Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Informe Tarea 5

Nelson Soto Medina

Introducción:

En esta ocasión nos muestran la ecuación de Poisson en 2D para el potencial electrostático:

$$\nabla^2 V(x,y) = -\rho(x,y)$$

Para integrarla dentro de una "caja" rectangular de 10[cm] x 15[cm] conectada a tierra en el perímetro. Dentro de la caja hay una línea que cumple con la condición de borde:

$$\frac{dV}{dy} = \pm 1$$

Siendo 1 en la parte superior y -1 en la parte inferior de la línea, la cual está ubicada en y= -5.5, entre x= [-3, 3], siendo (0.0) el centro de la caja.

En la caja también debe colocarse una letra, la cual es la primera letra del nombre del alumno, en mi caso la N. Esta letra está en un espacio de 5[cm] x 7[cm] al centro de la caja.

Las letra debe cumplir que las líneas que la compongan deben tener un grosor de 1[cm]. Además de ser simples y que no tengan líneas curvas y diagonales preferentemente. Finalmente la letra debe cumplir:

$$Q = \int \rho(x,y)dxdy = 1[C]$$

Donde ρ es la densidad de carga, constante en el área de la letra. Esto quiere decir que la carga total contenida en la letra debe ser igual a 1 Coulomb.

Se pide realizar la integración con el método de sobre-relajación, probando distintos w (parámetro del método) y estudiar la cantidad de iteraciones para que converja.
El método para él caso general es, siendo h el reticulado y $G_{i,j}$ la carga asociada a la letra en tal punto:

$$V_{i,j} = (1-w)V_{i,j} + \frac{w}{4}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - h^2 G_{i,j})$$

El método para el caso con condición derivativa (de Neumann) cerca de la recta, con $g_{i,j-1}$ el valor de la condición (1 o -1):

$$V_{i,j} = (1-w)V_{i,j} + \frac{w}{3}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + hg_{i,j-1} - h^2 G_{i,j})$$

Y finalmente, para aplicar a la misma recta con condiciones:

$$V_{i,j} = V_{i,j-1} + hg_{i,j}$$

Con w entre [0, 2], con valores entre 1.2 y 1.4 recomendados.

Desarrollo del problema:

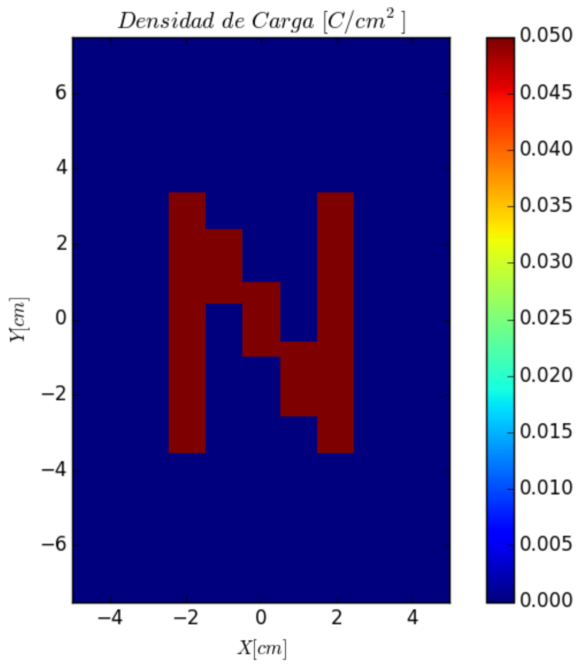
Una vez calculada el área de la letra manualmente, el que resulto ser un proceso simple, obtuve que la densidad de carga es $\rho = 0.05[\frac{C}{cm^2}]$

La forma de la letra la obtuve con el siguiente método:

```
def LetraN(a, b):
    x = a * h - 5
    y = b * h - 7.5
    if x >= -2.5 and x < -1.5 and y >= -3.5  and y < 3.5:
            return 0.05
    elif x >= 1.5 and x < 2.5 and y >= -3.5 and y < 3.5:
            return 0.05
    elif x >= -1.5 and x < -0.5 and y >= 0.5 and y < 2.5:
            return 0.05
    elif x >= -0.5 and x < 0.5 and y >= -1 and y < 1:
            return 0.05
    elif x >= 0.5 and x < 1.5 and y >= -2.5 and y < -0.5:
            return 0.05
    else:
        return 0
```

Donde a y b son índices iterativos dados. Cada par (a, b) es un punto dentro de la caja, y cuando se encuentra contenido en la letra, retorna el valor de la densidad.

La imagen de la letra obtenida es:



Donde se puede ver fácilmente la N y notar la densidad de carga en comparación al resto de la caja.

