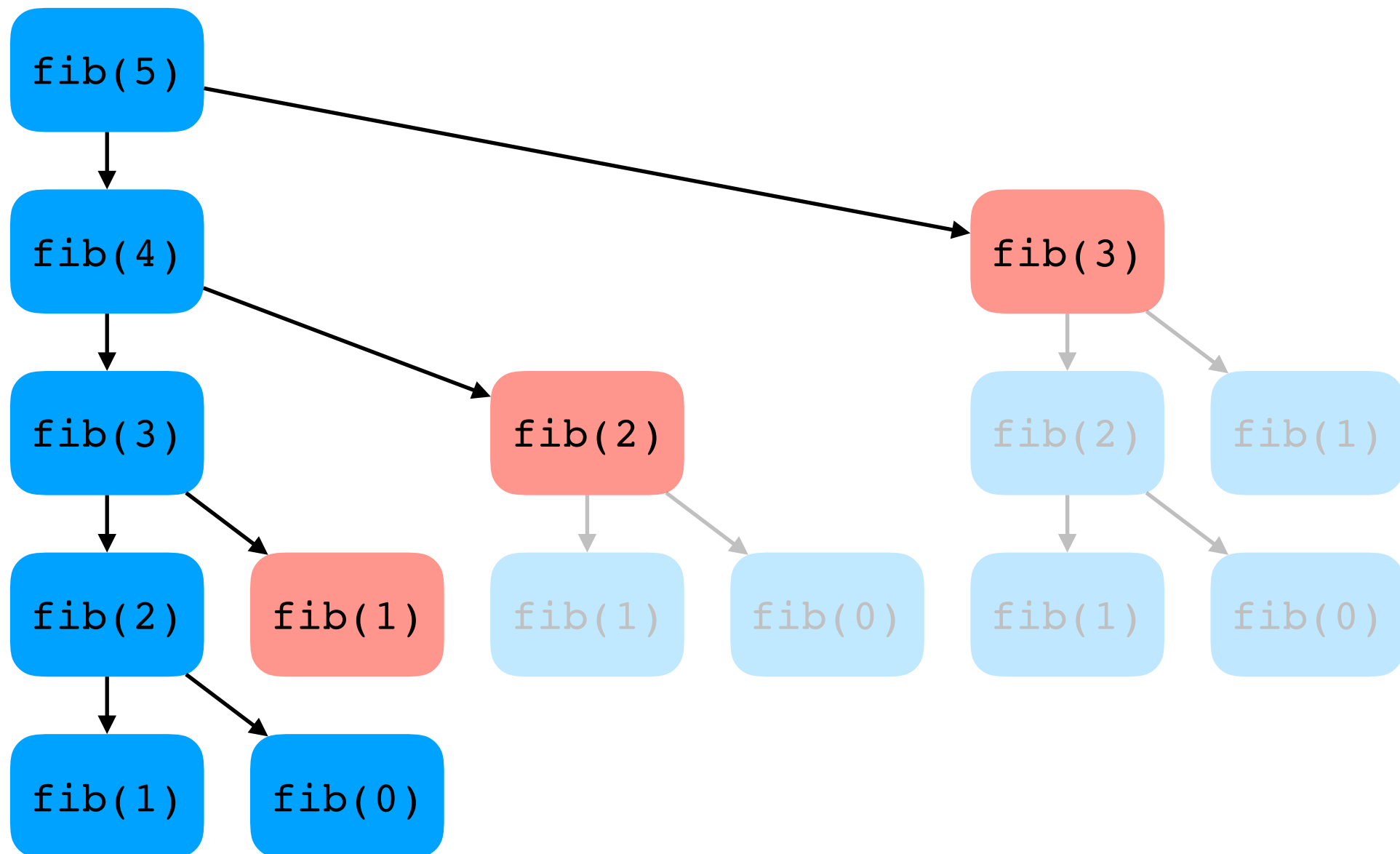
Fibonacci

- Definição naturalmente (bi-)recursiva
- Definição muito ineficiente: tempo $O(2^n)$, espaço $O(n)$
- Não pode ser usada na prática
- Muitas invocações com o mesmo input
- Oportunidade para aplicação de *memoization*

