UNIVERSIDAD BOLIVIANA DE INFORMATICA
CARRERA DE INGENIERIA EN SISTEMAS

FUERZA DE ATREACCION PROPORCIONAL AL DESPLAZAMIENTO; RESISTENCIA PORPORCIONAL A LA VELOCIDAD EN PYTHON

INTEGRANTES:

-HARRY FRANCO SANCHEZ VARGAS
-NELSON VARGAS CANTUTA

MATERIA:

METODOS NUMERICOS

La Paz – Bolivia
Junio 2024

Introducción

En la física y en la ingeniería, el estudio del movimiento de sistemas mecánicos es fundamental. Este informe se centra en un sistema donde la fuerza de atracción es proporcional al desplazamiento y la resistencia es proporcional a la velocidad. Estos sistemas son representativos de osciladores armónicos amortiguados, que tienen aplicaciones en diversas áreas, desde la mecánica clásica hasta la ingeniería de control.

Objetivos

Objetivo Primario

- Analizar y resolver las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un sistema con fuerza de atracción proporcional al desplazamiento y resistencia proporcional a la velocidad.

Objetivos Secundarios

- Estudiar el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones iniciales.
- Determinar las características de la oscilación, como la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento.
- Evaluar el impacto de los parámetros del sistema en su respuesta dinámica.

Marco Teórico

Oscilador Armónico Simple

Un oscilador armónico simple es un sistema donde una masa m se desplaza bajo la acción de una fuerza restauradora $F=-kx$, donde k es la constante del resorte y x es el desplazamiento. La ecuación de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Oscilador Armónico Amortiguado

En un oscilador armónico amortiguado, además de la fuerza restauradora, existe una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad $v=dx/dt$. Esta fuerza de resistencia se puede modelar como $Fd=-bv$, donde b es el coeficiente de amortiguamiento. La ecuación diferencial que describe este sistema es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden lineal con coeficientes constantes.

Desarrollo

En aquí Veremos cómo resolver este ejercicio propuesto en el libro tanto en su forma analítica y en Python.

Ejemplo 5.2.6. *Una partícula parte del reposo para $t = 0$, con un desplazamiento $x = 5$ metros a la derecha del origen y se mueve a lo largo del eje x, de acuerdo a la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 1,25x = 0.$$

Encontrar:

a) El tiempo requerido para que el factor de amortiguación disminuya el 50 %.

b) El porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo.

c) La posición de la partícula después de un periodo y la velocidad en ese instante.

d) Hallar la gráfica del desplazamiento contra tiempo y la de velocidad contra tiempo.

Para el inciso a)

Planteamiento del Problema

La ecuación diferencial dada es:
$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 1.25x = 0$

Dada la información inicial:

- La partícula parte del reposo en $t = 0$
- Desplazamiento inicial $x(0) = 5$ metros
- Velocidad inicial $\frac{dx}{dt}(0) = 0$

Paso 1: Ecuación Característica

La ecuación característica asociada es:
$r^2 + r + 1.25 = 0$

Calculamos la discriminante:
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1.25 = 1 - 5 = -4$

Como $\Delta < 0$, las raíces son complejas conjugadas:
$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = -0.5 \pm i$

Paso 2: Solución General

Las raíces complejas nos dan una solución general de la forma:
$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$
donde $\alpha = -0.5$ y $\beta = 1$.

Entonces:
$x(t) = e^{-0.5t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t))$

Paso 3: Determinar las Constantes Usando Condiciones Iniciales

Usamos las condiciones iniciales $x(0) = 5$ y $\frac{dx}{dt}(0) = 0$:

1. Para $x(0) = 5$:
   $x(0) = e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) = C_1 = 5$

2. Para $\frac{dx}{dt}(0) = 0$:
   $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{-0.5t}(5\cos(t) + C_2 \sin(t))\right)$