Posterior a esto, se define el método de sobre-relajación para distintos segmentos.

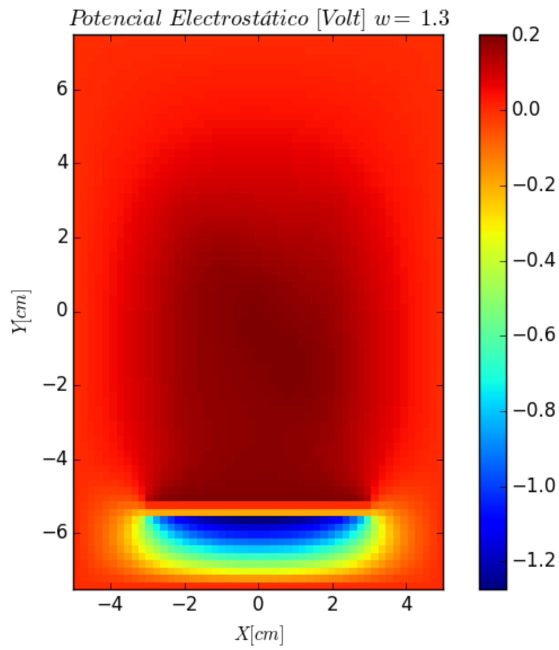
Para $X = [-5, -3]$ y $X = [3, 5]$ se utiliza el método normalmente. Para los otros casos se hacen distinciones dependiendo del Y.

Primero para Y desde -7.5 hasta un valor cercano a -5.5 se integra normalmente, luego se usa el método con condición derivativa hasta antes del punto -5.5.
En el -5.5 yo utilicé el método para la misma línea hacia ambas direcciones:

```
for j in range(10, 11):
    V[i][j] = V[i][j+1] - h
for j in range(11, 12):
    V[i][j] = V[i][j-1] + h
```

Donde en uno resto h y comparo con el de arriba y en otro sumo h y comparo con el de abajo. Luego de hacer algunas pruebas, dejando la función de esa forma logre un resultado que me pareció más convincente.

Al integrar usando el método se Sobre-Relajación con w=1.3 obtuve el siguiente mapa de potencial electrostático:



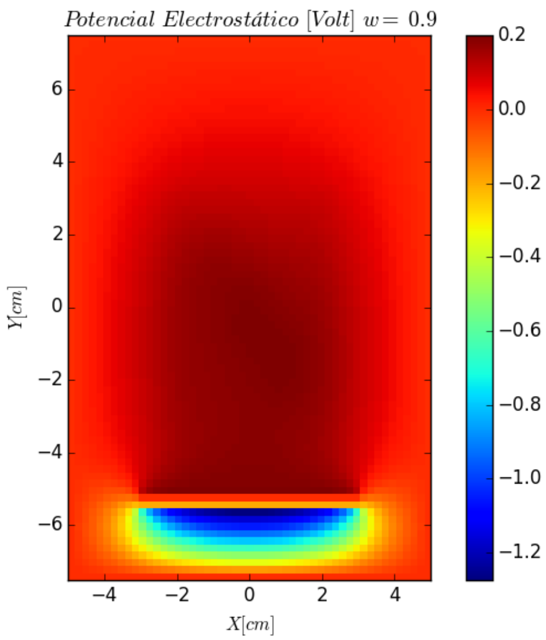
Se logra ver la diferencia de potencial asociada a la línea. Por debajo de esta el potencial es negativo y positivo por encima, donde, se puede apreciar un poco la N, causada por la perturbación en el potencial debido a la carga que ésta trae.

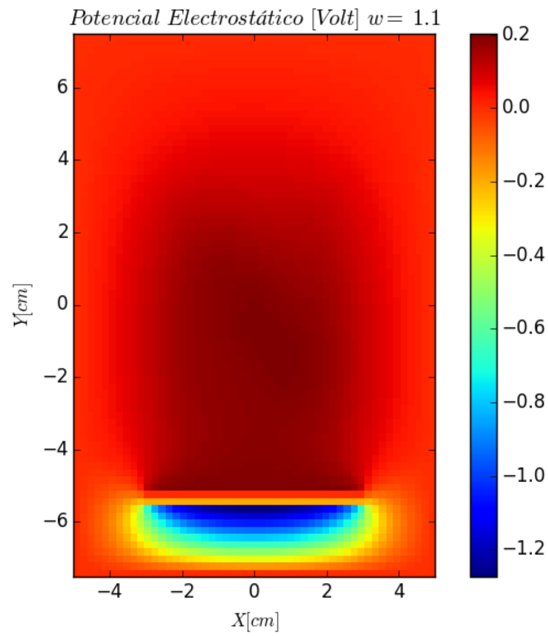
Con el método se Sobre-Relajación se comienzan a ajustar los valores de cada cuadro dependiendo de los valores de los cuadros adyacentes. En un principio casi todo es cero, pero debido a los potenciales de la letra y especialmente debido al potencial provocado por la línea, empieza a impregnarse el resto de la caja con potencial.