Fibonacci com *memoization*

```
def fib(n):  
    return aux(n, {})  
  
def aux(n, m):  
    if n in m:  
        return m[n]  
    if n < 2:  
        m[n] = 1  
    else:  
        m[n] = aux(n-1, m) + aux(n-2, m)  
    return m[n]
```

Fibonacci com *memoization*



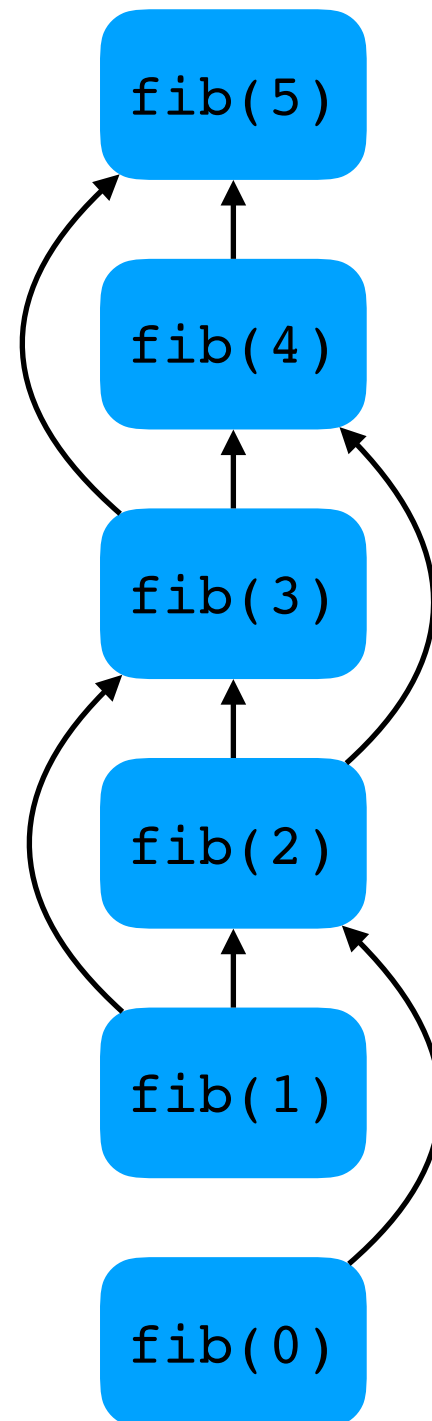
Fibonacci com *memoization*

- Usar um dicionário para *memorizar* cálculos já feitos
- Definição muito mais eficiente: tempo $O(n)$, espaço $O(n)$
- É possível otimizar mais?
- Calculando `fib(0)`, depois `fib(1)`, depois `fib(2)`, ...
- Garante-se que já estão no dicionário todos os resultados “recursivos” quando se vai calcular o próximo número da série
- E podemos usar iteração em vez de recursividade
- A esta otimização chama-se *programação dinâmica*!

Fibonacci com *programação dinâmica*

```
def fib(n):  
    m = {}  
    m[0] = 1  
    m[1] = 1  
    for i in range(2, n+1):  
        m[i] = m[i-1] + m[i-2]  
    return m[n]
```


Fibonacci com *programação dinâmica*



Fibonacci com *programação dinâmica*

- Definição ainda mais eficiente: tempo $O(n)$, espaço $O(n)$, mas constantes menores
- É possível otimizar mais?
- Não é necessário guardar no dicionário todos os valores previamente calculados
- Para calcular `fib(n)` apenas são necessários os 2 últimos resultados
- Se se apagar os resultados não necessários reduz-se a complexidade em termos de espaço para $O(1)$
- E nem é necessário usar um dicionário, bastam 2 variáveis inteiras

Fibonacci com *programação dinâmica*

```
def fib(n):  
    m = {}  
    m[0] = 1  
    m[1] = 1  
    for i in range(2, n+1):  
        m[i] = m[i-1] + m[i-2]  
        del m[i-2]  
    return m[n]
```

Fibonacci com *programação dinâmica*

```
def fib(n):  
    a = 1  
    b = 1  
    for i in range(2, n+1):  
        aux = b + a  
        a = b  
        b = aux  
    return b
```