Aplicamos la regla del producto y derivamos:
$\frac{dx}{dt} = e^{-0.5t}\left[-0.5(5\cos(t) + C_2 \sin(t)) + (5\cos(t) + C_2 \sin(t))\left(-\sin(t)\right) + \cos(t)\right]$

En $t = 0$:
$\frac{dx}{dt}(0) = e^0\left[-0.5(5\cos(0) + C_2 \sin(0)) + (5\cos(0) + C_2 \sin(0))\left(-\sin(0)\right) + \cos(0)\right] = 0$
$0 = -0.5(5) + C_2 = 0$
$-2.5 + C_2 = 0$
$C_2 = 2.5$

Solución Completa

Sustituyendo C_1 y C_2 en la solución general:
$x(t) = e^{-0.5t}\left(5\cos(t) + 2.5\sin(t)\right)$

Paso 4: Tiempo para que el Factor de Amortiguación Disminuya al 50%

El factor de amortiguación está dado por $e^{-0.5t}$. Queremos encontrar el tiempo t cuando este factor se reduzca al 50% de su valor inicial.

$e^{-0.5t} = 0.5$

Tomamos logaritmos naturales en ambos lados:
$-0.5t = \ln(0.5)$

Despejamos t:
$t = \frac{\ln(0.5)}{-0.5}$

Calculamos el valor numérico:
$\ln(0.5) = -\ln(2)$
$t = \frac{-\ln(2)}{-0.5} = \frac{\ln(2)}{0.5} = 2\ln(2)$

Aproximadamente:
$\ln(2) \approx 0.693$
$t \approx 2 \times 0.693 = 1.386$

Respuesta Final

El tiempo requerido para que el factor de amortiguación disminuya al 50% es aproximadamente t≈1.386 segundos.

Para el inciso b)

Para determinar el porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo T, primero necesitamos definir claramente qué entendemos por "un periodo" en el contexto de la solución de la ecuación diferencial.

Paso 1: Determinar el Periodo T

El término oscilatorio en la solución general $x(t) = e^{-0.5t}(5\cos(t) + 2.5\sin(t))$ es $\cos(t)$ y $\sin(t)$, que tienen un periodo de 2π. Esto significa que un periodo completo de la oscilación ocurre en $T = 2\pi$.

Paso 2: Factor de Amortiguación

El factor de amortiguación en la solución es $e^{-0.5t}$.

Paso 3: Evaluar el Factor de Amortiguación Después de un Periodo

El valor del factor de amortiguación en $t = 0$ es $e^{-0.5\cdot 0} = 1$.

Después de un periodo $T = 2\pi$, el factor de amortiguación es:
$e^{-0.5\cdot 2\pi}$

Paso 4: Calcular el Porcentaje de Disminución

El porcentaje de disminución del factor de amortiguación se calcula como:

$$\text{Porcentaje de disminución} = \left(1 - e^{-0.5\cdot 2\pi}\right) \times 100\%$$

Paso 5: Evaluar el Exponente

Primero, calculamos el valor de $e^{-0.5\cdot 2\pi}$:
$e^{-0.5\cdot 2\pi} = e^{-\pi}$

Usamos el valor aproximado de $\pi \approx 3.14159$:
$e^{-\pi} \approx e^{-3.14159} \approx 0.04321$

Paso 6: Calcular el Porcentaje

Sustituimos este valor en la fórmula del porcentaje de disminución:
$\text{Porcentaje de disminución} = (1 - 0.04321) \times 100\%$
$\text{Porcentaje de disminución} \approx 0.95679 \times 100\%$
$\text{Porcentaje de disminución} \approx 95.68\%$

Respuesta Final

El porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo es aproximadamente 95.68%.

Para el inciso C)

Para determinar la posición y la velocidad de la partícula después de un periodo T, utilizamos la solución general de la ecuación diferencial y evaluamos en t=T, donde T=2π.