La siguiente tarea es probar una forma para ver a las cuantas iteraciones del método la solución converge, para distintos w.

Para esto definí una función que compara el valor actual del potencial con el de la iteración pasada, quitando los ceros, restando y finalmente obteniendo una diferencia máxima de entre todos los puntos, el que se compara con un nivel de tolerancia dado, al que deje con valor 0.001. Una vez calculada la diferencia, si su valor deja de ser relevante para seguir la integración, entonces las iteraciones al método se detienen. La función entregará 'False' cuando la diferencia es pequeña y el 'while' asociado dejará de funcionar, además de entregar el último valor con el que integró.

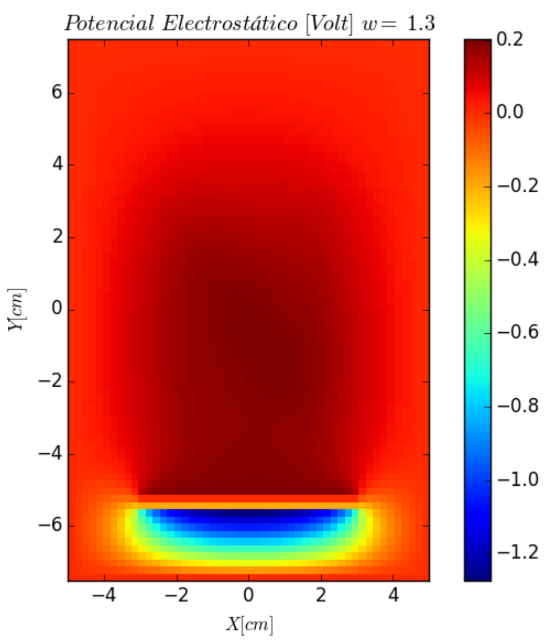
Así para distintos w obtuve estos gráficos:

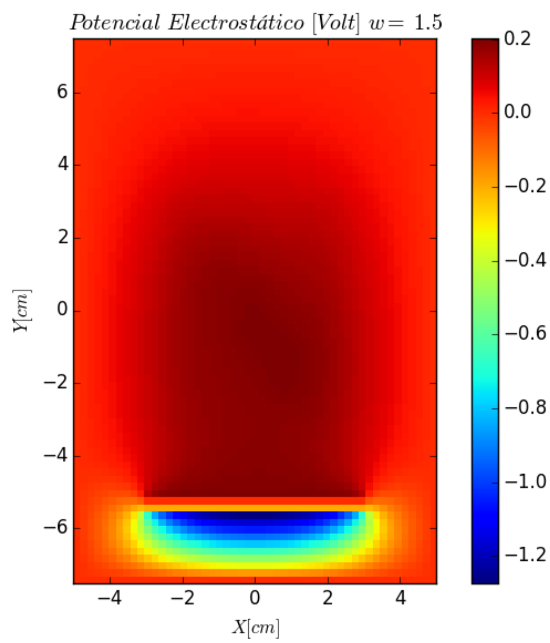




Para w=0.9 converge con 1769 iteraciones.

Para w=1.1 converge con 1338 iteraciones.