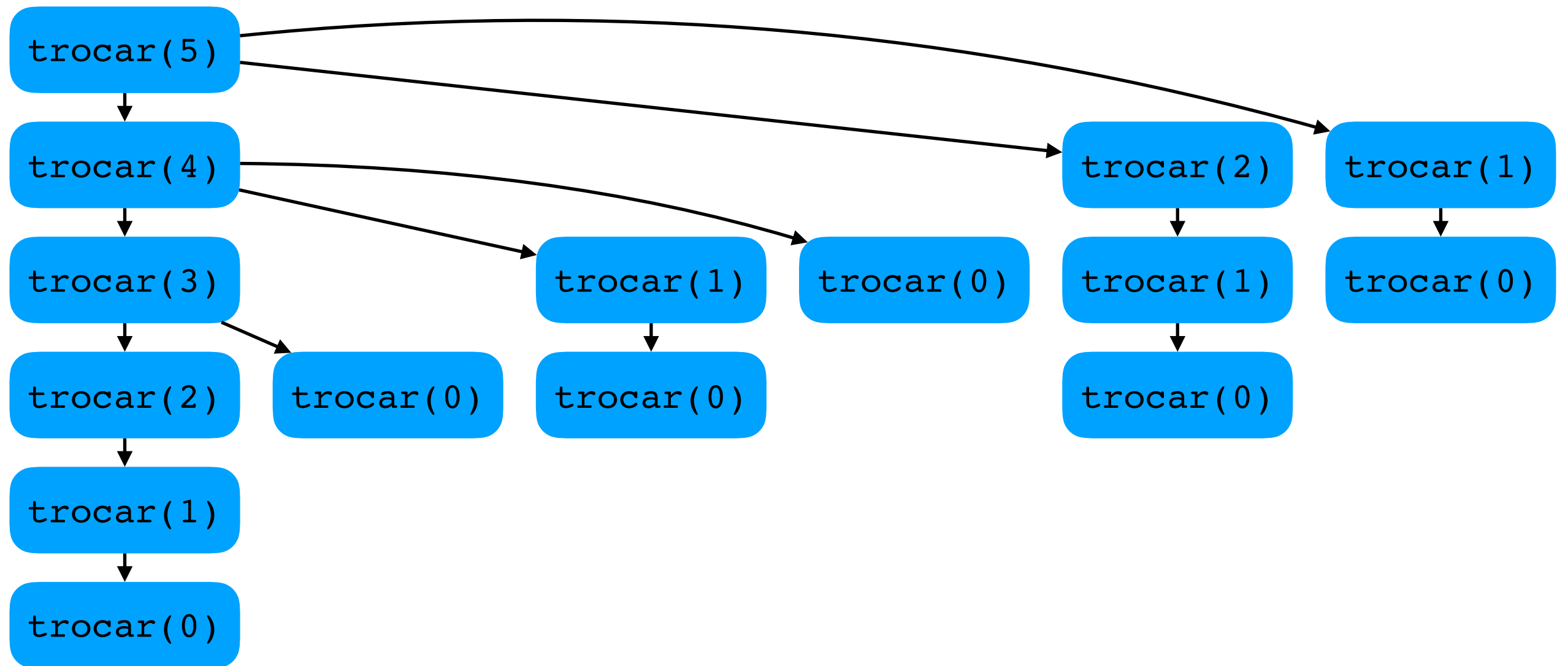
Trocar

- Como trocar uma quantia em moedas, minimizando o número de moedas?
- Assumindo um stock infinito de cada denominação
- Com sistemas de moedas canónicos pode-se adoptar uma solução *greedy*
- Se o sistema não for canónico esta estratégia não funciona (por exemplo trocar 6 com moedas de 1, 3 e 4)
- É possível formular uma solução recursiva elegante (mas ineficiente) para procurar a melhor solução

Trocar

```
def trocar(valor,moedas):  
    if valor==0:  
        return 0  
    r = float("inf")  
    for m in moedas:  
        if m <= valor:  
            r = min(r,1+trocar(valor-m,moedas))  
    return r
```

Trocar



Trocar com *memoization*

```
def trocar(valor,moedas):  
    return aux(valor,moedas,{})  
  
def aux(valor,moedas,d):  
    if valor in d:  
        return d[valor]  
    if valor==0:  
        d[valor] = 0  
        return 0  
    r = float("inf")  
    for m in moedas:  
        if m <= valor:  
            r = min(r,1+aux(valor-m,moedas,d))  
    d[valor] = r  
    return r
```