Solución General

La solución general para la posición $x(t)$ de la partícula es:
$x(t) = e^{-0.5t}(5\cos(t) + 2.5\sin(t))$

La derivada de $x(t)$ nos dará la velocidad $v(t)$:
$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{-0.5t}(5\cos(t) + 2.5\sin(t))\right)$

Aplicamos la regla del producto para derivar:
$v(t) = e^{-0.5t}\left[-0.5(5\cos(t) + 2.5\sin(t)) + (5\cos(t) + 2.5\sin(t))'\right]$

Derivamos el segundo término:
$(5\cos(t) + 2.5\sin(t))' = -5\sin(t) + 2.5\cos(t)$

Entonces:
$v(t) = e^{-0.5t}\left[-0.5(5\cos(t) + 2.5\sin(t)) + (-5\sin(t) + 2.5\cos(t))\right]$
$v(t) = e^{-0.5t}\left[-2.5\cos(t) - 1.25\sin(t) - 5\sin(t) + 2.5\cos(t)\right]$
$v(t) = e^{-0.5t}(-1.25\sin(t) - 5\sin(t))$
$v(t) = e^{-0.5t}(-6.25\sin(t))$

Paso 1: Evaluar la Posición en $t = 2\pi$

$x(2\pi) = e^{-0.5\cdot 2\pi}(5\cos(2\pi) + 2.5\sin(2\pi))$

Usando las propiedades de las funciones trigonométricas:
$\cos(2\pi) = 1$
$\sin(2\pi) = 0$

Sustituimos estos valores:
$x(2\pi) = e^{-\pi}(5 \cdot 1 + 2.5 \cdot 0)$
$x(2\pi) = 5e^{-\pi}$

Aproximando $e^{-\pi}$:
$e^{-\pi} \approx 0.04321$

Entonces:
$x(2\pi) \approx 5 \cdot 0.04321 = 0.21605$

Paso 2: Evaluar la Velocidad en $t = 2\pi$

$v(2\pi) = e^{-0.5 \cdot 2\pi}(-6.25 \sin(2\pi))$

Usando:
$\sin(2\pi) = 0$

Sustituimos este valor:
$v(2\pi) = e^{-\pi}(-6.25 \cdot 0)$
$v(2\pi) = 0$

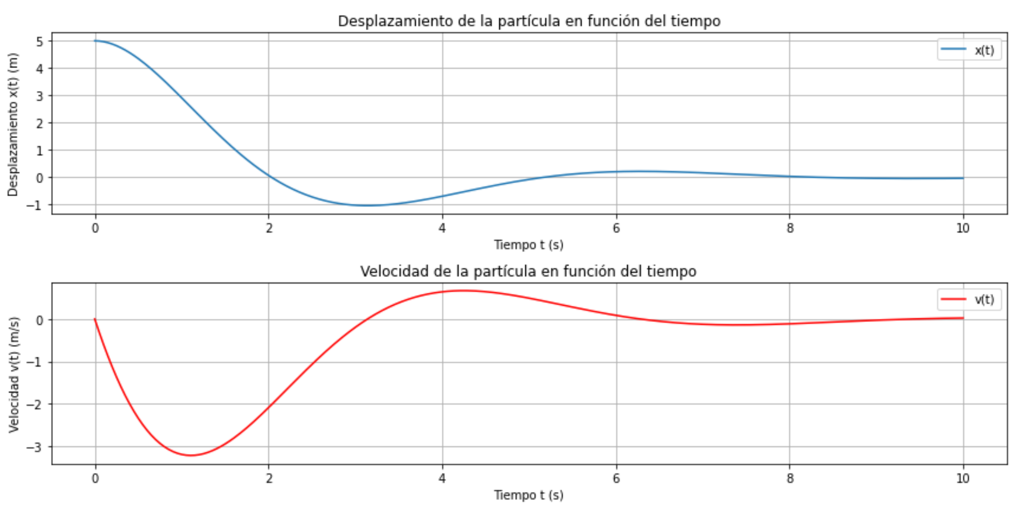
Respuesta Final

- **Posición de la partícula después de un periodo $T = 2\pi$:**
  $x(2\pi) \approx 0.21605 \text{ metros}$