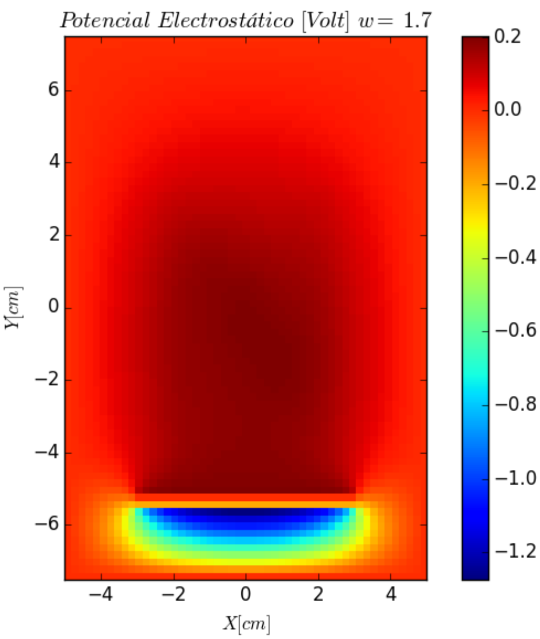




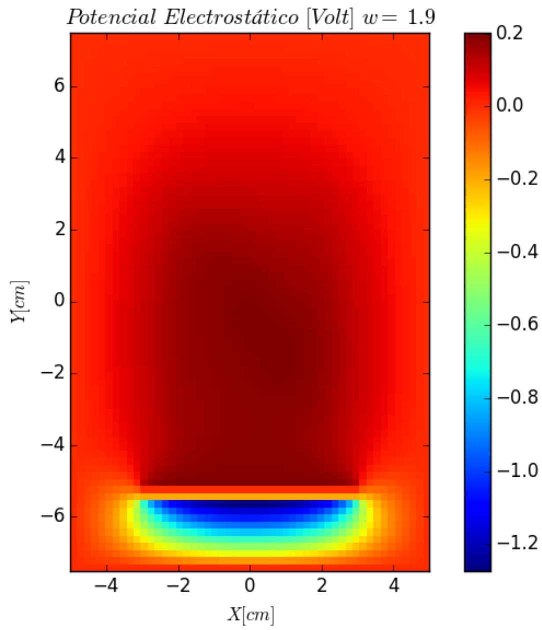
-

Para w=1.3 converge con 975 iteraciones.

Para w=1.5 converge con 666 iteraciones.



Para w=1.7 converge con 395 iteraciones.

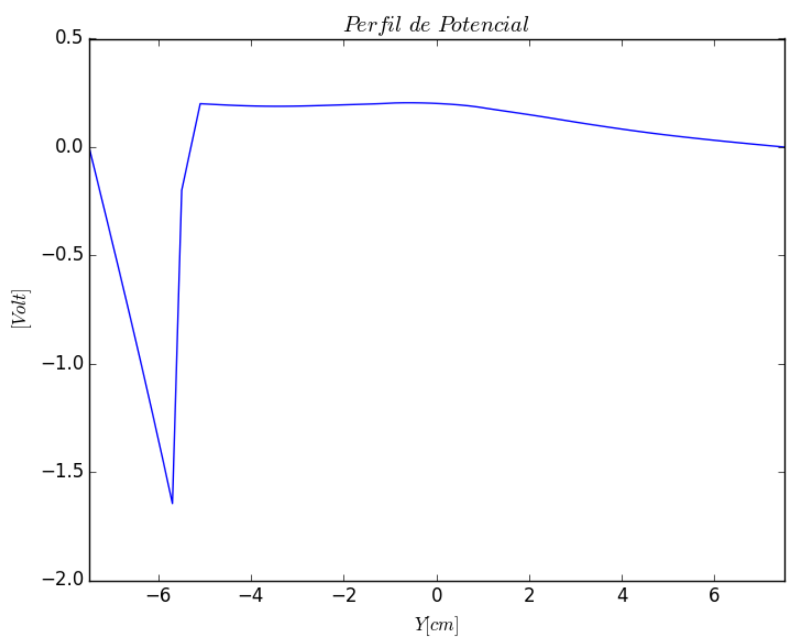


Para w=1.9 converge con 122 iteraciones.

Se puede ver gracias a todos estos gráficos que con mayor w el método converge más rápido en este caso, notándose ninguna diferencia entre todos.

Finalmente opté por graficar el potencial a lo largo del eje Y, para mostrar el perfil de potencial.

Para eso tome el vector centrar del potencial de la caja con X constante (X = 0) y grafico a lo largo de Y los distintos valores, obteniendo:



Donde se puede ver que el punto -5.5 es casi una indeterminación porque el potencial debe ser discontinuo ahí. El potencial en los rangos cercanos alcanza niveles muy bajos por debajo de la línea y altos por encima. Es interesante ver que se carga más hacia lo negativo por abajo que hacia lo positivo por arriba. Esto puede ser por el efecto del potencial propio de la letra N o porque hay más área de la caja sin carga por el lado positivo, por lo que se reparte más.
O bien podría ser una imperfección en el método aplicado.

Pero en resumen se ve que sigue más o menos bien el enunciado ya que se aprecian los efectos de la carga de la letra y de la línea, y que además funciona el método para este tipo de sistemas tales como la ecuación de Poisson para el potencial.

Adicionalmente se pide que los códigos pasen las reglas de PEP8. Para eso ingresé el código a la página facilitada por el Profesor en u-cursos.
Luego de varias pequeñas modificaciones el código pasó la prueba, y posterior a esto agregue los comentarios para explicar los códigos.