Trocar com *programação dinâmica*

```
def trocar(valor,moedas):  
    d = {}  
    d[0] = 0  
    for v in range(1,valor+1):  
        r = float("inf")  
        for m in moedas:  
            if m <= v:  
                r = min(r,1+d[v-m])  
        d[v] = r  
    return d[valor]
```

Trocar

- Como determinar quais as moedas a devolver?
- Pode-se guardar a melhor escolha para cada valor

Trocar com *programação dinâmica*

```
def trocar(valor,moedas):  
    d = {}  
    c = {}  
    d[0] = 0  
    for v in range(1,valor+1):  
        r = float("inf")  
        for m in moedas:  
            if m <= v:  
                a = 1+d[v-m]  
                if r > a:  
                    r = a  
                    c[v] = m  
        d[v] = r  
    t = {m:0 for m in moedas}  
    while valor > 0:  
        t[c[valor]] += 1  
        valor -= c[valor]  
    return t
```

Trocar com *programação dinâmica*

0	0
1	1
2	2
3	1
4	1
5	2
6	2
7	2
8	2
9	3
10	3

Distância de edição

- Qual o menor número de edições para transformar uma string noutra?
- Edições possíveis: remover um caracter, inserir um caracter, trocar um caracter por outro
- Por exemplo a distância entre "invention" e "execution" é 5
- "invention" "nvention" "evention" "exention"
"exection" "execution"
- Note que remoções e inserções são duais
- É possível formular uma solução recursiva elegante (mas ineficiente) para procurar a melhor solução

Distância de edição

```
def dist(a,b):  
    if a=='':  
        return len(b)  
    elif b=='':  
        return len(a)  
    elif a[0]==b[0]:  
        return dist(a[1:],b[1:])  
    else:  
        return min(1+dist(a,b[1:]),  
                    1+dist(a[1:],b),  
                    1+dist(a[1:],b[1:]))
```

Distância de edição com *memoization*

```
def dist(a,b):  
    return aux(a,b,{})  
  
def aux(a,b,m):  
    if (a,b) in m:  
        return m[(a,b)]  
    if a=='':  
        m[(a,b)] = len(b)  
    elif b=='':  
        m[(a,b)] = len(a)  
    elif a[0]==b[0]:  
        m[(a,b)] = aux(a[1:],b[1:],m)  
    else:  
        m[(a,b)] = min(1+aux(a,b[1:],m),  
                        1+aux(a[1:],b,m),  
                        1+aux(a[1:],b[1:],m))  
    return m[(a,b)]
```

Distância de edição com *memoization*

- Usar pares de strings como chaves não é muito eficiente
- É possível usar apenas os índices do caracteres que estão a ser analisados em cada momento
- Também é indiferente analisar as strings da esquerda para a direita ou ao contrário

Distância de edição com *memoization*

```
def dist(a,b):  
    return aux(a,len(a),b,len(b),{})  
  
def aux(a,i,b,j,m):  
    if (i,j) in m:  
        return m[(i,j)]  
    if i==0:  
        m[(i,j)] = j  
    elif j==0:  
        m[(i,j)] = i  
    elif a[i-1]==b[j-1]:  
        m[(i,j)] = aux(a,i-1,b,j-1,m)  
    else:  
        m[(i,j)] = min(1+aux(a,i,b,j-1,m),  
                        1+aux(a,i-1,b,j,m),  
                        1+aux(a,i-1,b,j-1,m))  
    return m[(i,j)]
```

Distância de edição com *programação dinâmica*

```
def dist(a,b):  
    m = {}  
    for j in range(len(b)+1):  
        m[(0,j)] = j  
    for i in range(len(a)+1):  
        m[(i,0)] = i  
    for j in range(1,len(b)+1):  
        for i in range(1,len(a)+1):  
            if a[i-1]==b[j-1]:  
                m[(i,j)] = m[(i-1,j-1)]  
            else:  
                m[(i,j)] = min(1+m[(i,j-1)],  
                               1+m[(i-1,j)],  
                               1+m[(i-1,j-1)])  
    return m[(len(a),len(b))]
```