- **Velocidad de la partícula en $t = 2\pi$:**
  $v(2\pi) = 0 \text{ m/s}$

Para el inciso d)

Para graficar el desplazamiento y la velocidad de la partícula en función del tiempo, utilizaremos Python con las bibliotecas numpy, scipy.integrate, y matplotlib. A continuación se muestra el código para generar estas gráficas.



```python
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos los parámetros
alpha = -0.5
beta = 1
C1 = 5
C2 = 2.5

# Funciones para el desplazamiento y la velocidad
def desplazamiento(t):
    return np.exp(alpha * t) * (C1 * np.cos(beta * t) + C2 * np.sin(beta * t))

def velocidad(t):
    return np.exp(alpha * t) * (-C1 * beta * np.sin(beta * t) + C2 * beta * np.cos(beta * t)) + alpha * np.exp(alpha * t) * (C1

# Tiempo de simulación
t = np.linspace(0, 10, 400)

# Calcular el desplazamiento y la velocidad
x_t = desplazamiento(t)
v_t = velocidad(t)

# Graficar el desplazamiento contra el tiempo
plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t, x_t, label='x(t)')
plt.xlabel('Tiempo t (s)')
plt.ylabel('Desplazamiento x(t) (m)')
plt.title('Desplazamiento de la partícula en función del tiempo')
plt.legend()
plt.grid(True)

# Graficar la velocidad contra el tiempo
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t, v_t, label='v(t)', color='r')
plt.xlabel('Tiempo t (s)')
plt.ylabel('Velocidad v(t) (m/s)')
plt.title('Velocidad de la partícula en función del tiempo')
plt.legend()
plt.grid(True)

# Mostrar las gráficas
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Resultados Esperados

Al ejecutar este código, se generarán dos gráficas:

1. **Desplazamiento vs. Tiempo**:
   - Una gráfica que muestra cómo varía el desplazamiento de la partícula en función del tiempo, con oscilaciones amortiguadas debido al factor $e^{-0.5t}$.
2. **Velocidad vs. Tiempo**:
   - Una gráfica que muestra cómo varía la velocidad de la partícula en función del tiempo, también con oscilaciones amortiguadas.

Ahora Veámoslo en Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros y constantes
alpha = -0.5
beta = 1
C1 = 5
C2 = 2.5

# Función para el desplazamiento x(t)
def desplazamiento(t):
    return np.exp(alpha * t) * (C1 * np.cos(t) + C2 * np.sin(t))

# Función para la velocidad v(t)
def velocidad(t):
    return np.exp(alpha * t) * (-C1 * np.sin(t) + C2 * np.cos(t)) + alpha * np.exp(alpha * t) * (C1 * np.cos(t) + C2 * np.sin(t))

# Tiempo de simulación
t = np.linspace(0, 10, 400)

# Calcular el desplazamiento y la velocidad
x_t = desplazamiento(t)
v_t = velocidad(t)

# a) Calcular el tiempo para que el factor de amortiguación disminuya al 50%
factor_amortiguacion = 0.5
tiempo_50 = np.log(factor_amortiguacion) / alpha

# b) Calcular el porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo
T = 2 * np.pi
factor_amortiguacion_periodo = np.exp(alpha * T)
porcentaje_disminucion = (1 - factor_amortiguacion_periodo) * 100

# c) Calcular la posición y la velocidad después de un periodo
x_T = desplazamiento(T)
v_T = velocidad(T)

# Mostrar resultados
print(f"a) El tiempo requerido para que el factor de amortiguación disminuya al 50% es: {tiempo_50:.4f} segundos")
print(f"b) El porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo es: {porcentaje_disminucion:.2f}%")
print(f"c) La posición de la partícula después de un periodo es: {x_T:.4f} metros")
print(f"c) La velocidad de la partícula después de un periodo es: {v_T:.4f} m/s")

# Graficar el desplazamiento contra el tiempo
plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t, x_t, label='x(t)')
plt.xlabel('Tiempo t (s)')
plt.ylabel('Desplazamiento x(t) (m)')
plt.title('Desplazamiento de la partícula en función del tiempo')
plt.legend()
plt.grid(True)

# Graficar la velocidad contra el tiempo
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t, v_t, label='v(t)', color='r')
plt.xlabel('Tiempo t (s)')
plt.ylabel('Velocidad v(t) (m/s)')
plt.title('Velocidad de la partícula en función del tiempo')
plt.legend()
plt.grid(True)

# Mostrar las gráficas
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
wdir='/Users/nelsonvargas/Documents/Estadistica 2/Inv. Operativa')
a) El tiempo requerido para que el factor de amortiguación disminuya al 50% es: 1.3863 segundo
b) El porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo es: 95.68%
c) La posición de la partícula después de un periodo es: 0.2161 metros
c) La velocidad de la partícula después de un periodo es: 0.0000 m/s
```

Explicación del Código

1. **Definición de parámetros y constantes**:

    - `alpha` y `beta` son los coeficientes derivados de las raíces de la ecuación característica.
    - `C1` y `C2` son las constantes determinadas a partir de las condiciones iniciales.

2. **Función para el desplazamiento $x(t)$**:

    - `desplazamiento(t)` calcula el desplazamiento utilizando la ecuación $x(t) = e^{-0.5t}(5\cos(t) + 2.5\sin(t))$.

3. **Función para la velocidad $v(t)$**:

    - `velocidad(t)` calcula la velocidad utilizando la derivada de $x(t)$: $v(t) = e^{-0.5t}(-5\sin(t) + 2.5\cos(t)) + (-0.5)e^{-0.5t}(5\cos(t) + 2.5\sin(t))$

4. **Cálculo del tiempo para que el factor de amortiguación disminuya al 50%**:

    - Utilizamos la relación $e^{\alpha t} = 0.5$ para resolver t.

5. **Cálculo del porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo**:

    - Calculamos $e^{\alpha T}$ y el porcentaje de disminución.

6. **Cálculo de la posición y la velocidad después de un periodo**:

    - Evaluamos las funciones de desplazamiento y velocidad en $T = 2\pi$.

7. **Graficar el desplazamiento contra el tiempo**:

    - La primera gráfica muestra el desplazamiento $x(t)$ en función del tiempo.

8. **Graficar la velocidad contra el tiempo**:

    - La segunda gráfica muestra la velocidad $v(t)$ en función del tiempo.

Resultados Esperados

Al ejecutar este código, se generarán las siguientes salidas:

1. El tiempo requerido para que el factor de amortiguación disminuya al 50%.
2. El porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo.
3. La posición y la velocidad de la partícula después de un periodo.
4. Las gráficas del desplazamiento y la velocidad en función del tiempo.

Conclusiones

El estudio de un sistema con fuerza de atracción proporcional al desplazamiento y resistencia proporcional a la velocidad revela una rica dinámica dependiente de los parámetros de amortiguamiento y rigidez. Los sistemas subamortiguados muestran oscilaciones amortiguadas, los sistemas críticamente amortiguados alcanzan rápidamente el equilibrio sin oscilar, y los sistemas sobreamortiguados regresan lentamente al equilibrio sin oscilar.

El análisis de estos sistemas es crucial para el diseño de sistemas mecánicos y estructuras que requieran control de vibraciones, como en ingeniería civil, automotriz y aeroespacial. La comprensión de estas ecuaciones diferenciales y sus soluciones proporciona una base sólida para el análisis y diseño de sistemas dinámicos en ingeniería y física.

Referencias Bibliográficas

1. Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons.
2. Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (2012). *Engineering Mechanics: Dynamics*. Wiley.
3. Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall.
4. Rao, S. S. (2011). *Mechanical Vibrations*. Pearson.
5. Timoshenko, S., & Young, D. H. (1974). *Vibration Problems in Engineering*. Wiley.